ریاضی عمومی

رابطه و تابع:

رابطه: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند هر زیرمجموعه از $A\times B$ را یک رابطه از A به B می‌گوییم بنابراین R یک رابطه از A به B است هرگاه $R\subseteq A\times B$

مثال: فرض کنید $A=\{1,2\}$ و $B=\{a,b\}$ در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر رابطه از A به B است؟

$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

$R_1=\{(1,a),(2,a),(2,b)\}$ پس $\subseteq A\times B$ ✓

$R_2=\{(1,b),(a,2)\}$ $\not\subseteq A\times B$ ×

$R_3=\{(1,b)\}$ $\subseteq A\times B$ ✓

مثال: فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ در این صورت رابطه $<$ (کوچکتر) و $>$ از A به B را بدست آورید؟

کوچکتر $<=\{(a,b)|a\in A, b\in B\ \ a<b\}$

$=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}\subseteq A\times B$

بزرگتر $>=\{(a,b)|a\in A, b\in B, a>b\}$

$=\{(2,1),(3,1),(3,2)\}\subseteq A\times B$

تعریف وارون رابطه: فرض کنید R یک رابطه از A به B باشد وارون R را با R^{-1} نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$R^{-1}=\{(b,a)|(a,b)\in R\}$

مثال: فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{a,b\}$ در این صورت وارون رابطه $R=\{(1,a),(2,b),(1,b)\}$ را بدست آورید؟

$R^{-1}=\{(a,1),(b,2),(b,1)\}$

تعریف تابع: فرض کنید X و Y دو مجموعه و f یک رابطه از X به Y باشد گوییم f یک تابع از X به Y است هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد؟

1) به ازای $x\in X$ وجود دارد $y\in Y$ بطوریکه $(x,y)\in f$ باشد.

۲) اگر $(x,y) \in f$ و $(x,z) \in f$ باشد آنگاه $z = y$

یعنی اگر مؤلفه‌های اول باهم برابر بودند باید مؤلفه‌های دوم هم باهم برابر باشند.

قرارداد ها :

۱) هرگاه f یک تابع از X به Y باشد آن را با نماد $f: X \to Y$ نشان می‌دهیم.

۲) اگر f یک تابع از X به Y باشد به جای $(x,y) \in f$ می‌نویسیم $y = f(x)$، تساوی اخیر را ضابطه تابع f می‌نامیم.

مثال : فرض کنید $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{a,b,c,d\}$ و f یک رابطه از A به B باشد در این صورت کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع می‌باشد.

1) $f = \{(1,a),(2,b),(2,c)\}$ تابع نیست ⇐ شرط یک برقرار نیست شرط ۲ هم همینطور

۲) $f = \{(1,a),(2,b),(3,b)\}$ تابع است ⇐ شرط یک و دو برقرار است :

۳) $f = \{(1,a),(2,d)\}$ تابع نیست ⇐ شرط یک برقرار نیست

۴) $f = \{(1,a),(2,b),(3,c),(2,b)\}$ تابع است ⇐ هر دو برقرار است

۵) $f = \{(1,a),(2,b)\}$ تابع نیست ⇐ شرط یک برقرار نیست

انواع توابع :

- چندجمله‌ای
- گویا
- رادیکالی با فرجه زوج
- رادیکالی با فرجه فرد

۱) توابع چندجمله‌ای : تابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

که در آن $a_i \in R$ ها $(0 \leq i \leq n)$ و $a_n \neq 0$ باشد $f(x)$ را یک چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم.

★ دامنه یک تابع چندجمله‌ای مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد.

(منظور از دامنه مجموعه مقادیر مجاز x می‌باشد)

$f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4 \qquad D_f = R$

۲) توابع کسری (گویا): $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ $D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

خارج قسمت دو تابع چند جمله‌ای را یک تابع کسری یا گویا می‌گوییم. فرض کنید $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ دو تابع چند جمله‌ای اند. چون کسر زمانی تعریف می‌شود که مخرج آن مخالف صفر باشد بنابراین دامنهٔ تابع کسری یا گویا یعنی مقادیر مجاز x از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \quad D_f=\mathbb{R}-\{x \mid q(x)=0\}$$

مثال: دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

1) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ $\quad x^2-1=0 \quad \Delta=b^2-4ac \quad \Delta=4>0$

$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1=1 \quad x_2=-1$

$D_f=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

2) $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2-x-20}$ $\quad x^2-x-20=0 \quad \Delta=b^2-4ac \quad \Delta=81>0$

