فصل هشتم

دنباله‌ها

تعاریف اولیه در بحث دنباله‌ها
چند قضیه در دنباله‌ها
معیار همگرایی کوشی در بحث دنباله‌ها
چند دنباله خاص
مجموعه تست دنباله‌ها

یادداشت:

تعاریف اولیه در بحث دنباله‌ها

دنباله: یک دنباله؛ مانند، $\{a_n\}$ (که در آن a_n را جمله عمومی دنباله می‌گویند)، رشته‌ای از اعداد است که با قرار دادن مقادیر اعداد طبیعی در a_n حاصل می‌شود؛ یعنی :

$$\{a_n\} : a_1 , a_2 , a_3 , \dots$$

چند تعریف

۱ـ دنباله، $\{a_n\}$ را همگرا می‌گویند، هرگاه حد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ موجود باشد (حاصل عددی محدود و مشخص باشد) و در صورت موجود نبودن حد مذکور، دنباله $\{a_n\}$ را واگرا می‌گویند.

توجه: اگر دنباله‌ای همگرا باشد، باید حد جمله عمومی آن برای $n\to\infty$ یکتا باشد.

نکته: دنباله $\{a_n\}$ می‌تواند به دلایلی، نظیر زیر واگرا باشد.

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ باشد؛ یعنی، حد جمله عمومی در بی‌نهایت بی‌کران شود (عددی محدود نشود).

ب) حد جمله عمومی در بی‌نهایت، اگر چه محدود است، اما نامعلوم باشد (مثلاً، دارای نوسان باشد).

ج) حد جمله عمومی در بی‌نهایت برای شماره‌های زوج یا فرد متفاوت باشد.

نکته: تمام قضایای حد، قوانین هم ارزی و... که در حد توابع مطرح می‌شود در حد دنباله‌ها نیز قابل استفاده است.

۲ـ دنباله $\{a_n\}$ صعودی است، هرگاه به ازا هر nای داشته باشیم:

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \quad \text{یا} \quad a_n \le a_{n+1}$$

دنباله $\{a_n\}$نزولی است هرگاه به ازا هر nای داشته باشیم:

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \quad \text{یا} \quad a_n \ge a_{n+1}$$

نکته: برای تعیین وضعیت یکنوایی دنباله، می‌توان از مشتق استفاده کرد؛ بدین ترتیب که دنباله $\{a_n\}$:

صعودی است، هرگاه $a'_n \ge 0$ باشد.

نزولی است، هرگاه $a'_n \le 0$ باشد.

ضمناً، اگر دنباله $\{a_n\}$ دارای جملات مثبت باشد:

الف) این دنباله صعودی است، هرگاه به ازاء همه مقادیر طبیعی n داشته باشیم: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$

ب) این دنباله نزولی است، هرگاه به ازاء همه مقادیر طبیعی n داشته باشیم: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$

(اگر جملات دنباله منفی باشند، نتایج فوق در فرم برعکس، صادق خواهد بود).

۳ـ عدد m را یک کران پایین دنباله $\{a_n\}$ می‌نامند؛ هرگاه:

$$\forall n \in N \;:\; m \le a_n$$

عدد M را یک کران بالای دنباله $\{a_n\}$ می‌نامند؛ هرگاه:

$$\forall n \in N \;:\; M \ge a_n$$

دنباله $\{a_n\}$ را کراندار می‌گویند، هرگاه از بالا و پایین کراندار باشد.

چند قضیه در دنباله‌ها

۱) هر دنباله کراندار و یکنوا، همگراست.

نتیجه ۱) هر دنباله صعودی که از بالا کراندار باشد، همگراست.

نتیجه ۲) هر دنباله نزولی که از پایین کراندار باشد، همگراست.

۲) اگر دنباله $\{a_n\}$ به عدد L همگرا باشد، دنباله $\{a_{pn+q}\}$ که در آن p,q اعدادی طبیعی و دلخواه می‌باشند، نیز به عدد L همگراست.

۳) هر دنباله همگرا، کراندار است و به تعبیری اگر دنباله‌ای کراندار نباشد واگراست. دقت کنید که، هر دنباله همگرا کراندار است؛ ولی، هر دنباله کراندار ممکن است همگرا و یا واگرا باشد (مثلاً دنباله $\{\sin n\}$ کراندار اما واگراست).

۴) یک دنباله ممکن است همگرا و کراندار باشد؛ ولی، یکنوا نباشد (مانند دنباله $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$).

۵) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ به بی‌نهایت میل نکند، دنباله $\{a_n\}$ کراندار است.

۶) اگر دنباله‌های $\{b_n\}$ و $\{a_n\}$ همگرا به B و A باشند، آنگاه $\{a_n \pm b_n\}$ همگرا به $A \pm B$، $\{a_n b_n\}$ همگرا به AB و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ همگرا به $\frac{A}{B}$ (با شرط $B \ne 0$) است.

۷) اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا و دنباله $\{b_n\}$ واگرا باشد، آنگاه $\{a_n \pm b_n\}$ واگرا و $\{a_n b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ممکن است همگرا یا واگرا باشند.

۸) اگر دنباله‌های $\{b_n\}$ و $\{a_n\}$ واگرا باشند، دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ و $\{a_n b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ممکن است همگرا یا واگرا باشند.

۹) برای پیدا کردن کران‌های بالا و پایین یک دنباله؛ مانند $\{a_n\}$ (در صورت وجود) می‌توان با روالی شبیه یافتن مقادیر اکسترمم‌های یک تابع، a'_n را محاسبه نمود و پس از تعیین علامت a'_n نقاط

کاندیدا برای اکسترمم‌های a_n را مشخص کرد و با تعیین مقادیر a_n در این نقاط، کران‌های دنباله را تعیین نمود. تنها، توجه به این نکته ضروری است که به خاطر داشته باشیم n یک عدد طبیعی می‌باشد؛ لذا، مثلاً، اگر در دنباله‌ای جدول تعیین علامت a'_n به فرم زیر درآمد ($k > 1$ عددی غیر طبیعی فرض شده):

n	1	k	$+\infty$
a'_n	$-$		$+$
a_n	$\searrow$		$\nearrow$

بدیهی است مقادیر کاندیدا برای کران بالای a_n در $n = 1$, $n \to +\infty$ خواهند بود و داریم:

$$\text{کران بالا} = \text{Max}\left\{a_1\ ,\ \lim_{n\to\infty} a_n\right\}$$

و مقادیر کاندیدا برای کران پایین a_n در $n = [k]$ و $n = [k] + 1$ (اولین عدد طبیعی قبل و بعد از k) می‌باشند (زیرا خود k عددی غیر طبیعی فرض شده و ما مجاز نیستیم a_k را حساب کرده و به عنوان حداقل a_nها گزارش کنیم) و داریم:

$$\text{کران پایین} = \min\left\{a_{[k]}\ ,\ a_{[k]+1}\right\}$$

معیار همگرایی کوشی در بحث دنباله‌ها

دنباله $\{a_n\}$ را یک دنباله کوشی می‌گویند، هرگاه بتوان نشان داد:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \ni \forall m, n > N : \left|a_n - a_m\right| < \varepsilon$$

طبق معیار همگرایی کوشی، شرط لازم و کافی برای همگرایی یک دنباله آن است که آن دنباله یک دنباله کوشی باشد. معمولاً این روش برای دنباله‌هایی که جمله عمومی آن نه به صورت صریح؛ بلکه، با یک رابطه بازگشتی توصیف شده است، مناسب می‌باشد.

