گراف

نکته ۱: $0 \le q \le \frac{p(p-1)}{2}$.

نکته ۲: گراف P رأسی، رأس درجه P ندارد.

نکته ۳: گرافی که یک رأس درجه $(p-1)$ دارد، رأس درجه یک ندارد.

نکته ۴: گرافی که دو رأس درجه $(p-1)$ دارد، رأس درجه صفر و یک ندارد.

نکته ۵: گراف p رأس، $(p \ge 2)$ حداقل دو رأس با درجه یکسان دارد.

نکته ۶: دنباله درجات رأس‌های یک گراف همگی نمی‌توانند متمایز باشند.

Δ **(ماکزیمم درجه گراف):** بزرگترین عدد بین درجات رأس‌های یک گراف $(0 \le \Delta \le p-1)$.

δ **(مینیمم درجات گراف):** کوچکترین عدد بین درجات رأس‌های یک گراف $(0 \le \delta \le p-1)$

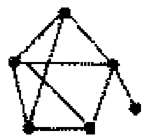
نکته ۷: میانگین درجات رئوس: $\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$

در یک گراف p رأسی که k رأس درجه $(p-1)$ دارد، $\delta \ge k$ $(k < p-1)$

نکته ۹: تعداد گراف‌های p رأس که اندازه آن‌ها q باشد: $\binom{\frac{p(p-1)}{2}}{q}$

حداکثر تعداد یال‌ها در گراف p رأسی با ماکزیمم درجه رئوس Δ برابر $[\frac{p\Delta}{2}]$ است.

- در گراف زیر:



$\delta = 1$ ، $\Delta = 4$ ، $p = 6$ ، $q = 9$ ، $\frac{2q}{p} = 3$ ، $\delta = 1 < 3 < \Delta = 4$

قضیه: در هر گراف $\sum \deg V_i = 2q$

نکته ۱۱: در هر گراف تعداد رأس‌های فرد، زوج است.

گراف منتظم، کامل، تهی

گراف r منتظم: گرافی که درجه تمام رئوس آن r باشد.

نکته ۱: در هر گراف r منتظم با p رأس داریم: $rp = 2q$

نکته ۲: گراف فرد منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

نکته ۳: در گراف منتظم $\delta = \Delta$

گراف کامل (k_p): هر گراف $(p-1)$ منتظم از مرتبه p را گویند.

نکته ۴: در گراف کامل، اندازه گراف برابر است با: $q = \frac{p(p-1)}{2}$

گراف تهی $(\bar{k}_p)$: گراف ۰- منتظم از مرتبه p را گویند.

مسیر و دور

مسیر: مسیر از u به V، دنباله‌ای از $m+1$ رأس دوبه‌دو متمایز است که از u آغاز و به V ختم می‌شوند. m را طول مسیر می‌نامند.

دور: یک دور از گراف G دنباله‌ای مانند

$V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1} = V_1$

با شرط $m \ge 3$، متشکل از $(m+1)$ رأس G است. که V_i ها و $1 \le V_i \le m$ همگی دوبه‌دو متمایزند، طول این دور را m می‌نامند.

نکته: اگر در یک گراف $\delta = k$، آنگاه گراف دوری با طول بزرگتر یا مساوی $k+1$ دارد.

نکته: تعداد مسیرهای مختلف از رأس a به رأس $b, a \ne b$ در گراف k_p $p \ge 2$ برابر است با:

$$\sum_{k=0}^{p-2}(p-2)_k = (p-2)!\sum_{k=0}^{p-2}\frac{1}{k!}$$

نکته ۳: تعداد مسیرهای مختلف و به طول k از رأس a به رأس b، $a \ne b$ در گراف کامل k_p، $p \ge 2$ برابر است با:

$$(p-2)_{k-1} = \frac{(p-2)!}{(p-k-1)!}$$

نکته ۴: در گراف k_p تعداد مسیرها به طول $k \ge 0$ برابر است با:

$$\frac{1}{2}p(p-1)(p-2)\dots(p-k) = \frac{p!}{2(p-k-1)!}$$

نکته ۵: در گراف کامل k_p تعداد کل مسیرها که طول آنها از صفر تا $p-1$ است برابر است با:

$$\sum_{k=0}^{p-1} p(p-1)(p-2)\dots(p-k) = p!\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{k!}$$

تذکر: اگر مسیر از رأس u به رأس V و مسیر بر عکس آن را یکی فرض کنید، فرمول بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود: $\frac{1}{2}(p!\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{k!} + p)$

۶: به ازای هر عدد طبیعی k، $3 \le k \le p$، گراف k_p دوری به طول k دارد.