$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1=5 \quad x_2=-4$

$D_f=\mathbb{R}-\{-4,5\}$

۳) توابع رادیکالی با فرجه فرد: $\quad$ اعداد فرد $=2k\mp1$ $\quad$ اعداد زوج $=2k$

با توجه به اینکه زیر تابع رادیکالی با فرجه فرد می‌توان اعداد + و − و ۰ قرار بگیرد لذا دامنهٔ تابع رادیکالی با فرجه فرد از فرمول زیر بدست می‌آید

$$f(x)=\sqrt[2k+1]{h(x)} \quad D_f=\text{دامنهٔ عبارت زیر رادیکال} \Rightarrow D_f=D_h$$

مثال: دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید؟

1) $f(x)=\sqrt[7]{\frac{1}{x-1}}$ $\quad D_f=D_{\frac{1}{1-x}}$

$1-x=0 \quad x=1 \quad \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2) $f(x)=\sqrt[99]{\frac{x^2-2x+4}{x^2-6x+9}}$ $\quad D_f=D_{\frac{x^2-2x+4}{x^2-6x+9}}$ تابع کسری

1) $x^2-6x+9=(x-3)(x-3) \quad x-3=0 \quad x=3 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

2) $\Delta=b^2-4ac \quad \Delta>0 \quad x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Date: ۴

۴) تابع رادیکالی با فرجه زوج: $f(x)=\sqrt[2k]{g(x)}$ $\sqrt[28]{+10}$

چون حتماً رادیکال با فرجه زوج زمانی تعریف می‌شود که عبارت زیر رادیکال + و ۰ باشد.
بنابراین برای تعیین دامنه تابع رادیکالی با فرجه زوج باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر
مساوی صفر قرار داده تا مقادیر مجاز x بدست آید.

$f(x)=\sqrt[2k]{g(x)}$ $D_f =$ عبارت زیر رادیکال ≥ 0 $=\{x \mid g(x)\geq 0\}$

مثال: دامنه توابع زیر را بدست آورید؟

1) $f(x)=\sqrt{2x-4}$

$2x-4\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 4 \Rightarrow x\geq \frac{4}{2} \quad x\geq 2$

$D_f=\{x \mid 2x-4\geq 0\}=\{x \mid x\geq 2\}=[2,+\infty)$

2) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}}$ $\begin{cases} x^2-3x=0 \\ -x^2+2x+3=0 \end{cases}$

$x^2-3x=0$ $\Delta=b^2-4ac$ $\Delta>0$ $x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=0 \end{cases}$

$-x^2+2x+3=0$ 〃 〃 〃 $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases}$

$D_f=(-1,0]$

		-1		0		3	
x^2-3x	+		+	0	−	0	+
$-x^2+2x+3$	−	0	+		+	0	−
$\dfrac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}$	−	0	+	0	−	0	−
≥ 0	///		ج	0	///		///

تعریف: فرض کنید f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند توابع جدید $f+g$
و $f-g$ و $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad x\in D_f\cap D_g$

2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x) \qquad x\in D_f\cap D_g$

3) $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x) \qquad x\in D_f\cap D_g$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad x\in (D_f\cap D_g)-\{x \mid g(x)=0\}$

lilo

مثال ۱: فرض کنید تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{4-x}$ در این صورت ضابطه و دامنه توابع $f\pm g$ و $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید؟

$f(x)=\sqrt{x-2} \Rightarrow x-2\geq 0 \quad x\geq 2$

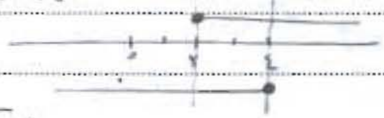
$g(x)=\sqrt{x-4} \Rightarrow x-4\geq 0 \quad x\geq 4$

$D_f=\{x \mid x-2\geq 0\}=\{x \mid x\geq 2\}=[2,+\infty)$

$D_g=\{x \mid 4-x\geq 0\}=\{x \mid 4\geq x\}=(-\infty,4]$

$(f\pm g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$

$x\in D_f\cap D_g=[2,4]$



$(f\times g)(x)=f(x)\times f(g)=\sqrt{x-2}\times\sqrt{4-x}$

$x\in D_f\cap D_g=[2,4]$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{4-x}} \Rightarrow x\in(D_f\cap D_g)-\{x \mid g(x)=0\}$

$x\in[2,4]-\{4\}=[2,4)$

مثال ۲: فرض کنید تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ ضابطه و دامنه توابع $f\pm g$ و $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ را حساب کنید؟