چند دنباله خاص

۱) دنباله حسابی

دنباله‌ای است که جمله عمومی آن در رابطه $a_{n+1} - a_n = d$ صدق می‌کند. d را که عددی ثابت می‌باشد، قدر نسبت می‌نامیم.

می‌توان نشان داد جمله عمومی این دنباله به‌صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ بیان می‌شود.

اگر $d>0$ دنباله، اکیداً صعودی، اگر $d<0$ دنباله، اکیداً نزولی و اگر $d=0$ دنباله ثابت است.

۲) دنباله هندسی

دنباله‌ای است که جمله عمومی آن در رابطه $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ صدق می‌کند. q را که عددی ثابت می‌باشد، قدر نسبت می‌نامیم.

می‌توان نشان داد جمله عمومی این دنباله به‌صورت $a_n=a_1q^{n-1}$ بیان می‌شود.

اگر $q>1$ دنباله، اکیداً صعودی، اگر $0<q<1$ دنباله، اکیداً نزولی و اگر $q<0$ دنباله نوسانی است.

اگر $|q|<1$ باشد، آنگاه دنباله، همگرا به صفر و اگر $|q|>1$ باشد، آنگاه دنباله، واگراست.

اگر $q=0$ باشد دنباله همگرا به صفر و اگر $q=-1$ دنباله واگراست.

۳) دنباله $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

این دنباله، اکیداً صعودی و کراندار بوده و از آنجا که $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ این دنباله همگرا به عدد نپر می‌باشد.

۴) دنباله $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$

این دنباله اکیداً نزولی و همگرا به صفر است؛ زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\,\frac{(n-1)}{n}\,\frac{(n-2)}{n}\cdots\frac{2}{n}\,\frac{1}{n}=0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{(n+1)n!}{n!}\,\frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n<1$$

مجموعه تست دنباله‌ها

۱ـ دنباله‌های $\left\{\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$ **و** $\left\{\left[\frac{1}{n}\right].\ln n\right\}$ **به ترتیب......... و......... هستند.**

۱) واگرا، همگرا ۲) واگرا، واگرا ۳) همگرا، واگرا ۴) همگرا، همگرا

حل :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]=\begin{cases}\left[\frac{+1}{\infty}\right]=\left[0^+\right]=0 & n=2k\\ \left[\frac{-1}{\infty}\right]=\left[0^-\right]=-1 & n=2k+1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\right].\ln n=\left[\frac{1}{\infty}\right].\ln\infty=\left[0^+\right].\infty=\text{صفر واقعی}\times\text{بی‌نهایت}=0$$

بنابراین دنباله اول واگرا و دنباله دوم همگرا می‌باشد.

۲ـ دنباله $\left\{\frac{2^{2n+1}+3^n}{4^{n-1}+3^{n+1}}\right\}$ **به کدام عدد همگراست؟**

۱) 8 ۲) 6 ۳) 4 ۴) 3

حل :

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^n}{4^{n-1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n.2+3^n}{4^n.4^{-1}+3^n.3^1}$$

وقتی $n\to\infty$ داریم $4^n>>3^n$ لذا:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n.2}{4^n.4^{-1}}=8$$

۳ـ اگر $a_n=\frac{a_{n-1}+1}{a_{n+1}-1}$, $a_n>0$ **باشد، دنباله** $\{a_n\}$ **به کدام عدد همگراست؟**

۱) 1 ۲) $1+\sqrt{2}$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

حل :

اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد، وقتی $n\to\infty$ داریم:

$$\begin{cases}\lim a_{kn+p}\sim\lim a_n\\ n\to\infty\end{cases}$$

پس، در این مساله وقتی $n\to\infty$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}+1}{a_{n+1}-1}$$

و چنانچه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ فرض شود، داریم:

$$L=\frac{L+1}{L-1} \rightarrow L^2-L=L+1 \rightarrow L^2-2L-1=0 \rightarrow L=1\pm\sqrt{2}$$

و با توجه به فرض $a_n>0$ داریم $L=1+\sqrt{2}$؛ یعنی، دنباله $\{a_n\}$ به $1+\sqrt{2}$ همگراست.

۴ـ به ازاء چند مقدار حقیقی x دنباله $\left\{\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right\}$ واگراست؟

۱) 1 ۲) 3 ۳) 0 ۴) بی‌شمار

حل:

اگر $|x|<1$ باشد، $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$؛ لذا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^{2n}+1}=\frac{0}{0+1}=0 \quad \text{همگرا}$$

اگر $|x|>1$ باشد، $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$؛ لذا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad \text{همگرا}$$

اگر $x=1$ باشد، $x^n=1$ و $x^{2n}=1$؛ لذا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^{2n}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \quad \text{همگرا}$$

اگر $x=-1$ باشد، $x^n=(-1)^n$ و $x^{2n}=1$ لذا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{1+1}=\begin{cases}\frac{1}{2} & n=2k\\ \frac{-1}{2} & n=2k+1\end{cases} \quad \text{واگرا}$$

لذا دنباله موردنظر فقط به ازاء $x=-1$ واگرا می‌شود.

۵ـ دنباله $\{\sin(2n+1)-\sin(2n-1)\}$ چند تا از خواص همگرایی، اکیداً یکنوایی، کرانداری را داراست؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

حل:

$$a_n=\sin(2n+1)-\sin(2n-1)=2\sin\frac{(2n+1)-(2n-1)}{2}\cos\frac{(2n+1)+(2n-1)}{2}$$

ملاحظه می‌شود:

نامعلوم اگرچه محدود: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2\sin 1\cos 2n$

پس دنباله مورد نظر همگرا نمی‌باشد؛ اگرچه، کراندار است؛ ضمناً، واضح است که $2\sin 1$ مثبت و $\cos 2n$ به ازاء nهای مختلف مقادیر مثبت و منفی دارد؛ لذا، جملات دنباله دارای علامت‌های مختلف بوده و دنباله طبیعت اکیداً یکنوا ندارد.

۶ـ کدام گزینه در مورد دنباله $a_n = \dfrac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}$ صحیح است؟

۱) نزولی و همگرا ۲) نزولی و واگرا ۳) صعودی و همگرا ۴) صعودی و واگرا

حل :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}}{\dfrac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}} = \frac{n+1}{2n+1}$$

بدیهی است برای هر n طبیعی $1 > \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 0$؛ لذا، دنباله مود نظر اکیداً نزولی است؛ البته، چون تمام جملات دنباله مورد نظر مثبتند (دنباله از پایین کراندار است)، از اکیداً نزولی بودن آن انتظار داریم دنباله مورد نظر همگرا نیز باشد.

۷ـ دنباله $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$

۱) اکیداً نزولی و همگراست. ۲) اکیداً نزولی و واگراست.

۳) اکیداً صعودی و واگراست. ۴) اکیداً صعودی و همگراست.

حل :

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

عبارت فوق، برای هر n طبیعی، بزرگ‌تر از صفر بوده و لذا، همواره $a_{n+1} > a_n$ و دنباله مورد نظر اکیداً صعودی است.

از طرفی داریم:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} < \overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{\text{n جمله}} = 1$$

لذا، همواره $a_n < 1$ بوده و البته چون همگی جملات دنباله مورد نظر مثبتند؛ لذا، $0 < a_n < 1$ و دنباله مورد بحث کراندار است. در نهایت به واسطه آن که هر دنباله اکیداً صعودی که از بالا کراندار است، همگرا می‌باشد، دنباله مورد نظر همگرا نیز می‌باشد؛ البته، همگرایی دنباله را می‌توان به‌طور مستقیم نیز نشان داد بدین ترتیب که:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln 2$$

پس دنباله مورد بحث همگرا به $\ln 2$ می‌باشد.

