سرشاخ شدن با کنکور
konkoori.blog.ir

سرشاخ شدن با کنکور

- خلاصه مطالب دروس
- جزوات برترین اساتید
- ارایه نکات کنکوری
- مشاوره کنکور
- اخبار کنکوری ها

«همه و همه در سرشاخ شدن با کنکور»

www.konkoori.blog.ir

جزوه ی ریاضی ۳

فصل سوم

حد و پیوستگی

[مولف: عبدالکریم قزل]

تعریف حد تابع :

اگر دامنه ی تابع f بازه ی I باشد و نقطه ی a به گونه ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد ، یعنی بتوان داخل I نقاطی متمایز از a را یافت که به a نزدیک باشند، آن گاه با نزدیک شدن متغیر x (در بازه I) به نقطه ی a ممکن است مقدارهای f(x) به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند که در این حالت می گوییم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن L است و می نویسیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

مثال : $\lim_{x\to ۱} ۲x + ۱ = ۳$

حد راست و حد چپ یک تابع:

حد راست : تابع f را که در بازه ی باز I شامل $x_{.}$ تعریف شده است ، مگر احتمالا در خود $x_{.}$ ، در نظر می گیریم. اگر x از سمت راست به $x_{.}$ نزدیک شود و مقدارهای تابع f به عددی مانند $L_۱$ نزدیک شوند ، $L_۱$ را حد راست تابع f در $x_{.}$ می نامیم و می نویسیم : $\lim_{x\to x_{.}^{+}} f(x) = L_۱$

حدچپ : تابع f را که در بازه ی باز I شامل $x_{.}$ تعریف شده است ، مگر احتمالا در خود $x_{.}$ ، در نظر می گیریم. اگر x از سمت چپ به $x_{.}$ نزدیک شود و مقدارهای تابع f به عددی مانند $L_۲$ نزدیک شوند ، $L_۱$ را حد چپ تابع f در $x_{.}$ می نامیم و می نویسیم : $\lim_{x\to x_{.}^{-}} f(x) = L_۲$

نتیجه : $\lim_{x\to x_{.}} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_{.}^{+}} f(x) = \lim_{x\to x_{.}^{-}} f(x) = L$

یعنی اگر $x_{.}$ نقطه ی میانی در دامنه f باشد و تابع f در نقطه ی $x_{.}$ حد راست و حدچپ داشته باشد ، و این دو حد باهم برابر باشند ، تابع در $x_{.}$ دارای حد است.برعکس ، اگرتابع در یک نقطه حد داشته باشد ، در آن نقطه حد راست و حد چپ دارد و این دو حد با هم برابرند.

مثال) آیا تابع $f(x)=\sqrt{x-۳}$ وقتی $x\to ۳$ دارای حد است ؟ چرا ؟ (سوال ۹ امتحان نهایی خرداد۸۷)

حل : خیر، زیرا دامنه ی این تابع$[۳, +\infty)$ است ، پس حدچپ این تابع در x=۳ وجود ندارد،درنتیجه تابع حد ندارد.

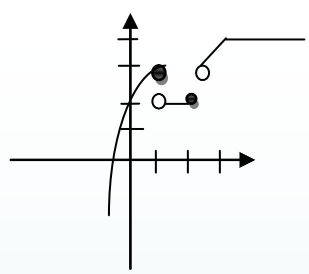
تعیین حدتابع با استفاده از نمودار

برای محاسبه ی حد از روی نمودار ، حتما باید حدچپ و راست تابع را در نقطه ی داده شده حساب کنیم. اگراین دو حد باهم برابر باشند آن گاه تابع در آن نقطه دارای حد است.

مثال : نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -\frac{۱}{۲}x & x \geq ۱ \\ ۴ - x^۲ & x < ۱ \end{cases}$ **را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در** $x=۱$ **بررسی کنید.**

حل : تابع حد ندارد. (برعهده ی دانش آموز) **(سوال ۹ امتحان نهایی خرداد ۹۰)**

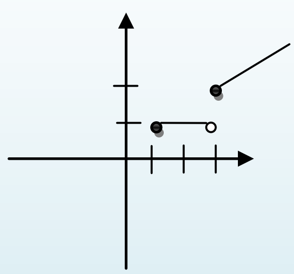
تمرین ۱) باتوجه به نمودارتابع f حاصل عبارت زیر را به دست آورید.