نکته ۷: تعداد دورهای مختلف در گراف k_p برابر است با:

$$\binom{p}{3}\frac{2!}{2} + \binom{p}{4}\frac{3!}{2} + \dots + \binom{p}{p}\frac{(p-1)!}{2}$$

۸: در گراف k_p ، $p \ge 3$ تعداد دورهای مختلف با طول k، $3 \le k \le p$ برابر است با:

$$\binom{p}{k}\frac{(k-1)!}{2}$$

گراف همبند: گراف G را همبند گویند هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد.

فاصله: گراف G همبند است. فاصله رأس u از رأس v را با $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v.

۱) $u = v \Leftrightarrow d(u,v) = 0$

۲) $d(u,v) = d(v,u)$

۳) $d(u,v) + d(v,w) \ge d(u,w)$

نکته ۱: هر گراف k_p همبند است.

نکته ۲: هر گراف که $q > \binom{p-1}{2}$، همبند است.

نکته ۳: هر گراف که $q < p-1$ قطعاً ناهمبند است.

۴: هر گراف که $p-1 < q \le \binom{p-1}{2}$ می‌تواند همبند یا ناهمبند باشد.

نکته ۵: هر گراف که اقلاً $\binom{p-1}{2} + 1$ یال داشته باشد، همبند است.

۶: در گراف‌های، منتظم از مرتبه p، هرگاه $r \ge \frac{p-1}{2}$، گراف همواره همبند است.

گراف همیلتنی: گراف G از مرتبه‌ی p، $p \ge 3$ را همیلتنی گویند. هرگاه دوری از مرتبه p داشته باشد.

نکته ۱: هر گرافی همیلتنی همبند است.

۲: اگر یک گراف همیلتنی باشد، با حذف یک یال گراف همبند می‌ماند.

نکته ۳: اگر با حذف یک یال گراف ناهمبند شود، آنگاه همیلتنی نیست.

۴: اگر گراف همیلتنی است، آنگاه درجه‌ی هر رأس بزرگتر یا مساوی ۲ است.

نکته ۵: هر گراف کامل k_p ، $p \ge 3$ همیلتنی است.

نکته ۶: اگر G یک گراف همیلتنی باشد، بین هر دو رأس متمایز آن حداقل دو مسیر وجود دارد و فاصله دو رأس متمایز حداکثر برابر با $\left[\frac{p}{2}\right]$ است.

گراف بازه‌ها:

نکته ۱: هر گراف کامل گراف بازه‌ها است.

نکته ۲: اگر از گراف k_p یک یال حذف کنیم، گراف حاصل گراف بازه‌ها است.

نکته ۳: اگر از گراف k_p، هر چند یال از یک رأس را حذف کنیم، گراف حاصل گراف بازه‌ها است.

تعریف حفره: در گرافها، چهارضلعی بدون قطر را حفره می‌گویند (به عبارت دیگر هر $n \ge 4$ ضلعی بدون قطر را حفره می‌گویند.)

نکته ۴: اگر در گراف G، یک حفره وجود داشته باشد، آن گراف، گراف بازه‌ای نمی باشد.

درخت

درخت (T): گرافی همبند و بدون دور

نکته ۱: در هر درخت، بین هر دو رأس فقط یک مسیر وجود دارد.

نکته ۲: با حذف هر یال از درخت T، درخت ناهمبند می شود.

نکته ۳: در هر درخت $q = p - 1$

نکته ۴: هر درختی که بیش از یک رأس دارد، حداقل دو رأس درجه یک دارد.

نکته ۵: اگر ماکزیمم درجه درخت T، k باشد، T حداقل K رأس درجه یک دارد.

نکته ۶: تعداد مسیرهای متمایز درخت P رأسی به طول اقلاً یک مساوی $\binom{p}{2}$ است.

ماتریس مجاورت گراف (۱)

هر گراف ساده G با p رأس با یک ماتریس مربع از مرتبه p مانند A متناظر است که ماتریس مجاورت گراف نامند و دارای خواص زیر است:

۱- درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفر هستند.

۲- هر درایه ماتریس A، صفر یا یک است.