۸ ـ دنباله $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ دنباله‌ای است $(n > 2)$:

۱) صعودی
۲) نزولی
۳) نه صعودی و نه نزولی
۴) ثابت

حل :

$$a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \quad \rightarrow \quad \ln a_n = \frac{1}{n}\ln n$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$\frac{a'_n}{a_n} = -\frac{1}{n^2}\ln n + \frac{1}{n}\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad a'_n = \frac{1}{n^2}(1-\ln n)\,.\,a_n \quad \Rightarrow \quad a'_n = \frac{1}{n^2}(1-\ln n)\sqrt[n]{n}$$

بدیهی است برای $n > 2$ همواره $1-\ln n < 0$ و $\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{n} > 0$ است؛ پس، برای $n > 2$ داریم $a'_n < 0$ و لذا، دنباله مذکور نزولی است.

۹ ـ اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n + 3a_{n+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{18}$
۲) $\frac{1}{9}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{4}{3}$

حل :

بدیهی است داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

پس می‌نویسیم:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n+3a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}{\frac{a_n}{a_{n+1}}+3}=\frac{\frac{1}{3}}{3+3}=\frac{1}{18}$$

۱۰ـ کدام گزاره صحیح است؟

۱) اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد، $\{[a_n]\}$ نیز همگراست.

۲) اگر $\{a_n\}$ واگرا باشد، $\{[a_n]\}$ نیز واگراست.

۳) اگر $\{a_n\}$ واگرا باشد، $\{|a_n|\}$ نیز واگراست.

۴) هیچ‌کدام

حل:

دنباله $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ همگرا به صفر است؛ اما، دنباله $\left\{\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$ واگراست.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\right]=\left[0^+\right]=0 & \text{زوج } n\\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{-1}{n}\right]=\left[0^-\right]=-1 & \text{فرد } n\end{cases}$$

دنباله $\left\{\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{4}\right\}$ واگراست؛ اما، دنباله $\left\{\left[\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{4}\right]\right\}$ همگراست؛ زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{4}\right]=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]=\left[\frac{3}{4}\right]=0 & \text{زوج } n\\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]=\left[\frac{1}{4}\right]=0 & \text{فرد } n\end{cases}$$

دنباله $\left\{(-1)^n\right\}$ واگراست؛ اما، دنباله $\left\{\left|(-1)^n\right|\right\}$ که همان دنباله $\{1\}$ می‌باشد، همگرا به 1 است.

پس هر سه گزاره داده شده در گزینه‌های اول و دوم و سوم نادرستند و گزینه ۴ صحیح است.

۱۱ـ دنباله $\left\{\frac{8^n}{n!}\right\}$ با کدام شرط نزولی است؟

۱) $n\geq 6$ ۲) $n\geq 7$ ۳) $n\geq 8$ ۴) $n\geq 9$

حل :

برای نزولی بودن باید داشته باشیم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1 \rightarrow \frac{\frac{8^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{8^n}{n!}}\le 1 \rightarrow \frac{\frac{8^n 8}{(n+1)n!}}{\frac{8^n}{n!}}\le 1 \rightarrow \frac{8}{n+1}\le 1 \rightarrow 8\le n+1 \rightarrow n\ge 7$$

پس، باید $n\ge 7$ باشد.

۱۲ - بزرگ‌ترین جمله دنباله $\{-3n^2+28n+1\}$ کدام است؟

۱) 61 ۲) 65 ۳) 66 ۴) بزرگ‌ترین جمله ندارد.

حل :

$$a_n=-3n^2+28n+1 \rightarrow a'_n=-6n+28$$

برای پیدا کردن n مناسب داریم:

$$a'_n=0 \rightarrow -6n+28=0 \rightarrow n=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}$$

لذا، از آن‌جا که:

n	1	$\frac{14}{3}$	$+\infty$
a'_n	$+$	0	$-$
a_n	$\nearrow$		$\searrow$

و چون در بحث دنباله‌ها فقط با اعداد طبیعی کار داریم و $5>\frac{14}{3}>4$، کاندیداهای بزرگ‌ترین جمله دنباله عبارتند از:

$$\begin{aligned} a_4&=65\\ a_5&=66 \end{aligned} \rightarrow a_{max}=66$$

۱۳ - دنباله $a_n=\frac{\sqrt{n}+1}{4\sqrt{n}}+i\frac{\sqrt{n}-1}{3\sqrt{n}}$ با حد L مفروض است. حداقل مقدار n به قسمی که a_n درون دایره‌ای به مرکز L و شعاع $\frac{1}{60}$ قرار گیرد، کدام است؟

۱) 10001 ۲) 2501 ۳) 626 ۴) 145

حل :

$$L=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+1}{4\sqrt{n}}+i\frac{\sqrt{n}-1}{3\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{4}+i\frac{1}{3}$$

پس باید:

$$|a_n - L| < \frac{1}{60} \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n}+1}{4\sqrt{n}} + i\,\frac{\sqrt{n}-1}{3\sqrt{n}} - \frac{1}{4} - i\,\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}}{4\sqrt{n}} + i\,\frac{\sqrt{n}-1-\sqrt{n}}{3\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{60} \Rightarrow \left|\frac{1}{4\sqrt{n}} + i\,\frac{-1}{3\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{4\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3\sqrt{n}}\right)^2} < \frac{1}{60} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{16n} + \frac{1}{9n}} < \frac{1}{60} \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{144n}} < \frac{1}{60}$$

$$\rightarrow \frac{5}{12\sqrt{n}} < \frac{1}{60} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{25} \Rightarrow \sqrt{n} > 25 \Rightarrow n > 625$$

۱۴ـ مجموع n جمله اول یک دنباله از رابطه $S_n = \frac{2n+1}{n+2}$ به‌دست می‌آید. این دنباله:

۱) کراندار و همگراست؛ ولی، اکیداً یکنوا نمی‌باشد.

۲) همگرا و کراندار و اکیداً یکنواست.

۳) کراندار است؛ ولی، همگرا نمی‌باشد.

۴) اکیداً یکنوا و کراندار نیست؛ ولی، همگراست.

حل:

مجموع $(n-1)$ جمله − مجموع n جمله = جمله n ام

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2(n-1)+1}{(n-1)+2} = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)-(2n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{\left(2n^2+3n+1\right)-\left(2n^2+3n-2\right)}{n^2+3n+2}$$

$$= \frac{3}{n^2+3n+2} = \frac{3}{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

به سادگی ملاحظه می‌شود دنباله موردنظر همگرا به صفر، اکیداً نزولی و دارای کران بالایی؛ مانند، $a_1 = S_1 = 1$ و کران پایینی؛ مانند، $a_\infty = 0$ است.

۱۵ ـ دنباله $\left\{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\cos\frac{\pi}{n+2}\right\}$:

۱) کراندار و یکنواست.
۲) کراندار و غیریکنواست.
۳) غیرکراندار و غیریکنواست.
۴) غیرکراندار ولی یکنواست.

حل :

$\frac{\pi}{n+2}$ همواره در ربع اول است؛ لذا:

$$0<\cos\frac{\pi}{n+2}<1$$

و البته بدیهی است:

$$0<1-\frac{1}{n+2}<1$$

پس، در کل $0<\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\cos\frac{\pi}{n+2}<1$ بوده و دنباله موردنظر کراندار است.