$$۳\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۱^-} f(x) + ۲f(۳)$$

(سوال ۹ امتحان نهایی خرداد ۸۹)

تمرین ۲) با توجه به نمودار تابع $f(x)$ **، حاصل عبارات زیر را بنویسید.**



الف) $\lim_{x\to ۳^+} f(x)$

ب) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$

ج) $\lim_{x\to ۳^-} f(x)$

د) $f(۳)$

(سوال ۱۰ امتحان نهایی دی ۹۰)

قضایای حد

قضیه ی ۱ : حد تابع ثابت f(x)=k (k عددی است حقیقی و ثابت) در هر عدد دلخواه x_0 ، برابر همان مقدار ثابت k است

یعنی : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = k$

قضیه ی ۲ : حدتابع f(x)=x (تابع همانی) در هرنقطه ی x_0 برابر با x_0 است یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0$$

قضیه ی ۳ : اگردو تابع f وg دامنه ی یکسانی داشته باشند و در نقطه ی x_0 دارای حد باشند و $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$

و$\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$ آن گاه :

الف) $\lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 + l_2$

ب) $\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 - l_2$

ج) $\lim_{x\to x_0} \big(f(x).g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) . \lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 . l_2$

ت) $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad , \quad l_2 \neq 0$

نکته : قضیه های الف و ج را می توان به تعدادی متناهی از توابع تعمیم داد یعنی:

۱- حدمجموع چندتابع برابر است با مجموع حدهای آن ها

۲- حد حاصل ضرب چندتابع برابر است با حاصل ضرب حدهای آن ها

از قضیه های بالا نتیجه های زیر به دست می آید :

۱- اگرحدتابع f در نقطه ی x_0 برابر با l و k عدد ثابتی باشد $\lim_{x\to x_0} (kf(x)) = k\lim_{x\to x_0} f(x) = k.l$

۲- حد تابع $f(x)=x^n$ (n عدد صحیح و مثبت) در x_0 برابر است با : $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^{\,n}$

۳- اگر $\lim_{x\to x_{\circ}} f(x) = l$ آن گاه : $\lim_{x\to x_{\circ}} (f(x))^n = l^n$

۴ - اگر $\lim_{x\to x_{\circ}} f(x) = l$ آن گاه : $\lim_{x\to x_{\circ}} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_{\circ}} f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{l} & \text{فردباشد } n \\ \sqrt[n]{l \geq \circ} & \text{زوج باشد } n \end{cases}$

۵- اگر $\lim_{x\to x_{\circ}} f(x) = l$ آن گاه : $\lim_{x\to x_{\circ}} |f(x)| = |\lim_{x\to x_{\circ}} f(x)| = |l|$

حد تابع های ساده ی مثلثاتی :

قضیه ی ۱ : حدتابع ثابت $f(x)=\sin x$ در هرنقطه ی $x_{\circ} \in \mathbb{R}$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با:

$\lim_{x\to x_{\circ}} \sin x = \sin x_{\circ}$

قضیه ی ۲ : حدتابع ثابت $f(x)=\cos x$ در هرنقطه ی $x_{\circ} \in \mathbb{R}$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با:

$\lim_{x\to x_{\circ}} \cos x = \cos x_{\circ}$

قضیه ی ۳ : تابع $f(x)=\tan x$ (یا $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$) برای همه ی مقادیر حقیقی x به جز $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ که برای آن ها داریم $\cos x=\circ$ ، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با : $\lim_{x\to x_{\circ}} \tan x = \tan x_{\circ}$

قضیه ی ۴ : تابع $f(x)=\cot x$ (یا $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$) برای همه ی مقادیر حقیقی x به جز $x=k\pi$ که برای آن ها داریم $\sin x=\circ$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با : $\lim_{x\to x_{\circ}} \cot x = \cot x_{\circ}$

نکته : در موارد زیر حتما باید حد چپ و حد راست تابع را جداگانه محاسبه کرد :

۱) تابع جزء صحیح که نقطه ی حدی ، عبارت داخل براکت (نماد جزءصحیح) را عددی صحیح کند.
۲) تابع قدرمطلق که نقطه ی حدی ، ریشه ی ساده ی عبارت داخل قدرمطلق باشد.
۳)تابع کسری که نقطه ی حدی ، ریشه ی مخرج کسر باشد(ریشه ی صورت نباشد.)
۴)تابع رادیکالی بافرجه ی زوج که نقطه ی حدی ، ریشه ی ساده ی زیر رادیکال باشد.
۵)تابع چندضابطه ای که نقطه ی حدی ، نقطه ی شکست تابع باشد.

