۶۷) گزینه ۴ صحیح است.

طبق جدول تبدیل فوریه و خاصیت انتقال زمانی داریم:

$$X(\omega)=\frac{e^{j3\omega}}{(2+j\omega)^2}\xrightarrow{F^{-1}}x(t)=(t+3)e^{-2(t+3)}u(t+3)$$

۶۸) گزینه ۳ صحیح است.

$$x(t)=A\delta(t)-\text{sinc}\,t\xrightarrow{F}X(\omega)=A-\prod(\frac{\omega}{2\pi})$$

طبق رابطه داده شده داریم:

$$x(t)*x(t)=x(t)\xrightarrow{F}X^2(\omega)=X(\omega)$$

یعنی باید مجذور $X(\omega)$ برابر خودش شود. در نتیجه باید مقدار ثابت A طوری باشد که حاصل $X(\omega)=A-\prod(\frac{\omega}{2\pi})$ فقط مقادیر صفر و یک داشته باشد تا مجذور آن برابر خودش شود. در نتیجه A باید برابر ۱ باشد.

۶۹) گزینه ۱ صحیح است.

$$X(\omega)=2+\cos\omega=2+\frac{1}{2}e^{j\omega}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\xrightarrow{e^{j\omega}=z}X(z)=2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^{-1}$$

$$\Rightarrow\quad Y(z)=X(z^2)=2+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^{-2}\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}y[n]=2\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n+2]+\frac{1}{2}\delta[n-2]$$

$$\Rightarrow\quad\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y^2[n]=4+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=4/5$$

۷۰) گزینه ۴ صحیح است.

ضرایب فوریه $y[n]$ برابر $Y[k]$ می‌باشد.[1]

$$y[n]=x^2[n]\xrightarrow{FS^{-1}}Y[k]=a_k*a_k=\sum_{m=<N>}a_m a_{k-m}=\sum_{m=0}^{7}a_m a_{k-m}$$

$$\Rightarrow\quad Y[0]=\sum_{m=0}^{7}a_m a_{-m}=a_0\times a_0+a_1\times a_{-1}+\cdots+a_7\times a_{-7}=5$$

$$\Rightarrow\quad Y[1]=\sum_{m=0}^{7}a_m a_{1-m}=a_0\times a_1+a_1\times a_0+\cdots+a_7\times a_{-6}=4$$

۷۱) گزینه ۴ (؟) صحیح است.

بررسی گزینه ۱: یک سیگنال سمت راستی ممکن است بیش از یک قطب داشته باشد.

بررسی گزینه ۲: سیگنال $e^{-j\omega n}$ اگرچه ممکن است متناوب نباشد، اما تبدیل فوریه دارد.

بررسی گزینه ۳: به عنوان مثال نقض، دو سیستم معکوس‌پذیر $y(t)=x(t)$ و $y(t)=-x(t)$ وقتی با هم موازی می‌شوند، سیستم معادل برابر $y(t)=0$ می‌شود که مشخص است وارون‌ناپذیر است، زیرا پاسخ به همه ورودی‌ها، یکسان و برابر صفر می‌شود.

بررسی گزینه ۴: در این حالت، ROC می‌تواند سمت راست راست‌ترین قطب، بین دو قطب و سمت چپ چپ‌ترین قطب باشد.[2]

---

[1] تو صورت تست به اشتباه، $y[k]$ بیان شده ولی بعید است که این تست حذف شود.

[2] البته بهتر بود طراح، محدود بودن قطب‌ها و همچنین مزدوج نبودن قطب‌ها رو هم ذکر می‌کرد. با این حساب میشه گفت حتی این گزینه هم لزوماً صحیح نیست!

۷۲) گزینه ۱ صحیح است.[1]

در مورد سیستم ۱ داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\alpha)g(\alpha-t)d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\alpha)g(\alpha-t)u(t-\alpha)d\alpha=x(t)*\underbrace{g(-t)u(t)}_{h(t)}\quad\Rightarrow$$ سیستم LTI است.

در مورد سیستم ۲ داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)x(t-\alpha)u(t-\alpha)d\alpha=x(t)u(t)*f(t)\quad\Rightarrow$$ سیستم LTI نیست.

۷۳) گزینه ۲ صحیح است.

خروجی $g(t)=\cos(2\pi\times 50\times t)=\frac{1}{2}e^{j100\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j100\pi t}$ دارای دو فرکانس $\omega=\pm 100\pi$ می‌باشد. بنابراین به دلیل LTI بودن سیستم، حتماً باید این فرکانس‌ها در ورودی هم موجود بوده باشند.

بررسی گزینه ۱: این سیگنال با دوره تناوب اصلی $T=0/01$ متناوب است. در نتیجه با توجه به بسط سری فوریه آن، تنها شامل هارمونیک‌های $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/01}=200\pi$ می‌باشد و قطعاً شامل فرکانس $\omega=\pm 100\pi$ نیست.

بررسی گزینه ۲: این سیگنال با دوره تناوب اصلی $T=0/04$ متناوب است. در نتیجه با توجه به بسط سری فوریه آن، شامل هارمونیک‌های $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/04}=50\pi$ می‌باشد و در نتیجه شامل فرکانس $\pm 2\omega_0=\pm 100\pi$ خواهد بود.