از طرفی، بدیهی است با افزایش n کمان $\frac{\pi}{n+2}$ که در ربع اول است، کوچک و کوچک‌تر شده و $\cos\frac{\pi}{n+2}$ بزرگ و بزرگ‌تر شده و به یک نزدیک می‌گردد. همین‌طور، با افزایش n عبارت $\frac{1}{n+2}$ کوچک و کوچک‌تر شده و حاصل $1-\frac{1}{n+2}$ بزرگ شده و مداوم به یک نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؛ به تعبیری، هر دو دنباله $\cos\frac{\pi}{n+2}$ و $\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$ با افزایش n طبیعت صعودی داشته و حاصل‌ضرب آن‌ها؛ یعنی، $\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\cos\frac{\pi}{n+2}$ نیز دنباله‌ای اکیداً صعودی است.

۱۶ ـ دنباله $a_1=\sqrt{3}$ **و** $a_{n+1}=\sqrt{3a_n+4}$:

۱) کراندار و اکیداً صعودی است.
۲) بی‌کران و اکیداً صعودی است.
۳) کراندار و غیر اکیداً یکنواست.
۴) بی‌کران و غیر اکیداً یکنواست.

حل :

$$a_1=\sqrt{3}\simeq 1.7 \quad , \quad a_2=\sqrt{3\sqrt{3}+4}\simeq 3.05$$

$$a_3=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}+4}}\simeq 3.6$$

با این احساس که کران بالای دنباله 4 باشد، با استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$\forall_n\in N: a_n\le 4$$

طبیعی است این موضوع برای $n=1$ صادق است؛ زیرا:

$$a_1=\sqrt{3}\le 4$$

با فرض $a_n \le 4$ باید ثابت کنیم:

$$a_{n+1}\le 4$$

مشاهده می‌شود:

$$a_n\le 4 \;\rightarrow\; 3a_n\le 12 \;\rightarrow\; 3a_n+4\le 16 \;\rightarrow\; \sqrt{3a_n+4}\le 4 \;\Rightarrow\; a_{n+1}\le 4$$

پس حکم موردنظر ثابت است.

برای بحث یکنوایی با توجه به مثبت بودن جملات دنباله می‌نویسیم:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=\frac{3a_n+4}{a_n}=3+\frac{4}{a_n}\ge 3\rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}\ge\sqrt{3}$$

یعنی دنباله موردنظر اکیداً صعودی است.

یادداشت:

فصل نهم

سری‌های نامتناهی و بحث‌های مربوط به آن

تعریف سری
همگرایی و واگرایی در سری‌های نامتناهی
شرط لازم برای همگرایی سری‌های نامتناهی
قاعده ادغام (قاعده تلسکوپی)
معرفی چند سری نامتناهی خاص (سری همساز، سری فوق هارمونیک، سری هندسی)
آزمون‌های تعیین وضعیت همگرایی یا واگرایی سری‌های با جملات مثبت
آزمون مقایسه درجه صورت و مخرج
آزمون دالامبر
آزمون کوشی
آزمون رابه
آزمون مقایسه
آزمون مقایسه حد
آزمون انتگرال
سری‌های متناوب و آزمون لایپ نیتس
سری‌های تابع و بحث فاصله همگرایی
سری‌های‌توانی و یافتن فاصله همگرایی
سری تیلور و مک لوران یک تابع
بسط مک لوران چند تابع مهم
مجموعه تست سری‌های نامتناهی و بحث‌های مربوط به آن

یادداشت:

تعریف سری

دنباله $\{a_n\}$ را در نظر بگیرید. به مجموع جملات این دنباله یک سری گفته می شود؛ یعنی:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots$$

در این سری $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ را مجموع جزیی kام سری می‌گویند که یک سری متناهی است.

همگرایی و واگرایی در سری‌های نامتناهی

در سری $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ اگر $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجود باشد (حاصل، عددی مشخص و محدود باشد)، سری نامتناهی $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می نامند.

شرط لازم برای همگرایی سری‌های نامتناهی

اگر سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد؛ آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ و به تعبیری دیگر، شرط لازم برای آنکه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آن است که $\lim_{n\to\infty} a_n$ برابر صفر باشد.

از بیان فوق می توان نتیجه گرفت اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$؛ آنگاه سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست؛ ولی، اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ممکن است همگرا و یا واگرا باشد؛ همچنین، اگر سری نامتناهی $\sum^{\infty} a_n$ همگرا باشد، الزاماً $\lim_{n\to\infty} a_n$ صفر خواهد بود.

چند نکته

۱) حذف تعداد محدودی از جملات یک سری نوع آن را (از حیث همگرایی یا واگرایی) تغییر نمی‌دهد.

۲) ضرب جملات یک سری در عددی معین نوع آن را تغییر نمی دهد.

۳) مجموع و تفاضل دو سری همگرا، یک سری همگرا ایجاد می کند.

٤) مجموع یک سری همگرا و یک سری واگرا، یک سری واگرا ایجاد می کند.

۵) مجموع دو سری واگرا با جملات مثبت، الزاما یک سری واگراست؛ در حالی‌که، تفاضل دو سری واگرا با جملات مثبت، ممکن است همگرا و یا واگرا باشد.

قاعده ادغام (قاعده تلسکوپی)

سری $I=\sum_{n=p}^{q}(a_n-a_{n+1})$ را در نظر بگیرید. (دقت کنید جمله عمومی سری، تفاضل دو عبارت است که وقتی در جمله اول به جای n، $n+1$ را قرار می‌دهیم، جمله دوم حاصل می‌شود) می‌توان نشان داد:

$$I=a_n\Big|_{n=p}-a_{n+1}\Big|_{n=q}=a_p-a_{q+1}$$

همچنین، این موضوع برای یک سری نامتناهی به فرم $I=\sum_{n=P}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$I=a_n\Big|_{n=p}-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}$$

نکته:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}=\frac{1}{k\,.\,k!}$$

چند نکته

۱) $\sum_{n=1}^{k}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{k}a_n\pm\sum_{n=1}^{k}b_n$

۲) $\sum_{n=1}^{k}c=kc$

۳) $\sum_{n=1}^{k}a_n=\sum_{n=1+p}^{k+p}a_{n-p}$ (لغزاندن اندیس)

۴) $\sum_{n=1}^{k}2n=k(k+1)$ (مجموع اعداد طبیعی زوج)

۵) $\sum_{n=1}^{k}(2n-1)=k^2$ (مجموع اعداد طبیعی فرد)

۶) $\sum_{n=1}^{k}n=\frac{k(k+1)}{2}$ (مجموع اعداد طبیعی متوالی)

۷) $\sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)\ (2k+1)}{6}$

۸) $\sum_{n=1}^{k} n^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$

۹) $\sum_{n=1}^{k} n^4 = \frac{k(k+1)\ (6k^3+9k^2+k-1)}{30}$

معرفی چند سری نامتناهی خاص

۱ـ سری همساز (توافقی یا هارمونیک)

سری توافقی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

ثابت می شود این سری، واگراست.

۲ـ سری فوق هارمونیک

سری فوق هارمونیک به صورت زیر تعریف می شود (p عددی ثابت است):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

ثابت می شود سری فوق هارمونیک به ازا $p > 1$ همگرا و به ازا $p \le 1$ واگراست.

۳ـ سری هندسی

سری هندسی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots$$

ملاحظه می شود سری هندسی، مجموع نامتناهی از جملات یک تصاعد هندسی با جمله اول a و قدر نسبت q را توصیف می کند.

ـ ثابت می شود سری هندسی به ازای $|q| < 1$ همگراست و مقدار همگرایی آن (حد مجموع جملات تصاعد هندسی) برابر $\frac{a}{1-q}$ بوده و سری به ازای $|q| \ge 1$ واگرا می باشد.

