www.mtaghavi.ir
وبسایت رسمي مصطفي تقوي كني

* دقیقاً این تست در تمام کلاس‌ها حل شده است این تست متعلق به ریاضی صفر ۹۱ بوده است.

۳۱- معادله‌ی دیفرانسیل $x\frac{dy}{dx}+y^2=0$ با شرط اولیه $y(1)=1$ مفروض است بزرگترین بازه x که در آن مسأله مقدار اولیه دارای جواب باشد، کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{1}{e})$ ۲) $(-\infty,\frac{1}{e}]$

۳) $[\frac{1}{e},\infty)$ ۴) $(\frac{1}{e},\infty)$

* انتظار می‌رفت سؤال نخبه‌تری مطرح شود.

۳۲- اگر $W(f,g)$ رنسکین (Wronskian) مربوط به توابع f و g باشد و تعریف کنیم $u=2f-g$ و $v=f+2g$. آنگاه رنسکین $W(u,v)$ مربوط به توابع u و v برحسب $W(f,g)$ عبارت است از:

۱) $2W(f,g)$ ۲) $3W(f,g)$

۳) $5W(f,g)$ ۴) $9W(f,g)$

۳۳- اگر معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0$ جوابی به صورت $J_\alpha(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha\theta-x\sin\theta)d\theta$ داشته باشد آنگاه $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\cos(x\sin\theta)d\theta$ برابر است با:

۱) $-J_0(x)$ ۲) $-J_0'(x)$

۳) $-J_0''(x)$ ۴) $-J_0'''(x)$

بارها در جزوه نمونه این مسأله در قسمت نیم دامنه حل شده است.

۳۴- برای تابع $f(x)$، وقتی که $0\le x\le 1$ است، یک سری به شکل زیر نوشته شده است. مقدار ضریب a_3 چقدر است؟

$$f(x)=\sum_{n=1,3,5}^{+\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{2}x)\ ,\quad 0\le x\le 1$$

۱) $-\frac{4}{3\pi}$

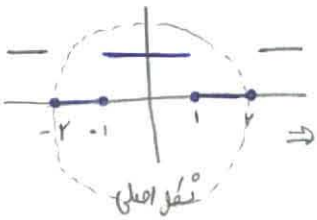
۲) $-\frac{2}{3\pi}$

۳) 0

۴) $\frac{4}{3\pi}$

دوستان که دقت توجه کنند برای شان داده شده نمایش سری فوریه کسینوسی (زوج) تابع $f(x)$ است.

و از آنجایی که $\cos\frac{n\pi}{L}$ ← $L=2$ است بنابراین سری فوریه را ترسیم کرده



$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$a_3=\int_0^1 \cos\frac{3\pi}{2}x\,dx \to \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}=-\frac{2}{3\pi}$$

روش فوق سریع: طبق فرمول ارائه شده در جزوه ←

$$a_n=\frac{4(\frac{1}{2})}{n\pi}=\frac{2}{3\pi}$$

جهت تعیین علامت هم مشاهده می‌شود بالای در منحنی در بازه‌ی c d قرار دارد پس ⊕ است ولی توجه این جمله تمام a_n نیست. (در مورد توابع به این طور می‌شود)

۲ ☑

محل انجام محاسبات

۳۱/ ابتدا جواب معادله را بدست می‌آوریم

$$-\frac{dy}{y^2}=\frac{dt}{t}\to\frac{1}{y}=\ln t+C\xrightarrow{y(1)=1}C=1$$

بنابراین $\Rightarrow y=\frac{1}{1+\ln t}$

حال باید بازه وجود جواب را بررسی کنیم:

$$1+\ln t\neq 0\to \ln t=-1\to t=\frac{1}{e}$$

بازه وجود جواب: $(0,\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},+\infty)$

