Third Edition

CHAPTER 3

MECHANICS OF MATERIALS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

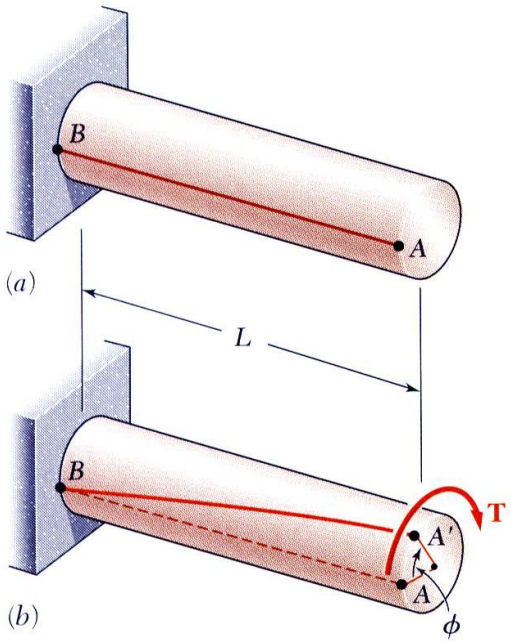
Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

پیچش

- ✓ در مقاع دایره ای
- ✓ در مقاطع مستطیلی
- ✓ در مقاع جدارنازک

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

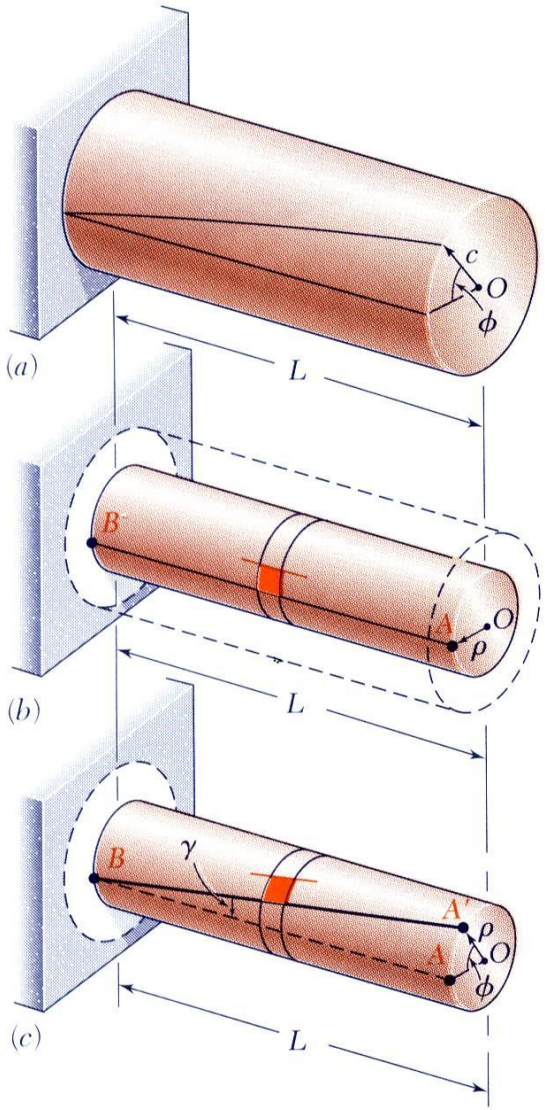
پیچش در مقاطع دایره ای



- در شکل مقابل میله ای با مقع عرضی دایره تحت اثر لنگر پیچشی T در انتهای خود قرار گرفته است. در این حالت از بارگذاری تمامی مقاطع عرضی میله تحت اثر لنگر پیچشی T قرار گرفته و وضعیت پیچش خالص ایجاد شده است.
- مقاطع دایره ای پس از پیچش نیز دایره ای باقی می مانند.
- میزان دوران هر مقطع از میله را زاویه پیچش مقطع نامیده و با φ نشان می دهیم.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

پیچش در مقاطع دایره ای



- پس از تیرشک نقطه ای مانند A به وضعیت Á منتقل می شود. طول کمان AÁ با توجه به شکل عبارت است از:

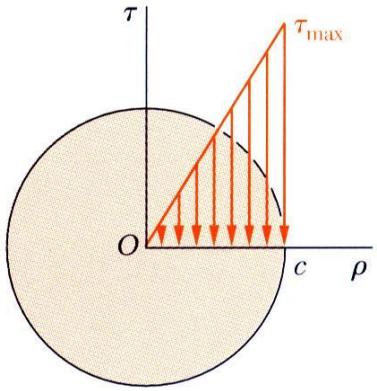
$$L\gamma = \rho\phi \quad \text{or} \quad \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\max}$$

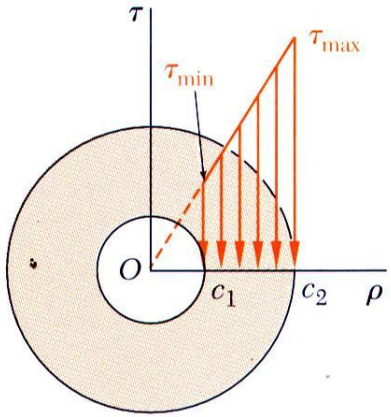
- بنابراین کرنش های برشی به صورت خطی تغییر کرده و متناسب با مرکز سطح می باشند.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

پیچش در مقاطع دایره ای



$$J = \frac{1}{2}\pi c^4$$



$$J = \frac{1}{2}\pi\left(c_2^4 - c_1^4\right)$$

- در اثر لنگر پیچشی T در مقطع، تنش های برشی به صورت عمود بر شعاع اثر می کنند.
- جهت تنش های برشی در نقاط مختلف دایره به سمتی است که حو مرکز آن، گشتاوری هم جهت با T ایجاد کند.
- اگر رابطه تنش و کرنش خطی فرض شود، تنش های برشی متناسب با فاصله از مرکز می باشد.

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

- با توجه به قانون هوک در برش خواهیم داشت:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \frac{TL}{JG}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

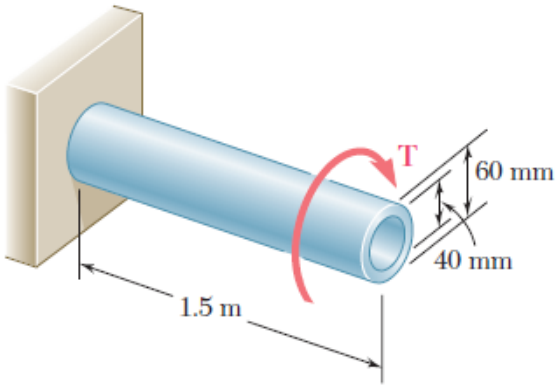
مثال:

یک لوله فولادی به طول 1.5m و با قطر خارجی و داخلی به ترتیب 60mm و 40mm مفروض است. اگر تنش برشی مجاز آن 120Mpa باشد، مطلوب است:

الف) حداکثر لنگر پیچشی وارد بر لوله.

ب) تنش برشی حداقل ایجاد شده در لوله تحت اثر لنگر پیچشی بند قبل.

ج) اگر مدول برشی G=77GPa باشد، لنگر پیچشی که منجر به زاویه پیچش ۲ درجه می گردد را محاسبه کنید.



حل :

$$\tau = \frac{Tc}{J} \rightarrow T = \frac{\tau J}{c}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}(30^4 - 20^4)$$

$$J = 1.021 \times 10^{-6} m^4$$

$$T = \frac{(120 \times 10^6)(1.021 \times 10^{-6})}{0.03}$$

$$T = 4.08\ KN.m$$

$$\tau_{min} = \frac{Tc_1}{J} = \frac{4.08 \times 10^6 \times 20}{1.021 \times 10^6}$$

$$= 80Mpa$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال:

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \qquad L = 1.5 \text{ m}$$

$$\phi = 2°\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = 34.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$J = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$T = \frac{JG}{L}\phi = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}{1.5 \text{ m}}(34.9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$T = 1.829 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.829 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال:

یک میله فولادی به دو صورت توپر و لوله ای مفروض است. میله مذکور باید بتواند لنگر پیچشی ,.1200N را تحمل کند. چنان چه تنش برشی مجاز فولاد 40Mpa باشد، مطلوب است محاسبه:

1) قطر میله فولادی توپر
2) قطر خارجی لوله فولادی در صورتی که ضخامت لوله 0.1 قطر خارجی آن باشد.