آزمون‌های تعیین وضعیت همگرایی یا واگرایی سری‌های با جملات مثبت

در تمام بحث های زیر فرض بر آن است که تمام جملات سری اعدادی مثبت می باشند.

۱) آزمون مقایسه درجه صورت و مخرج

در سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ چنانچه $P(n)$ یک چند جمله‌ای درجه a و $Q(n)$ یک چند جمله‌ای درجه b باشد:

درجه مخرج − درجه صورت > 1

الف) چنانچه $b > a+1$ باشد، سری همگراست. ← درجه مخرج دو درجه بیشتر از صورت باشد

ب) چنانچه $b \leq a+1$ باشد، سری واگراست. ← درجه مخرج یک درجه بیشتر از صورت باشد یا کمتر باشد

درجه مخرج − درجه صورت $\ngtr 1$

۲) آزمون P

در سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ اگر بتوان Pای یافت که $\lim_{n\to\infty} n^P a_n = L$:

الف) چنانچه $P > 1$ و L عددی متناهی باشد، سری مورد نظر همگراست.

ب) چنانچه $P \leq 1$ و L مخالف صفر باشد (L می‌تواند بی‌نهایت باشد) سری مورد نظر واگراست.

۳) آزمون دالامبر

در سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با فرض $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$:

الف) چنانچه $L < 1$ سری همگراست.

ب) چنانچه $L > 1$ سری واگراست.

ج) چنانچه $L = 1$ این آزمون بی نتیجه است.

۴) آزمون کوشی

در سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با فرض $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$:

الف) چنانچه $L < 1$ سری همگراست.

ب) چنانچه $L > 1$ سری واگراست.

ج) چنانچه $L = 1$ این آزمون بی‌نتیجه است.

چند نکته

۱) اگر $a_n > 0 \; ; \; \forall n \in N$ باشد؛ همواره داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

به تعبیری آزمون‌های دالامبر و کوشی یک آزمون واحد در دو بیان متفاوتند و هرگاه یکی به نتیجه نرسد دیگری نیز به نتیجه نخواهد رسید. (به خصوص تمام سری‌هایی که با آزمون مقایسه درجه صورت و مخرج قابل بررسی هستند، وضعیتشان توسط این آزمون‌ها قابل تشخیص نمی‌باشد).

۲) با استفاده از بحث فوق می‌توان نشان داد وقتی $n \to \infty$ داریم:

$$\sqrt[n]{(kn)!} \sim \left(\frac{kn}{e}\right)^k$$

به هم ارزی فوق «هم ارزی استرلینگ» می گویند.

همچنین برای هر عدد دلخواه p و ثابت‌های مشخص $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 n^p + a_2 n^{p-1} + \ldots + a_{p+1}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(a_1 n^p + a_2 n^{p-1} + \ldots + a_{p+1})} = 1$$

۵) آزمون رابه

در سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ با فرض $L = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$:

الف) چنانچه $L > 1$ سری همگراست.

ب) چنانچه $L < 1$ سری واگراست.

ج) چنانچه $L = 1$ این آزمون بی‌نتیجه است.

نکته: در بسیاری مواقع که آزمون دالامبر کمکی نمی کند، استفاده از آزمون رابه می تواند مفید باشد.

۶) آزمون مقایسه

سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید:

الف) اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا بوده و $\forall n \; ; \; 0 \le a_n \le b_n$، آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

ب) اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا بوده و $\forall n \; ; 0 \le b_n \le a_n$، آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

۷) آزمون مقایسه حد

فرض کنید $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $J=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری با جملات مثبت باشند:

الف) اگر حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ عددی مخالف صفر باشد، وضعیت دو سری I و J مشابه همدیگر است.

ب) اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ و J همگرا باشد، آنگاه I نیز همگراست.

ج) اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ و J واگرا باشد آنگاه I نیز واگراست.

به تعبیری، اگر وقتی $n\to\infty$ داشته باشیم $a_n \sim b_n$، آنگاه وضعیت سری‌های $\sum\limits^{\infty} a_n$ و $\sum\limits^{\infty} b_n$ از حیث همگرایی یا واگرایی مشابه همدیگر است.

اگر وقتی $n\to\infty$ داشته باشیم: $a_n\sim b_n$
آنگاه، وضعیت سری‌های $\sum\limits^{\infty} a_n$، $\sum\limits^{\infty} b_n$
از حیث همگرائی یا واگرائی مشابه همدیگر است

۸) آزمون انتگرال

اگر در $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ داشته باشیم $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 0$ (یعنی سری مورد نظر دارای جملات مثبت و نزولی باشد) آنگاه وضعیت این سری از حیث همگرایی یا واگرایی مشابه وضعیت انتگرال ناسره $\int_1^{\infty} a(x)\,dx$ خواهد بود.

نکته: می‌توان نشان داد $\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \le a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx$ یعنی، اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد می‌توان بازه‌ای را که مقدار همگرایی سری در آنجا واقع است تعیین نمود.

نکته: سری‌های زیر به ازای $p>1$ همگرا و به ازای $p\le 1$ واگرا هستند:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$$

نکته: (قضیه آبل)

اگر سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و دنباله $\{b_n\}$ دنباله‌ای همگرا و اکیداً یکنوا باشد، سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگراست.

همگرایی سری‌های متناوب

سری‌هایی که جملاتشان به تناوب مثبت و منفی می‌شود، سری متناوب نامیده می شوند؛ لذا، اگر $\forall n, a_n > 0$ سری‌های زیر به‌واسطه وجود جمله $(-1)^n$ و $(-1)^{n+1}$ متناوبند:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + - \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - + \cdots$$

آزمون لایپ نیتس در سری‌های متناوب

سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ همگراست، اگر:

اولا؛ a_n ها نزولی باشند؛ یعنی، $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$

ثانیا؛ حد جمله عمومی صفر باشد؛ یعنی، $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

تذکر: توجه کنید اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ باشد سری متناوب مورد بحث قطعاً واگراست (زیرا شرط لازم برای همگرائی را ندارد) ولی چنانچه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ باشد اما a_nها نزولی نباشد، قضیه لایپ نیتس کمکی به ما نخواهد کرد و سری متناوب مورد نظر ممکن است همگرا و یا واگرا باشد.

چند تعریف و قضیه

دو سری $J = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ و $I = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را با فرض $\forall n ; a_n > 0$ در نظر بگیرید:

الف) اگر I همگرا باشد، سری متناوب J نیز الزاما همگراست و اصطلاحا می‌گویند J همگرایی مطلق دارد.

ب) اگر I واگرا باشد؛ ولی، J همگرا باشد، اصطلاحا می‌گویند J همگرایی مشروط دارد.

ج) اگر سری متناوب J واگرا باشد، I نیز الزاما واگراست.

نکته: در یک سری متناوب همگرا، اگر تعداد متناهی جمله از ابتدای سری را بنویسیم خطای حاصل از اختلاف مقدار واقعی و مقدار به‌دست آمده، از قدرمطلق اولین جمله حذف شده کمتر خواهد بود.

سری‌های تابع و بحث فاصله همگرایی

جملات یک سری می توانند علاوه بر آنکه به n بستگی دارند به متغیر x نیز وابسته باشند، در چنین حالتی سری موجود را سری تابع می گویند؛ به عنوان مثال، سری تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n,x)=a(1,x)+a(2,x)+\cdots$$

همان‌طوری که ملاحظه می‌شود هر کدام از جملات این سری تابعی از x می باشد. در این نوع سری‌ها بحث فاصله همگرایی مطرح می‌شود؛ یعنی، می خواهیم بدانیم به ازا چه مقادیری از x، سری مذکور همگراست.