۳- ماتریس مجاورت گراف ساده متقارن است. $(A = A^T)$

۴- جمع درایه‌های سطر i ام(ستون i ام) درجه رأس i می باشد.

۵-اگر درایه‌های سطر i ام صفر باشد، سطر i ام یک رأس تنها است.

۶- تعداد یک‌های ماتریس مجاورت گراف برابر با $2q$ است.

۷- اگر A ماتریس مجاورت گراف کامل باشد، همه درایه‌ها به جز قطر اصلی صفرند. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۸- در گراف p رأسی، r منتظم ، جمع یک هر سطر (ستون) ماتریس مجاورت مساوی r است و تعداد یک‌ها برابر با rp می‌باشد.

۹- تعداد یک‌های ماتریس مجاورت درخت p رأسی $2(p-1)$ می‌باشد.

۱۰- تعداد صفرهای ماتریس مجاورت گراف ساده برابر است با: $p^2 - 2q$

۱۱- تعداد صفرهای ماتریس مجاورت درخت p رأسی مساوی $(p^2 - 2p + 2)$ یا $(q^2 + 1)$ است.

۱۲-تعداد صفرهای ماتریس مجاورت k_p مساوی p است.

۱۳- اگر A ماتریس مجاورت گراف p رأسی باشد و $A^2 = B$ آنگاه b_{ii} درجه رأس i ام است.

۱۴- $\sum_{i=1}^{p} b_{ii} = 2q$

۱۵-در گراف k_p، جمع درایه‌های روی قطر اصلی A^2، مساوی $p(p-1)$ است.

۱۶- در ماتریس مجاورت گراف ساده G با $p \ge 2$، اگر تمام درایه‌های قطر اصلی A^2، مساوی باشند، آنگاه G یک گراف r- منتظم است.

۱۷-اگر A ماتریس مجاورت گراف k_p باشد، تمام درایه‌های روی قطر اصلی A^2 برابر $p - 1$ و سایر درایه‌های آن برابر با $p - 2$ است.

۱۸- اگر ماتریس A متقارن باشد، ماتریس A^n نیز متقارن است.

کلیات تقسیم‌پذیری :

– اصل استقراء:

$p(n): n$ حکمی درباره عدد طبیعی
$p(1):$ اگر درست باشد:
$p(k):$ فرض می‌شود درست باشد:
$\Rightarrow p(k+1)$ درست باشد:

$\boxed{\text{آنگاه } p(n) \text{ برای هر عدد طبیعی } n \text{ درست است.}}$

اصل استقراء، تعمیم یافته:

$p(n): n$ حکمی درباره عدد طبیعی
$p(m):$ اگر درست باشد $(m > 1)$
$p(k):$ فرض می‌شود درست باشد. $(k \ge m)$
$\Rightarrow p(k+1)$ درست باشد

$\boxed{\text{آنگاه } p(n) \text{ برای هر عدد طبیعی } n \ge m \text{ درست است.}}$

بخش‌پذیری: $a = bq \Leftrightarrow b \mid a$ ، $a,b \ne 0 \in Z$

بخش‌پذیری رابطه‌ای است با ویژگی‌های زیر:

۱- در Z بازتابی است.

۲- در Z ترایایی است.

۳- در Z متقارن نیست. $2 \mid 6$ ولی $6 \nmid 2$

۴-در Z پادمتقارن نیست. $2 \mid -2$ ، $-2 \mid 2$ ولی $2 \ne -2$

۵-در N پادمتقارن است.

خواص بخش‌پذیری:

1) $a \mid b \Rightarrow \pm a \mid \pm b$
2) $a \mid b, m \in Z \Rightarrow a \mid mb$
3) $a \mid b, b \mid a \Rightarrow a = \pm b$
4) $b \mid 0$
5) $\pm 1 \mid b$
6) $a \mid 1 \Rightarrow a \pm 1$
7) $a \mid b, b \ne 0 \Rightarrow |a| \le |b|$
8) $a \mid b, a \mid c\ \ m,n \in Z \Rightarrow a \mid mb + nC$
9) $a \mid b, c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$
10) $a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c$
11) $a \mid b\ , c \ne 0 \Rightarrow ac \mid bc$
12) $ab \mid c \Rightarrow a \mid c, b \mid c$
13) $a \mid b, n \in N \Leftrightarrow a^n \mid b^n$
14) $n \mid x - a, n \mid y - b \Rightarrow n \mid xy - ab$
15) $a - b \mid a^n - b^n \quad n \in N, a \ne b$