حل:

$$\tau = \frac{Tc}{J} \xrightarrow{J=\frac{\pi}{2}c^4} d_0^3 = \frac{16T}{\pi\tau}$$

$$d_0^3 = \frac{16 \times 1200}{\pi \times 40 \times 10^6} = 152.8 \times 10^{-6} m$$

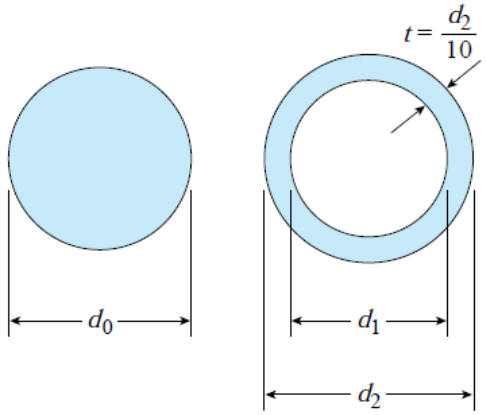
$$d_0 = 0.0535m = 53.5mm$$

$$d_1 = d_2 - 2t = d_2 - 2(0.1d_2) = 0.8d_2$$

$$I_P = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32}\left[d_2^4 - (0.8d_2)^4\right] = \frac{\pi}{32}(0.5904d_2^4) = 0.05796d_2^4$$

$$\tau_{\text{allow}} = \frac{Tr}{I_P} = \frac{T(d_2/2)}{0.05796d_2^4} = \frac{T}{0.1159d_2^3}$$

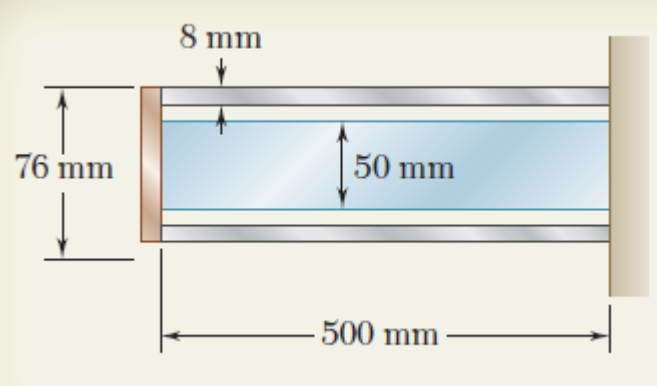
$$d_2^3 = \frac{T}{0.1159\tau_{\text{allow}}} = \frac{1200\ \text{N·m}}{0.1159(40\ \text{MPa})} = 258.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$



© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

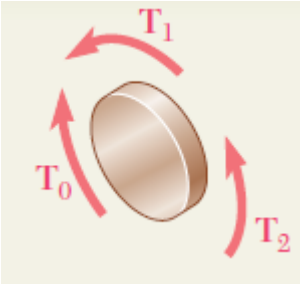
مثال:

میله فولادی و لوله آلومینیومی به یک تکیه گاه ثابت و یک صفحه صلب متصل شده اند. اگر مقاومت برشی مجاز فولاد و آلومینیوم به ترتیب 120MPa و 70MPa و مدول برشی فولاد و آلومینیوم به ترتیب، 77GPa و 27GPa باشد، حداکثر لنگر پیچشی قابل تحمل توسط مجموعه را حساب کنید.



© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال:



$$T_0 = T_1 + T_2$$

ابتدا معادله تعائل استاتیکی را می نویسیم:
اندیس ۱ برای آلومینیوم و اندیس ۲ برای فولاد استفاده شده است.

معادله سازگاری زاویه پیچش ها را می نویسیم:

$$\phi_1 = \phi_2: \qquad \frac{T_1 L_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{J_2 G_2}$$

$$\frac{T_1(0.5\text{ m})}{(2.003 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(27\text{ GPa})} = \frac{T_2(0.5\text{ m})}{(0.614 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(77\text{ GPa})}$$

$$T_2 = 0.874 T_1$$

ابتدا تنش مجاز آلومینیوم را مبنای محاسبات قرار می دهیم:

$$T_1 = \frac{\tau_{\text{alum}} J_1}{c_1} = \frac{(70\text{ MPa})(2.003 \times 10^{-6}\text{ m}^4)}{0.038\text{ m}} = 3690\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_2 = 0.874 T_1 = 0.874(3690) = 3225\text{ N} \cdot \text{m}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال:

با توجه به لنگر پیچشی به دست آمده برای فولاد، تنش برشی فولاد را کنترل می کنیم.

$$\tau_{\text{steel}} = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{(3225\ \text{N} \cdot \text{m})(0.025\ \text{m})}{0.614 \times 10^{-6}\ \text{m}^4} = 131.3\ \text{MPa}$$