که شرط اولیه در بازه $(\frac{1}{e},+\infty)$ ارضا شده است ۴ ☑

۳۲/ فقط کافی است تعریف رونسکین را بنویسیم

$$W=\begin{vmatrix} f & g\\ f' & g'\end{vmatrix}=fg'-f'g$$

حال آن چه مسأله می‌خواهد:

$$W^*=\begin{vmatrix} 2f-g & f+2g\\ 2f'-g' & f'+2g'\end{vmatrix}=2(fg'-gf')+(fg'-f'g)$$

$$W^*=5(fg'-gf')=5W$$

3 ☑

۳۳/ بسیار ساده می‌توان تضمین داد حاصل عبارت خواسته شده دوبار مشتق نسبت به x از J_α می‌باشد

$$J_\alpha=\frac{1}{\pi}\int^\pi \cos(\alpha\theta-x\sin\theta)\,d\theta$$

$$J_\alpha'=\frac{1}{\pi}\int^\pi(-\sin\theta)(-\sin(\alpha\theta-x\sin\theta))\,d\theta$$

$$J_\alpha''=\frac{1}{\pi}\int^\pi -\sin^2\theta\,(\cos(\alpha\theta-x\sin\theta))\,d\theta$$

$$J_0''=-I\Rightarrow I=-J_0''(x)$$

۳ ☑

www.tautco.ir
تعاوني اساتيد دانشگاه صنعتي اميركبير

www.mtaghavi.ir
وبسایت رسمي مصطفي تقوي كني

عیناً مثال صفحه ی ← ۲۹۰ جزوه ریاضی مهندسی

۳۸- مسأله مقدار مرزی زیر در داخل یک نیم دایره به مرکز O و به شعاع a و با یک قطر واقع بر محور x را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \nabla^2 T = T_{rr} + \frac{1}{r}T_r + \frac{1}{r^2}T_{\theta\theta} = 0 \ , 0 < r < a \\ T_\theta(r,0) = 0 \ , \ T(r,\pi) = 0 \ , 0 \le r \le a \\ T(a,\theta) = h(\theta) \ \text{تکه‌ای هموار داده شده} \ , 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

پایهٔ متعامد بسط فوریه تابع h مفروض کدام است؟

۱) $\left\{\cos(\frac{2k-1}{2}\theta)\right\}_{k=1}^{\infty}$

۲) $\{\cos(k\theta)\}_{k=1}^{\infty}$

۳) $\left\{\frac{1}{2}, \cos\theta, \cos 2\theta, \cos 3\theta, \dots, \cos n\theta, \dots\right\}$

۴) $\left\{\frac{1}{2}, \cos\frac{\theta}{2}, \cos\frac{3\theta}{2}, \cos\frac{5\theta}{2}, \dots, \cos\frac{2n-1}{2}\theta, \dots\right\}$

شبیه سؤال ص ۱۶۳ با یک ترم کمتر از سؤال جزوه

۳۹- نوار $\frac{\pi}{2} < \text{Im}\{z\} < \pi$ تحت نگاشت $w = \frac{1+e^z}{1-e^z}$ به چه ناحیه‌ای در صفحه w تبدیل می‌شود؟

۱) داخل نیم‌دایره واحد که در آن $\text{Im}\{w\} > 0$

۲) داخل مثلث متساوی الساقین با رئوس $(0,1), (1,0), (-1,0)$

۳) تمام صفحه مختلط به غیر از داخل نیم دایره واحد که در آن $\text{Im}\{w\} > 0$

۴) تمام صفحه مختلط به غیر از داخل مثلث متساوی‌الساقین با رئوس $(0,1), (1,0), (-1,0)$

عیناً مثال ص ۱۲۰ جزوه ریاضی مهندسی

۴۰- مانده‌ی تابع $f(z) = e^z \sinh\frac{1}{z}$ حول نقطه‌ی $z = 0$ برابر است با:

۱) $\sinh 1$

۲) $-\sinh 1$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$

محل انجام محاسبات

۳۸/ کاری با گزینه ها نداریم

شرایط مرزی همگن روی θ می باشد پس باید θ ببینیم

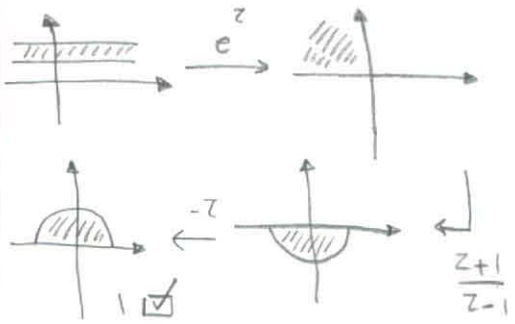
شرایط در طول روی θ تابع است ← Cos تولید می‌کند