تذکر: به طور کلی ، $\lim_{x\to x_{\circ}} [x]$ وقتی $x_{\circ} \in \mathbb{Z}$ باشد وجود ندارد.

مثال) در صورتی که $f(x-۲)=\frac{۲x+۳}{x}$ باشد ، $\lim_{x\to ۱} f(x)$ را به دست آورید. (سوال ۱۰ امتحان نهایی شهریور۹۰)

حل: $x-۲=۱ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۳} \frac{۲x+۳}{x} = \frac{۲(۳)+۳}{۳} = \frac{۹}{۳} = ۳$

تمرین ۳) اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۲x^۲ - ۴a} & x \geq ۲ \\ x + b & -۲ \leq x \leq ۲ \\ x^۲ + bx + ۳a & x < -۲ \end{cases}$ **باشد** a,b **را طوری بیابید که تابع** f **در نقطه ی** $x=-۲$ **دارای حد بوده و** $\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۲$ **باشد.** (سوال ۶ امتحان نهایی هماهنگ کشوری خرداد۸۸)

تمرین ۴) مقدار a **را چنان بیابید که تابع** $f(x)=\begin{cases} |x+۲| - a & x \geq ۲ \\ x^۲ + ۳ & x < ۲ \end{cases}$ **در نقطه ی ۲ دارای حد باشد.**

(سوال ۵ امتحان نهایی دی ۸۷)

تمرین ۵) مقدار a **را طوری بیابید که تابع** $f(x)=\begin{cases} [x] - ۲x & x \geq ۲ \\ \frac{ax^۲+۲}{x-۳} & x < ۲ \end{cases}$ **در** $x=۲$ **حد داشته باشد.**

(سوال ۵ امتحان نهایی شهریور ۸۶)

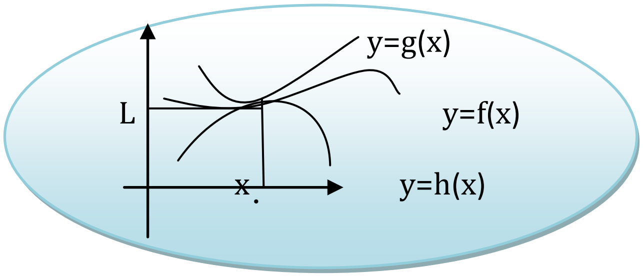
تمرین ۶) اگر $f(x+۲)=\frac{x-۲}{x+۲}$ **باشد مطلوبست محاسبه ی** $\lim_{x\to ۲} f(x)$ (سوال ۷ امتحان نهایی دی ماه ۸۶)

تمرین ۷) تابع $f(x)=\begin{cases} (a-۱)x + ۳ & x > -۳ \\ -۲x^۲ + b & x < -۳ \end{cases}$ **مفروض است . مقادیر** a **و** b **را چنان بیابید که :**

$\lim_{x\to -۴} f(x) = -۱ \quad , \quad \lim_{x\to -۱} f(x) = -۴$

(سوال ۵ امتحان نهایی خرداد ۸۵)

قضیه ی فشردگی : فرض کنید به ازای هر x از بازه ای مانند I که شامل نقطه ی x_0 است ، مگر احتمالا در x_0 ، داشته باشیم : $h(x) \le f(x) \le g(x)$ و $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$



مثال) اگر به ازای هر $x \in (-\pi, \pi)$ داشته باشیم $3 - \cos^2 x \le f(x) \le 4 - \tan(\frac{x}{2})$ ، حد تابع f(x) وقتی $x \to \frac{\pi}{2}$ را به دست آورید. (سوال ۹ امتحان نهایی خرداد ۹۱)

حل : طبق قضیه فشردگی

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 4 - \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 4 - 1 = 3 \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos^2 x - 3 = 3 - 0 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 3$$

تمرین ۸) اگر به ازای هر x داشته باشیم $(x-2)^2 \le 2f(x) \le 4 + x^2$ ، حاصل $\lim_{x\to 0} \left(f(x)+3\right)$ را به دست آورید. (سوال ۷ امتحان نهایی خرداد ۸۹)