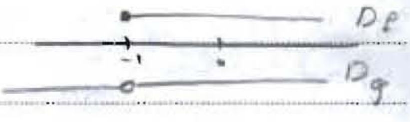
$D_f=\{x \mid x+1\geq 0\}=\{x \mid x\geq -1\}=[-1,+\infty)$

$D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

پس خواهیم داشت

$(f\pm g)=f(x)\pm g(x)=\sqrt{x+1}\pm\frac{2x+1}{x+1}$

$x\in D_f\cap D_g=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$



$(f\times g)=f(x)\times g(x)=(\sqrt{x+1})\times(\frac{2x+1}{x+1})$

$x\in D_f\cap D_g=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$(\frac{f}{g})(\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}}$

$x\in(D_f\cap D_g)-\{x \mid g(x)=0\}$

$\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1+\infty)-\{2\}$

Date: ...۱.......

تعریف: دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را مساوی اند که دو شرط زیر برقرار باشد.

۱) $D_f = D_g$

۲) $(x \in D_f = D_g) \quad f(x) = g(x)$

مثال: کدامیک از توابع داده شده برابرند؟

۱) $f(x) = \dfrac{۲x^۲ + ۵x}{x} \qquad g(x) = ۲x + ۵$

$D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \qquad D_g = \mathbb{R} \qquad f(x) \neq g(x)$ چون شرط اول برقرار نیست

۲) $f(x) = \dfrac{۲x - ۴}{۲x - ۴} \qquad g(x) = ۱$

$۲x - ۴ = ۰ \quad ۲x = ۴ \quad x = ۲$

$D_f = \mathbb{R} - \{۲\} \neq D_g = \mathbb{R}$ شرط دوم برقرار نیست

۳) $f(x) = \dfrac{(۲x+۵)(x^۲+۱)}{(x^۲+۱)} \qquad g(x) = ۲x + ۵$

$x^۲ + ۱ = ۰ \qquad \Delta = b^۲ - ۴ac \quad \Delta = -۴ < ۰$ ریشه حقیقی ندارد

$D_f = \mathbb{R} - \{\ \} = \mathbb{R} \qquad D_g = \mathbb{R} \qquad D_f = D_g$ شرط یک برقرار است

$f(x) = \dfrac{(۲x+۵)\cancel{(x^۲+۱)}}{\cancel{(x^۲+۱)}} = g(x)$ شرط دو برقرار است

پس دو تابع برابرند.

تمرین: دامنه توابع زیر را بدست آورید؟ «(۱)»

۱) $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۲x}$

۲) $f(x) = \sqrt{x+۱} - \dfrac{۱}{\sqrt{۴ - x^۲}}$

۳) $f(x) = \dfrac{۴x^۲ - ۹}{۲x - ۳}$

۴) $f(x) = \sqrt[۳]{\dfrac{۱}{x^۲ - x}}$

۵) $f(x) = \dfrac{۲x - ۱}{\sqrt[x]{x^۲ - ۹}}$

۶) $f(x) = \sqrt{x+۱} + \dfrac{۱}{x}$

Date: ۷

ترکیب دو تابع:

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$ $\qquad$ $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ $\qquad$ $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

مثال: فرض کنید $f(x) = \frac{x}{x-2}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ باشد، ضابطه $g\circ f$, $f\circ g$ و دامنه $f\circ f$, $g\circ f$ را بیابید.

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{x}) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-2} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1-2x}{x}}$

$= \dfrac{x}{x(1-2x)} = \dfrac{1}{1-2x}$ $\qquad$ $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ $\qquad$ $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$= \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{2\}\}$ داریم: $\frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow \frac{1}{x} \neq \frac{2}{1}$

$\Rightarrow 2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}\} \Rightarrow \boxed{\mathbb{R} - \{0, \frac{1}{2}\}}$ دامنه $f\circ g$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{x}{x-2}) \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{x}{x-2}} = \dfrac{x-2}{x}$

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid \frac{x}{x-2} \in \mathbb{R} - \{0\}\}$

$\frac{x}{x-2} \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \frac{x}{x-2} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}\} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

مابقی را خودتان حل کنید.

