۳۱- جواب معادلهٔ $\left[y+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right]dx+\left[x-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right]dy=0$ ، در ناحیهٔ $y>0$، کدام است؟

$$u=\frac{x}{y} \Rightarrow x=u\times y \Rightarrow x'=u'y+u$$

$$\Rightarrow \left(y+\frac{1}{y\sqrt{1-u^2}}\right)\times\frac{dx}{dy}+\left(uy-\frac{uy}{y^2\sqrt{1-u^2}}\right)=0$$

$$\left(y+\frac{1}{y\sqrt{1-u^2}}\right)(u'y+u)+\left(uy-\frac{u}{y\sqrt{1-u^2}}\right)=0$$

$$u'y^2+\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}+uy+\frac{u}{y\sqrt{1-u^2}}+uy-\frac{u}{y\sqrt{1-u^2}}=0$$

$$u'y^2+2uy=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$du\times y^2+u2y\,dy=\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\int d(uy^2)=-\int d(\sin^{-1}(u))$$

$$uy^2=-\sin^{-1}(u)+c$$

$$\boxed{xy+\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)=c}$$

۳۲- در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $4y''+4y'+y=0$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=b>0$ ، مختصات (t_M, y_M) نقطهٔ اکسترمم منحنی جواب، و نوع اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) کدام است؟

$$(2D+1)^2 y = 0 \Rightarrow y = k_1 e^{-\frac{1}{2}t} + k_2 t e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$y(0)=1 \Rightarrow k_1 = 1$$

$$y'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} + k_2 e^{-\frac{1}{2}t} + -\frac{1}{2} k_2 t e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$y'(0) = k_2 - \frac{1}{2} = b \longrightarrow k_2 = b + \frac{1}{2}$$

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(1 + \left(b+\frac{1}{2}\right)t\right)$$

برای اکسترمم نیاز به مشتق داریم $\quad y'(t) = 0$

$$e^{-\frac{1}{2}t}\left[-\frac{1}{2} + \left(-\frac{b}{2} - \frac{1}{4}\right)t + b + \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_M = \frac{4b}{2b+1}}$$

برای بدست آوردن نوع آن باید y' را تعیین علامت کرد

		t_M	
$b-\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{4}\right)t$	+	0	−
	$\nearrow$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$

۳۳- جواب عمومی معادلهٔ ناهمگن $x > 0$ و $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x$، کدام است؟

به روش اویلر حل می‌کنیم $x = e^u$ یا $u = \ln(x)$

$$\left(D(D-1) - 3D + 4\right)y = e^{2u} \times u$$

$$(D-2)^2 y = e^{2u} \times u$$

$$y_h = K_1 e^{2u} + K_2 u e^{2u} \longrightarrow K_1 x^2 + K_2 x^2 \ln(x)$$

$$y_p = \frac{e^{2u} \times u}{(D-2)^2} = e^{2u} \times \frac{u}{(D+2-2)^2}$$

$$= e^{2u} \times \frac{u}{D^2} = e^{2u} \frac{u^3}{6}$$

$$y_{p(x)} \Longrightarrow x^2 \times \frac{[\ln(x)]^3}{6}$$

$$\boxed{y(x) = K_1 x^2 + K_2 x^2 \ln(x) + \frac{x^2}{6}\left(\ln(x)\right)^3}$$

۳۴- پاسخ معادلهٔ $xy''-xy'-y=0$ با شرایط $y(0)=0$ و $y'(0)=2$ ، کدام است؟

۱) $y=2xe^{2x}$

۲) $y=2xe^{-2x}$

۳) $y=2xe^{x}$

۴) $y=2xe^{-x}$

طبق گزینه‌ها جواب بصورت $y=2xe^{Ax}$ است

$$y=2xe^{Ax}$$

$$y'=2e^{Ax}+2Axe^{Ax}$$

$$y''=4Ae^{Ax}+2A^2xe^{Ax}$$

$$x\left[4Ae^{Ax}+2A^2xe^{Ax}\right]-x\left(2e^{Ax}+2Axe^{Ax}\right)-2xe^{Ax}=0$$

$$x\left(4Ae^{Ax}-4e^{Ax}+2A^2xe^{Ax}-2Axe^{Ax}\right)=0$$

$$\Rightarrow A=1$$

$$\Rightarrow \boxed{y=2xe^{x}}$$

۳۵- جواب عمومی دستگاه معادلات $x' = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}x$ ، کدام است؟

