① تابع: یک تابع از مجموعه $X$ به مجموعه $Y$ عبارت است از یک سه‌تایی $(f, X, Y)$
به طوری که $f$ یک رابطه از $X$ به $Y$ است و

الف) $\mathrm{Dom}(f) = X$

ب) $\forall x, y, z\,[((x,y)\in f \,,\, (x,z)\in f) \Rightarrow y = z]$

$X$ را دامنه (حوزه) این تابع و $Y$ را برد آن گوییم. نگاره $f$ مانند مورد رابطه‌ها تعریف می‌شود. این تابع را با $f: X \to Y$ نشان می‌دهیم.

② چند نکته:

الف» اگر $f: X \to Y$ یک تابع و $W \supseteq \underbrace{\mathrm{Im}(f)}_{}$ (نگاره $f$)، آنگاه $f: X \to W$ نیز یک تابع است.

ب» دو تابع $f, g: X \to Y$ مفروضند. داریم $f = g$ اگر و تنها اگر $\forall x \in X: f(x) = g(x)$

ج» دو تابع $f: A \to C$ ، $g: B \to D$ مفروضند. فرض کنید $\forall x \in A\cap B \;\; f(x) = g(x)$ در اینصورت تابع زیر را داریم

$$h = f \cup g \;:\; A\cup B \to C \cup D$$
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \text{ اگر} \\ g(x) & x \in B \text{ اگر} \end{cases}$$

③ تعریف. فرض کنید $f: X \to Y$ ، $A \subseteq X$ ، $B \subseteq Y$.

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \;\; \exists x \in A \; f(x) = y\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

④ تذکر. ① $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

② $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$ ولی عکس این ممکن است غلط باشد.

⑤ چند نکته: الف» $f(\emptyset) = \emptyset$

ب» $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ به ازای هر $x \in X$

ج» اگر $A \subseteq B \subseteq X$ آنگاه $f(A) \subseteq f(B)$

د» اگر $C \subseteq D \subseteq Y$ آنگاه $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

حل (د): فرض کنید $x \in f^{-1}(C)$ دلخواه باشد. داریم $f(x) \in C$. پس $f(x) \in D$
پس $x \in f^{-1}(D)$. پس $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

⑥ قضیه . فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع و $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های $X$ باشد .

الف) $f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

ب) $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

ج) اگر $A, B \subseteq X$ آنگاه $f(A-B) \supseteq f(A) - f(B)$

اثبات . الف) به ازای هر $y \in Y$ داریم

$$y \in f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \quad y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma \ \exists x \in A_\gamma \quad y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma \quad y \in f(A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

ب) به ازای هر $\gamma_0 \in \Gamma$ داریم $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subseteq A_{\gamma_0}$ پس به ازای هر $\gamma_0 \in \Gamma$ ، $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \subseteq f(A_{\gamma_0})$

پس $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$

ج) فرض کنید $y$ عضو دلخواهی از $f(A) - f(B)$ باشد، پس $y \in f(A)$ و $y \notin f(B)$ . از اینکه $y \in f(A)$ نتیجه می‌شود که $x \in A$ موجود است که $y = f(x)$ و لذا از آنجا که $y \notin f(B)$ پس $x \notin B$ .

پس $x \in A - B$ پس $y \in f(A-B)$ .

۷) قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع و $\{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $Y$ باشد. در اینصورت

الف)
$$f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

ب)
$$f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

ج) اگر $B, C \subseteq Y$ داریم: $f^{-1}(B-C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$

اثبات. الف) به ازای هر $x \in X$ داریم

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$$
$$\Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma \quad f(x) \in B_\gamma$$
$$\Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma \quad x \in f^{-1}(B_\gamma)$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$$

ج) به ازای هر $x \in X$ داریم

$$x \in f^{-1}(B-C) \Leftrightarrow f(x) \in B-C$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in B \text{ , } f(x) \notin C$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \text{ , } x \notin f^{-1}(C)$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

۸) تعریف. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد.

الف) $f$ را یک به یک گوییم هرگاه $\forall x_1, x_2 \in X \ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

ب) $f$ را پوشا (پوششی) گوییم هرگاه $f(X) = Y$، یعنی $\forall y \in Y \ \exists x \in X \ f(x) = y$

ج) $f$ را یک تناظر دوسوی گوییم هرگاه هم یک به یک و هم پوشا باشد.

(۹) تذکر. اگر $f: X \to Y$ یک به یک باشد و $A \subseteq X$ داریم:

$$x \in A \iff f(x) \in f(A)$$

(۱۰) قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$ تابعی یک به یک باشد.

الف)

$$f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

ب) اگر $A, B \subseteq X$ آنگاه $f(A-B) = f(A) - f(B)$.

اثبات. الف) کافی است $\supseteq$ ثابت شود. فرض کنید $y \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$ پس به ازای هر $\gamma \in \Gamma$، $y \in f(A_\gamma)$. پس به ازای هر $\gamma \in \Gamma$، $x_\gamma \in A_\gamma$ موجود است به طوری که $y = f(x_\gamma)$.

ولی چون $f$ یک به یک است همهٔ این $x_\gamma$ ها باهم برابرند. آنرا $x$ می نامیم. داریم $x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. پس

$$y = f(x) \in f\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)$$

ب) کافی است که $f(A) - f(B) \subseteq f(A-B)$ ثابت شود. از تذکر ۹ استفاده شود.

(۱۱) قضیه. اگر $f: X \to Y$ دوسویی باشد، آنگاه $f^{-1}: Y \to X$ یک تابع دوسویی است.

(۱۲) تعریف. فرض کنید $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ دو تابع باشند.

قرار دهید

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \ (x, y) \in f, (y, z) \in g\}$$

در اینصورت داریم

$$g \circ f : X \to Z$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

(۱۳) نکته. اگر $f: X \to Y$ دوسویی باشد آنگاه $f \circ f^{-1} = I_Y$ و $f^{-1} \circ f = I_X$

(۱۴) قضیه. ترکیب توابع شرکت پذیر است.

(۱۵) قضیه. فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد.

الف) اگر تابع $g: Y \to X$ موجود باشد که $g \circ f = I_X$ آنگاه $f$ یک به یک است.

ب) اگر $h: Y \to X$ موجود باشد که $f \circ h = I_Y$ آنگاه $f$ پوشا است.

اثبات. ب) فرض کنید $y \in Y$ دلخواه باشد داریم $h(y) \in X$ و

$(f \circ h)(y) = f(h(y)) = I_Y(y) =$ پس $y \in Im(f)$. پس $f$ پوشا است.