تمرین ۹) اگر $|f(x)| \le 1 - \cos x$ باشد حد تابع f(x) وقتی $x \to 0$ را به دست آورید. (سوال ۸ امتحان نهایی دی ۸۷)

تمرین ۱۰) اگر به ازای هر x در بازه ی $(-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2})$ داشته باشیم $3 - \cos^2 x \le f(x) \le 2 + x^2$ مطلوبست محاسبه ی $\lim_{x\to 0} f(x)$. (سوال ۷ امتحان نهایی شهریور ۸۵)

هم ارزی

تعریف هم ارزی : دو تابع f و g هم ارزند اگر $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۰$, $\lim_{x\to ۰} g(x) = ۰$, $\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱$

جدول هم ارزی های مهم مثلثاتی :

$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan x}{x} = ۱$	$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$
$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan mx}{m} = ۱$	$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin mx}{m} = ۱$
$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan mx}{x} = m$	$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin mx}{x} = m$
$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan mx}{\tan nx} = \frac{m}{n}$	$\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{m}{n}$
$\lim\limits_{u\to ۰} \frac{\tan u}{u} = ۱$	$\lim\limits_{u\to ۰} \frac{\sin u}{u} = ۱$
$\lim\limits_{u\to ۰} \frac{\tan^m u}{u^m} = ۱$	$\lim\limits_{u\to ۰} \frac{\sin^m u}{u^m} = ۱$

در محاسبه ی حدهای مثلثاتی از فرمول های زیر کمک می گیریم :

$۱+\cos ۲x = ۲\cos^۲ x$	$\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$	$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$	$۱-\cos x = ۲\sin^۲ \frac{x}{۲}$
$۱+\cos x = ۲\cos^۲ \frac{x}{۲}$	$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$	$\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$	$۱-\cos ۲x = ۲\sin^۲ x$

مثال : حاصل حد زیر را به دست آورید.　　　　(سوال ۱۰ _ ج امتحان نهایی خرداد ۹۱)

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos ۲x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲\sin^۲ x}{x^۲} = ۲\lim_{x\to ۰} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^۲ = ۲(۱)^۲ = ۲$$

تمرین ۱۱) مقدار k را طوری بیابید که $\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos(kx)}{x\sin x} = ۸$ باشد.　　　(سوال ۱۰ امتحان نهایی خرداد ۹۰)

تمرین۱۲) حاصل حد زیر را به دست آورید. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{x-\frac{\pi}{4}}{\sin\left(4x-\pi\right)}$ (سوال ۹_ج امتحان نهایی دی ۸۹)

تمرین۱۳) حد تابع زیر را محاسبه کنید. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^{3}}$ (سوال ۱۰_ج امتحان نهایی خرداد ۸۹)

تمرین ۱۴) حد زیر را به دست آورید. $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin 3x}{1-\cos 2x}$ (سوال ۱۰_ج امتحان نهایی خرداد ۸۸)

تمرین ۱۵) حد زیر را حساب کنید. $\lim_{x\to 0} \frac{2x\tan 3x}{1-\cos 2x}$ (سوال ۸ امتحان نهایی خرداد ۸۷)

صفرحدی و صفرمطلق

تعریف صفر حدی : حالتی که تابع به صفر میل می کند ولی برابر با صفر نیست.

مثال :(صفر حدی) $\lim_{x\to 2} x-2=0$

تعریف صفر مطلق : حالتی که تابع برابر خود صفر است. یعنی تابع در اطراف نقطه ی مورد نظر صفر است.

مثال : (صفرمطلق) $\lim_{x\to 2^{+}} 2-[2^{+}]=0$

مفهوم ابهام در حد

حالت مبهم $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ را در نظر می گیریم. اگر حد صورت و مخرج کسر در $x=x_0$ برابر صفر حدی باشد

یعنی $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{صفرحدی}}{\text{صفرحدی}}$ به این وضعیت حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می گوییم . مثال : $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{0}{0}$

توابعی که حد آن ها بعد ازجای گذاری $x=x_0$ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ دارند :

توابع کسری شامل عبارات چندجمله ای	توابع کسری شامل عبارات رادیکالی	توابع کسری شامل عبارات مثلثاتی

رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$

توابع کسری شامل عبارات رادیکالی :

