حل سوالات امتحان پایان‌ترم نیمسال اول (۹۳–۹۴)

۱– سری فوریه تابع زیر را بنویسید و سپس مقدار سری فوریه را در نقاط 0 و $\pm\pi$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}-\pi & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

پاسخ)

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

$$2L=2\pi\Rightarrow L=\pi$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-\pi dx+\int_{0}^{\pi}x\,dx\right]=-\frac{\pi}{4}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-\pi\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\pi\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\left(\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right)_0^{\pi}\right]=\frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0 & \text{n is even}\\ \dfrac{-2}{n^2\pi} & \text{n is odd}\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-\pi\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\pi\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\left(-\frac{x\cos nx}{n}-\frac{\sin nx}{n^2}\right)_0^{\pi}\right]=\frac{1}{n}\left[1-2(-1)^n\right]=\begin{cases}-\dfrac{1}{n} & \text{n is even}\\ \dfrac{3}{n} & \text{n is odd}\end{cases}$$

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1-2(-1)^n\right]\sin nx$$

$$at\ \ x=0\quad \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{0-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

$$at\ \ x=\pm\pi\quad \frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$$

۲– انتگرال فوریه تابع زیر را بدست آورید و با استفاده از آن نشان دهید $\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}$.

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<2\\ 0 & x<0\ \&\ x>2\end{cases}$$

پاسخ)

$$f(x)=\int_0^\infty \left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega\,\mathrm{xdx}=\frac{1}{\pi}\int_0^2\cos\omega\,\mathrm{xdx}=\frac{1}{\pi}\frac{\sin 2\omega}{\omega}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega\,\mathrm{xdx}=\frac{1}{\pi}\int_0^2\sin\omega\,\mathrm{xdx}=\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin 2\omega}{\omega}\cos\omega x+\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}\sin\omega x\right]d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin\omega x+\sin 2\omega\cos\omega x-\cos 2\omega\sin\omega x}{\omega}\right]d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin\omega x+\sin(2\omega-\omega x)}{\omega}\right]d\omega$$

$$at\ x=1\to f(1)=1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{2\sin\omega}{\omega}\right]d\omega\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}=\frac{\pi}{2}$$

۳– معادله انتقال حرارت زیر را به روش جداسازی متغیرها حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x\in(0,3)$$

$$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(3,t)=0\end{cases},\quad u(x,0)=25^\circ$$

پاسخ)

$$u(x,t)=U(x)T(t)$$

$$U(x)\dot{T}(t)=2U''(x)T(t)\Rightarrow\frac{U''(x)}{U(x)}=\frac{\dot{T}(t)}{2T(t)}=-k^2$$

$$U''(x)+k^2U(x)=0\Rightarrow U(x)=A\cos kx+B\sin kx$$

$$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(3,t)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U(0)=0\\ U(3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ k=\frac{n\pi}{3},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow U(x)=B\sin\frac{n\pi}{3}x$$

$$\dot{T}(t)=-2k^2T(t)=-2\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2T(t)\Rightarrow T(t)=C_ne^{-2\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2t}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-2\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{3}x$$

$$u(x,0)=25^\circ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{3}x = 25 \Rightarrow D_n=\frac{2}{3}\int_0^3 25\sin\frac{n\pi}{3}x\,dx=\frac{50\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}=\begin{cases}0 & \text{n is even}\\ \dfrac{100}{n\pi} & \text{n is odd}\end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{100}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-2\left(\frac{(2m-1)\pi}{3}\right)^2 t}}{2m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi}{3}x$$

۴– نشان دهید حد زیر وجود ندارد.

$$\lim_{z\to 0}\frac{\left[\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}(z)\right]^2}{|z|^2}$$

پاسخ)

$$\lim_{z\to 0}\frac{\left[\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}(z)\right]^2}{|z|^2}=\lim_{z\to 0}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$

$$z\to 0:\begin{cases}y=mx\\ x\to 0\end{cases}\Rightarrow \lim_{z\to 0}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-mx)^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{(1-m)^2}{1+m^2},\ \text{depends on } m$$

۵– $u(x,y)=2x+y^3-3x^2y$ یک تابع هارمونیک است تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را پیدا کنید.