تنش برشی به دست آمده بیش تر از تنش مجاز فولاد است لذا مقادیر لنگرهای پیچشی مورد قبول نیست و محاسبات مراحل قبل را با مبنا قرار دادن تنش برشی مجاز فولاد تکرار می کنیم.

$$T_2 = \frac{\tau_{\text{steel}} J_2}{c_2} = \frac{(120\ \text{MPa})(0.614 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)}{0.025\ \text{m}} = 2950\ \text{N} \cdot \text{m}$$

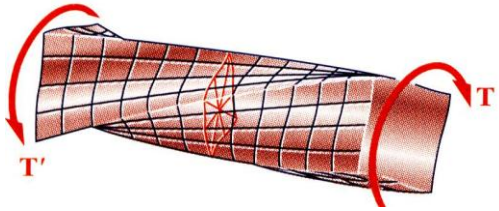
$$2950\ \text{N} \cdot \text{m} = 0.874 T_1 \qquad T_1 = 3375\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$T_0 = T_1 + T_2 = 3375\ \text{N} \cdot \text{m} + 2950\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$T_0 = 6.325\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

پیچش مقاطع غیر دایره ای



- روابط قبلی فقط برای پیچش مقاطع دایره ای معتبر است.

- در مقاطع غیردایره ای، تحت اثر پیچش، مقطع عرضی مسطح باقی نمانده و دچار اعوجاج می شود. در این حالت نیز اعوجاج به گونه ای است که هیچ تاری تغییرطول نداده و تغییرسطح و تغییر حجم نیز در میله حاصل نمی شود.

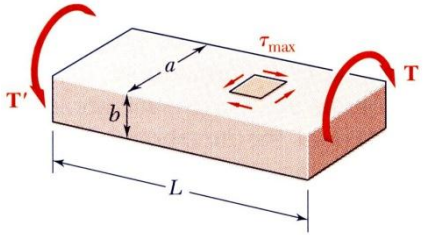
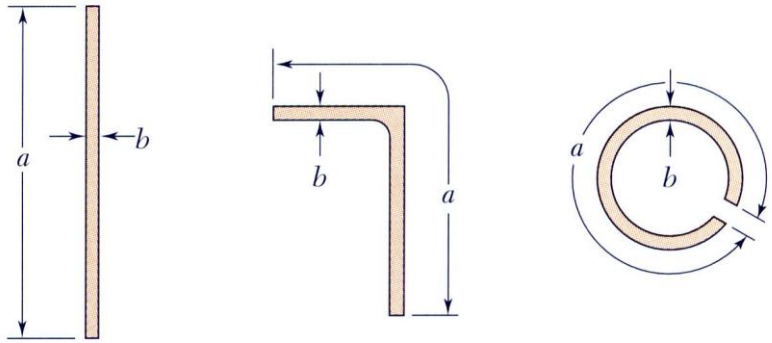


TABLE 3.1. Coefficients for Rectangular Bars in Torsion

a/b	c_1	c_2
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

- در این مقاطع حداکثر تنش برشی در وسط ضلع بزرگتر رخ داده و از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 a b^2} \qquad \phi = \frac{TL}{c_2 a b^3 G}$$



- تنش برشی در گوشه ها و در مرکز سطح مستطیل صفر می باشد.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

پیچش مقاطع غیر دایره ای

- با افزایش نسبت a/b ضریب c_1 افزایش یافته و تنش برشی حداکثر، در حاتی که a/b به سمت بی نهایت میل می کند از رابطه زیر به دست می آید:

$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{1}{3}ab^2} = \frac{3T}{ab^2}$$

- در مقاطع مربع شکل (a/b=1) تنش برشی حداکثر عبارت است از:

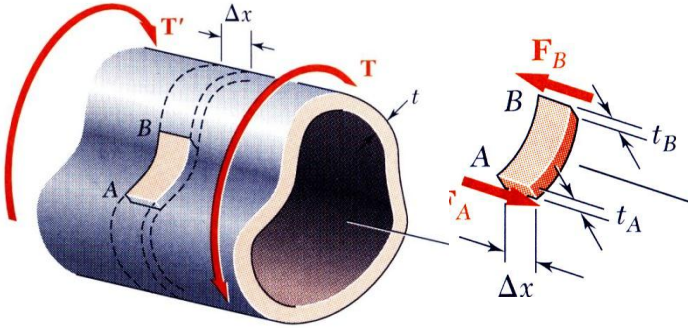
$$\tau_{max} = \frac{T}{0.2ab^2} = \frac{5T}{ab^2}$$