برای رفع ابهام توابع کسری شامل عبارات چندجمله ای می توان از موارد زیر در جای مناسب استفاده کرد:

۱- بخش پذیری چندجمله ای ها بر $x-x_0$ ۲-فاکتورگیری   ۳-اتحادهای جبری

وقتی که $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ باشد معلوم است که عامل صفرکننده درصورت و مخرج کسروجود دارد پس صورت و مخرج کسر را با روش های فاکتورگیری ، اتحادهای جبری تجزیه می کنیم و عامل صفرکننده ی صورت و مخرج را که ($x-x_0$) می باشد حذف می کنیم. و بعد با جایگذاری حد تابع را در نقطه ی x_0 به دست می آوریم.

اگربا روش تجزیه نتوانستیم عامل مشترک صفرکننده را حذف کنیم باید صورت و مخرج را بر($x-x_0$) تقسیم نماییم.

نکته : اتحادهای جبری مهم

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

مثال : حد زیر را حساب کنید. (سوال ۹- الف امتحان نهایی شهریور۸۶)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+x+2\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{4}{2} = 2$$

تمرین ۱۶) a را طوری بیابید که $\frac{1}{8} = \lim_{x\to 2a} \frac{x-2a}{x^2-4a^2}$ باشد. (سوال ۱۲امتحان نهایی خرداد۸۶)

تمرین ۱۷) حاصل حد $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$ را به دست آورید. (سوال ۹-الف امتحان نهایی خرداد۸۹)

تمرین ۱۸) حاصل حد $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-x}$ را به دست آورید. (سوال ۱۱-الف امتحان نهایی دی۹۰)

توابع کسری شامل عبارات رادیکالی :

اگر $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ و تابع های $f(x)$ و $g(x)$ ، یکی یا هر دو ، اصم (گنگ) باشند آن گاه برای رفع ابهام محاسبه ی حد باید صورت یا مخرج یا هردو را گویا کنیم.

مثال : حدتابع زیر را محاسبه کنید. (سوال ۱۰-الف امتحان نهایی خرداد۸۹)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1}\frac{x\left(x-1\right)(\sqrt{x}+1)}{\left(x-1\right)(x+\sqrt{x})} = \frac{2}{2} = 1$$

تمرین۱۹) حاصل حد های زیر را به دست آورید. (سوال ۱۰ امتحان نهایی خرداد۹۱)

الف) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{3-\sqrt{x+7}}$

(سوال ۱۱ امتحان نهایی خرداد۹۰)

ب) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x+12}-x}$

(سوال ۱۱امتحان نهایی شهریور۹۰)

ج) $\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sqrt{2x-1}-3}$

توابع کسری شامل عبارات مثلثاتی : به طور کامل قبلا در بالا گفته شد .

تعمیم حد

الف) حد بی نهایت :

اگر $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عددغیرصفر}}{0}$ یعنی وقتی که x به x_0 میل می کند چنان چه حد صورت یک عدد غیرصفر باشد ، به طوری که حد مخرج صفرشود ، مقدار حد ،بی نهایت خواهد شد. بنابراین : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عددغیرصفر}}{0} = \infty$

نکته :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عددغیرصفر}}{0} = \pm\infty \Rightarrow \frac{\text{عددمثبت}}{0^+} = +\infty\ ,\ \frac{\text{عددمثبت}}{0^-} = -\infty\ ,\ \frac{\text{عددمنفی}}{0^+} = -\infty\ ,\ \frac{\text{عددمنفی}}{0^-} = +\infty$$

در توابع مثلثاتی که علامت عبارت مهم است با توجه به ناحیه ای که انتهای کمان در آن قرارمی گیردعلامت نسبت مثلثاتی مورد نظر را تعیین می کنیم .

ربع اول دایره مثلثاتی($\text{۰}<x<\frac{\pi}{\text{۲}}$) : همه ی نسبت های مثلثاتی مثبت هستند.

ربع دوم دایره مثلثاتی($\frac{\pi}{\text{۲}}<x<\pi$) : $\sin x>\text{۰}$ و بقیه ی نسبت ها منفی هستند.

ربع سوم دایره مثلثاتی($\pi<x<\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}$) : $\tan x>\text{۰}$, $\cot x>\text{۰}$ و $\sin x<\text{۰}$, $\cos x<\text{۰}$

ربع چهارم دایره مثلثاتی($\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}<x<\text{۲}\pi$) : $\cos x>\text{۰}$ و بقیه ی نسبت های مثلثاتی منفی هستند.