Date: ۸

مثال: توابع $f(x)=\sqrt{2x}$ و $g(x)=x^2+1$ در این صورت $f\circ g$ و $g\circ f$ را و دامنه آنها را تعیین کنید.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=\sqrt{2(x^2+1)}$

$D_{f\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ $\quad D_f = 2x \geq 0$ چون زیر رادیکال عبارتی قرار دارد

$D_f=[0,+\infty)$ $\quad D_g=\mathbb{R}$ چون چندجمله‌ای است

$\Rightarrow \{x\in\mathbb{R} \mid x^2+1\in[0,+\infty)\}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{2x})=(\sqrt{2x})^2+1=2x+1$

$D_{g\circ f}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[0,+\infty) \mid \sqrt{2x}\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$

تمرین (۲): برای توابع f و g در هر یک از موارد زیر توابع مرکب $g\circ f$ و $f\circ g$ با دامنهٔ آنها تعیین کنید.

1) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\qquad g(x)=\frac{3}{x^2+1}$

2) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ $\qquad g(x)=\frac{x+1}{x}$

3) $f(x)=\sqrt{x-1}$ $\qquad g(x)=3-x$

توابع خاص:

۱) تابع ثابت: $f(x)=c$ $\qquad$ ۲) تابع همانی $f(x)=x$

۳) تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$ $\qquad$ ۴) فاکتوریل $f(n)=n!$

۵) جزء صحیح $f(x)=[x]$

تعریف: اگر برد تابع f فقط مجموعه یکانی باشد آنگاه f را تابع ثابت می‌نامیم و آن را با

$f(x) = c$ نشان می‌دهیم (c عدد ثابت) $\qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \{c\}$

$f(x) = -2 \qquad x = 1 \qquad f(1) = -2 \qquad (1, -2)$

$x = -2 \qquad f(-2) = -2 \qquad (-2, -2)$

چون هیچ متغیری نیست که x به جای آن قرار بگیرد در نتیجه همیشه موازی محور x ها خواهد بود.

۲) تابع همانی: اگر دامنه و برد تابع f مجموعه اعداد حقیقی باشد و برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $f(x)=x$ آنگاه تابع f را یک تابع همانی می‌نامیم.

$f(x) = x \qquad x = 0 \qquad f(0) = 0 \qquad (0, 0)$

$x = -3 \qquad f(-3) = -3 \qquad (-3, -3)$

چون برد و دامنه با یکدیگر برابرند در دستگاه مختصات همیشه یک خط مستقیم خواهد بود و هیچگاه منحنی نخواهد شد.

تابع قدر مطلق: تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ با ضابطه تعریف $f(x) = |x|$ را تابع قدر مطلق می‌نامیم.

$f(x) = |x| \qquad x = -3 \qquad f(-3) = |-3| = 3 \qquad (-3, 3)$

$x = 0 \qquad f(0) = |0| = 0 \qquad (0, 0)$

خواهیم داشت $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

تابع فاکتوریل: تابعی است مانند $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ با ضابطه $f(n) = n!$

می‌باشد که برابر است با $0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \times 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1 \qquad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots \times 1$

خواص قدرمطلق :

۱) $|x| = |-x|$

۲) $|xy| = |x| \cdot |y|$

۳) $|x+y| \leq |x| + |y|$ هر موقع اعداد هم علامت باشند آنگاه مساوی خواهد شد

۴) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ۵) $|x| - |y| \leq |x-y|$

۶) $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

۷) $|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ یا $x \geq a$

دامنه تابع روبرو را محاسبه کنید؟ $f(x)=\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$D_{\sqrt{x+1}}=\{x \mid x+1\geq 0\}=[-1,+\infty)$

$D_{\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}}=\{x \mid 4-x^2>0\}$ چرا بزرگتر؟ چون در مخرج کسر است و نمی‌تواند صفر باشد.

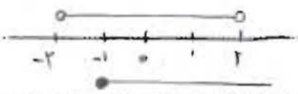
$4-x^2=0$ $a=-1$ $b=0$ $c=4$

$\Delta=b^2-4ac$ $\Delta=16>0$ $x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1=-2$ $x_2=2$

		-2		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$4-x^2>0$			ج		

$D_{\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}}=(-2,2) \Leftarrow$

$D_f=[-1,+\infty)\cap(-2,2)=[-1,2)$



تعریف: تابع حقیقی $f:R\to Z$ با ضابطه تعریف $f(x)=[x]$ را تابع جزء صحیح x می‌نامیم. توجه کنید که برای هر عدد حقیقی x، جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم و عبارت است از بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x.