θ	π	λ
مشتق	تابع	$\frac{2n-1}{2}\theta$

۴ ☑

۳۹/ ترکیب: $e^z, \ \frac{z+1}{z-1}, \ -z$

نقاط تکین



۱ ☑

۴۰/

$e^z \cdot \sinh(\frac{1}{z})$

$$\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots\right)$$

مانده = ضریب $\frac{1}{z}$ = $1 + \frac{1}{2!4!} + \frac{1}{4!5!} + \dots$

$$= \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$$ ۴ ☑

سطح سؤالات متوسط می باشد

ضمن خسته نباشید آرزوی موفقیت روزافزون

قاسم شعاعلو ۹۲/۱۱/۲۶

امیر رحیمی ۹۲/۱۱/۲۶

www.tautco.ir
تعاوني اساتيد دانشگاه صنعتي اميركبير
کلاسهای آمادگی آزمون دوره مهندسی برق
تعاونی اساتید دانشگاه صنعتی امیرکبیر

www.mtaghavi.ir
وبسایت رسمي مصطفي تقوي كني

۴۱- در یک جعبه ۱۶ مهره قرمز با شماره‌های ۱ تا ۱۶ و ۴ مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۴ قرار دارد. یک مهره را به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم. اگر رنگ آن سفید نباشد یا شماره آن یک نباشد. آن را به جعبه برمی‌گردانیم. آزمایش را آنقدر تکرار می‌کنیم تا مهرهٔ بیرون آمده سفید یا شمارهٔ آن ۱ باشد. متغیر تصادفی X را مساوی تعداد دفعات آزمایش فرض کنید. احتمال $p\{x = n\}$ برای $n = ۱,۲,۳,...$ چقدر است؟

۱) $(\frac{۱}{۳})^n$

۲) $\frac{۵}{۸}(\frac{۳}{۸})^{n-۱}$

۳) $\frac{۱}{۳}(\frac{۳}{۴})^n$

۴) $\frac{۱}{۸}(\frac{۳}{۴})^{n-۱} + \frac{۱}{۱۶}(\frac{۷}{۸})^{n-۱}$

۴۲- متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $(۰,۱)$ می‌باشد. متغیر تصادفی Y با احتمال یکنواخت در بازه $(۰,X)$ انتخاب می‌شود. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y در نقطه $Y = \frac{۱}{۲}$ چه مقداری دارد؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $۲Ln۲$

۴) $Ln۲$

www.mtaghavi.ir
کلاسهای آمادگی ارشد ویژه مهندسی برق
تعاونی اساتید دانشگاه صنعتی امیر کبیر

www.tautco.ir
تعاوني اساتيد دانشگاه صنعتي اميركبير

۳۵) تابع $f(x)$ و تبدیل فوریه آن به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x)=\begin{cases}\sinh|x| , & -\pi<x<\pi\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \quad , \quad F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-jwx}\, dx$$

مقدار $F(1)$ برابر است با :

۱) $-2\cosh\pi-2$ ۲) $-\cosh\pi-1$

۳) $-2\cosh\pi+2$ ۴) $-\cosh\pi+1$

پاسخ: تابع مذکور زوج است ← بنابراین

$$F(w)=2\int_0^{\pi}\sinh x\cos wx\,dx=\int_0^{\pi}e^{x}\cos wx\,dx-\int_0^{\pi}e^{-x}\cos wx\,dx$$

$$=\frac{e^{x}}{w^2+1}(\cos wx+w\sin wx)+\frac{e^{-x}}{w^2+1}(\cos wx-w\sin wx)=0$$

$$=\frac{2\cosh x}{w^2+1}\cos wx\Big|_0^{\pi}+\frac{2\sinh x}{w^2+1}\sin wx\Big|_0^{\pi}=-\cosh\pi-1 \quad ۲ \checkmark$$

این سؤال دقیقاً سؤال ۳۱ آزمون هشتم بیشتر می‌باشد

اینجانب تصویر کم کیفیت از این سؤالات را در اختیار داشتم که مجبور به بازنویسی سؤالات شدم

سؤالات آمار نیز توسط استاد قمی حل نگردیده است.

