

Part چهارم
انتگرال چندگانه

ریاضی عمومی ۲ - جلسه ۱۱
فصل ۱۶ بخش‌های ۱ و ۲ و ۳ کتاب
مدرسان: محمدامین معرفی و آرین هدایت

مجوز استفاده از این جزوه

تمامی حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به اساتید فوق‌الذکر می‌باشد و بازتولید آن شرعاً حرام و قانوناً جرم است، اما تکثیر آن با شرایط زیر مجاز است:
- در صورت پرینت، چاپ، کپی، تکثیر و عکس برداری این جزوه، این صفحه نیز باید در ابتدای مطالب باشد و چاپ شود و هیچ‌گاه جدا نگردد.
- مطالعه برای دانشجویان اساتید فوق مجاز است.

- مطالعه برای سایر دانشجویان در صورت ذکر صلوات برای سلامتی و فرج آقا امام زمان (عج) و نیز ارسال نام و نام خانوادگی، نام این درس (ریاضی ۲)، نام دانشگاه، نام شهر، نام رشته و مقطع تحصیلی به آدرس جیمیل st.moarrefi@gmail.com، مجاز و رایگان است.

- برای اساتید، هرگونه استفاده یا کپی برداری از مطالب یا شکل‌ها، نیاز به کسب اجازه از طریق جیمیل st.moarrefi@gmail.com دارد و در غیر این صورت شرعاً حرام و قانوناً جرم است. اما مطالعه کامل یک جلسه یا مطالعه سرسری کلیات آن بلامانع است.

یادآوری: در نماد انتگرال تابع f یعنی $\int f(x)dx$ ، f نماد انتگرال، $f(x)$ تابع انتگرالده (تابعی که می‌بایست مساحت زیر منحنی آن را محاسبه کنیم) و dx نشانگر المان یا متغیر انتگرال‌گیری (مربوط به محور x ها) است.
در فرمول‌های زیر توجه کنید که c و n اعداد ثابت حقیقی و a عدد حقیقی و مثبت می‌باشند.

الف. $\int c dx = cx;$	ح. $\int \cos(x) dx = \sin x;$
ب. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, (n \neq -1);$	ط. $\int \sin(x) dx = -\cos x;$
ج. $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x ;$	ی. $\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \sec^2(x) dx = \tan x;$
د. $\int \frac{u'}{u} dx = \ln u = \ln \text{مخرج} ;$	ک. $\int (1 + \cot^2 x) dx = \int \csc^2(x) dx = -\cot x;$
ه. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x};$	ل. $\int \sec(x) \tan(x) dx = \sec x;$
و. $\int e^x dx = e^x;$	م. $\int \csc(x) \cot(x) dx = -\csc x;$
ز. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a};$	ن. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x;$
	ص. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x;$

i. بسیاری از ضرب‌ها و تقسیم‌ها را می‌توان قبل از انتگرال‌گیری ساده نمود و از آنها طبق جدول انتگرال گرفت.

ii. $\int f(x) dx = F(x) \Rightarrow \int f(mx+b) dx = \frac{F(mx+b)}{m};$ (قانون ترکیب با خط)

iii. $\int f(x) dx = F(x) \Rightarrow \int f(u)u' dx = F(u);$ (تغییر متغیر (جانشانی))

iv. $\int u dv = uv - \int v du;$ (جزء به جزء)

v. جانشانی مثلثاتی نیز از روش‌های پر کاربرد در ریاضی ۲ می‌باشد که برای فرم‌های زیر کاربرد دارد:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x := a \sin t; \quad \sqrt{x^2 + a^2} \rightarrow x := a \tan t; \quad \sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x := a \sec t.$$

مثال‌های انتگرال‌گیری. حاصل انتگرال‌های زیر را محاسبه نمایید.

$$\int x^2(x+1)dx \stackrel{\text{ii}}{=} \int (x^3 + x^2)dx \\ = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}; \quad (\text{ب})$$

$$\int \cos(3x)dx \stackrel{\text{ii}}{=} \frac{\sin(3x)}{3}; \quad (\text{ح})$$

$$\int \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}dx \stackrel{\text{ii}}{=} e^{\frac{x}{3}}; \quad (\text{و})$$

$$\int e^{\frac{x}{3}}dx \stackrel{\text{ii}}{=} \frac{e^{\frac{x}{3}}}{\frac{1}{3}}; \quad (\text{و})$$

$$\int (4x+3)^4 dx \stackrel{\text{ii}}{=} \frac{(4x+3)^5}{5 \times 4}; \quad (\text{ب})$$

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx \stackrel{\text{iii},*}{=} \int -uudu = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3}$$

* : $u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow u^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2udu = -2xdx \Rightarrow xdx = -udu$

$$\int xe^x dx \stackrel{\text{iv},*}{=} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

* : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad * : x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$$

$$\stackrel{\text{v},*}{=} \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)_{x=\sin t}$$

$$= \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$$

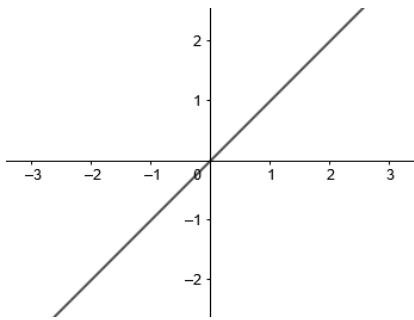
$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} 42x^2y + 21 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{42x^2y^2}{2} + 21y \right)_{y=0}^{y=x^2} dx \quad (\text{محاسبه انتگرال داخل پرانتز})$$

$$= \int_0^1 (21x^4 + 21x^2 - 0) dx$$

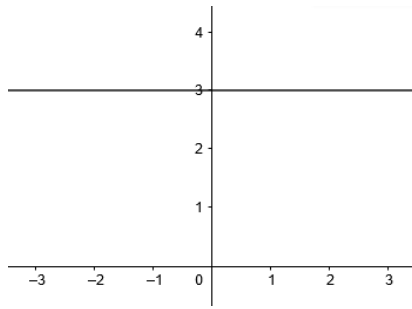
$$= \left(\frac{21x^5}{5} + \frac{21x^3}{3} \right)_0^1 = 3 + 7 = 10.$$