مثال : حاصل حد زیر را به دست آورید. (سوال ۱۱ امتحان نهایی خرداد ۹۰)

$$\lim_{x\to\text{۰}^+}\frac{\text{۱}}{\text{۱}-\cos x}=\frac{\text{۱}}{\text{۱}-\text{۱}^-}=\frac{\text{۱}}{\text{۰}^+}=+\infty$$

تمرین ۲۰) حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to\text{۱}^-}\frac{\text{۳}}{(x-\text{۱})^{\text{۲}}}$ (سوال ۱۰-د امتحان نهایی خرداد ۹۱)

ب) $\lim_{x\to\text{۳}^-}\frac{x^{\text{۲}}-\text{۷}}{|\text{۳}-x|}$ (سوال ۹-ب امتحان نهایی دی ۸۹)

ج) $\lim_{x\to\pi^-}\frac{\text{۲}}{\text{۱}+\cos x}$ (سوال ۱۱-ج امتحان نهایی خرداد ۹۰)

د) $\lim_{x\to\text{۲}^-}\frac{x+\text{۳}}{|x-\text{۲}|}$ (سوال ۶-د امتحان نهایی خرداد ۸۹)

ه) $\lim_{x\to\pi^+}\cot x$ (سوال۱۰-و امتحان نهایی خرداد ۸۸)

و) $\lim_{x\to\text{۳}^+}\frac{x+\text{۱}}{\text{۹}-x^{\text{۲}}}$ (سوال۱۰-د امتحان نهایی خرداد ۸۸)

ب) حد در بی نهایت: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

حد در بی نهایت یعنی یا x از هرمقدار بیش تر شود ($x\to+\infty$) و یا از هر مقدار کم تر گردد. ($x\to-\infty$)

$$\begin{cases} f(x)=x \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ f(x)=x \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \end{cases}$$

اگر $n=۲k$ آن گاه : $\quad f(x)=x^n \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$

اگر $n=۲k+۱$ آن گاه : $\quad f(x)=x^n \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$

حد چند جمله ای ها در $\pm\infty$: حد هر چند جمله ای به صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+۱$ (n عدد صحیح مثبت)

در $\pm\infty$ ، مساوی حد جمله ای از آن است که دارای بزرگ ترین درجه است یعنی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+۱\right)=\lim_{x\to\pm\infty} ax^n$$

حد تابع $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+۱}{a'x^m+b'x^{m-۱}+\cdots+۱}$ در $\pm\infty$ (m و n اعداد صحیح مثبت) :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+۱}{a'x^m+b'x^{m-۱}+\cdots+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a}{a'}x^{n-m}\right)=\begin{cases} \text{صفر} & n<m \\ \frac{a}{a'} & n=m \\ \infty & n>m \end{cases}$$

مثال : حاصل حد زیر را به دست آورید. (سوال ۱۱-پ امتحان نهایی خرداد ۹۰)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-۱)(x-۲)(۴-x)}{۲x^۳+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۳}{۲x^۳}=-\frac{۱}{۲}$$

تمرین ۲۱) حد زیر را محاسبه کنید.(سوال ۹-ب امتحان نهایی خرداد۸۶)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(۳x^۲-۱)(x+۱)}{x^۳-۲}$$

تمرین ۲۲) a , b را طوری بیابید که $-\frac{۲}{۳} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^۳+x^۲+۱}{۶x^b-x}$ باشد. (سوال ۱۱ امتحان نهایی خرداد ۸۸)

حد توابع رادیکالی وقتی $x\to \pm\infty$:

در برخی حالت ها که تابع $f(x)$ کسری است ، صورت کسر یا مخرج(یا هردو) اصم باشند.(رادیکالی باشند.) و $x\to \pm\infty$ آن گاه می توان با فاکتورگیری از جمله هایی از صورت و مخرج که دارای بزرگ ترین درجه هستند ، حدتابع را به دست آورد .به این صورت که اگر درجه ی چندجمله ای زیر رادیکال با فرجه ی رادیکال برابر یا بزرگ تر ازآن باشد ، آن گاه متغیربا درجه بزرگ تر را با رعایت قوانین توان ها و رادیکال ها از زیر رادیکال خارج کرده و حد را به دست می آوریم . اما اگر درجه ی چندجمله ای زیر رادیکال از فرجه ی رادیکال کم تر باشد آن گاه وجود رادیکال تاثیری در محاسبه ی حد تابع نخواهد داشت.