$۱۶)\ a+b \mid b^n + b^n \quad n = ۲k+۱ ,\ k \in W$

$۱۷)\ a+b \mid a^n - b^n \quad n = ۲k ,\ k \in N$

$۱۸)\ a-b \nmid a^n + b^n$

$۱۹)\ a-b \mid a \Rightarrow a-b \mid b$

۲۰- حاصلضرب هر n عدد متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

۲۱-هرگاه بخواهیم توان عامل‌های اول $n!$ را پیدا کنیم بایستی n را بر عامل موردنظر به صورت متوالی تقسیم کرده، سپس خارج قسمت‌ها را جمع می‌کنیم.

تعداد عامل‌های p موجود در $n!$:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^۲}\right] + \left[\frac{n}{p^۳}\right] + \ldots$$

الگوریتم تقسیم:

$$a = bq + r \quad , \quad ۰ \le r < |b| \ , b \ne ۰$$

a (مقسوم)، b (مقسوم علیه)، q (خارج قسمت)، r (باقیمانده)

نتیجه: عضو ابتدا مجموعه‌ی $s = \{a - bq \ge ۰ : q \in Z\}$ برابر است با باقیمانده‌ی تقسیم a بر b

نکته: از تقسیم اعداد صحیح بر اعداد ۲، ۳، می‌توان اعداد صحیح را به صورت‌های زیر تقسیم کرد.

$a = ۲k$	$a = ۳k$	$a = ۴k$	$a = ۵k$	...
$a = ۲k+۱$	$a = ۳k \pm ۱$	$a = ۴k \pm ۱$	$a = ۵k \pm ۱$	...
		$a = ۴k + ۲$	$a = ۵k \pm ۲$	...

بخش‌پذیری بر اعداد خاص (۱):

باقیمانده تقسیم بر عدد	روش تعیین باقیمانده
باقیمانده هر عدد بر ۱۰ یا (۲و۵)	باقیمانده رقم اول سمت راست آن بر ۱۰ یا ۲ یا ۵
باقیمانده ۱۲۳۴۵۶۷ بر ۱۰ یا ۲ یا ۵	به ترتیب برابر ۷، ۱ و ۲ می‌باشد.
باقیمانده هر عدد بر ۱۰۰ یا (۴و ۲۰و ۲۵و ۵۰)	باقیمانده دو رقم سمت راست آن بر ۱۰۰ (۴و ۲۰و ۲۵و ۵۰)
باقیمانده ۱۲۳۴۵۶۷ بر ۴ یا ۲۵	به ترتیب برابر ۳ و ۱۷ می‌باشد.
باقیمانده هر عدد بر ۱۰۰۰ (۸و ۱۲۵و...)	باقیمانده سه رقم سمت راست آن بر ۱۰۰۰ (۸و ۱۲۵و...)
باقیمانده ۱۰۲۰۳۰۴۰ بر ۱۲۵	برابر با ۴۰ می باشد.
باقیمانده هر عدد بر ۹(۳)	باقیمانده مجموع ارقام بر ۹ (۳)
باقیمانده ۱۳۵۶۸ بر ۳	برابر با ۲ می باشد $۱+۳+۵+۶+۸ = ۲۳ = ۳k+۲$
باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۶	باقیمانده (رقم یکان+ چهار برابر مجموع ارقام) بر ۶
باقیمانده ۱۳۵۶۸ بر ۶	برابر با ۲ می‌باشد. $۸ + ۴(۶+۵+۳+۱) = ۶۸ = ۶k+۲$

بخش‌پذیری بر اعداد خاص (۲):