برای پاسخ به این سوال شرط همگرایی را مطابق یکی از روابط زیر بیان نموده و به تعیین محدوده‌ای از x می پردازیم که به ارضاء این شرایط می انجامد:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(n+1,x)}{a(n,x)}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a(n,x)|}<1$$

نکته: دقت کنید گاهی مواقع پس از یافتن فاصله همگرایی علاقه مندیم وضعیت سری را درست در نقاط ابتدایی و انتهایی این فاصله مشخص کنیم، در چنین مواقعی می‌توان تک تک نقاط مرزی فاصله همگرایی را به جای x سری قرار داده و برای حاصل (که البته اینک سری عددی شده است) وضعیت همگرایی یا واگرایی سری را بررسی نمود.

سری‌های توانی و یافتن فاصله همگرایی

یک سری توانی حول نقطه x_0 به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=a_0(x-x_0)^0+a_1(x-x_0)^1+a_2(x-x_0)^2+\cdots$$

در این گونه سری‌ها، نصف طول فاصله همگرایی را اصطلاحا شعاع همگرایی نامیده و می توان نشان داد، شعاع همگرایی R از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{یا} \qquad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

و نیز فاصله همگرایی در این سری عبارت است از:

$$(x_0-R\ ,\ x_0+R)$$

اگرچه هم فاصله همگرایی و هم شعاع همگرایی را می‌توان با استفاده از بحث صورت گرفته در سری‌های تابع نیز به‌دست آورد.

سری تیلور و مک لوران یک تابع

بسط تیلور تابع f حول نقطه x_0 به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots$$

که در حقیقت $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ را ضرایب بسط تیلور حول نقطه x_0 می‌نامند.

اگر بسط تیلور تابع f حول نقطه $x_0 = 0$ نوشته شود، بسط حاصل به سری مک لوران موسوم است و داریم:

$$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

نکته: شعاع همگرایی بسط تیلور تابع f حول نقطه x_0 برابر min فاصله نقطه x_0 تا تمام ریشه‌های مخرج تابع (اعم از ریشه‌های حقیقی یا مختلط) می‌باشد.

بسط مک لوران چند تابع مهم

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}x^n \qquad |x|<1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\text{Arcsin}\,x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times3}{2\times4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (|x|<1)$$

$$\text{Arctan}\,x = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots & (|x|\le 1) \\ \pm\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + \cdots & (\text{علامت منفی برای } x\le -1 \text{ و علامت مثبت برای } x\ge 1) \end{cases}$$

$$\text{Arctanh}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad (|x|<1)$$

$$\text{Arccoth}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ x^{2n+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots \qquad (|x|>1)$$

نکته: مجازیم از توابع و بسط‌های نظیرشان جمله به جمله مشتق گیری و همچنین جمله به جمله انتگرال گیری کنیم تا بسط توابع جدیدی را به‌دست آوریم.

مثلاً با شرط $|x| < 1$ داریم:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\rightarrow \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad , \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\ x^{n-1}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad , \quad -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\ x^{n-1}$$

دو نکته در تغییر سری‌های توانی

الف) در یک سری توانی نامتناهی می‌توان به اندیس داخل سیگما عددی را اضافه کرد، به شرط آن که آن عدد را از حد پایین سیگما کم کنیم؛ یعنی، مثلاً:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=-m}^{\infty} a_{n+m} x^{n+m}$$

ب) در یک سری توانی می‌توان به تعداد لازم جمله را از سری خارج نمود، به شرط آن که به همان تعداد به حد پایینی سیگما اضافه کنیم؛ یعنی، مثلاً:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n$$

نکته: دو سری توانی را می‌توان در همدیگر ضرب و یا بر هم تقسیم کرد و به یک‌سری توانی جدید رسید؛ مثلاً، داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{و} \quad \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

به‌طوری که خواهیم داشت:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

$$d_n = \frac{a_n - d_0 b_n - d_1 b_{n-1} - \cdots - d_{n-1} b_1}{b_0} \qquad n \ge 1$$

d_0 با مقایسه جمله اول دو سری قابل حصول است.

نکته: اگر بتوانیم بسط تیلور تابع f را حول نقطه $x = x_0$ از طریق بسط تیلور توابع دیگر بنویسیم، در نهایت ضریب $\left(x - x_0\right)^n$ مبین $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ خواهد بود و از آنجا می‌توان $f^{(n)}(x_0)$ (مشتق از هر مرتبه تابع f در نقطه x_0) را به دست آورد.

مجموعه تست سری‌های نامتناهی و بحث‌های مربوط به آن

۱ ـ دنباله $\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right\}$ **و سری** $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n$ **به ترتیب ...... و ...... هستند.**

۱) همگرا، همگرا ۲) همگرا، واگرا ۳) واگرا، همگرا ۴) واگرا، واگرا

حل :

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1^\infty$ مبهم

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right)^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

پس، دنباله مورد نظر به عدد ۱ همگراست و نیز سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ چون فاقد شرط لازم برای همگرایی است $\left(\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0\right)$، واگرا می‌باشد.

۲ ـ حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n-1}{a_n+1}$ **برابر 2 شده است. دنباله** $\{a_n\}$**:**

۱) همگراست به صفر. ۲) همگراست به $\frac{1}{2}$.

۳) واگراست. ۴) همگراست به $\frac{1}{3}$.

حل :

سری مورد نظر همگراست (حاصلش برابر 2 شده است)؛ پس، باید شرط لازم برای همگرایی را اقناع کند و این می‌طلبد حد جمله عمومی سری وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، صفرشود؛ یعنی، باید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-1}{a_n+1}=0 \rightarrow \lim_{n\to\infty}(2a_n-1)=0 \rightarrow a_n=\frac{1}{2}$$

پس دنباله $\{a_n\}$ همگراست به $\frac{1}{2}$.

۳ ـ سری‌های $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ **و** $J=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$ **به ترتیب .... و .... هستند.**

۱) همگرا، همگرا ۲) همگرا، واگرا ۳) واگرا، همگرا ۴) واگرا، واگرا

حل :

وقتی $n \to \infty$ داریم $\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}}$ واگراست، سری I نیز واگراست.

در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ دقت کنید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ نیز همگراست.

۴ ـ سری‌های $I = \sum_{n=1}^{\infty} (1+\cos\frac{1}{n})$ ، $J = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$ به ترتیب ...... و ...... هستند.

۱) همگرا، همگرا ۲) همگرا، واگرا ۳) واگرا، واگرا ۴) واگرا، همگرا

حل :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\cos\frac{1}{n}\right) = 1+\cos 0 = 2 \neq 0$$

پس سری I شرط لازم برای همگرایی را نداشته و واگراست.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = 1-\cos 0 = 0$$

پس سری J شرط لازم برای همگرایی را دارد؛ اما، برای تعیین وضعیت سری J توجه داریم که:

$$1-\cos\frac{1}{n} = 2\sin^2\frac{1}{2n}$$

و وقتی $n \to \infty$ داریم $\frac{1}{2n} \to 0$؛ لذا:

$$1-\cos\frac{1}{n} = 2\sin^2\frac{1}{2n} \sim 2\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2}$$

و چون سری $\sum^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ همگراست، سری $J = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ نیز همگراست.

۵ ـ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد و $a_n > 0$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$:

۱) همگرا است. ۲) واگرا است.

