امتحان میانترم ریاضی مهندسی–دکتر تقوی‌پور | تاریخ : ۹۸/۰۲/۱۵

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی | دانشکده مهندسی مکانیک

۱-سری فوریه تابع متناوب زیر را بدست آورید .

$$f(t) = ۱ - t^{۲} \qquad t \in [-۱,۱]$$

۲- به کمک انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ & |x| < ۱ \\ ۰ & |x| > ۱ \end{cases}$ حاصل انتگرال زیر را بدست آورید .

$$I = \int_{۰}^{\infty} \frac{sin(x^{۸})}{x} dx$$

۳-$u(x,t)$ را بدست آورده ، سپس $u\left(\frac{۱}{۲},۲\right)$ را محاسبه کنید .

$$u_{xx} = \frac{۱}{۴} u_{tt}$$

$$u(۰,t) = u(۲,t) = ۰$$

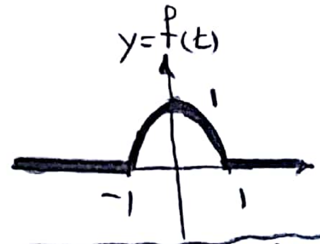
$$u(x,۰) = \sin(۵\pi x)$$

$$u_t(x,۰) = ۰$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
دانشکده مهندسی مکانیک
دکتر تقوی پور

پاسخنامه میانترم «ریاضی مهندسی»
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

1) $f(x) = 1 - t^2 \qquad t \in [-1, 1]$



تابع زوج $\rightarrow b_n = 0$

سری فوریه : $\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) + \cancel{b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right)}}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right)dt \xrightarrow[T=2]{L=1} a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= 2\int_0^1 (1-t^2)\cos(n\pi t)\,dt$$

انتگرال گیری جزء به جزء (روش سریع)

$$\begin{array}{lll} & \oplus & \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t) \\ -2t & \ominus & \frac{-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) \\ -2 & \oplus & \frac{-1}{n^3\pi^3}\sin(n\pi t) \\ 0 & & \end{array}$$

$$\rightarrow a_n = 2\left(\frac{1-t^2}{n\pi}\sin(n\pi t) - \frac{2t}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) + \frac{2}{n^3\pi^3}\sin(n\pi t)\right)\Big|_0^1 = \frac{-4(-1)^n}{n^2\pi^2} = \boxed{\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}}$$

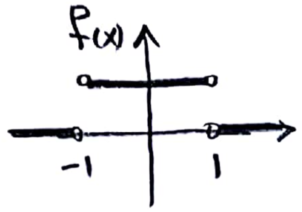
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt \xrightarrow[T=2]{L=1} a_0 = \int_{-1}^{1} (1-t^2)\,dt$$

$$= 2\int_0^1 (1-t^2)\,dt = 2\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}$$

سری فوریه $\rightarrow$ $\boxed{f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t)}$

اردیبهشت ۹۸
ابراهیم شاه ابراهیمی

۲) $f(x)=\begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$ $\qquad I=\int_0^\infty \frac{\sin(x^8)}{x}\,dx$



$\xrightarrow{\text{تابع زوج}} B(\omega)=0$

$\xrightarrow{\text{انتگرال فوریه}}$ $\boxed{f(x)=\int_0^\infty \left(A(\omega)\cos(\omega x)+\cancel{B(\omega)\sin(\omega x)}\right)d\omega}$

$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(\omega x)\,dx \overset{\text{زوج}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(\omega x)\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)\right)\Big|_0^1=\boxed{\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)}$

$\xrightarrow{\text{انتگرال فوریه}}$ $\boxed{f(x)=\int_0^\infty \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega)}{\omega}\cos(\omega x)\,d\omega}$

$\xrightarrow[\text{با توجه به خواسته سوال}]{X=0}$ $f(0)=\int_0^\infty \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega)}{\omega}\,d\omega$

$1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega}\,d\omega \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega}\,d\omega=\pi/2$

$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $\begin{cases}\omega=x^8\\ d\omega=8x^7dx\end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \int_0^\infty \frac{\sin(x^8)}{x^8}\cdot 8x^7dx=\pi/2$