باقیمانده تقسیم بر	روش تعیین باقیمانده
باقیمانده تقسیم عدد $\overline{a_n \ldots a_۳ a_۲ a_۱ a_۰}$ بر ۹۹ (۱۱و۳۳)	باقیمانده تقسیم $\overline{a_۱ a_۰} + \overline{a_۳ a_۲} + \ldots$ بر ۹۹ (۱۱و۳۳)
باقیمانده ۱۰۲۰۳۰۴۰۱ بر ۹۹	برابر ۱۱ می‌باشد، $۱۱ = (۱ + ۰۲ + ۰۳ + ۰۴ + ۰۱)$
باقیمانده تقسیم $\overline{a_n \ldots a_۲ a_۱ a_۰}$ بر ۷ یا ۱۳	باقیمانده تقسیم $\overline{a_۲ a_۱ a_۰} - \overline{a_۵ a_۴ a_۳} + \overline{a_۸ a_۷ a_۶} - \ldots$ بر ۷ یا ۱۳
باقیمانده ۲۰۳۰۴۰۵۰ بر ۱۳	برابر با $(۲۰ + ۳۰۴ - ۰۵۰)$ بر ۱۳ یعنی صفر می‌باشد.
باقیمانده تقسیم $\overline{a_n \ldots a_۲ a_۱ a_۰}$ بر ۱۱	باقیمانده تقسیم $a_۰ - a_۱ + a_۲ - \ldots$ بر ۱۱
باقیمانده ۹۲۲۳۴۰ بر ۱۱	برابر باقیمانده $(۹ - ۲ + ۲ - ۳ + ۴ - ۰)$ بر ۱۱ یعنی ۱ می‌باشد.
باقیمانده هر عدد بر ۱۲	باقیمانده (رقم یکان-دوبرابر دهگان + چهار برابر مجموع ارقام) بر ۱۲
باقیمانده ۱۵۶۷۵ بر ۱۲	$(۵ - ۱۴ + ۴(۶+۵+۱)) = ۳۹ = ۳ \times ۱۲ + ۳$ برابر ۳ می‌باشد.

خواص اعداد طبیعی مربع کامل

۱- اگر $a^۲$ زوج باشد، آنگاه a نیز زوج است.

$$a = ۲k+۱ \Rightarrow a^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۲q + ۱$$

۲- هر مربع کامل به صورت $۳k$ یا $۳k+۱$ است. (عکس آن برقرار نیست.)

۳- هر مربع کامل به صورت $۴k$ یا $۴k+۱$ است. (عکس آن برقرار نیست.)

۴- اگر مربع کاملی مضرب ۳ باشد، مضرب ۹ نیز هست.

۵- اگر مربع کاملی زوج باشد، مضرب ۴ نیز هست.

۶- اگر رقم یکان مربع کاملی ۵ باشد، مضرب ۲۵ نیز هست.

۷- مربع هر عدد فرد به صورت $۸k+۱$ است.

۸- هیچ مربع کاملی به ارقام ۲و ۳و ۷و ۸ یا تعداد فردی صفر ختم نمی‌شود.

مبنا

قضیه: اگر عدد b عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد، هر عدد طبیعی را میتوان به صورت: $n = a_k b^k + a_{k-۱} b^{k-۱} + \ldots + a_۱ b + a_۰$

نمایش داد این نوع نوشتن یکتاست و $۰ \le a_i < b, a_k \ne ۰$ است و قرار می‌دهیم.

$$n = (a_k a_{k-۱} \ldots a_۲ a_۱ a_۰)_b$$

هرگاه عددی مانند $a_۱ a_۲ a_۳$ در مبنای ۱۰ داده شده باشد برای آنکه عدد را در مبنای دیگر مانند b بنویسیم با تقسیمات متوالی عدد $a_۱ a_۲ a_۳$ را به b تقسیم کرده و سپس باقی‌مانده را از آخر به اول می‌نویسیم.

تذکر: در مبناهای بیش از ۱۰ داریم: $a = ۱۰, b = ۱۱, c = ۱۲, \ldots$

اعداد اول

نکته ۱: عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

نکته ۲: جمع دو عدد اول زوج است. مگر آنکه یکی از آنها ۲ باشد.

نکته ۳: ضرب دو عدد اول فرد است. مگر آنکه یکی از آنها ۲ باشد.

نکته ۴: هر عدد که مرکب باشد حداقل ۳ شمارنده‌ی مثبت متمایز دارد.

نکته ۵: اگر عدد n اول نباشد دو عدد طبیعی x و y هستند که $n = xy$ ، $۱ < x \le y < n$

نکته ۶: هر عدد اول بزرگتر از ۳ به صورت $۴k \pm ۱$ است و نه برعکس.

نکته ۷: هر عدد اول بزرگتر از ۳ به صورت $۶k \pm ۱$ است و نه برعکس.

نکته ۸: اگر عدد طبیعی n مرکب باشد، آنگاه عدد اولی مانند P است.که $p \le \sqrt{n}, p \mid n$

قضیه ی بنیادی حساب: هر عدد طبیعی، قابل تجزیه به حاصلضرب عوامل اول است.

