مسأله های مرحله ی دوم دهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان کشور

بهمن ماه ۱۳۷۱

۱. در مثلث قائم الزاویه ی ABC ($\angle A = 90^\circ$) نیمساز های درونی زاویه های B و C یکدیگر را در نقطـه ی I و ضلع های روبرو را به ترتیب در D و E قطع می کنند. ثابـت کنیـد مـساحت چهارضـلعی BCDE دو برابـر مساحت مثلث BIC است.

۲. دنباله ی

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}1 + a_{n-1}^{2} \quad (n \geq 1)$$

به طوری که $a_0=1$ و $a_1=2$، داده شده است. ثابت کنید که

$$52 < a_{1371} < 65$$

۳. در طرفین رود خانه ای چند شهر وجود دارد. چند خط قایقرانی بین این شهر ها دایر است. هر خـط قـایقرانی دقیقا بین یک شهر از یک سمت رودخانه به یک شهر در سمت دیگر دایر است. از هر شهر دقیقا به k شـهر در طرف دیگر خط قایقرانی دایر است. اگر بین هر دو شهر بتوان به وسیله ی این قایق ها رفت و آمد کرد، آن گـاه ثابت کنید که با حذف یکی [هر یک] از این خط های قایقرانی باز هم می توان بین هر دو شهر با استفاده از این خطوط قایقرانی، رفت و آمد کرد ($k>1$).

۴. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی t، عدد $A=1^t+2^t+\dots+9^t-3(1+6^t+8^t)$ بر ۱۸ بخشپذیر است.

۵. در مثلث ABC داریم $\angle A \leq 90^\circ$ و $\angle B = 2\angle C$. اگر نیمساز درونی زاویه ی C میانه ی AM را در نقطه یD قطع کند (M وسط BC است)، ثابت کنیدکه $\angle MDC \leq 45^\circ$. با چه شرطی $\angle MDC = 45^\circ$ ؟

۶. فرض می کنیم $X \neq \varnothing$ یک مجموعه ی متناهی و $f: X \to X$ تابعی باشد که بـرای هـر x در X، $f^p(x)=x$، که در آن p عددی است اول و ثابت و

$$f^p(x) = \underbrace{fofofo\cdots of}_{p\ \text{مرتبه}}(x)$$

اگر $Y = \{x \in X \mid f(x) \neq x\}$، آن گاه ثابت کنید که تعداد عناصـر مجموعـه ی Y بـر p بخـشپذیر است.