مثال : حاصل حد زیر را به دست آورید. (سوال ۹- د امتحان نهایی دی ۸۹)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۶x^۲-\sqrt{x-۳}}{۵x^۲-\sqrt{x^۴+۱}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۶x^۲}{۵x^۲-x^۲\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۴}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۶x^۲}{۴x^۲} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

تمرین ۲۳) حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x+\sqrt{x+۱}}{۵x+\sqrt{۴x^۲+۱}}$ (سوال ۱۰- ب امتحان نهایی خرداد۹۱)

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x+\sqrt{x^۲+x+۱}}{۷+۵x}$ (سوال ۱۱- د امتحان نهایی شهریور۹۰)

ج) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲+\sqrt{x^۴+۳x+۱}}{۵x^۲}$ (سوال ۱۱- ج امتحان نهایی دی۹۰)

پیوستگی

تعریف : تابع f که در بازه ی I تعریف شده است در نقطه ی x_0 از دامنه آن را پیوسته گویند ، هرگاه :

۱- تابع در $x = x_0$ حد داشته باشد.

۲- حدتابع در $x = x_0$ با مقدار تابع در x_0 برابر باشد یعنی : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

بنابراین هرگاه تابعی که روی یک بازه تعریف شده است و در یک نقطه از دامنه آن ، دست کم یکی از دوشرط بالا را نداشته باشد در آن نقطه ناپیوسته است .

پیوستگی راست : هرگاه حد راست تابع با مقدار تابع برابر باشد تابع پیوستگی راست دارد یعنی:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

پیوستگی چپ : هرگاه حد چپ تابع با مقدار تابع برابر باشد تابع پیوستگی راست دارد یعنی:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

نکته ی ۱ : تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست و در این نقاط فقط پیوستگی راست دارد

نکته ی ۲ : تابع $f(x)=[kx]$ ، $(k \neq 0)$ فقط در نقاطی که داخل جزء صحیح را عددی صحیح می کند ناپیوسته است.

تذکر : سوالات امتحان (نهایی) پیوستگی معمولا به دو دسته تقسیم می شوند:

دسته ی اول : بررسی پیوستگی تابع در یک نقطه

دسته ی دوم : پیدا کردن مقدارهای مجهول برای پیوستگی یا عدم پیوستگی

پیوستگی در یک بازه :

تابع f روی بازه ی (a,b) پیوسته است اگردرتمام نقاط این بازه پیوسته باشدیعنی برای هر $x_0 \in (a,b)$ داشته باشیم

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

مثال : تابع $f(x)=\begin{cases} [۲x-۲] & x>۱ \\ ۳x-۱ & x=۱ \\ \frac{x^۲-۱}{x-۱} & x<۱ \end{cases}$ مفروض است، پیوستگی تابع را در نقطه ی $x=۱$ بررسی کنید.(سوال ۱۲ خرداد۸۸)

حل: شرط پیوستگی $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$

حدراست $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \left[۲\times ۱^+ - ۲\right] = ۰$

پس تابع در $x=۱$ پیوسته نیست. $\Rightarrow ۰ \neq ۲$

حدچپ $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = ۲$

تمرین۲۴) پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲-۱}{x^۲-۳x+۲} & x\neq ۱ \\ -۳ & x=۱ \end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید. (سوال ۱۱ امتحان نهایی خرداد ۹۱)

تمرین ۲۵)حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} ۲a+x^۲ & x\geq ۲ \\ x^۳-x & x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته نباشد.(نهایی خرداد ۹۰)

تمرین ۲۶) تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+۲b & x>۰ \\ ۱ & x=۰ \\ x+a & x<۰ \end{cases}$ مفروض است . a وb را چنان بیابیدکه تابع در نقطه ی $x=۰$ پیوسته باشد . (سوال ۱۲ امتحان نهایی شهریور ۹۰)

تمرین ۲۷)مقدارa وb را چنان بیابیدکه تابع زیر در $x=۲$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+۱ & x>۲ \\ ۱ & x=۲ \\ x+a & x<۲ \end{cases}$.(نهایی دیماه ۹۰)