- در نتیجه تنش برشی در یک مقطع مستطیلی در بازه زیر قرار دارد:

$$\frac{3T}{ab^2} \leq \tau_{max} \leq \frac{5T}{ab^2}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

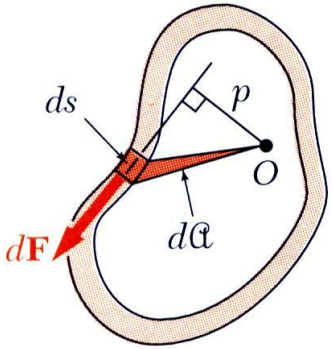
پیچش مقاطع جدارنازک بسته



- در شکل مقابل بر یک مقطع جدارنازک بسته لنگر پیچشی T اثر کرده است با در نظر گرفتن تعادل المان جزئی در راستای افق می توان نوشت:

$$\sum F_x = 0 = \tau_A(t_A \Delta x) - \tau_B(t_B \Delta x)$$

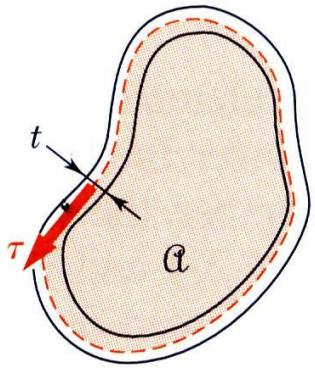
$$\tau_A t_A = \tau_B t_B = \tau t = q = \text{shear flow}$$



- حاصلضرب τt معادل جریان برش در مقطع بوده و در نقاط مختلف یک مقطع جدارنازک بسته مقدار ثابتی است.

- در نقطه ای با ضخامت t تنش برشی ناشی از پیچش عبارت است از:

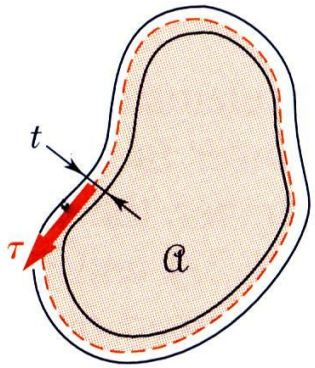
$$\tau = \frac{T}{2A_m t}$$



- A مساحت سطح محصور درون منحنی بسته ای است که از وسط ضخامت مقطع عبور می کند.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

پیچش مقاطع جدارنازک بسته



- برای محاسبه زاویه پیچش از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\varphi = \frac{TL}{GJ}$$

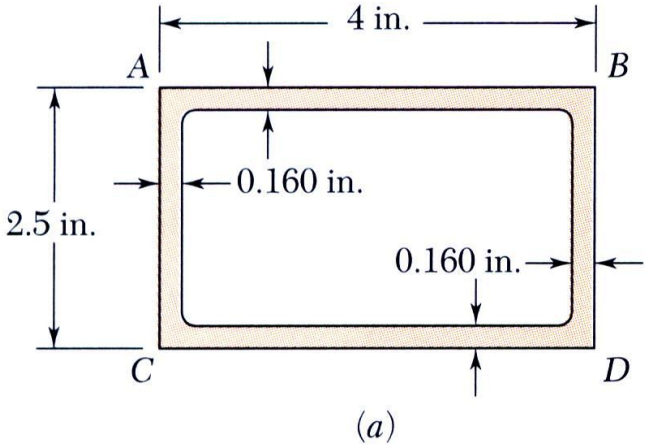
$$J = \frac{4tA_m^2}{L_m}$$

در رابطه فوق محیط منحنی بسته ای L_m است که از وسط ضخامت مقطع عبور می کند.