مثال: $[1.25]=1$ $[-1.5]=-2$ $[0.99]=0$

مثال: تابع $y=[x]$ را در فاصله $-3\leq x\leq 3$ رسم کنید؟

$-3\leq x<-2 \Rightarrow y=[x]=-3$

$-2\leq x<-1 \Rightarrow y=[x]=-2$

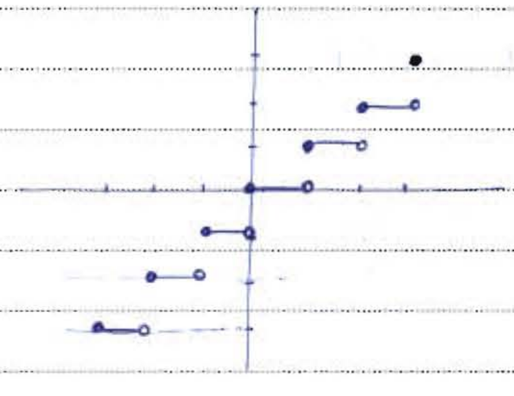
$-1\leq x<0 \Rightarrow y=[x]=-1$

$0\leq x<1 \Rightarrow y=[x]=0$

$1\leq x<2 \Rightarrow y=[x]=1$

$2\leq x<3 \Rightarrow y=[x]=2$

$x=3 \Rightarrow y=[x]=3$



تابع زوج و فرد: تابع $y=f(x)$ را یک تابع زوج می‌نامیم هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم

$1)\ -x \in D_f$

$2)\ f(-x) = f(x)$

تابع $y=f(x)$ را یک تابع فرد می‌نامیم هرگاه به ازای هر x از دامنه f داشته باشیم

$1)\ -x \in D_f$

$۲)\ f(-x) = -f(x)$

در حالت کلی خواهیم داشت
$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{تابع زوج} \\ -f(x) & \text{تابع فرد} \end{cases}$$

مثال (نکته): تنها تابعی که هم زوج و هم فرد است را تابع ثابت صفر می‌نامیم $f(x)=0$

مثال: تعیین کنید کدام یک از توابع زیر زوج یا فرد هستند.

$1)\ f(x) = ۳x^4 + ۵x^۴ - ۲x^۲ + ۳$

$$f(-x) = ۳(-x)^4 + ۵(-x)^۴ - ۲(-x)^۲ + ۳ \Rightarrow f(-x) = ۳x^4 + ۵x^۴ - ۲x^۲ + ۳$$

$f(x) = f(-x)$ پس زوج است

$۲)\ f(x) = ۳x^۳ - ۵x$

از منفی فاکتور می‌گیریم.

$$f(-x) = ۳(-x)^۳ - ۵(-۳) \Rightarrow f(-x) = -۳x^۳ + ۵x = -(۳x^۳ - ۵x)$$

$f(-x) = -f(x)$ تابع فرد است

$۳)\ f(x) = ۷x^۳ - ۹$

$$f(-x) = ۷(-x)^۳ - ۹ \Rightarrow -۷x^۳ - ۹ = -(۷x^۳ + ۶)$$

این تابع نه زوج است نه فرد چون هیچ کدام از شرایط را دارا نمی‌باشد.

$۴)\ f(x) = x|x|$

$$f(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -\left(x|x|\right)$$

$f(-x) = -f(x)$ تابع فرد است

$۵)\ f(x) = \dfrac{x^۲+1}{x}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^۲+1}{(-x)} = \frac{x+1}{-x} = -\frac{x+1}{x} = -f(x)$$

$f(-x) = -f(x)$ تابع فرد است.

تمرین: تعیین کنید کدام یک از توابع زیر زوج یا فرد است؟

۱) $f(x)=\dfrac{4x^2-5}{2x^3+x}$ ۲) $f(x)=\sqrt[3]{x}+x^5$ (۳)

۳) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$ ۴) $f(x)=f(x)=\sqrt{x^2-1}$

تعریف (تابع یک به یک): تابع $f: A \to B$ را یک به یک گوییم هرگاه به ازای هر x_1, x_2 از دامنه f داشته باشیم

$$\underbrace{f(x_1)=f(x_2)}_{\text{شروع محاسبه}} \xrightarrow{?} x_1=x_2$$

مثال: کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

۱) $f(x)=2x^3-5$

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1^3-\cancel{5}=2x_2^3-\cancel{5}$$

$2x_1^3=2x_2^3$ هر دو سمت را بر ۲ تقسیم می‌کنیم $\dfrac{2x_1^3}{2}=\dfrac{2x_2^3}{2} \Rightarrow x_1^3=x_2^3$

چون توان x_1 و x_2 هر دو فرد است پس $x_1=x_2$ تابع یک به یک است.