پاسخ)

$$u(x,y)=2x+y^3-3x^2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2-6xy \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2 \quad (2)$$

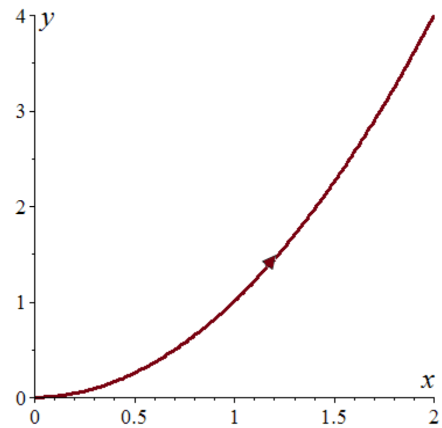
$$(1)\Rightarrow v=2y-3xy^2+A(x)\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+A'(x)\xrightarrow{(2)}A'(x)=3x^2\Rightarrow A(x)=x^3+c$$

$$v=2y-3xy^2+x^3+c$$

$$f(z)=u+iv=\left(2x+y^3-3x^2y\right)+i\left(2y-3xy^2+x^3\right)+c'$$

۶- مقدار انتگرال مختلط زیر را بر روی مسیر C که نقطه $(0,0)$ را به نقطه $(2,4)$ از طریق رابطه $y=x^2$ وصل می‌کند حساب کنید.

$$\int_C \operatorname{Re}\left(z^2\right)dz$$



پاسخ)

$$y=x^2,$$

$$C(t):\begin{cases} z=x+iy=x+ix^2 \\ x=t,\ 0\le t\le 2\end{cases} \Rightarrow C(t)=t+it^2$$

$$\operatorname{Re}(z)=x^2-y^2=t^2-t^4$$

$$\int_C \operatorname{Re}\left(z^2\right)dz=\int_0^2\left(t^2-t^4\right)(1+2it)\,dt=-\frac{56}{15}-\frac{40}{3}i$$

۷- مقدار انتگرال‌های زیر را حساب کنید

$$1)\quad \oint_{C:|z-1|=3}\frac{e^z}{z(z+1)}dz$$

پاسخ)

$$\oint_{C:|z-1|=3}\frac{e^z}{z(z+1)}dz=\oint_{C:|z-1|=3}\left(\frac{e^z}{z}-\frac{e^z}{z+1}\right)dz=\oint_{C:|z-1|=3}\frac{e^z}{z}dz+\oint_{C:|z-1|=3}\frac{-e^z}{z+1}dz=$$

$$=2\pi ie^0-2\pi ie^{-1}=2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

$$2)\quad \oint\limits_{C:|z|=2} \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$$

پاسخ)

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz$$

$$n=2,\ f(z)=5z^2-3z+2$$

$$\oint\limits_{C:|z|=2}\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left(5z^2-3z+2\right)''\Big|_{z=1}=10\pi i$$

۸- سری لوران تابع زیر را حول نقطه تکینگی‌اش بنویسید و نوع تکینگی آن را مشخص کنید

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}$$

پاسخ)

$$z-1=u\ \Rightarrow \frac{e^z}{(z-1)^2}=\frac{e^{u+1}}{u^2}=e\frac{e^u}{u^2}=\frac{e}{u^2}\left(1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\dots\right)=e\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{1}{2!}+\frac{u}{3!}+\dots\right)=$$

$$=e\left(\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!}+\frac{z-1}{3!}+\dots\right)$$

تکینگی تابع قطب مرتبه ۲ می‌باشد.

۹– انتگرال زیر را به روش مانده‌ها حساب کنید

$$\oint_{C:|z|=2} \frac{4-3z}{z^2-z}dz$$

پاسخ)

$$f(z)=\frac{4-3z}{z^2-z}$$

$$\oint_{C:|z|=2} \frac{4-3z}{z^2-z}dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z\to 0}\{f\}+\operatorname{Res}_{z\to 1}\{f\}\right)=2\pi i\left(\left.\frac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=0}+\left.\frac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=1}\right)=-6\pi i$$

۱۰– با استفاده از انتگرال مختلط حاصل انتگرال حقیقی زیر را بیابید.

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$$

پاسخ)

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{ie^{i\theta}}=\frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}=\oint_{C:|z|=1}\frac{1}{5+\frac{3}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}=\oint_{C:|z|=1}\frac{2}{3z^2+10iz-3}dz$$

$$\xrightarrow{\text{poles}}\begin{cases}-3i\\ -\dfrac{i}{3}\end{cases}\xrightarrow{\text{only } -\frac{i}{3} \text{ lies inside } C}\oint_{C:|z|=1}\frac{2}{3z^2+10iz-3}dz=2\pi i\left(\left.\frac{2}{6z+10i}\right|_{z=-\frac{i}{3}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

۱۱– مشخص کنید نگاشت $W=iz+i$ نیم صفحه $x>0$ را بر روی چه ناحیه‌ای می‌نگارد.

پاسخ)

$$W=iz+i=i(x+iy)+i=-y+i(x+1)$$

$$\begin{cases}u=-y\\ v=(x+1)\end{cases}\xrightarrow{x>0} v>1$$

به بالای خط $v=1$ در صفحه w نگاشت می‌دهد.