$x(0) = \begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم

$$x = (sI - A)^{-1}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s-1 & -1\\ -4 & s-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{s^2-2s+1-4}\begin{pmatrix}s-1 & 1\\ 4 & s-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}$$

$$x(s) = \begin{bmatrix}\frac{s-1}{(s+1)(s-3)} & \frac{1}{(s+1)(s-3)}\\ \frac{4}{(s+1)(s-3)} & \frac{s-1}{(s+1)(s-3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix}\frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-3} & \frac{-\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{\frac{1}{4}}{s-3}\\ \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s-3} & \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}$$

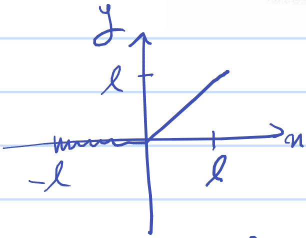
برای راحتی کار شرایط اولیه را یک در نظر می‌گیریم

$$X(t) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}\\ -e^{-t} + e^{3t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{2}{4} e^{2t} \\ \frac{-1}{2} e^{-t} + \frac{2}{2} e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

۳۶- فرض کنیم $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<L \\ 0, & -L<x<0\end{cases}$ ، سری فوریهٔ مثلثاتی تابع $1-f(x)$ کدام است؟



$$1-f(x) = A_0 + \sum A_n\cos(n\omega t) + B_n\sin(n\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_0^l x\,dx = \frac{l^2}{4l} = \frac{l}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_0 = 1-\frac{l}{4}}$$

$$a_0 = \frac{2}{2l}\int_0^l x\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

x	$\cos(\frac{n\pi}{l}x)$
1	$\frac{l}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{l}x)$
0	$-\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\cos(\frac{n\pi}{l}x)$

$$\frac{1}{l}\times\frac{l^2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right] \xrightarrow{n=2k-1}$$

$$a_n = \frac{-2l}{(2k-1)^2\pi^2} \rightarrow \boxed{A_n = \frac{2l}{(2k-1)^2\pi^2}}$$

$$b_n = \frac{2}{2\ell}\int_0^{\ell} x \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

x	$\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$
1	$-\frac{\ell}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$
0	$-\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \times -\frac{\ell^2}{n\pi}(-1)^n = -\frac{\ell}{n\pi}(-1)^n$$

$$\boxed{B_n = \frac{\ell}{n\pi}(-1)^n}$$

۳۷- معادلهٔ موج یک بعدی زیر با شرایط اولیه و مرزی داده شده دارای جواب به صورت $U(x,t)$ می‌باشد. $U(\frac{\pi}{2},\pi)$، کدام است؟

$$\begin{cases} U_{xx} = U_{tt} + \sin x \\ 0 < x < \pi, \quad t > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U(x,0) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ U_t(x,0) = 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases}, \quad \begin{cases} U(0,t) = 0 & t > 0 \\ U(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$U(x,y) = W(x,y) + h(x)$$

$$\begin{cases} W_{xx} = W_{tt} \\ W(x,0) = 0 = f(x) \\ W_t(x,0) = 0 = g(x) \\ W(0,t) + h(0) = 0 \\ W(\pi,t) + h(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h''(x) = \sin(x) \Rightarrow h(x) = -\sin(x)$$

$$W(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau = 0$$

$$\rightarrow U(x,t) = -\sin(x)$$

$$\boxed{U(\frac{\pi}{2},\pi) = -1}$$

۳۸- اگر D ناحیهٔ درون چهارضلعی بارئوس (۱,۰) و (۲,۰) و (۰,۱) و (۰,۲) باشد و $z \in D$ و $f(z) = (z+1)$، آنگاه ماکزیمم و مینیمم $|f(z)|$ بر ناحیهٔ D کدام است؟

Max و min درمرزها رخ می دهد

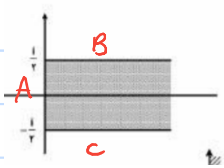
$A(1,0) \rightarrow f(A) = 2 \rightarrow |f(A)| = 2$

$B(2,0) \rightarrow f(B) = 3 \rightarrow |f(B)| = 3 \rightarrow \text{Max}$

$C(0,1) \rightarrow f(C) = j+1 \rightarrow |f(C)| = \sqrt{2} \rightarrow \text{min}$

$D(0,2) \rightarrow f(D) = 2j+1 \rightarrow |f(D)| = \sqrt{5}$

۳۹- تصویر ناحیهٔ زیر تحت نگاشت $w = (1+i)\sin(\pi iz)$ ، کدام است؟

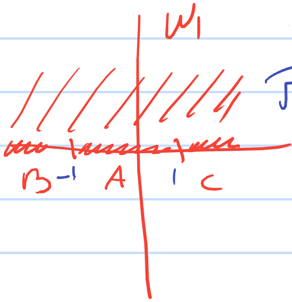


$w_1 = \sin(\pi j z)$ / $u = -\sin(\pi y)\cosh(\pi x)$, $v = \cos(\pi y)\sinh(\pi x)$