نکته۱: تعداد شمارنده مثبت عدد $a = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \ldots p_n^{\alpha_n}$ برابر است با: $D(\alpha) = (\alpha_۱ + ۱)(\alpha_۲ + ۱) \ldots (\alpha_n + ۱)$

نکته ۲: $a = p_۱^{\alpha_۱} p_۱^{\alpha_۲} \ldots p_n^{\alpha_n}$ وقتی مربع کامل است که تعداد شمارنده‌های مثبت a فرد باشد.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آنها مخالف صفرند، عددی است طبیعی به نام $d = (a,b)$ به طوری که:

۱) $d \mid b, d \mid a$ و ۲) برای هر x اگر $x \mid a$ و $x \mid b$ آنگاه $x \le d$

نکته ۱: اگر $d = 1$ باشد آنگاه a و b را نسبت به هم اول می‌گوییم.

نکته ۲: هر دو عدد متوالی نسبت به هم اولند. $(n, n+1) = 1$

قضیه: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که اقلاً یکی از آنها مخالف صفر است، برابر است با کوچکترین عضو مجموعه‌ی $\{x, y \in Z \mid ax, by > 0\}$

نتایج قضیه فوق:

۱) $(a,b) = d \Rightarrow \exists r,s \in Z, ra+sb = d$

۲) $(a,b) = 1 \Leftrightarrow ra+sb = 1$

۳) $(a,b) = (a, ka+b)\, k \in z$

۴) $(a,b) = (a, a \pm b)$

۵) $(a,b) = (a,c) = 1 \Rightarrow (a,bc) = 1$

۶) $(a,b) = 1 \Rightarrow (a^n, b) = 1 \Rightarrow (a^n, b^m) = 1 (m,n \in N)$

۷) $(a,b) = 1 \Rightarrow (a+b, ab) = 1$

۸) $a \mid bc, (a,b) = 1 \Rightarrow a \mid c$ لم اقلیدس

۹) p اول است، $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ یا $p \mid b$

۱۰) $(a,b) = 1, c \mid a+b \Rightarrow (a,c) = 1$

۱۱) $(a,b) = d \Rightarrow (\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$

۱۲) $(ka, kb) = k(a,b), k \in N$

۱۳) $(a^n, b^n) = (a,b)^n$

۱۴) $a \mid b \Rightarrow (a,b) = |a|$

۱۵) $a \mid b\ a \mid c \Rightarrow a \mid (b,c)$

۱۶) $ab \mid c \Rightarrow a \mid c, b \mid c$

- اگر عدد طبیعی n مضرب ۷ نباشد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^2 + 9n + 21$ و $n + 7$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(n^2 + 9n + 21, n + 7) = d$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} d \mid n^2 + 9n + 21 \\ d \mid n + 7 \Rightarrow d \mid n^2 + 7n \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}}$$

$$\left.\begin{matrix} d \mid 2n + 21 \\ d \mid n + 7 \Rightarrow d + 2n + 14 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 7 \Rightarrow d = 1$$

کوچکترین مضرب مشترک: برای هر دو عدد صحیح و ناصفر a و b عدد طبیعی $c = [a,b]$ را کوچکترین مضرب مشترک می‌نامیم هرگاه:

۱) $a \mid c$ و $b \mid c$

۲) برای هر عدد طبیعی x اگر $a \mid x$ و $b \mid x$ آنگاه $x \geq c$

قضیه: $[a,b](a,b) = |ab|$

نتایج:

۱) $k \in N, [ka, kb] = k[a,b]$

۲) $k \in N, [a^k, b^k] = [a,b]^k$

۳) $a \mid b \Rightarrow [a,b] = |b|$

۴) $[[a,b],c] = [a,[b,c]], ((a,b),c) = (a,(b,c))$

۵) $[a,(b,c)] = ([a,b],[a,c])$

۶) $(a,[b,c]) = [(a,b),(a,c)]$

- مجموع دو عدد طبیعی ۵۰۴ و بزرگترین شمارنده‌ی آنها ۳۶ می‌باشد، کمترین مقدار برای تفاضل آن دو عدد برابر است با:

$$a = 36a' \qquad a + b = 504 \Rightarrow a' + b' = \frac{504}{36}$$

$$b = 36b' \qquad = 14 = 13 + 1 = 11 + 3 = 9 + 5$$

وقتی $a' = 9$ ، $b' = 5$ تفاضل دو عدد کمترین مقدار است:

$$a - b = (9 - 5) \times 36 = 144$$

همنهشتی:

تعریف همنهشتی: $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow a - b = mk\ \ a,b \in z, m \in N$

نکته۱: همنهشتی یک رابطه‌ی هم ارزی است.