برای امتحان می‌شود یک عدد منفی و یک عدد مثبت را محاسبه کنیم.

۲) $f(x)=\sqrt[3]{x+5}$ $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x_1+5}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x_2+5}\right)^3$

به توان ۳ می‌بریم تا فرجه ۳ حذف شود

$x_1+\cancel{5}=x_2+\cancel{5}$ $x_1=x_2$

تابع یک به یک

۳) $f(x)=\dfrac{|x|-4}{4}$ $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \dfrac{|x_1|-4}{4}=\dfrac{|x_2|-4}{4}$

هر دو طرف را در ۴ ضرب می‌کنیم صورت ها را تا مخرج حذف شود

$|x_1|\cancel{-4}=|x_2|\cancel{-4}$ $|x_1|=|x_2|$ $x_1 \neq x_2$

$x_1=2$

$x_2=-2$ $|x_1|=|x_2|=2$ ولی چون $x_1 \neq x_2$

یک به یک نخواهد بود.

٤) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ $\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1-3}{x_1+1} = \frac{2x_2-3}{x_2+1}$

طرفین وسطین ضرب می‌کنیم

$(2x_1-3)(x_2+1) = (x_1+1)(2x_2-3)$

$\cancel{2x_1x_2} + 2x_1 - 3x_2 - \cancel{3} = \cancel{2x_2x_1} - 3x_1 + 2x_2 - \cancel{3}$

$+2x_1 - 3x_2 = -3x_1 + 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3x_1 = 2x_2 + 3x_2$

$5x_1 = 5x_2$ بر ۵ تقسیم می‌کنیم $\frac{5x_1}{5} = \frac{5x_2}{5}$ $\quad x_1 = x_2$

یک به یک است.

تمرین: کدام یک از توابع زیر زوج یا فرد هستند.

۱(۴)۱

1) $f(x) = x^2 + |x| - 2$

2) $f(x) = x^3 + x$

3) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x}$

4) $f(x) = |x| - x$

تمرین: یک به یک بودن توابع زیر را مشخص کنید.

1) $f(x) = (4-x)^3$ $\quad$ 2) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ $\quad$ ۱(۵)۱

3) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ $\quad$ 4) $f(x) = \frac{3}{x} - 1$

تابع وارون: تابع $f: A \to B$ را در نظر بگیرید. آن را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب می‌نویسیم

$f = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$

رابطه g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$g = \{(y,x) \mid y = f(x)\}$

واضح است که اعضای رابطه g از جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم رابطه f به دست می‌آید. وارون تابع f یعنی g را با f^{-1} نشان می‌دهیم

$f = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$ $\quad f: A \to B \Rightarrow f^{-1}: B \to A$

$\Rightarrow f^{-1} = \{(y,x) \mid y = f(x)\}$

ویژگی های وارون تابع :

۱) اگر تابع $g_1: B \to A$ ، $g_2: B \to A$ وارون تابع $f: A \to B$ باشند
آنگاه $g_1 = g_2$

((وارون تابع در صورت وجود منحصر به فرد است))

۲) اگر تابع f^{-1} وارون تابع f باشد آنگاه f نیز وارون تابع f^{-1} می باشد

$(f^{-1})^{-1} = f$

۳) برای تعیین تابع f^{-1} باید معادله $y=f(x)$ را برحسب x حل کنیم یعنی از
این معادله مقدار x را برحسب y بدست می آوریم سپس اسم x و y را عوض
می کنیم y بدست آمده همان $f^{-1}(x)$ می باشد.

مثال: وارون توابع زیر را در صورت وجود بیابید؟

1) $f(x)=2x-1$

اولین کار یک به یک بودن باید ثابت شود.

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1-\cancel{1} = 2x_2-\cancel{1}$ $\quad \frac{2x_1}{2}=\frac{2x_2}{2} \Rightarrow x_1=x_2$ یک به یک است

$y=2x-1 \Rightarrow y+1=2x \quad x=\frac{y+1}{2}$

حال اسم x را y و y را x تبدیل می کنیم

$y=\frac{x+1}{2}=f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$

2) $f(x)=\sqrt[5]{x^3-1}$ بررسی یک به یک بودن به عهده خودتان

$y=\sqrt[5]{x^3-1}$ به توان ۵ می رسانیم تا رادیکال حذف شود $\quad y^5=x^3-1 \quad y^5+1=x^3$

$x=\sqrt[3]{y^5+1}=\sqrt[3]{x^3}=x$

$\sqrt[3]{y^5+1}=y=f^{-1}(x)$