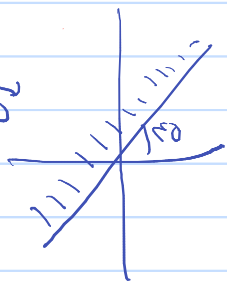
A $\xrightarrow[-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}]{x=0}$ $-1 < u < 1$, $v = 0$

B $\xrightarrow[x>0]{y=\frac{1}{2}}$ $u < -1$, $v = 0$

C $\xrightarrow[x>0]{y=-\frac{1}{2}}$ $u > 1$, $v = 0$



$\xrightarrow{1+j}$ $\sqrt{2}\angle 45$



۴۰- حاصل $\oint_C \frac{1+\tan^2 z}{\tan z} dz$، که در آن $C:|z|=n$ در جهت پاد ساعت گرد می‌باشد، کدام است؟

۱) بزرگترین عدد درست $|k|$ صادق در $n > \frac{|k|\pi}{2}$ زوج باشد، $2\pi i$
بزرگترین عدد درست $|k|$ صادق در $n > \frac{\pi}{2}|k|$ فرد باشد، $-2\pi i$

۲) بزرگترین عدد درست $|k|$ صادق در $n > \frac{|k|\pi}{2}$ فرد باشد، $2\pi i$
بزرگترین عدد درست $|k|$ صادق در $n > \frac{\pi}{2}|k|$ زوج باشد، $-2\pi i$

۳) بزرگترین عدد درست $|k|$ صادق در $n > \frac{|k|\pi}{2}$ فرد باشد، $4\pi i$
بزرگترین عدد درست $|k|$ صادق در $n > \frac{\pi}{2}|k|$ زوج باشد، $-4\pi i$

۴) بزرگترین عدد درست $|k|$ صادق در $n > \frac{|k|\pi}{2}$ زوج باشد، $4\pi i$
بزرگترین عدد درست $|k|$ صادق در $n > \frac{\pi}{2}|k|$ فرد باشد، $-4\pi i$

$$\oint \frac{2}{\sin(2z)} dz \Rightarrow 2z = k\pi \rightarrow \boxed{z = \frac{k\pi}{2}}$$

$n=1$ (فرد) $\quad a_{-1} = \lim_{z\to 0} z \times \frac{2}{\sin(2z)} = 1$

$$\rightarrow \boxed{I = 2\pi j}$$

$n=2$ (زوج)

$$\begin{cases} a_{-1} = \lim_{z\to 0} z \frac{2}{\sin(2z)} = 1 \\ b_{-1} = \lim_{z\to \frac{\pi}{2}} (z-\frac{\pi}{2}) \times \frac{2}{\sin(2z)} = -1 \\ c_{-1} = \lim_{z\to -\frac{\pi}{2}} (z+\frac{\pi}{2}) \times \frac{2}{\sin(2z)} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -2\pi j}$$

۴۱- ۲ توپ زرد و ۳ توپ آبی را به‌طور تصادفی روی یک خط قرار می‌دهیم. احتمال اینکه توپ‌های همرنگ کنار هم قرار گرفته باشند، کدام است؟

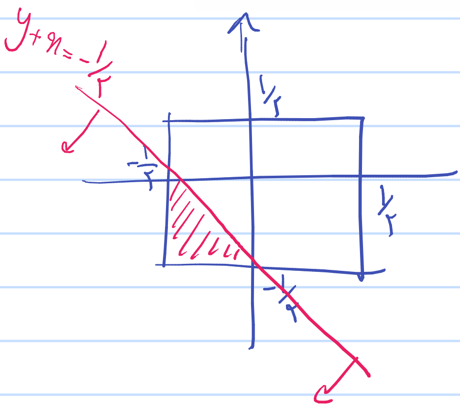
۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

$n(A)=\binom{۲}{۱}\,۲!\times ۳!$

$n(S)=۵!$

$\longrightarrow P(A)=\dfrac{۲\times ۲!\times ۳!}{۵!}=۰/۲$

۴۴- X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم و با توزیع یکنواخت یکسان در بازهٔ $\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right]$ می‌باشند. اگر $Z=X+Y$ باشد، در این صورت مقدار $P(Z<-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟



$P(x+y<-\frac{۱}{۲})$

$P(A)=\dfrac{S(A)}{S(s)}=\dfrac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{۱\times ۱}=\frac{۱}{۸}$