۳) ممکن است همگرا یا واگرا باشد. ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

حل :

چون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است پس باید $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ لذا با توجه به آن‌که $x \xrightarrow{x\to 0} \ln(1+x)$

پس برای $n \to \infty$ داریم: $\ln(1+a_n) \sim a_n$

و وضعیت سری $\sum \ln(1+a_n)$ مانند وضعیت سری $\sum a_n$ می‌باشد که طبق فرض همگرا است.

۶ـ در مورد سری‌های $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+3)}{n^2+n+1}$, $J = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ **کدام گزینه صحیح است؟**

۱) I همگراست و J همگرایی مشروط دارد. ۲) I همگراست و J همگرایی مطلق دارد.

۳) I واگراست و J همگرایی مشروط دارد. ۴) I واگراست و J نیز واگراست.

حل :

با توجه به آنکه وقتی $n \to \infty$ داریم:

$$\frac{\ln(n^2+3)}{n^2+n+1} \sim \frac{\ln(n^2)}{n^2} = \frac{2\ln n}{n^2}$$

و می‌دانیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ln n}{n^2}$ همگراست؛ لذا، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+3)}{n^2+n+1}$ نیز همگراست.

سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ واگراست؛ لذا، سری متناوب $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ همگرایی مطلق ندارد؛ ولی، چون:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln n} = 0$$

$$a'_n = \left(\frac{1}{n\ln n}\right)' = \frac{-(\ln n+1)}{(n\ln n)^2} < 0$$

پس طبق قضیه لایپ نیتس سری متناوب $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ همگراست و البته همگرایی مشروط دارد؛ پس، در کل گزینه اول صحیح است.

۷ـ سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$:

۱) همگراست. ۲) واگراست.

۳) نمی‌توان تشخیص داد. ۴) هیچ کدام

حل :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\mp\cdots$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

دقت داریم سری حاصله از نوع متناوب بوده و همگراست زیرا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0\\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)'=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}<0\end{cases}$$

تذکر: اگرچه $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}=0$ ولی از آن‌جا که جملات حاصله از $\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ یعنی $\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{4}},\ldots$ طبیعت نزولی ندارند، بنابراین قضیه لایپ‌نیتس به طور مستقیم کمکی در تعیین وضعیت این سری متناوب نخواهد کرد.

۸ ـ فاصله دقیق همگرایی برای $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+4)^{2n-1}}{2n-1}$ کدام است؟

۱) $[-5,-3]$ ۲) $[-5,-3)$ ۳) $[-5,1)$ ۴) $[-5,1]$

حل :

شرط لازم برای همگرایی می‌طلبد:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x+4)^{2n-1}}{2n-1}\right|}<1\ \to\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+4)^{\frac{2n-1}{n}}}{\sqrt[n]{2n-1}}\right|<1$$

$$\to\ \frac{\left|(x+4)^2\right|}{1}<1\ \to\ |x+4|<1\ \to\ -1<x+4<1\ \to\ -5<x<-3$$

اما در نقاط مرزی داریم:

$$x=-3\ \to\ I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+4)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$ واگراست.

$$x=-5\ \to\ I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5+4)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$ واگراست.

لذا، فاصله دقیق همگرایی $(-5\,,-3)$ است.

۹ـ اگر اندازه شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر R باشد، مقدار شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} a_n z^n$ کدام است؟

۱) $\frac{R}{3}$ ۲) R^3 ۳) $3R$ ۴) $3R^3$

حل :

چون شرط همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ می‌طلبد که:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1 \;\to\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\,|z| < 1 \;\to\; |z| < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$$

و شعاع همگرایی این سری R فرض شده؛ پس، باید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = R \;\to\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{R}$$

حال شرط همگرایی سری $\sum \frac{n^2}{3^n} a_n z^n$ می‌طلبد که:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{3^n} a_n z^n\right|} < 1 \;\to\; \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{3^n}} \sqrt[n]{a_n}\,|z| < 1 \;\to\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{a_n}\,|z| < 1$$

$$\to\; \frac{1}{3}\frac{1}{R}|z| < 1 \;\to\; |z| < 3R$$

یعنی، شعاع همگرایی سری مورد بحث 3R است.

۱۰ـ ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n^2} (z-1)^n$ کدام است؟

۱) $|z-1| < e^{-2}$ ۲) $|z-1| < 1$ ۳) $|z-1| < e$ ۴) $|z-1| < e^2$

حل :

شرط همگرایی سری را می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n^2} (z-1)^n\right|} < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n |z-1| < 1$$

$$\to\; \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^n |z-1| < 1 \;\to\; \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n |z-1| < 1$$

$$\to\; e^2 |z-1| < 1 \;\Rightarrow\; |z-1| < e^{-2}$$

۱۱ ـ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}(x-1)^n$ کدام است؟

۱) 4 ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) 2 ۴) $\frac{1}{2}$

حل :

طبق تعریف ترکیب داریم:

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

پس شرط همگرایی طبق روش دالامبر می‌طلبد که:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}(x-1)^{n+1}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^n}\right|<1 \;\rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x-1|<1$$

$$\rightarrow\; 4|x-1|<1 \;\rightarrow\; |x-1|<\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; R=\frac{1}{4}$$

راه دوم: شرط همگرایی، طبق روش کوشی، می‌طلبد که:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^n\right|}<1 \;\rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{\sqrt[n]{(n!)^2}}|x-1|<1 \;\rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^2}|x-1|<1$$

$$\rightarrow\; 4|x-1|<1 \;\rightarrow\; |x-1|<\frac{1}{4} \;\rightarrow\; R=\frac{1}{4}$$

۱۲ ـ در بسط تابع $f(x)=e^{-x}.\ln(1+x)$ با شرط $|x|<1$ ضریب x^3 کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) 1

حل :

می‌دانیم:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots \qquad |x|<1$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق داریم:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\cdots\cdots \qquad |x|<1$$

و می‌دانیم:

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\pm\cdots\cdots$$

پس داریم:

$$f(x)=e^{-x}.\ln(1+x)=\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\pm\cdots\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\cdots\right)$$

و ضریب x^3 چنین خواهد بود:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$

۱۳ـ مشتق ششم تابع $f(x)=\frac{1-e^{(x-1)^3}}{x}$ در x=1 کدام است؟

۱) $\frac{6!}{2}$ ۲) $\frac{-6!}{2}$ ۳) $6!$ ۴) $-6!$

حل :

$$f(x)=\frac{1-e^{(x-1)^3}}{(x-1)+1}=\left(1-e^{(x-1)^3}\right)\left(\frac{1}{1+(x-1)}\right)$$

$$=\left\{1-\left(1+(x-1)^3+\frac{(x-1)^6}{2!}+\ldots\right)\right\}\left\{1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots\right\}$$

$$=-\left((x-1)^3+\frac{(x-1)^6}{2}+\ldots\right)\left(1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots\right)\Big\}$$

ضریب $(x-1)^6$ عبارت است از:

$$-\left(-1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

لذا:

$$(x-1)^6\ \text{ضریب}=a_6=\frac{f^{(6)}(1)}{6!}\rightarrow\frac{1}{2}=\frac{f^{(6)}(1)}{6!}\Rightarrow f^{(6)}(1)=\frac{6!}{2}$$

۱۴ـ حاصل $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ وقتی $n\to\infty$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) 1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل :

$$I=\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times11}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

با حذف جملات قرینه، حاصل عبارت فوق $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$ خواهد شد که برای $n\to\infty$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

۱۵ ـ حاصل $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2^n}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل :

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$=\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)+\left(\frac{-1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{-1}{2^3}\cdots\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{-1}{2}}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

۱۶ ـ حاصل $I=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$ **کدام است؟**

۱) $\ln 3$ ۲) $\ln 5$ ۳) $-\ln 3$ ۴) $-\ln 5$

حل :

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\frac{k+3}{k+1}+\ln\frac{k}{k+2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\frac{k+3}{k+1}-\ln\frac{k+2}{k}\right)$$

و مطابق قاعده ادغام به دست می‌آید:

$$I=\ln\frac{k+3}{k+1}\bigg|_{k=\infty}-\ln\frac{k+2}{k}\bigg|_{k=1}=\ln 1-\ln 3=-\ln 3$$

۱۷ ـ حاصل $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{n!}$ **کدام است؟**

۱) $4e-2$ ۲) $3e$ ۳) $2e+3$ ۴) $3e+\frac{1}{2}$

حل :

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n-1)!}$$

با تبدیل $n \mapsto N+1$ داریم:

$$I=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{N+2}{N!}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{N}{N!}+\sum_{N=0}^{\infty}\frac{2}{N!}=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{N}{N!}+\sum_{N=0}^{\infty}\frac{2}{N!}=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{(N-1)!}+2\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}$$

$$=\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\right)+2\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\right)=e+2e=3e$$

۱۸ ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{n!}$ کدام است؟

۱) $\left(x^3+x^2+x+1\right)e^x$

۲) $\left(x^3+x^2+3x\right)e^x$

۳) $\left(x^3+3x^2+2x\right)e^x$

۴) $\left(x^3+3x^2+x\right)e^x$

حل :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n+2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

اما داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^{n+1}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x\left(xe^x\right)+xe^x$$

پس در نهایت می‌توان گفت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n=x\left(x^2e^x+xe^x\right)+2x\left(xe^x\right)+xe^x=\left(x^3+3x^2+x\right)e^x$$

۱۹ ـ حاصل سری $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) 1

حل :

با استفاده از روش تجزیه کسرها می‌توان به دست آورد:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{\frac{1}{2}}{k+2}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}}{k}-\frac{\frac{1}{2}}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}}{k+2}-\frac{\frac{1}{2}}{k+1}\right)$$

و مطابق قاعده ادغام به دست می‌آید:

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k}\bigg|_{k=1}-\frac{1}{k+1}\bigg|_{k=\infty}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k+2}\bigg|_{k=\infty}-\frac{1}{k+1}\bigg|_{k=1}\right\}=\frac{1}{2}(1-0)+\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

تذکر: طبق رابطه‌ای که در درس گفتیم به سادگی حاصل سری قابل حصول است:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+p)}=\frac{1}{p\,p!}$$

$$\Rightarrow\ S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2(2!)}=\frac{1}{4}$$

۲۰ـ سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)}{\cos\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}}$:

۱) همگراست به $\sin 1$

۲) همگراست به $\operatorname{tg} 2$

۳) همگراست به $\operatorname{tg} 1$

۴) واگراست.

حل :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)}{\cos\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}-\cos\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k+1}}{\cos\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}}{\cos\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}}-\frac{\cos\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k+1}}{\cos\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{k}-\operatorname{tg}\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(\operatorname{tg}\frac{1}{k}\right)\bigg|_{k=1}-\left(\operatorname{tg}\frac{1}{k+1}\right)\bigg|_{k=\infty}=\operatorname{tg}1-\operatorname{tg}0=\operatorname{tg}1$$

۲۱ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Arctan}\frac{1}{2n^2}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

حل :

یادآوری می‌کنیم که:

$$\text{Arctan}\, x - \text{Arctan}\, y = \text{Arctan}\frac{x-y}{1+xy}$$

(برای اثبات از طرفین، tan بگیرید).

$$\text{Arctan}\frac{1}{2n^2} = \text{Arctan}\frac{2}{4n^2} = \text{Arctan}\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)}$$

$$= \text{Arctan}(2n+1) - \text{Arctan}(2n-1)$$

پس:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Arctan}\frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\text{Arctan}(2n+1) - \text{Arctan}(2n-1)\right)$$

طبق قاعده ادغام به دست می‌آید:

$$I = \text{Arctan}(2n+1)\Big|_{n=\infty} - \text{Arctan}(2n-1)\Big|_{n=1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

۲۲ـ حاصل $I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ **کدام است؟**

۱) $\ln\frac{3}{2}$ ۲) $\ln 2$ ۳) $\ln 3$ ۴) $\ln\frac{2}{3}$

حل :

با توجه به سری $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ و انتگرال گیری از آن به دست می‌آید:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

به ازاء $x = \frac{1}{2}$ خواهیم داشت:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \rightarrow \quad I = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

۲۳ـ مقدار سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{25}{9}$ ۲) $\frac{25}{3}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{23}{2}$

حل :

می‌دانیم برای $|x|<1$ به دست می‌آید:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

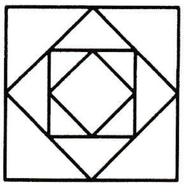
برای $x=\frac{2}{5}$ داریم:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2}{5}\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \to \frac{25}{9}=1\left(\frac{2}{5}\right)^{1-1}+\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}=\frac{16}{9}$$

۲۴ـ اگر اوساط اضلاع مربعی به ضلع a را به هم وصل کنیم تا مربع جدیدی به وجود آید و این عمل را به دفعات تکرار کنیم، حد مجموع مساحت این مربع‌ها کدام است؟

۱) $\frac{3a^2}{2}$ ۲) $\frac{5a^2}{2}$ ۳) $2a^2$ ۴) $3a^2$

حل :



می‌توان نشان داد، اگر ضلع مربعی L باشد و ما اوساط اضلاع این مربع را به هم وصل کنیم طول ضلع مربع حاصل $\frac{L}{\sqrt{2}}$ خواهد بود؛ لذا، در این مساله داریم:

حد مجموع مساحت مربع‌ها: $(a)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\cdots$

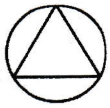
$$=a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}+\cdots=a^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=a^2\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2a^2$$

۲۵ـ در داخل دایره‌ای به شعاع R مثلثی متساوی‌الاضلاع و در داخل این مثلث دایره‌ای محاط می‌کنیم. اگر این کار را بی‌نهایت بار تکرار کنیم مجموع مساحت مثلث‌ها کدام است؟

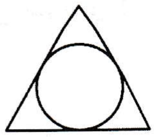
۱) $\sqrt{3}\,R^2$ ۲) $3R^2$ ۳) $\sqrt{2}\,R^2$ ۴) $2\,R^2$

حل :

سه موضوع زیر را به خاطر داریم:



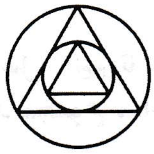
$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$: شعاع دایره محیطی برای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a



$r = \frac{b}{2\sqrt{3}}$: شعاع دایره محاطی برای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع b

$s = \frac{\sqrt{3}\,c^2}{4}$: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع c

حال با توجه به شکل مقابل می‌توان گفت:



شعاع دایره اول $= R$

ضلع مثلث اول $= \sqrt{3}R$

شعاع دایره دوم $= \frac{\sqrt{3}R}{2\sqrt{3}} = \frac{R}{2}$

ضلع مثلث دوم $= \sqrt{3}\left(\frac{R}{2}\right)$

لذا داریم:

$$\text{مجموع مساحت مثلث‌ها} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}R\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2 + \ldots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\left(3 + \frac{3}{4} + \ldots\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \times \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{3}R^2$$