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} a & \text{بازتابی} \\ a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a & \text{تقارنی} \\ a \overset{m}{\equiv} b, b \overset{m}{\equiv} c \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} c & \text{ترایایی} \end{cases}$$

دسته‌های همنهشتی: دسته همنهشتی a به پیمانه‌ی m را به $[a]_m$ نمایش می‌دهند، که مساوی مجموعه: $\{x \mid x \overset{m}{\equiv} a\} = \{x : m \mid x - a\}$ است.

نکته ۲: $[a]_m = [b]_m \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} b$

نکته ۳: $[a]_m = [a + mk]_m$

نکته ۴: تعداد دسته‌های همنهشتی به پیمانه‌ی m دقیقاً برابر با m است.

نکته ۵: مجموعه‌ی هر m عدد صحیحی متوالی، همه دسته‌های همنهشتی به پیمانه‌ی m است.

نکته ۶: اگر مجموعه‌ی $\{b_1 + b_2, ..., b_m\}$ یک دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m باشد و $(a,m) = 1$ و $k \in z$ آنگاه $\{ab_1 + k, ab_2 + k, ..., ab_m + k\}$ یک دسته‌ی همنهشتی است.

نکات همنهشتی:

۷) $a \overset{m}{\equiv} b, c \in z \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c, ac \overset{m}{\equiv} bc$

۸) $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow a \pm mk \overset{m}{\equiv} b$

۹) $a \overset{m}{\equiv} b + c \Leftrightarrow a - c \overset{m}{\equiv} b$

۱۰) $a \overset{m}{\equiv} b, c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow a + c \overset{m}{\equiv} b + d, ac \overset{m}{\equiv} bd$

۱۱) $a \overset{m}{\equiv} b, n \in N \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

۱۲) $ac \overset{m}{\equiv} bc, (m,c) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

۱۳) $a \overset{m}{\equiv} b, n \mid m \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

۱۴) $a \overset{m}{\equiv} b, a \overset{n}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

۱۵) $a \overset{m}{\equiv} b, a \overset{n}{\equiv} b, (m,n) = 1 \Rightarrow a \overset{m.n}{\equiv} b$

۱۶) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow (a,m) = (b,m)$

۱۷) $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

۱۸) $(a-b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n - b^n$ فرد است n

۱۹) $(a-b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$ زوج است n

۲۰) p اول است: $p, (a,p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$ قضیه فرما

۲۱) p اول است: $(a,p) = 1 \Rightarrow a^p \overset{p}{\equiv} a$ تعمیم یافته فرما

۲۲) $(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$ قضیه ویلسن

۲۳) $(a,m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1\ m \in N, a \in z$ قضیه اویلر

باقیمانده تقسیم a بر m مساوی r است. $\Rightarrow 24)\ a \overset{m}{\equiv} r_0,\ 0 \le r < m$

چند نکته در مورد توان رساندن:

۱- اعدادی که رقم یکان آنها ۰،۱،۵،۶ است به هر توانی برسند رقم یکان آنها تغییر نمی‌کند.

۲- رقم سمت راست 4^n: ۶ (n زوج) ؛ ۴ (n فرد)

۳- رقم سمت راست 9^n: ۱ (n زوج) ؛ ۹ (n فرد)

۴-رقم سمت راست $n!$ اگر $n \ge 5$ باشد مساوی صفر است.

- بزرگترین رقم یکان برای عدد $2^{n+5}+3^{n+5}$ به ازاء مقادیر مختلف n برابر با:

باقیمانده‌ی توان بر ۴ یکی از اعداد زیر خواهد بود.

$r = 2 \Rightarrow 2^2 + 3^2 \overset{10}{\equiv} 3$ $\qquad$ $R = 1 \Rightarrow 2^1 + 3^1 \overset{10}{\equiv} 5$

$R = 0 \Rightarrow 2^4 + 3^4 \overset{10}{\equiv} 7$ $\qquad$ $R = 3 \Rightarrow 2^3 + 3^3 \overset{10}{\equiv} 5$

بزرگترین مقدار رقم یکان ۷ است.