□

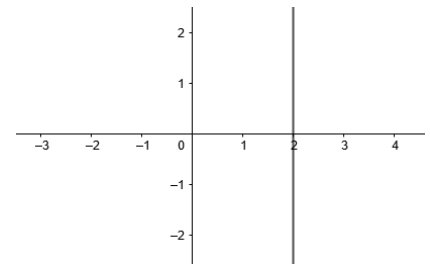
فهرستی از شکل‌های دو بعدی پر کاربرد:



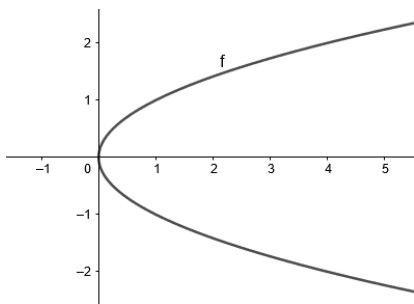
(ج) خط $y = x$



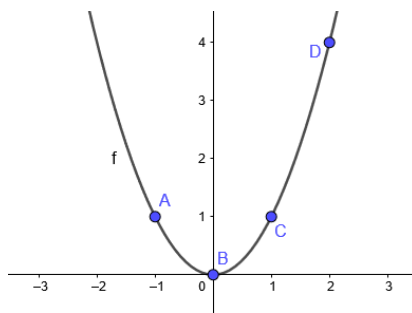
(ب) خط $y = 3$



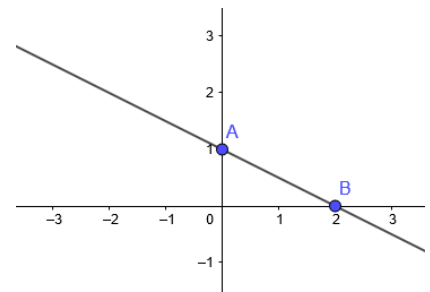
(آ) خط $x = 2$



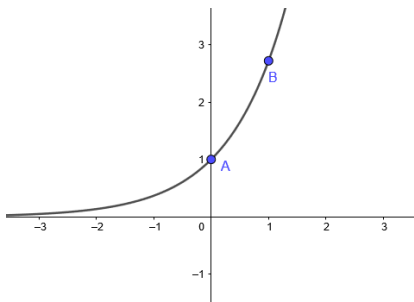
(و) سهمی $x = y^2$



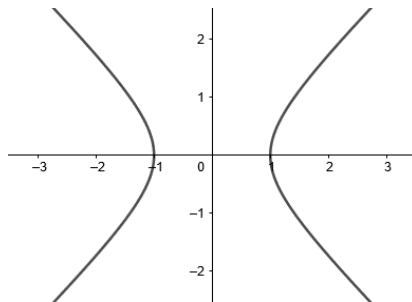
(ه) سهمی $y = x^2$



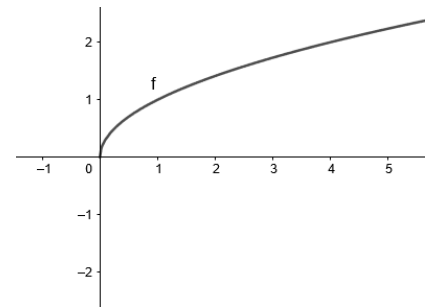
(د) خط $x + 2y = 2$



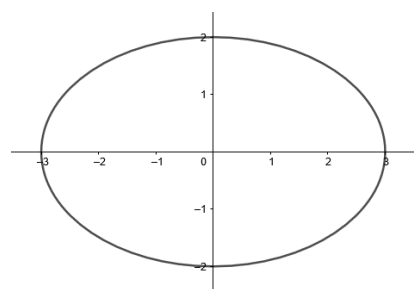
(ط) تابع نمایی $y = e^x$



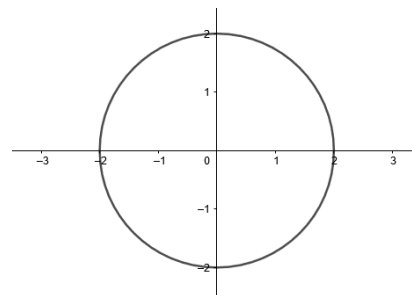
(ح) هذلولی $x^2 - y^2 = 1$



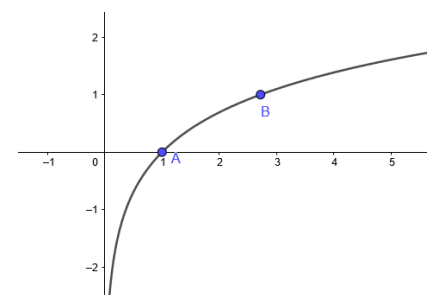
(ز) تابع رادیکال $y = \sqrt{x}$



(یب) بیضی $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$



(یا) دایره $x^2 + y^2 = 4$



(ی) تابع لگاریتم طبیعی $y = \ln x$