$\rightarrow 8\int_0^\infty \frac{\sin(x^8)}{x}\,dx=\pi/2$

$\rightarrow 8I=\pi/2 \rightarrow \boxed{I=\frac{\pi}{16}}$

 ابراهیم شاه ابراهیمی ـ اردی بهشت ۹۸

۳) $U_{xx} = \frac{1}{4} U_{tt}$ (معادله موج)

شرایط مرزی همگن: $U(0,t) = U(2,t) = 0 \longrightarrow \boxed{L=2}$

باتوجه به شرایط مرزی داده شده می‌دانیم که فرم جواب بصورت زیر خواهد بود:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \xrightarrow{L=2} \boxed{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)} \quad (*)$$

حالا باید عبارت $G_n(t)$ رو پیدا کنیم، پس گام به گام جلو میریم:

① گرفتن مشتقات از $U(x,t)$ و جایگذاری در معادله:

$$U_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2} G_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \longrightarrow U_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{4} G_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$U_t = \sum_{n=1}^{\infty} G_n'(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \longrightarrow U_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2\pi^2}{4} G_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} G_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$\longrightarrow -\frac{n^2\pi^2}{4} G_n(t) = \frac{1}{4} G_n''(t) \longrightarrow \boxed{G_n''(t) + n^2\pi^2 G_n(t) = 0}$$ معادله مرتبه ۲ همگن

$$\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} t^2 + n^2\pi^2 = 0 \longrightarrow t^2 = -n^2\pi^2 \longrightarrow t = \pm n\pi i$$

$$\longrightarrow \boxed{G_n(t) = C_1 \sin(n\pi t) + C_2 \cos(n\pi t)}$$

② رسیدن به معادله $G_n(t)$ و حل آن

③ جایگذاری در جواب اصلی و اعمال شرط اولیه

$$\xrightarrow{(*)} \boxed{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_1 \sin(n\pi t) + C_2 \cos(n\pi t)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}$$

$$\xrightarrow[\text{اعمال شرط اولیه } (t=0)]{U(x,0) = \sin(5\pi x)} \sin(5\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \xrightarrow{\text{مقایسه با سری فوریه}}$$

④ یافتن مجهولات (C) بکمک سری فوریه

$$\boxed{C_2} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \sin(5\pi x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \overset{\text{زوج}}{=} \int_0^2 \sin(5\pi x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^2 \left(\cos\underbrace{\left(5\pi x - \frac{n\pi}{2}x\right)}_{(5-\frac{n}{2})\pi x} - \cos\underbrace{\left(5\pi x + \frac{n\pi}{2}x\right)}_{(5+\frac{n}{2})x}\right)dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(5-\frac{n}{2})\pi}\sin\left(5-\frac{n}{2}\right)\pi x - \frac{1}{(5+\frac{n}{2})\pi}\sin\left(\frac{5+n}{2}\right.\right.$$

حاصل این انتگرال در بازه ۰ و 2 میشود صفر.

اما نکته مهم ❗ بازای $n=10$ باید جداگانه محاسبه شود چرا ❓

$\xrightarrow{n=10} C_2 = \int_0^2 \sin^2(5\pi x)\,dx = \int_0^2 \frac{1-\cos 10\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{10\pi}\sin(10\pi x)\right)\Big|_0^2 = \boxed{1}$

بنابراین این عبارت در حالت $n \neq 10$ برابر صفر است.

وفقط در حالت $n=10$ برابر مقدار $\frac{1}{1}$ است. یعنی سری تبدیل به تک عبارت می‌شود

$$\xrightarrow[n=10]{(*)} U(x,t) = \left(C_1 \sin(10\pi t) + \cos(10\pi t)\right)\sin(5\pi x)$$

$$\xrightarrow[\text{اعمال شرط اولیه}]{U_t(x,0)=0} U_t = \left(10\pi C_1 \cos(10\pi t) - 10\pi \sin(10\pi t)\right)\sin(5\pi x)$$

$$0 = 10\pi C_1 \sin(5\pi x) \longrightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\xrightarrow{(*)} \boxed{U(x,t) = \cos(10\pi t)\sin(5\pi x)}$$

$$\xrightarrow[t=2]{x=1/2} U\left(\tfrac{1}{2}, 2\right) = \overset{1}{\cancel{\cos(20\pi)}}\ \overset{1}{\cancel{\sin\left(\tfrac{5\pi}{2}\right)}} = \boxed{1}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
@EShahebrahimi
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۸