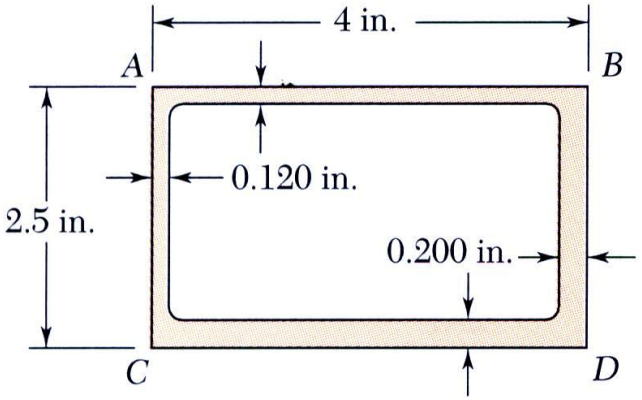
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال:

مقاطع جدارنازک بسته زیر مفروض است، تـنش برشـی را در هر دو حالت برای تمامی اضلاع محاسبه کنید.



(a)



(b)

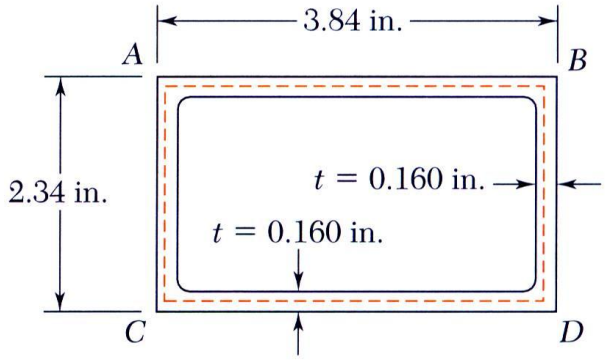
SOLUTION:

- ابتدا پارامتر A را محاسبه می کنیم.
- سپس با جایگذاری در رابطه مربوطه، تنش یرشی را به اذای ضخامت های مختلف محاسبه می کنیم.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Example 3.10

SOLUTION:



$$A = (3.84\text{in.})(2.34\text{in.}) = 8.986\text{in.}^2$$

$$q = \frac{T}{2A} = \frac{24\text{kip - in.}}{2(8.986\text{in.}^2)} = 1.335\frac{\text{kip}}{\text{in.}}$$

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{1.335\text{kip/in.}}{0.160\text{in.}}$$

$$\boxed{\tau = 8.34\text{ksi}}$$

with a variable wall thickness

$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{1.335\text{kip/in.}}{0.120\text{in.}}$$

$$\boxed{\tau_{AB} = \tau_{BC} = 11.13\text{ksi}}$$

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{1.335\text{kip/in.}}{0.200\text{in.}}$$

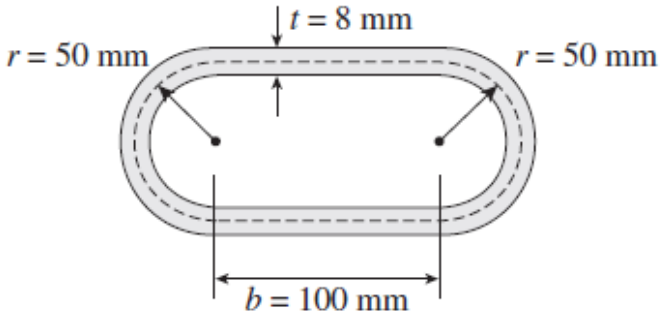
$$\boxed{\tau_{BC} = \tau_{CD} = 6.68\text{ksi}}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال:

برای مقطع جدارنازک بسته نشان داده شده در شکل زیر تنش برشی حداکثر و زاویه پیچش را محاسبه کنید:

L=1.5m, T=10KN.m, G=70GPa



ابتدا پارامترهای A_m و L_m حساب شود:

$$A_m = \pi r^2 + 2br$$
$$A_m = \pi\,(50\text{ mm})^2 + 2(100\text{ mm})(50\text{ mm})$$
$$= 17{,}850\text{ mm}^2$$
$$L_m = 2b + 2\pi r$$
$$= 2(100\text{ mm}) + 2\pi(50\text{ mm})$$
$$= 514.2\text{ mm}$$
$$J = \frac{4tA_m^2}{L_m} = \frac{4(8\text{ mm})(17{,}850\text{ mm}^2)^2}{514.2\text{ mm}}$$
$$= 19.83 \times 10^6\text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{T}{2tA_m} = \frac{10\text{ kN}\cdot\text{m}}{2(8\text{ mm})(17{,}850\text{ mm}^2)}$$
$$= 35.0\text{ MPa} \quad \leftarrow$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{(10\text{ kN}\cdot\text{ m})(1.5\text{ m})}{(76\text{ GPa})(19.83 \times 10^6\text{ mm}^4)}$$
$$= 0.00995\text{ rad}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.