بررسی گزینه ۳: این سیگنال برابر $x(t)=k\cos(50\pi t)$ می‌باشد که فقط شامل فرکانس‌های $\omega=\pm 50\pi$ است.

بررسی گزینه ۴: این سیگنال با دوره تناوب اصلی $T=0/04$ متناوب است. در نتیجه با توجه به بسط سری فوریه آن، تنها شامل هارمونیک‌های $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/04}=50\pi$ می‌باشد، اما چون شکل سیگنال تقارن نیم موج دارد، شامل هارمونیک‌های زوج نیست و فقط هامونیک‌های فرد را دارد. بنابراین شامل هارمونیک دوم $\omega_0=50\pi$ یعنی فرکانس‌های $\omega=\pm 100\pi$ نمی‌باشد.

۷۴) گزینه ۳ صحیح است.

$$y(t)=h(t)*x(t)=h(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)\delta(t-4k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)h(t)*\delta(t-4k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)h(t-4k)$$

$$\Rightarrow\qquad y(t)=h(t)+2h(t-4)+2h(t+4)+5h(t-8)+5h(t+8)+\cdots$$

با جایگذاری $t=2$ در تساوی فوق، خواهیم داشت:

$$y(2)=\underbrace{h(2)}_{4}+2\underbrace{h(-2)}_{2}+2\underbrace{h(6)}_{0}+5\underbrace{h(-6)}_{0}+5\underbrace{h(10)}_{0}+\underbrace{\cdots}_{0}=8$$

۷۵) گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا تابع تبدیل سیستم ۱ را به‌دست می‌آوریم:

$$Z(z)=\frac{1}{2}X(z)z^{-1}+2X(z)\qquad\Rightarrow\qquad H_1(z)=\frac{Z(z)}{X(z)}=\frac{1}{2}z^{-1}+2$$

---

[1] البته معلوم نیست چرا طراح، لفظ «می‌تواند» را برای این تست استفاده کرده است! در صورتی که در اینجا به صورت قطعی می‌توان در مورد LTI بودن یا نبودن این دو سیستم اظهار نظر کرد.

تابع تبدیل سیستم ۲ نیز برابر است با:

$$h_۲[n]=(-\frac{۱}{۲})^n u[n] \quad \Rightarrow \quad H_۲(z)=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}z^{-۱}}$$

حال با ضرب دو تابع تبدیل، تابع تبدیل سیستم کل برابر می‌شود با:

$$H(z)=H_۱(z)\cdot H_۲(z)=\frac{\frac{۱}{۲}z^{-۱}+۲}{۱+\frac{۱}{۲}z^{-۱}}=۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}z^{-۱}}$$

۷۶) گزینه ۲ صحیح است.

$$s[n]=\delta[n]+a\,h[n-۱] \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad S(z)=۱+az^{-۱}H(z)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که $S(z)=\frac{۱}{۱-z^{-۱}}H(z)$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۱-z^{-۱}}H(z)=۱+az^{-۱}H(z) \quad \Rightarrow \quad H(z)=۱-z^{-۱}+\left(az^{-۱}-az^{-۲}\right)H(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z)=\frac{۱-z^{-۱}}{۱-az^{-۱}+az^{-۲}}=\frac{z^۲-z}{z^۲-az+a}$$

طبق صورت تست، سیستم علی است؛ پس می‌توان قضیه مقدار اولیه را اعمال کرد. همچنین اگر سیستم پایدار نیز باشد، حتماً همه قطب‌های $H(z)$ و همچنین قطب‌های $(۱-z^{-۱})H(z)$ در داخل دایره یکه قرار می‌گیرند و بنابراین قضیه مقدار نهایی نیز برقرار است. در نتیجه با توجه به قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی داریم:

$$h[۰]=\lim_{z\to\infty}H(z)=۱ \quad , \quad h[+\infty]=\lim_{z\to ۱}(۱-z^{-۱})H(z)=\lim_{z\to ۱}\frac{z-۱}{z}\cdot\frac{z^۲-z}{z^۲-az+a}=۰$$

۷۷) گزینه ؟ صحیح است.

$$z[n]=x[n+۱] \quad \xleftrightarrow{F} \quad Z(\omega)=X(\omega)e^{j\omega}$$

$$y[n]=z[۲n]=x[۲n+۱] \quad \xleftrightarrow{F} \quad Y(\omega)=\frac{۱}{۲}\sum_{i=۰}^{۱}Z\left(\frac{\omega}{۲}-\frac{۲\pi}{۲}i\right)=\frac{۱}{۲}Z(\frac{\omega}{۲})+\frac{۱}{۲}Z(\frac{\omega}{۲}-\pi)$$

$$Y(\omega)=\frac{۱}{۲}X(\frac{\omega}{۲})e^{j\frac{\omega}{۲}}+\frac{۱}{۲}X(\frac{\omega}{۲}-\pi)e^{j(\frac{\omega}{۲}-\pi)}$$

۷۸) گزینه ۲ صحیح است.

$$H(z)=\frac{۱}{z^{-۱}-\frac{۵}{۲}z^{-۲}+z^{-۳}}=\frac{z^۳}{z^۲-\frac{۵}{۲}z+۱}$$

چون درجه صورت بیشتر از مخرج است، پس سیستم قطعاً و همواره غیرعلی است؛ زیرا در بینهایت قطب داریم.