۳۶ - در مسأله مقدار مرزی

$$\begin{cases} y'' + \gamma y = 0 & \gamma > 0 \\ y(0) = 0 \ , \ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases}$$

۱) $\tan\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma} = 0$

۲) $\tan\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma} = 0$

۳) $\cot\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma} = 0$

۴) $\cot\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma} = 0$

پاسخ / معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم

$m^2 + \lambda = 0$

$m^2 = -\lambda$

$m = \pm i\sqrt{\lambda} \longrightarrow y = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$

$y(0) = 0 \longrightarrow c_1 = 0$

$y = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$

$y' = c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$y(1) + y'(1) = 0$

$c_2 \sin(\sqrt{\lambda}) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$

طرفین را بر $\cos\sqrt{\lambda}$ تقسیم می‌کنیم

$c_2(\tan\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}) = 0$

$\tan\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} = 0$ ۲ ☑

این سؤال عیناً در جزوه معادلات موجود است و در تمرین کلاس حل شده است.

که قبلاً در ریاضی مهر ۹۱ آمده شده است

www.mtaghavi.ir
کلاسهای آمادگی ارشد ویژه مهندسی برق
تعاونی اساتید دانشگاه صنعتی امیرکبیر

www.mtaghavi.ir
وبسایت رسمي مصطفي تقوي كني

۳۷ - در مسأله مقدار اولیه مرزی موج یک بعدی زیر، که در آن $h(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته است.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = h(x) \ , & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ , & t > 0 \end{cases}$$

مقدار $u(\frac{1}{3}, \frac{13}{a})$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) نمی‌توان گفت چون تابع $h(x)$ مقدار داده نشده

طبق فرمول دالامبر:

$$u(x,t) = 0 + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} h(p)\,dp$$

$$u(1/3, 13/a) = 0 + \frac{1}{2a}\int_{1/3-13}^{1/3+13} h(p)\,dp$$

همانطور که می‌دانیم $0 < x < 1 \longrightarrow T = 1$ دوره تناوب

حال چون ۱۳ برابر T به سمت راست و ۱۳ برابر T به سمت چپ حرکت کنیم هیچ تفاوتی در مقدار تابع تحت این نقطه وجود نخواهد داشت و دارای P ها یکسان هستند بنابراین ← اختلاف آن‌ها صفر می‌شود.

گزینه ۲ ☑

(✓) نمونه این تست دقیقاً در صفحه ۲۸۰ جزوه ریاضی مهندسی حل شده است که شبیه سؤال دکتری مکانیک ۹۲ بوده است.

www.tautco.ir
تعاوني اساتيد دانشگاه صنعتي اميركبير

www.mtaghavi.ir
وبسایت رسمی مصطفی تقوی کنی

تاریخ :.....
شماره :.....
پیوست :.....

با یاد تو

پاسخ سؤالات آمار و احتمالات

۱- گزینه ۳

x بیانگر تعداد آزمایش برای رسیدن به اولین موفقیت است

توزیع هندسی است.

$$P\left(\begin{matrix}\text{یا ۱ بیاد}\\ \text{یا سه بیاد}\end{matrix}\right) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=n) = (1-p)^{n-1}p = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

۲- گزینه ۴

$X \sim U(0,1)$

$Y \sim U(0,X) \longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{x} \longrightarrow f_Y\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

x باید حداکثر برابر با مساوی $\frac{1}{2}$ را بخود بگیرد.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_Y(y)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

www.mortezaghomi.ir

کلاسهای آمادگی ارشد ویژه مهندسی برق
www.mtaghavi.ir
تعاونی اساتید دانشگاه صنعتی امیرکبیر

میدان ولیعصر، خیابان ولیعصر، کوچه ناصر، پلاک ۲۳
۲۲۲۲۲۹۵۸

www.tautco.ir
تعاونی اساتید دانشگاه صنعتی امیرکبیر