معادله همنهشتی

یک معادله همنهشتی به شکل $ax \overset{m}{\equiv} b$ می‌باشد.

شرط وجود جواب: $(a,m) \mid b$

الف- اگر a یا b هر دوی آن‌ها از m بیشتر باشند مضارب m را از آن کم می‌کنیم.

ب- مضارب m را به طرف دوم معادله اضافه یا کم می‌کنیم تا طرفین بر ضریب X قابل قسمت شود.

ج- طرفین معادله را بر ضریب x تقسیم می‌کنیم.

نکته: در معادله $ax \overset{m}{\equiv} b$ اگر x_0 یک جواب معادله باشد داریم:

$$x = x_0 + \frac{m}{d}k \quad (a,m) = d$$

- یک معادله سیاله به شکل کلی $ax + by = c$ می‌باشد که $x, y \in z$

شرط جواب: $(a,b) \mid c$

نکته: اگر x_0 و y_0 یکی از جواب‌های معادله باشند آنگاه $(a,b) = d$

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{d}k \\ y = y_0 - \dfrac{a}{d}k \end{cases}$$

۲: اگر $(a,b) = 1$ آنگاه معادله‌ی $ax + by = c$ همواره

معادله سیاله در مجموعه‌ی z جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد.

دو مجموعه برابر $(A = B)$: دو مجموعه A و B برابرند اگر و تنها اگر اعضایشان یکی باشد.

دو مجموعه هم‌ارز $(A \cong B)$: دو مجموعه A و B را هم ارز گویند هرگاه به هر عضو A یک و فقط یک عضو از B و به هر عضو B یک و تنها یک عضو A نسبت داده شود.

زیر مجموعه $(B \subset A)$: B یک زیر مجموعه از A است اگر هر عضو B عضوی از A نیز باشد.

نتایج:

$1)\ A = B \Leftrightarrow A \subset B, B \subset A$

$2)\ \phi \subset A$

$3)\ A \subset U$

$4)\ A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

$5)\ A \subset A$

مجموعه توانی $p(x)$: مجموعه‌ی کلیه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند x را می‌گوییم.

۱: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی و تعداد عضوهای مجموعه‌ی توانی: 2^n

نکته۲: زیرمجموعه محض(سره):

$$B \subset A,\ B \ne A \Rightarrow n(B) = 2^{n-1}$$

نکته ۳: تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی: $\binom{n}{r}$

اعمال روی مجموعه‌ها

اجتماع (U): $A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$

$1)\ A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$

$2)\ A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

$3)\ A \cup A = A$

$4)\ A \cup \phi = A$

$5)\ A \cup U = U$

$6)\ A \subset B \Leftrightarrow (A \cup C \subset B \cup C)$

$7)\ A \subset C, B \subset D \Rightarrow A \cup B \subset C \cup D$

$8)\ A = B \Rightarrow A \cup C = B \cup C$

$9)\ A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$

$10)\ \bigcup_{i=1}^{n} = A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n$

اشتراک $(\cap)$: $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$

$1)\ A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$

$2)\ A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

$3)\ A \cap A = A$

$4)\ A \cap \phi = \phi$

$5)\ A \cap U = A$

$6)\ A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$

$7)\ A \subset C, B \subset D \Rightarrow A \cap B \subset C \cap D$

$8)\ A = B \Rightarrow A \cap C = B \cap C$

$9)\ A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$

$10)\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n$

دو مجموعه جدا از هم: A و B جدا از هم هستند هرگاه: $A \cap B = \phi$

قانون جذب: $A \cup (A \cap B) = A$ و $A \cap (A \cup B) = A$

$$7)\ A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A - B = \phi \\ B - A = \text{قسمت سایه خورده} \end{cases}$$

تفاضل دو مجموعه $(A - B)$:

$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$

نتایج

$1)\ (A - B) \subset A, (B - A) \subset B$

$$2)\ \begin{cases} (A - B) \cup (A \cap B) = A \\ (B - A) \cup (A \cap B) = B \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} (A - B) \cap (B - A = \phi \\ (A - B) \cap (A \cap B) = \phi \\ (B - A) \cap (A \cap B) = \phi \end{cases}$$

$4)\ \Delta$ (تفاضل متقارن)

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

$5)\ A - B = A, B - A = B$ اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند