

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

هندسه (۱)

رشته ریاضی و فیزیک

پایه دهم

دوره دوم متوسطه

۱۳۹۵

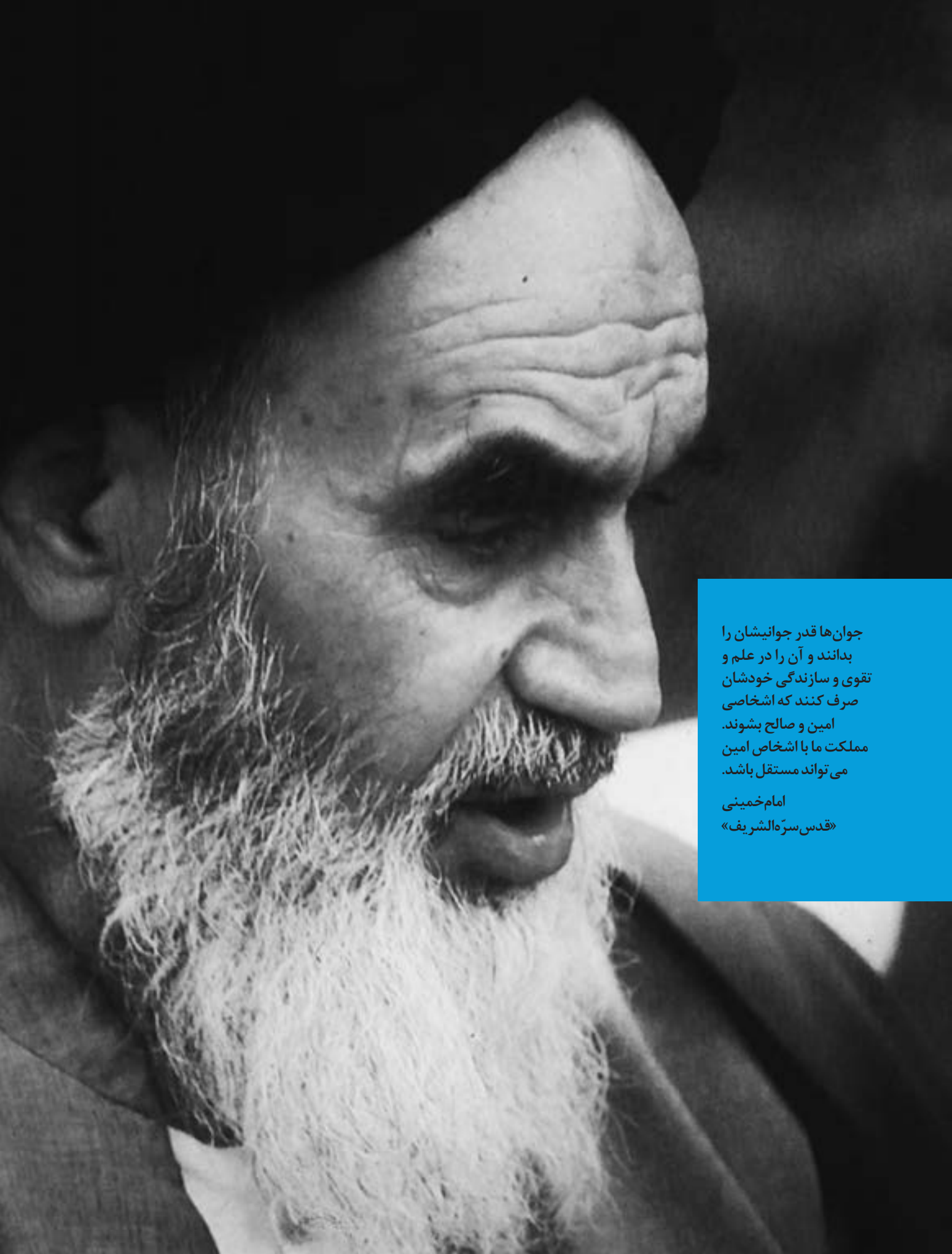


وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:	هندسه (۱) - پایه دهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۰۲۱۳
پدیدآورنده:	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، طیبه حمزه‌بیگی، خسرو داودی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا، اکرم قابل‌رحمت، محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
مدیریت آماده‌سازی هنری:	زهرا رحیمی، محمدرضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی، محمود نصیری (اعضای گروه تألیف) - سیداکبر میرجعفری (ویراستار)
شناسه افزوده آماده‌سازی:	اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
نشانی سازمان:	لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) - مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) - مجتبی زند (طراح گرافیک، طراح جلد و صفحه‌آرا) - سیده‌فاطمه محسنی، فاطمه باقری‌مهر، سپیده ملک‌ایزدی، احمدرضا امینی، حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
ناشر:	تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۹۲۶۶-۸۸۳۰، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir
چاپخانه:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
سال انتشار و نوبت چاپ:	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص» چاپ اول ۱۳۹۵

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۵۰۱-۲

ISBN: 978-964-05-2501-2



جوان‌ها قدر جوانیشان را
بدانند و آن را در علم و
تقوی و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی
«قدس سره الشریف»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست

۹	فصل ۱ : ترسیم های هندسی و استدلال
۱۰	درس اول : ترسیم های هندسی
۱۸	درس دوم : استدلال
۲۹	فصل ۲ : قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن
۳۰	درس اول : نسبت و تناسب در هندسه
۳۴	درس دوم : قضیه تالس
۳۸	درس سوم : تشابه مثلث ها
۴۵	درس چهارم : کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث ها
۵۳	فصل ۳ : چند ضلعی ها
۵۴	درس اول : چندضلعی ها و ویژگی هایی از آنها
۶۵	درس دوم : مساحت و کاربردهای آن
۷۷	فصل ۴ : تجسم فضایی
۷۸	درس اول : خط، نقطه و صفحه
۸۷	درس دوم : تفکر تجسمی

پیشگفتار

قلمرو آموزش ریاضی از یک سو درک مفاهیم ریاضی شامل اعداد و محاسبات عددی، جبر و نمایش نمادین (الگوها، رابطه‌ها، تابع‌ها)، هندسه و اندازه‌گیری، داده‌ها و آمار و احتمال را در بر می‌گیرد و از سوی دیگر در این حوزه، دانش‌آموزان باید با فرایندهای ریاضی نظیر حل مسئله و به‌کارگیری راهبردهای حل مسئله، مدل‌سازی، استدلال، تفکر نقاد و استدلال منطقی، تفکر تجسمی یا دیداری، تفکر خلاق، اتصال و پیوندهای موضوعی و مفهومی ریاضی، گفتمان ریاضی، تصمیم‌گیری و تصمیم‌سازی، تخمین زدن و دقت یافتن آشنا شوند و در آنها مهارت یابند (سند برنامه درسی ملی). از دید برخی پژوهشگران، هندسه، توانایی مشاهده کردن، تصور کردن و فکر کردن است. تقویت تفکر و حس زیبایی‌شناسی از موضوعاتی است که آموزش هندسه به دنبال آن است. از آنجا که موضوع هندسه بررسی فضا و شکل‌ها است و همه پدیده‌ها در فضا رخ می‌دهند، هندسه به گونه‌ای زمینه همه علوم طبیعی است. همچنین هندسه بستر مناسب بروز و تقویت خلاقیت و تخیل انسان را فراهم می‌آورد.

برخی اهداف مهم آموزش هندسه به قرار زیر است :

- زمینه‌سازی تقویت ذهن، خلاقیت و استدلال دانش‌آموزان؛
- تقویت قدرت درک هنر و حس زیبایی‌شناسی؛
- به‌کارگیری هندسه در زندگی روزمره؛
- آشنایی با آثار هنری برجسته و درک ایده‌های هندسی آنها؛
- شناسایی و تحلیل ویژگی‌های شکل‌های هندسی در صفحه و فضا؛
- تقویت تفکر تجسمی و مدل‌سازی هندسی در حل مسائل.

ساختار کتاب از بخش‌هایی چون «فعالیت»، «کار در کلاس»، «مثال» و «تمرین» تشکیل شده است.

آنچه در هر فعالیت به‌طور عمده مد نظر بوده، آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درسی و سهیم بودن در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحل ماند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح هر راه حل، مرتب کردن، قضاوت درباره آن و مقایسه راه حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها توسط معلم انجام می‌پذیرد و هر جا لازم باشد، راهنمایی توسط معلم ارائه خواهد شد. در برخی موارد، فعالیت‌ها ساده و آسان نیست و صد البته اجرای مناسب دارای ارزش زیادی خواهد بود. این فعالیت‌ها در حد متوسط طراحی شده‌اند. معلم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزانش آنها را غنی‌تر کند یا با ارائه توضیحاتی بیشتر و تغییراتی، فعالیت را ساده‌تر نماید.

هنگام انجام فعالیت، هدایت‌گفت‌وگویی کلاسی یا گفتمان ریاضی به عهده معلم است که در آن دانش‌آموزان به ارائه دیدگاه‌ها و دفاع از افکار خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند. به‌طور خلاصه فراهم کردن فرصت‌های یادگیری و دادن مجال به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دغدغه‌های همکاران عزیزمان باشد.

کار در کلاس با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است. انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند. حل تمرین به عهده دانش‌آموزان است؛ اما ارائه و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.

فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال



هندسه و به‌ویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده‌است.

ترسیم‌های هندسی

انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به‌ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است. از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمند ترسیم‌های هندسی است.

فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

۱- نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.

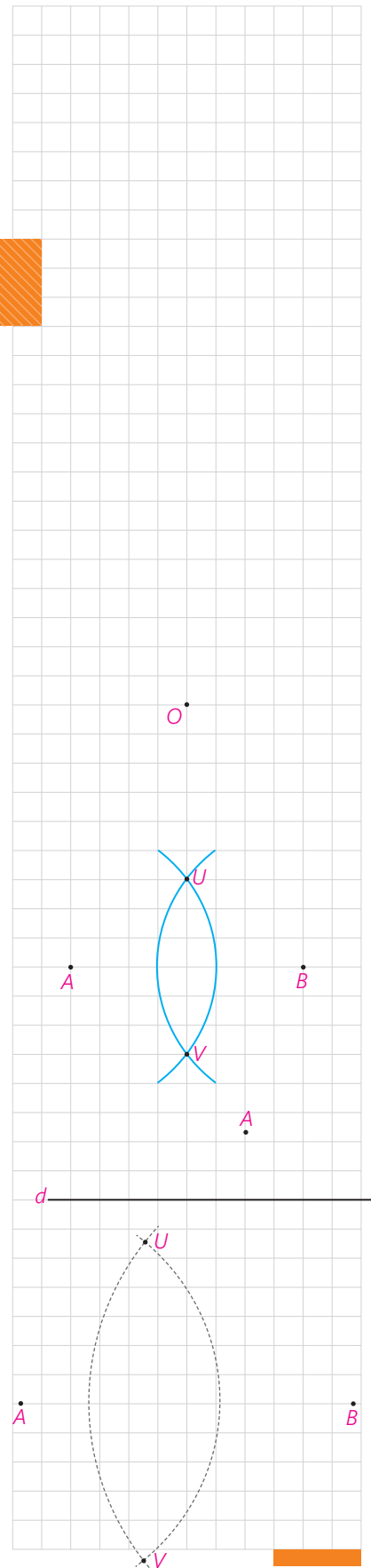
نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه O دارند. (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه O برابر ۲ سانتی‌متر است.)

۲- نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

۳- نقطه A ، مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه A باشند.

۴- نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟



ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

کاردرکلاس

۱- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، $\frac{2}{5}$ سانتی متر باشد.

۲- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

۳- جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر:

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

نقاط A و B به فاصله از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر و از نقطه B برابر باشد.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

فعالیت

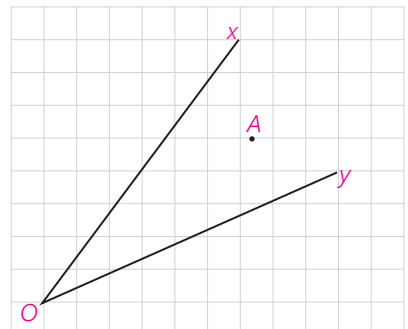
۱- زاویه xOy و نیم خط Oz را نیمساز آن در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصله نقطه A از دو ضلع زاویه xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطه A عمودهایی بر نیم خط‌های Ox ، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)

نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد



۲- زاویه xOy و نقطه A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله نقطه A از نیم خط‌های Ox و Oy باهم برابر باشد.
 نشان دهید که نقطه A روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد.
 (راهنمایی: پاره خط OA ، و دو عمود از نقطه A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره خط OA همان نیمساز xOy است.)



نتیجه ۲

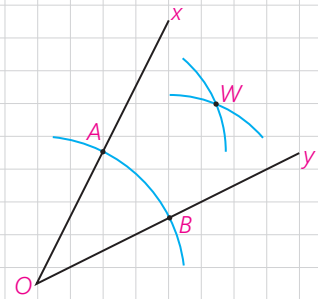
اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه
 قرار دارد.

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی یک زاویه
 قرار داشته باشد، و هر نقطه که از
 دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی آن زاویه قرار دارد.

فعالیت

- ۱- زاویه xOy را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.
 - طول پاره خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- ۲- دهانه پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.
 - طول پاره خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- پاره خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- اندازه زوایه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- پاره خط OW برای زاویه xOy چه نوع پاره خطی است؟



کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

فعالیت

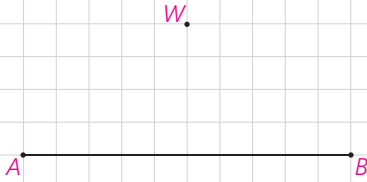
۱- پاره خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه W از دوسر پاره خط AB به یک فاصله است.



نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره خط

۲- پاره خط AB و نقطه W را به گونه‌ای در نظر بگیرید که نقطه W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی $WA = WB$) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.



(راهنمایی: از نقطه W به A و B و به وسط پاره خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.)

نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد

نتیجه

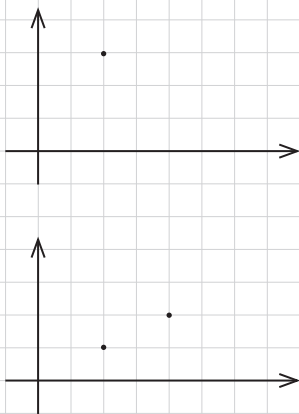
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد و هر نقطه که روی عمودمنصف

فعالیت

۱- یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه مورد نظر بگذرد؟

۲- دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه مورد نظر بگذرد؟

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟



فعالیت

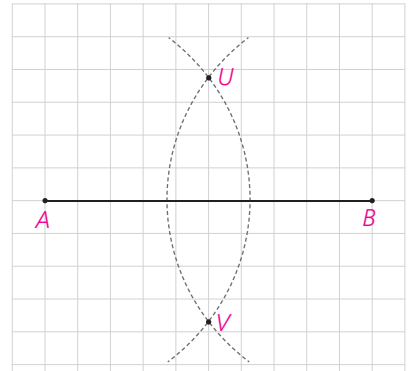
پاره خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.
 ۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲- طول پاره خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳- طول پاره خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۴- آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند؟ چرا؟

۵- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.



کارد کلاس

مراحل رسم عمود منصف یک پاره خط را توضیح دهید.

رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطه M را روی آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره خط AB باشد.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.

۳- عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d و از نقطه

.....

کارد کلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.



فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه T به یک فاصله باشند.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.

۳- آیا عمود منصف پاره خط AB از نقطه T می‌گذرد؟ چرا؟

عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d و از نقطه

.....

کاردرکلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.

فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن

خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.

می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه T بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲- خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب در نظر

بگیرید.)

کاردرکلاس

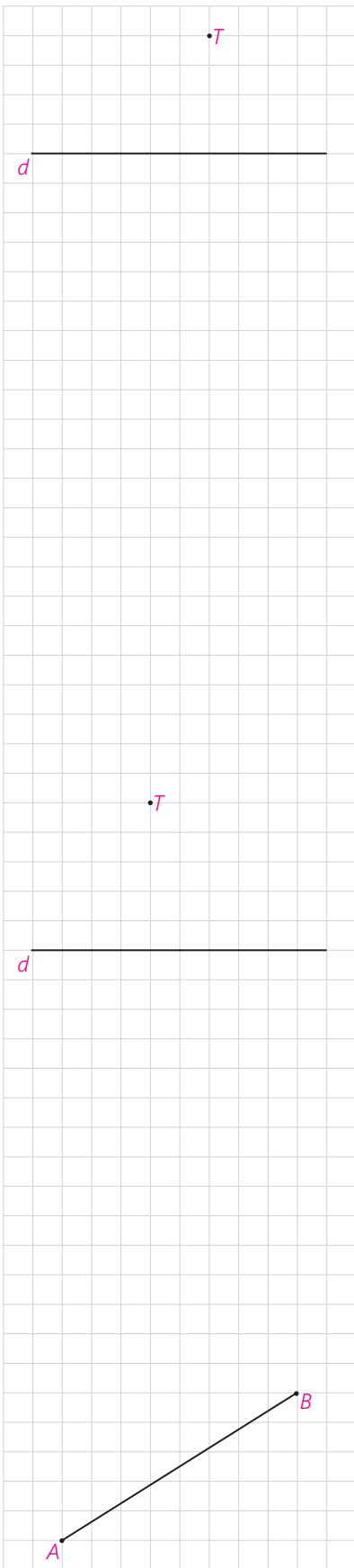
روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.

فعالیت

پاره خط داده شده AB در شکل مقابل را با اندازه ۴ واحد در نظر بگیرید.

الف) عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطه برخورد این

عمود منصف با پاره خط AB ، M باشد.



ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کنید تا عمود منصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

پ) چهارضلعی $ACBD$ چگونه چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟

کارد کلاس

طریقه رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید.

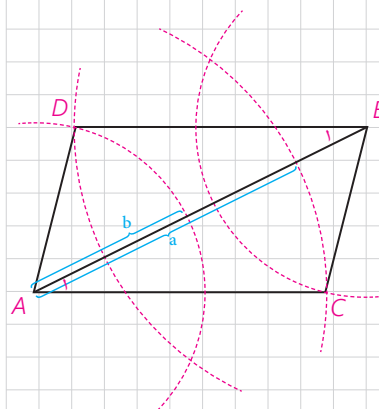


تمرین

۱- می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲- می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

۳- پاره خط AB داده شده است. دهانه پُرگار را یک بار به اندازه a و بار دیگر به اندازه b باز می‌کنیم و از نقطه A دو کمان می‌زنیم. (به طوری که مجموع a و b از اندازه AB بزرگ‌تر باشد) سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این بار از نقطه B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهارضلعی $ACBD$ چه نوع چندضلعی‌ای است؟ چرا؟ (راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای A_1 و B_1 نسبت به هم چگونه‌اند.)



۴- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

۵- می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.
الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از الف) و ب) نیمساز زاویه مورد نظر را رسم کنید.

۷- وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و

مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

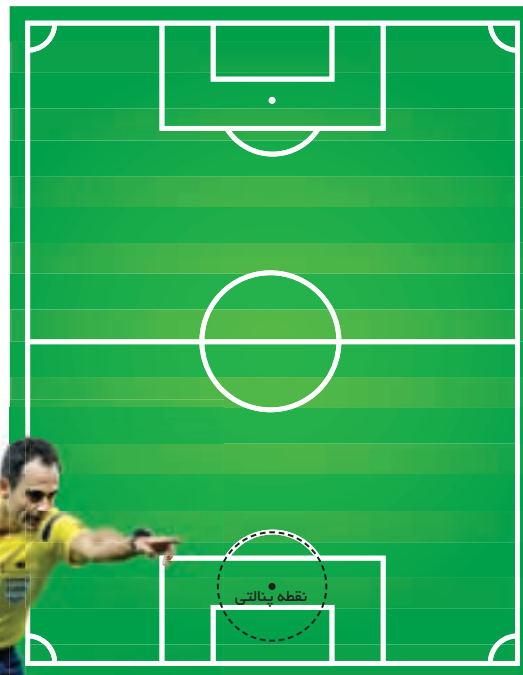
آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطه پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس

آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطه پنالتی

مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد،

چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه هجده قدم، نقطه پنالتی را مشخص کند.



استدلال

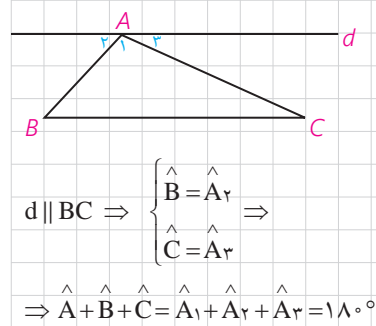
شیوه درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعه انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره‌شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی این‌گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند:

- من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.
- تیم مورد علاقه من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی آینده نیز شکست خواهد خورد.

استقرا و استنتاج

در سال‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن روبه‌رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستی نتیجه گرفته شده مطمئن بود. به‌طور مثال اگر فردی با مشاهده اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری کند که همه افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از استدلال استقرایی استفاده کرده است.

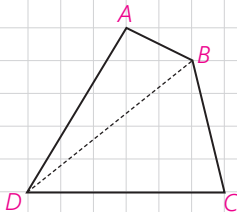
نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن استدلال استنتاجی گفته می‌شود. به‌طور مثال با دانستن رابطه بین خطوط موازی و مورب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.



به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئله زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هر یک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان: در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.



پیمان: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle BCD$ برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با 360° .

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئله قبل برابر 360° است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

– نوع استدلال ارائه شده توسط هر کدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

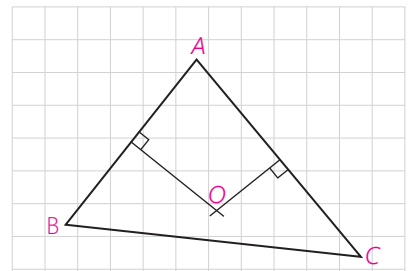
حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که سه عمود منصف اضلاع هر مثلث هم‌رسانند (در یک نقطه به هم می‌رسند).

استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌خط‌های AB و AC متقاطع‌اند، عمود منصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند.

۱- نقطه O روی عمود منصف پاره‌خط AC است؛ بنابراین $AO = CO$.

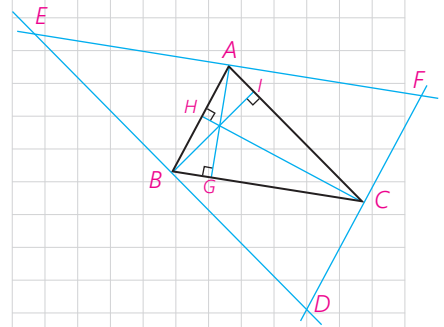
۲- نقطه O روی عمود منصف پاره‌خط AB است؛ بنابراین $AO = BO$.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $BO = CO$. بنابراین نقطه O روی عمود منصف پاره‌خط BC قرار دارد. در نتیجه نقطه O محل برخورد عمود منصف‌هاست.



مثال: استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث هم‌مس‌اند.

استدلال: مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به وجود آید. چهارضلعی $ABCF$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟



۱- بنابراین $BC = EF$

- چهارضلعی $ACBE$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟

۲- بنابراین $BC = EF$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $AG \perp BC$ ؛ بنابراین نقطه A روی عمود منصف پاره‌خط BC قرار دارد.

$$\left. \begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{array} \right\} \Rightarrow AG \perp EF$$

لذا خط AG عمود منصف پاره‌خط BC است.

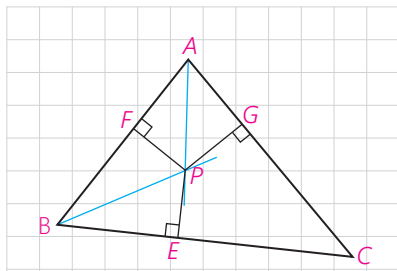
به‌طور مشابه می‌توان نشان داد:

پاره‌خط BI عمود منصف پاره‌خط AC است.

پاره‌خط CH عمود منصف پاره‌خط AB است.

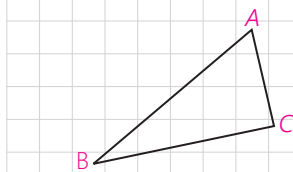
بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC ، روی عمود منصف‌های اضلاع مثلث هم‌مس‌اند.

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هم‌مس‌اند.

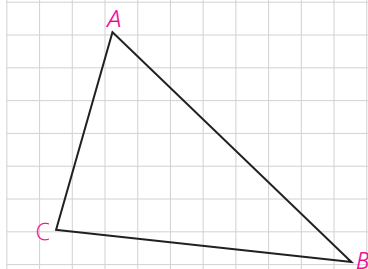


استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطه P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

- ۱- نقطه P روی نیمساز زاویه A است؛ بنابراین =
 - ۲- نقطه P روی نیمساز زاویه B است؛ بنابراین =
- از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: = بنابراین نقطه P روی در نتیجه نقطه P محل برخورد است.

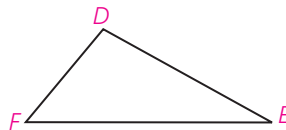


اضلاع			
زاویه‌ها			



فعالیت

به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اول جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع			
زاویه‌ها			



اضلاع			
زاویه‌ها			

چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویه زیر آن وجود دارد؟
 با توجه به این رابطه درباره یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟
 برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟
 آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس مورد نظر درست است؟

مسئله: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

استدلال: برای واضح‌شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثالی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.

فرض: $AB > AC$
 حکم: >

۱- در مثلث متساوی الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۲- اندازه هر زاویه خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

می‌دانیم طبق فرض $AB > AC$ است؛ لذا می‌توانیم نقطه D را روی AB جایی انتخاب کنیم که $AC = AD$

★ اندازه زاویه‌های C و C_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C} \square \hat{C}_1$

مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟

★★ اندازه زاویه‌های C_1 و D_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 \square \hat{D}_1$

زاویه D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟

★★★ اندازه زاویه‌های D_1 و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_1 \square \hat{B}$

از ★ و ★★ و ★★★ چه نتیجه‌ای درباره اندازه زاویه‌های B و C می‌توان

گرفت؟

$\hat{C} \square \hat{B}$

همان‌طور که مشاهده کردید در مثلثی مانند $\triangle ABC$ فرض کردیم که ضلع $AB > AC$ است و نشان دادیم: زاویه روبه‌رو به $AC >$ زاویه روبه‌رو به AB است.

چرا می‌توان این موضوع را درباره تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئله قبل با استدلال استنتاجی به دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.

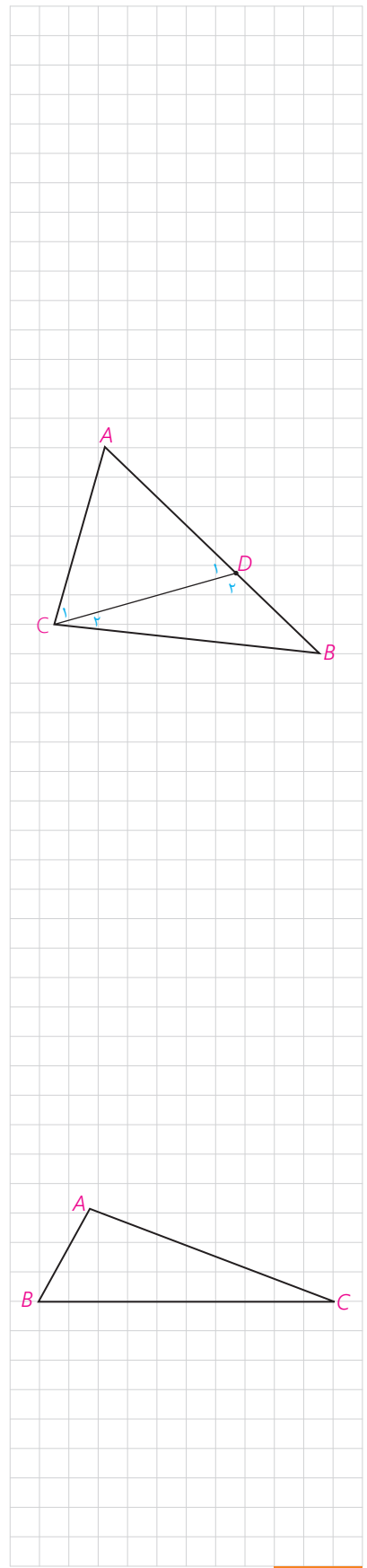
قضیه ۱: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،

زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض: $AB < AC$

حکم: $\hat{C} < \hat{B}$

– بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.



بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحل توسط علاقه‌مندان به ریاضی به دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «**عکس قضیه**» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

به‌طور مثال عکس قضیه ۱ به‌صورت زیر است :

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

$$\text{فرض: } \hat{C} < \hat{B}$$

$$\text{حکم: } AB < AC$$

مثال:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.
عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرهای یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

$$\text{فرض: } AB = AC$$

$$\text{حکم: } BH = CH'$$

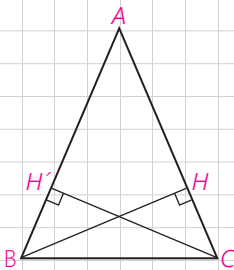
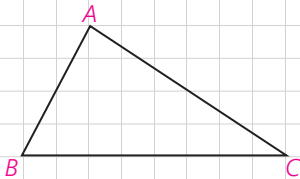
عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

$$\text{فرض: } BH = CH'$$

$$\text{حکم: } AB = AC$$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC و ارتفاع بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده است.



گزاره یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزاره ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزاره مرکب است.

جمله‌های زیر مثال‌هایی از گزاره است :
 - مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است.

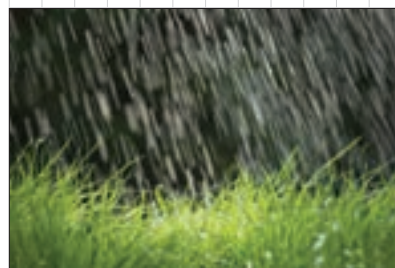
- $2 < 3$

جمله‌های زیر گزاره نیست :

- آیا فردا هوا بارانی است؟

- چه هوای خوبی!

- کتابت را مطالعه کن.



نقیض یک گزاره : همان‌طور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»

نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.»

نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی اش 360° است.»

در برخی گزاره‌ها به جای اینکه درباره چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران بیارد، مسابقه برگزار خواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، گزاره‌های شرطی می‌گویند.

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین صورت که به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.

مثال: از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از

نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

حال می‌خواهیم عکس قضیه ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض: $\hat{A} > \hat{B}$

حکم: $BC > AC$

اثبات: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم..... باشد. بنابراین باید.....

یا.....

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر

می‌شود.

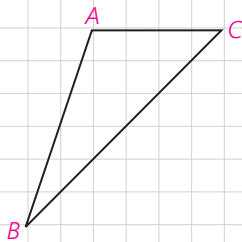
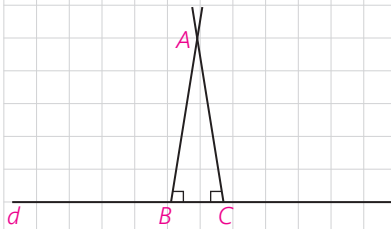
حالت اول: اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیه ۱ باید.....، که با فرض در

تناقض است.

حالت دوم: اگر $BC = AC$ باشد، $\triangle ABC$ یک مثلث..... خواهد بود و می‌دانیم

در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$

و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.



قضیه‌های دوشرطی

همان‌گونه که دیدیم، قضیه ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که:

اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر** است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دوشرطی را می‌توان با نماد \Leftrightarrow (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

فرض کنیم $\triangle ABC$ یک مثلث باشد

$$BC > AB \Leftrightarrow \hat{A} < \hat{C}$$

مثال: در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.



مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است:

(الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

(ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

(پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)

(ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که (-2) یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ

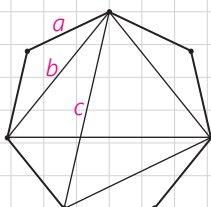
همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، **مثال نقض** گفته می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیابیم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستی آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» دربارهٔ گزینهٔ (ت) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

کاردرکلاس

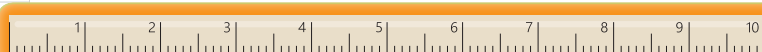


۱- در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به دست می‌آید».

۲- آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعهٔ A و B ، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.



تمرین

۱- می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ ، آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $180^\circ \times (n-2)$.

۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.

۶- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن



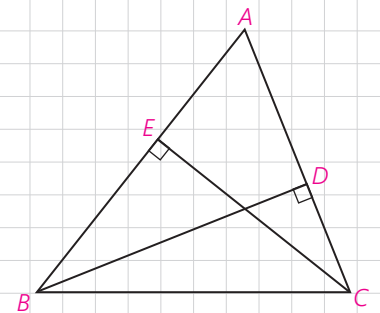
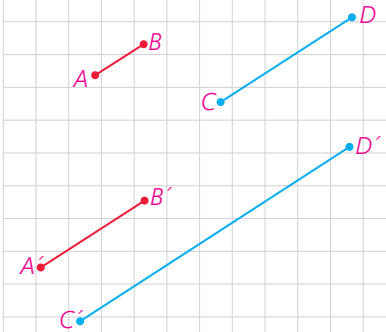
■ قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول‌ها و فاصله‌های غیر قابل دسترس دارد. محاسبه ارتفاع بلندی‌ها به کمک سایه آنها نمونه‌ای از این کاربردهاست.

نسبت و تناسب در هندسه

با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برابری حاصل ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (با $b, d \neq 0$) آنگاه $ad=bc$ و برعکس؛ از تساوی $xy=zt$ با شرط $t, y \neq 0$ تناسب $\frac{x}{t} = \frac{z}{y}$ نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول 2cm و CD پاره‌خطی به طول 5cm باشد، $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5}$. حال فرض کنید $A'B' = 4\text{cm}$ و $C'D' = 10\text{cm}$ ، در این صورت

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

و بنابراین یک تناسب به صورت $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD ، $\frac{2}{5}$ باشد، نسبت CD به AB ، $\frac{5}{2}$ است.



مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن قاعده AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعده AB بنویسید.

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AC \times \dots$$

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} \dots \times \dots$$

— عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

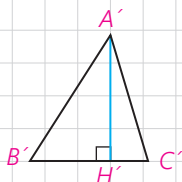
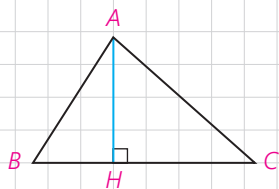
بنابراین: $AC \times \dots = \dots \times \dots$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟

تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

با توجه به فعالیت بالا، جای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع، با عکس نسبت وارد بر آنها برابر است.



۲ فعالیت

در شکل مقابل ارتفاع های AH و $A'H'$ در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم اندازه اند ($AH = A'H'$) با پر کردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجه زیر را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \dots$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \times B'C' \times A'H' = \dots$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AH}{\frac{1}{2} \times B'C' \times A'H'} = \dots$$

۱ نتیجه

هرگاه اندازه ارتفاع های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده هایی است که این ارتفاع ها بر آنها وارد شده است.

کاردکلاس

در شکل مقابل مثلث های ABC ، ACD ، ADE و AEF را که در رأس A مشترک اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همه این مثلث ها کدام پاره خط است؟

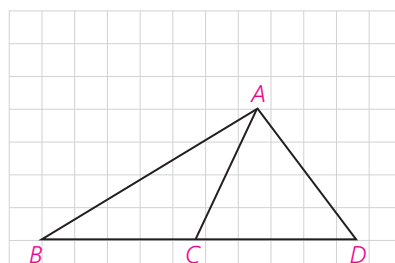
با توجه به نتیجه فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \dots \quad \frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \dots \quad \frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \dots$$

نتیجه ۲

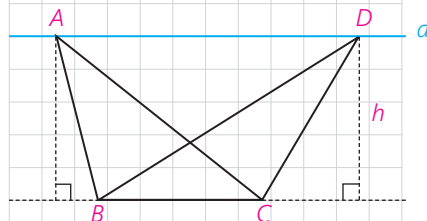
اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های ABC و DBC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟



نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC ، DBC هم‌مساحت‌اند.

ویژگی‌های تناسب

به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

۱	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow 3 \times 10 = 5 \times 6$	b و $d \neq 0$	(طرفین وسطین کردن)
۲	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$	a و b و c و $d \neq 0$	(معکوس کردن طرفین تناسب)
۳	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$	a و b و c و $d \neq 0$	(تعویض جای طرفین یا وسطین)
۴	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$	b و $d \neq 0$	(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)
۵	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$	$\frac{30}{21} = \frac{20}{14} \Rightarrow \frac{9}{21} = \frac{6}{14}$	b و $d \neq 0$	(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)
۶	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}$	b و $d \neq 0$	

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

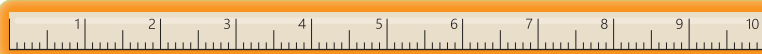
۷

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2+4+6+8}{3+6+9+12} = \frac{20}{30}$$

b_1 و b_2 و \dots و $b_n \neq 0$

(تعمیم ویژگی ۶)

تعریف واسطه (میانگین) هندسی: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ با طرفین وسطین کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^2 = ac$. در این صورت b را واسطه هندسی a و c می‌نامیم. مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطه هندسی بین آنهاست (چرا؟)

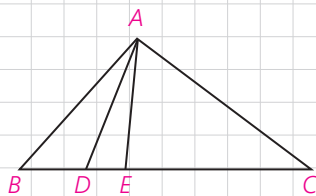


تمرین

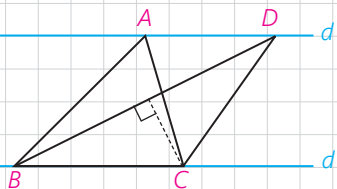
۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$ حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

۲- طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

۳- طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ سانتی‌متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.



۴- در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



۵- در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، 8cm^2 است. اگر $BD = 6\text{cm}$ باشد، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید.

قضیه تالس

در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند. قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ با توجه به نتیجه ۱ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید:

$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}} = \frac{\dots}{\dots}, \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}} = \frac{\dots}{\dots}$$

مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند (چرا؟) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید:

$$\frac{AE}{\dots} = \frac{\dots}{DB}$$

بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم:

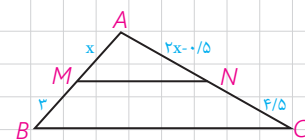
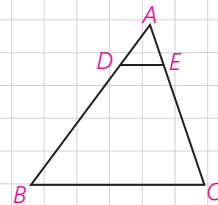
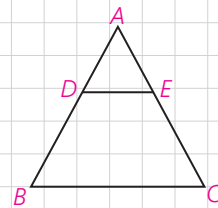
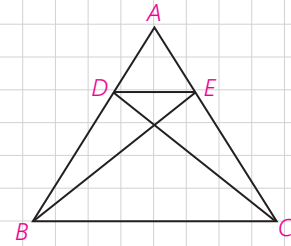
قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه‌رو داشته باشیم $DE \parallel BC$ ، آنگاه:

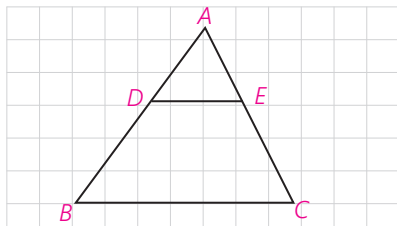
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

کاردرکلاس

۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $AD=1$ و $DB=3$ و $AE=0/8$. به کمک قضیه تالس طول AC را به دست آورید.

۲- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ به کمک قضیه تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به دست آورید.





۳- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ تناسب قضیه تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ و با تفصیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه $\frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

۱ فعالیت

در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، از نقطه E، پاره خط EF موازی AB رسم کرده‌ایم. چهارضلعی DEF B چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟
با توجه به این موضوع داریم:

$$DE = \dots, \quad DB = \dots$$

در مثلث ABC و با در نظر گرفتن $DE \parallel BC$ ، قضیه تالس را بنویسید.

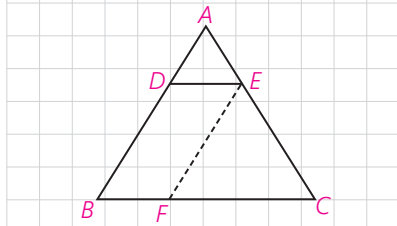
$$\frac{AD}{\dots} = \frac{\dots}{AC} \quad (1)$$

در مثلث CAB با توجه به $EF \parallel AB$ ، قضیه تالس را بنویسید.

$$\frac{BF}{BC} = \frac{\dots}{\dots} \quad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



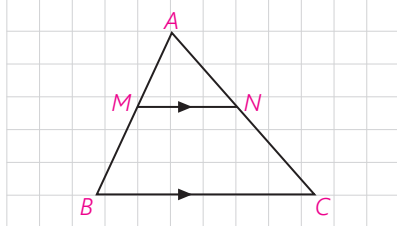
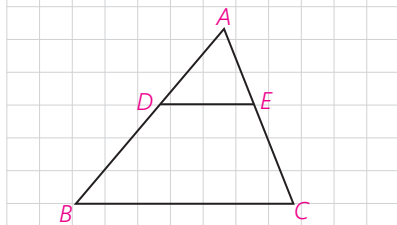
تعمیم قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

کاردرکلاس

در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$ ، طبق قضیه تالس داریم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیه تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

..... \Rightarrow



عکس قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

اثبات با برهان خلف است. در شکل می‌دانیم:

فرض کنیم بر خلاف حکم $MN \parallel BC$ ، پس از نقطه M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیه تالس داریم:

$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

از مقایسه این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ و در نتیجه: $AN' = AN$ و بنابراین N بر N' منطبق است و همان MN' است که موازی BC است.

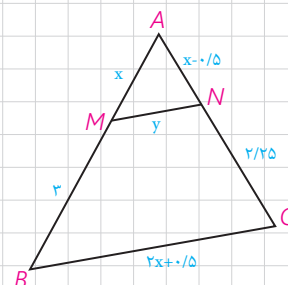
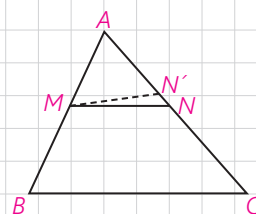
مثال: در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y را به دست آورید.

حل: با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x-1/5}{2/25} \Rightarrow$$

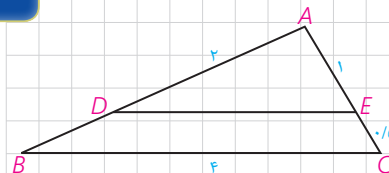
$$2/25x = 3x - 1/5 \Rightarrow 0/75x = 1/5 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{y}{4/5} \Rightarrow y = 1/8$$

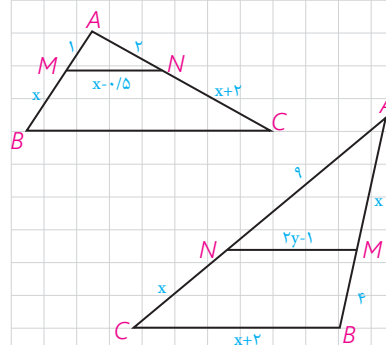


تمرین

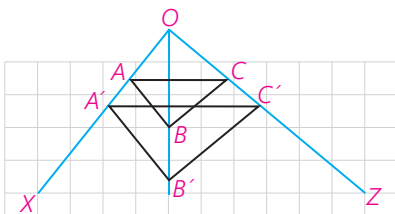
۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ با توجه به اندازه پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به دست آورید.



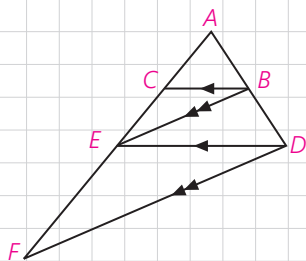
۲- در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$ ؛ مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.



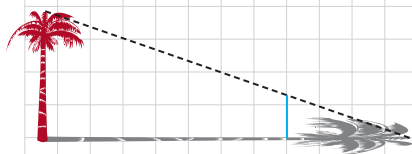
۳- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ مقادیر x و y را به دست آورید.



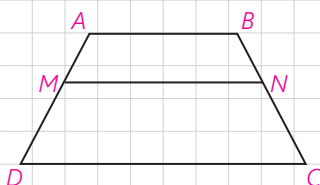
۴- در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



۵- در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ ، به کمک قضیه تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسه تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید: $AE^2 = AC \cdot AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



۶- یکی از کاربردهای قضیه تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبه فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایه درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایه آن روی امتداد سایه درخت قرار گیرد و نوک سایه شاخص نیز بر نوک سایه درخت منطبق شود؛ به طور مثال اگر طول سایه درخت 6° متر، طول سایه شاخص 3° متر و طول شاخص 1° متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟

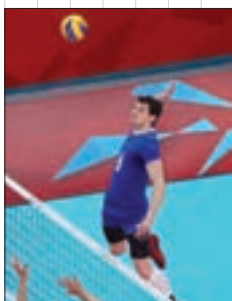


۷- در دوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

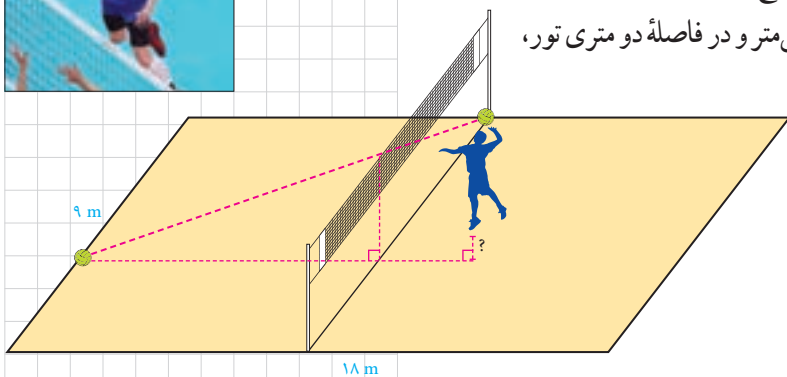
(قضیه تالس در دوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



۸- ابعاد یک زمین استاندارد والیبال 9×9 متر در 18 متر است که توسط خط میانی به دو مربع 9×9 تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع $2/43$ متر روی خط وسط نصب شده است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد 180° سانتی‌متر و در فاصله دو متری تور،

به هوا می‌پرد و تویی را که در ارتفاع 3° سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهایی زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟



تشابه مثلث‌ها

در سال گذشته با مفهوم تشابه و چندضلعی‌های متشابه آشنا شدید. در اینجا می‌خواهیم درباره تشابه مثلث‌ها، بیشتر بدانیم. با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم‌اندازه و اندازه‌های اضلاع آنها متناسب باشند:

$$\angle A = \angle A'$$

$$\angle B = \angle B', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

$$\angle C = \angle C'$$

نسبت اندازه‌های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می‌گوییم. مثلاً اگر $\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$ باشد و اندازه اضلاع مثلث $A'B'C'$ نظیر به نظیر نصف اضلاع مثلث ABC باشند، گوییم مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ ، متشابه است.

سؤال: مثلث ABC با چه نسبت تشابه‌ای، با مثلث $A'B'C'$ متشابه است؟

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

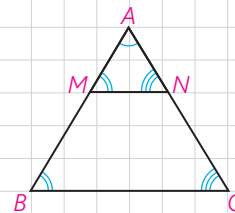
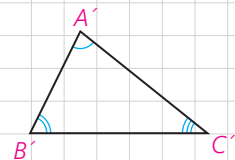
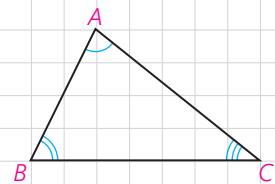
$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

۱- زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟

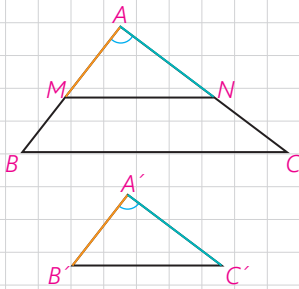
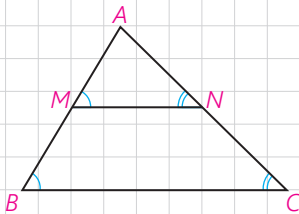
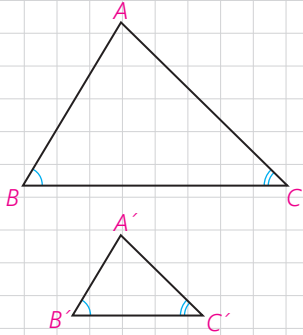
۲- با توجه به تعمیم قضیه تالس تناسب زیر را کامل کنید:

$$\frac{AM}{\dots} = \frac{\dots}{AC} = \frac{MN}{\dots}$$

۳- از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟



حال با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، می‌توانیم سه قضیه اصلی را که حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان می‌کند (مانند حالت‌های هم‌نهستی مثلث‌ها) اثبات کنیم. راهبرد کلی ما برای اثبات این سه قضیه، این است که روی اضلاع AB و AC از مثلث بزرگ‌تر، AM و AN را هم‌اندازه دو ضلع نظیر $A'B'$ و $A'C'$ جدا، و ثابت کنیم MN موازی BC است.



قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم.

$$1- \angle B = \angle B' \text{ و } \angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C' = 180^\circ$$

$$\text{و } \angle C = \angle C' \text{ بنابراین } \angle A = \angle A'$$

$$2- \text{AM} = \text{A'B}' \text{ و } \text{AN} = \text{A'C}' \text{ و } \angle A = \angle A' \Rightarrow \Delta \text{AMN} \cong \Delta \text{A'B'C}' \text{ (ض.ض.)}$$

$$\Rightarrow \text{MN} = \text{B'C}' \text{ و } \angle \text{M} = \angle \text{B}' \text{ و } \angle \text{N} = \angle \text{C}'$$

$$3- \angle \text{M} = \angle \text{B}' \text{ و } \angle \text{B} = \angle \text{B}' \Rightarrow \angle \text{M} = \angle \text{B} \Rightarrow \text{MN} \parallel \text{BC}$$

4- طبق قضیه اساسی تشابه، $\Delta \text{AMN} \sim \Delta \text{ABC}$ در نتیجه: $\Delta \text{A'B'C}' \sim \Delta \text{ABC}$

قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A = \angle A', \frac{\text{A'B}'}{\text{AB}} = \frac{\text{A'C}'}{\text{AC}} \Rightarrow \Delta \text{ABC} \sim \Delta \text{A'B'C}'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC ، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم.

1- مثلث‌های AMN و $A'B'C'$ به چه حالتی هم‌نهست‌اند؟ اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

2- در فرض مسئله به جای $A'B'$ و $A'C'$ ، پاره‌خط‌های هم‌اندازه با آنها را قرار دهید. حال بگویید چرا $\text{MN} \parallel \text{BC}$ ؟

3- با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها و نتیجه قسمت (۱) درستی حکم را ثابت کنید.

قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی AB و AC ، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه $A'B'$ و $A'C'$ جدا کنید.

۱- در فرض به جای $A'B'$ و $A'C'$ مساوی‌های آنها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا $MN \parallel BC$ ؟

۲- از قضیه اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۳- تعمیم قضیه تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسه این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض، نتیجه بگیرید:

$$MN = B'C'$$

۴- مثلث‌های AMN و $A'B'C'$ به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از اینجا درستی حکم را ثابت کنید.

مثال: مطابق شکل روبه‌رو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می‌خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به‌طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله‌ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟

حل: اگر تیر برق را با یک پاره‌خط و تیر فلزی نگه‌دارنده را نیز با پاره‌خطی دیگر مشخص کنیم، شکل روبه‌رو را دوباره رسم می‌کنیم.

حال در دو مثلث ABC و BDE داریم:

$$\angle B = \angle B, \angle C = \angle E = 90^\circ \Rightarrow$$

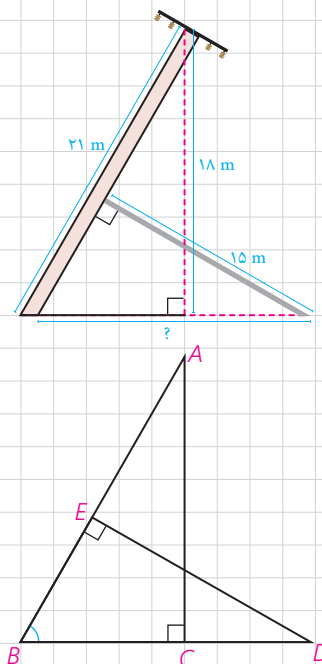
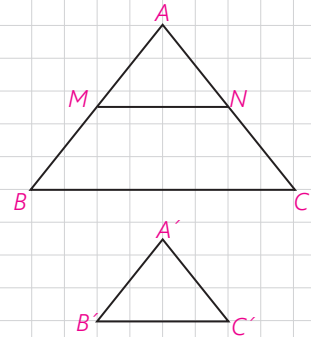
$$\Delta ABC \sim \Delta BDE \Rightarrow$$

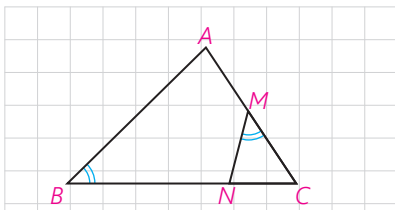
(در نوشتن نسبت تشابه، توجه کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در دو مثلث را در یک نسبت بر هم تقسیم کنید.)

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{15}{18} = \frac{BD}{21} \Rightarrow BD = \frac{21 \times 15}{18} = 17.5 \text{ m}$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصله ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

با استفاده از این سه قضیه (به خصوص قضیه ۱) می‌توانیم تشابه مثلث‌های متشابه را اثبات کنیم و از آن طریق مسئله‌های زیادی را حل کنیم.





مثال: در مثلث ABC، از نقطه M وسط AC، زاویه NMC را مساوی زاویه B جدا کرده ایم. اگر $NC=2$ و $NB=4$ طول AC را به دست آورید.

حل: با کمی دقت مشاهده می کنید که مثلث های ABC و MNC دو زاویه هم اندازه دارند و در نتیجه متشابه اند.

$$\angle M = \angle B, \angle C = \angle C \Rightarrow \triangle MNC \sim \triangle ABC$$

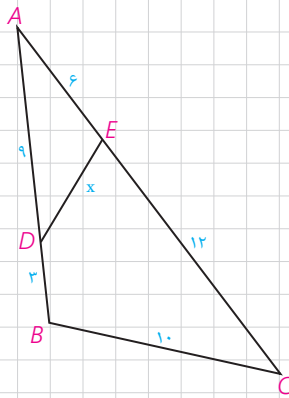
از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم:

$$\frac{MC}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

و به جای MC، $\frac{AC}{2}$ را قرار می دهیم:

$$\frac{AC}{2BC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow AC^2 = 2NC \cdot BC = 2NC(NC + NB) \Rightarrow AC^2 =$$

$$2 \times 2(2 + 4) = 24 \Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$$



مثال: در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است. اندازه x را به دست آورید.

حل: به کمک عددهای داده شده، بدیهی است که:

$$\frac{AD}{AC} = \dots \text{ و } \frac{AE}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

بنابراین \dots و با توجه به زاویه مشترک A مثلث های \dots و \dots متشابه اند. نسبت تشابه را بنویسید و x را به دست آورید.

سؤال: در شکل، روی AC، AD' را هم اندازه AD و روی AB، AE' را هم اندازه AE جدا کنید. چرا $D'E' \parallel BC$ ؟

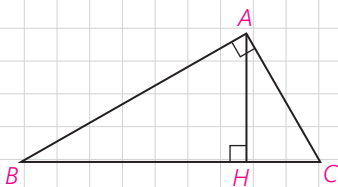
اثبات قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه

فعالیت ۱

۱- در مثلث قائم الزاویه ABC ($A=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می کنیم. آیا می توانید دو زاویه هم اندازه را در دو مثلث ABC و ABH نام ببرید؟ $\hat{H} = \dots = 90^\circ$ و $\hat{B} = \dots$ به همین ترتیب دو زاویه هم اندازه از دو مثلث ABC و ACH را نام ببرید. بنابراین می توانیم بگوییم:

$$\triangle ABH \sim \triangle ABC, \triangle ACH \sim \triangle ABC$$

چرا مثلث های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه اند؟



نتیجه

در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۲- نسبت تشابه دو مثلث ABC و ABH را بنویسید :

$$\frac{AH}{\dots} = \frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{AB} \Rightarrow AB^2 = \dots \times \dots$$

۳- نسبت تشابه دو مثلث ABC و ACH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC واسطه هندسی BC و CH است.

۴- نسبت تشابه دو مثلث ABH و ACH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH واسطه هندسی بین BH و CH است.

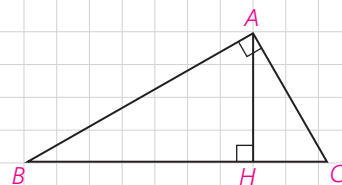
۵- از روابط ۲ و ۳ داریم :
(قضیه فیثاغورس)

$$AB^2 + AC^2 = BC \times \dots + BC \times \dots = BC(\dots + \dots) = BC \cdot BC = BC^2$$

نتیجه

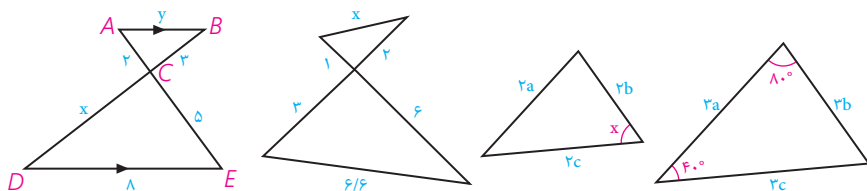
در مثلث قائم الزاویه ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

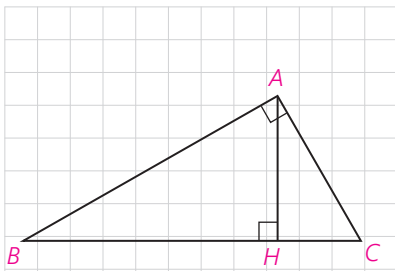
- | | |
|----------------------------------|-------------------------|
| ۱) $AB^2 = BC \cdot BH$ | ۲) $AC^2 = BC \cdot CH$ |
| ۳) $AB^2 + AC^2 = BC^2$ | ۴) $AH^2 = BH \cdot CH$ |
| ۵) $AH \times BC = AB \times AC$ | |



تمرین

۱- در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x, y را مشخص کنید :





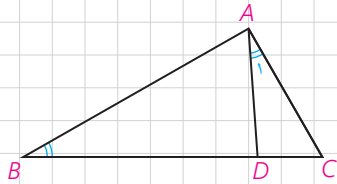
۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ($A=90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

۱) $BH=9$ ، $CH=4$ ، $AH=?$ ، $AB=?$ ، $AC=?$

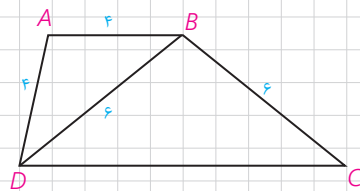
۲) $AB=10$ ، $BC=12$ ، $AC=?$ ، $AH=?$

۳) $AB=8$ ، $AC=6$ ، $BH=?$ ، $CH=?$

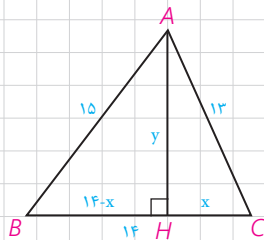
۴) $AB=8$ ، $AH=4$ ، $BC=?$ ، $AC=?$



۳- در شکل روبه‌رو $\angle A = \angle B$ و $AC=4$ و $BD=6$ ، طول BC را به دست آورید.

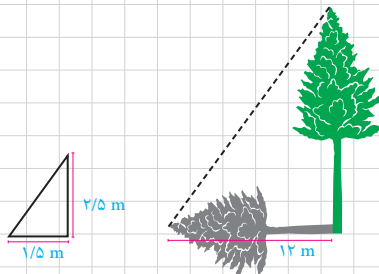


۴- در شکل روبه‌رو ABCD دوزنقه است. طول قاعده CD را به دست آورید.

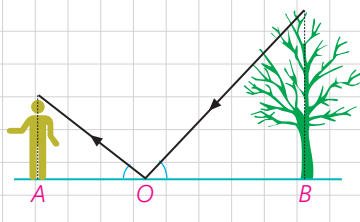


۵- در شکل مقابل، مثلی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH ، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۶- در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش‌آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش‌آموز را می‌بینید. با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.

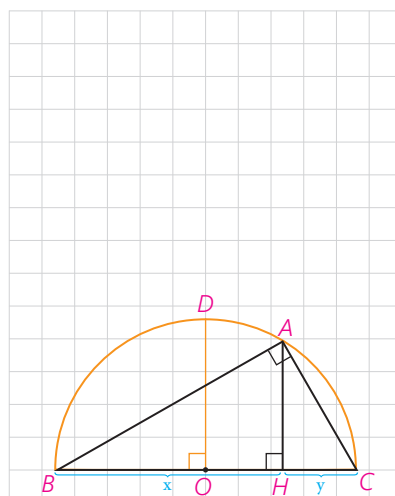


الف) روش ترانه: ترانه یک چوب $2/5$ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایه چوب در آن زمان $1/5$ متر بود. هم‌زمان طول سایه درخت 12 متر بود. از اینجا چگونه او توانست ارتفاع درخت را اندازه بگیرد؟ ارتفاع این درخت چند متر است؟



ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطه O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجه به آنچه از خواص

آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازه‌ی قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به دست آورد. اگر قد شهرزاد ۱۶۰ سانتی‌متر و فاصله پای او از آینه $۲/۵$ متر و فاصله آینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



۷- در شکل مقابل نیم‌دایره‌ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطه دلخواه A روی محیط نیم‌دایره است.
الف) چرا زاویه A قائمه است؟

ب) برای نقطه A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است. اندازه‌های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

$$OD \square AH$$

پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

ت) آیا می‌توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟

۸- با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

(۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه طول‌های اضلاع آن برقرار است.

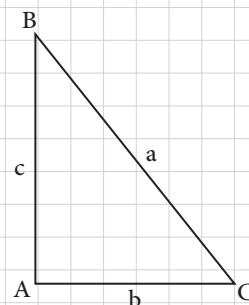
(۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که

$$\hat{A}' = 90^\circ \text{ و } A'C' = AC \text{ و } A'B' = AB$$

(۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

(۴) توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان نمایید.



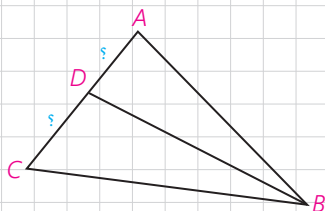
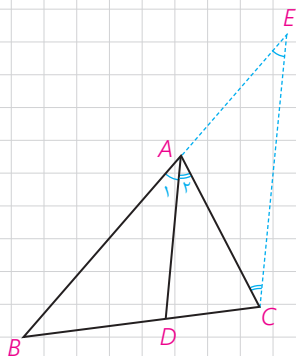
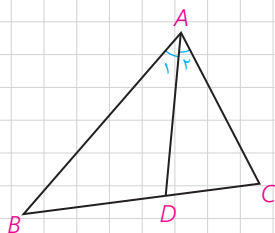
کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها

۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\angle A_1 = \angle A_2$

$$\text{حکم: } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



اثبات: مطابق شکل، از نقطه C خط راستی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

الف) چرا $\angle A_1 = \angle E$ و چرا $\angle A_2 = \angle C$ ؟

ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای درباره زوایای E و C می‌توان گرفت؟

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟

ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ($AD \parallel EC$) نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجه قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \dots$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث، به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد.

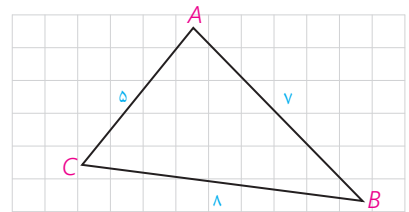
مثال: در مثلث ABC، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، به دست آورید.

حل:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{15}{8} \Rightarrow$$

$$CD = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3}, \quad AD = AC - CD = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را که این نیمساز روی AB جدا می‌کند به دست آورید.



۲- نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

به عنوان مثال اگر مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد $(\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k)$ آنگاه:

(الف) نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر آنها k است:

$$\frac{A'H'}{AH} = k$$

(ب) نسبت اندازه‌های میانه‌های متناظر آنها k است:

$$\frac{C'N'}{CN} = k$$

(ج) نسبت اندازه‌های نیمسازهای متناظر آنها مساوی k است:

$$\frac{B'D'}{BD} = k$$

در مورد محیط‌های دو مثلث نیز داریم:

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k$$

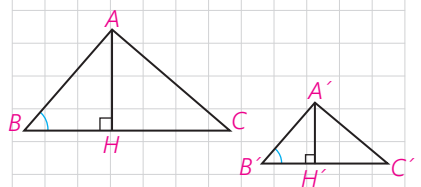
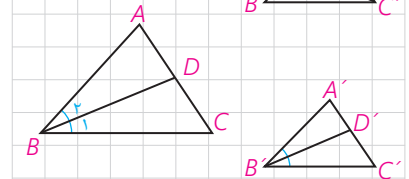
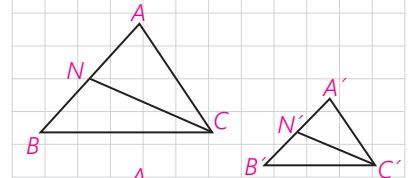
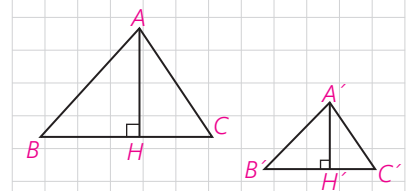
و در مورد مساحت‌ها داریم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$$

اثبات: اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) است. (چرا؟)

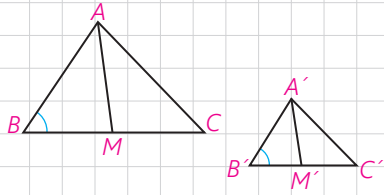
(الف) ارتفاع‌ها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'H'}{AH} = k$



چرا $\angle B = \angle B'$ بنا براین $\Delta ABH \sim \Delta A'B'H'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه گیری کنید.

ب) میانه ها



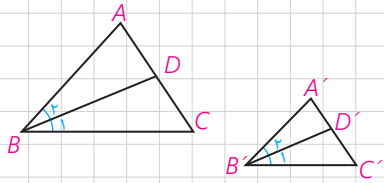
فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'M'}{AM} = k$

چرا $\angle B = \angle B'$ ؟

$$\frac{B'M'}{BM} = \frac{\frac{1}{2} \dots}{\frac{1}{2} \dots} = \dots = k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'M'}{BM}$$

بنابراین $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

ج) نیمسازها



فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{B'D'}{BD} = k$

چرا $\angle A = \angle A'$ ، چرا $\angle B = \angle B'$ ؟

بنابراین $\Delta A'B'D' \sim \Delta ABD$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

د) محیطها

به سادگی و به کمک ویژگی تناسبها می توان نوشت :

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \Rightarrow$$

$$\frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k$$

ه) مساحتها

دیدیم که نسبت ارتفاعهای نظیر، مساوی نسبت تشابه است؛ بنابراین داریم :

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{B'C'}{BC} = k \quad \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} A'H' \cdot B'C'}{\frac{1}{2} AH \cdot BC} = \frac{A'H'}{AH} \times \frac{B'C'}{BC} = k \cdot k = k^2$$

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.
 ۱- اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

۲- قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \dots, \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

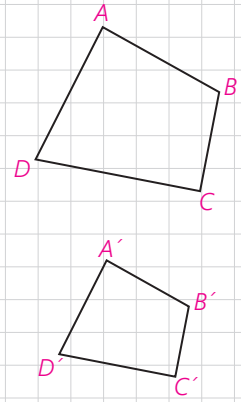
بنابراین نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی، مساوی مربع نسبت تشابه آنهاست. به همین ترتیب می‌توانیم نسبت محیط‌ها و مساحت‌های هر دو n ضلعی متشابه را به صورت زیر ثابت کنیم:

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.

مثال: محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟
حل: می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند (چرا؟) بنابراین نسبت محیط‌های آنها، نسبت تشابه آنهاست، یعنی $k=3$ بنابراین: $\frac{S}{S'} = k^2 = 9$ یعنی مساحت مثلث بزرگ‌تر، ۹ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

۱- اندازه محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب 10 و 18 واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر 15 واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟



۲- نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{4}{9}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳- اندازه‌های اضلاع یک هفت‌ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت‌ضلعی چند برابر می‌شود؟

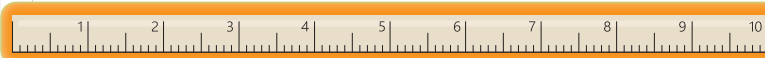
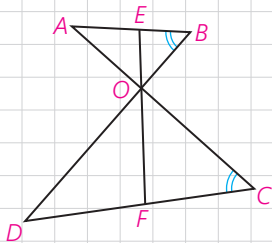
فعالیت

در شکل روبه‌رو $EF = 10 \text{ cm}$ و زاویه متقابل به رأس O است و $\angle B = \angle C$.

الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

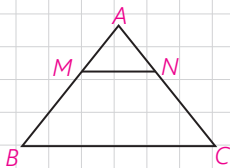
ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

ج) طول‌های OE و OF را به دست آورید.



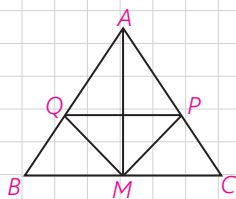
تمرین

۱- طول‌های اضلاع یک مثلث 10 و 12 و 15 سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، 10 سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.



۲- در شکل روبه‌رو $BC \parallel MN$ است و مساحت ذوزنقه $MNCB$ هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.

۳- در مثلث ABC ، $AB=7$ و $AC=5$ و $\angle C=10^\circ$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به دست آورید.



۴- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید:

$$PQ \parallel BC$$

۵- در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویه A است و عمودهای DH و DH' نیز رسم شده‌اند.
 الف) با توجه به نتیجه (۲) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.

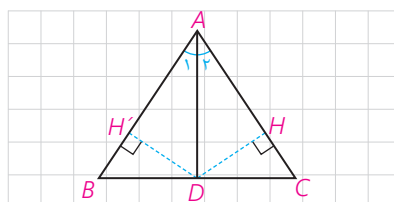
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

ب) چرا $DH=DH'$ ؟ با توجه به این موضوع و نتیجه (۱) از درس اول بار دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیه نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

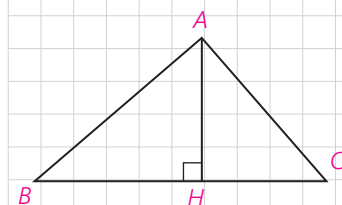
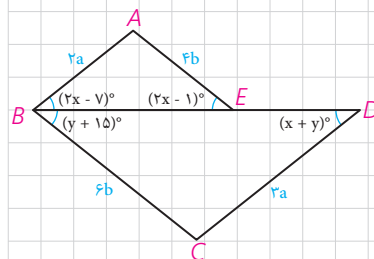
۶- در شکل روبه‌رو می‌دانیم $BE=2DE$ است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



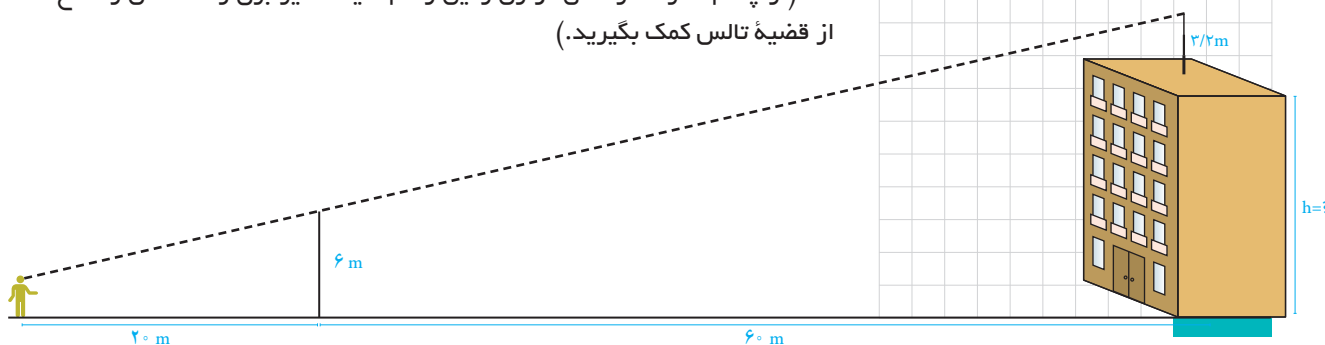
۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\angle A=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $\triangle ABH \sim \triangle ABC \sim \triangle ACH$ است. با توجه به این موضوع، الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامه کار، درستی قضیه فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

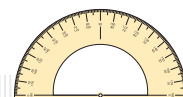
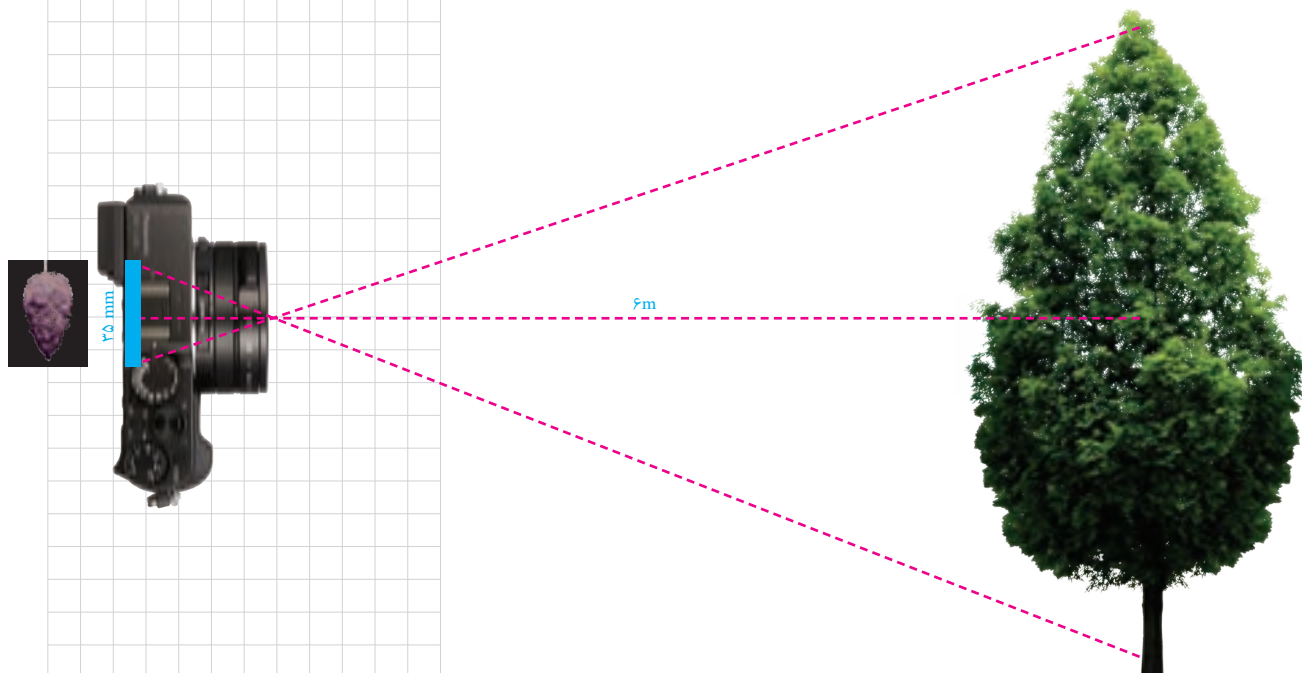


۸- مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع $3/2$ متر نصب شده است. در فاصله 60 متری ساختمان، یک تیر برق 6 متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله 20 متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصله چشم ناظر از زمین $1/6$ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید. (از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیه تالس کمک بگیرید.)





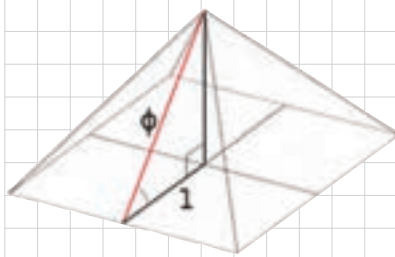
۹- در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس برداری، روی یک حلقه فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی^۱ ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، ۳۵mm و فاصله آن درون دوربین تا عدسی^۲، ۴/۲cm و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازه واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟



خوانندگی

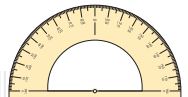


اعداد فیثاغورسی به سه عددی می‌گویند که مجموع مربع‌های دو تا از آنها برابر با مربع سوم می‌باشد؛ به عبارتی اعداد a ، b و c را فیثاغورسی گویند، هرگاه $a^2 = b^2 + c^2$. اعداد فیثاغورسی اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه (راست گوشه) را تشکیل می‌دهند. بررسی‌ها نشان داده است که در برخی نقاط جهان در ساخت بناها پیش از شناخت قضیه فیثاغورس از ویژگی اعداد فیثاغورسی استفاده می‌شده است.



۱- واژه «تصویر منفی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «نگاتیو» به کار رفته است.

۲- واژه «عدسی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «لنز» به کار رفته است.



اثبات ویژگی‌های تناسب

۱ طرفین - وسطین کردن: طرفین تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را در عدد غیر صفر bd ضرب کنید:

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd \Rightarrow ad = bc$$

۲ ویژگی‌های (۲) و (۳) با طرفین - وسطین کردن، به سادگی نتیجه می‌شوند:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow da = cb \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow bc = ad \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

۳ ویژگی‌های ۵ و ۴ به صورت زیر با اضافه یا کم کردن عدد ۱ به دو طرف تناسب نتیجه می‌شوند:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

ویژگی‌های تفصیل نسبت در صورت و مخرج را خودتان اثبات کنید.

۴ اثبات ویژگی ۶:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

به همین ترتیب می‌توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.

چند ضلعی‌ها



پل طبیعت - تهران

■ همه هنرمندان و معماران با هر سبک و در هر رشته به دنبال آن هستند که دیدگاه‌های خود را از زندگی و جهان اطراف در آنچه خلق می‌کنند و می‌سازند به نوعی به نمایش بگذارند. هندسه و به‌ویژه چندضلعی‌ها یکی از ابزارهای مهمی هستند که به کمک آنها می‌توان این آثار را پدید آورد.

چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها

با پاره‌خط قبلاً آشنا شده‌اید. مطابق شکل زیر در پاره‌خط AB ، نقطه‌های A و B را دو سر پاره‌خط یا نقاط انتهایی پاره‌خط می‌نامند.



به شکل‌های روبه‌رو توجه کنید. هر شکل از تعدادی پاره‌خط تشکیل شده است؛ اما نقاط مشترک پاره‌خط‌ها در همهٔ شکل‌ها با هم یکسان نیستند.

در شکل (۳) دو پاره‌خط AE و FC یکدیگر را در نقطه‌ای به جز نقاط انتهایی‌شان قطع کرده‌اند. در شکل (۴) پاره‌خط DE فقط در یک انتها بعضی پاره‌خط‌ها را قطع کرده و در انتهای دیگر هیچ پاره‌خطی را قطع نکرده است. اما در شکل‌های (۱) و (۲) هر پاره‌خط فقط دو پاره‌خط دیگر را آن هم در نقاط انتهایی قطع کرده است. چنین شکل‌های بسته‌ای را که از اجتماع پاره‌خط‌های متوالی هم تشکیل شده‌است، چندضلعی می‌نامند. در تمام این فصل شکل‌ها در صفحه در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف: چندضلعی شکلی است شامل n ($n \geq 3$) پاره‌خط متوالی که:

(۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

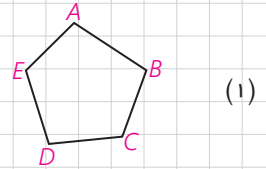
(۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

هر یک از این پاره‌خط‌ها یک ضلع چندضلعی است.

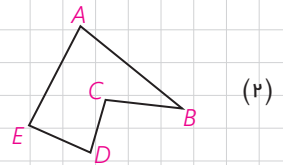
هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع مجاور و نقطهٔ مشترک آن دو را رأس می‌نامند. هر دو زاویهٔ چندضلعی را که هر دو در یک ضلع چندضلعی مشترک‌اند، دو زاویهٔ مجاور به آن ضلع در چندضلعی می‌نامند. مانند $\angle A$ و $\angle B$ در شکل‌های (۱) و (۲)

هر گاه تعداد ضلع‌های چندضلعی n تا باشد، آن را n ضلعی می‌نامند.

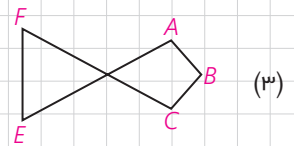
کدام یک از شکل‌های مقابل چندضلعی است و تعداد ضلع‌ها و رأس‌های آن چند تا است؟ برخی ضلع‌های مجاور هم و غیر مجاور هم را مشخص کنید.



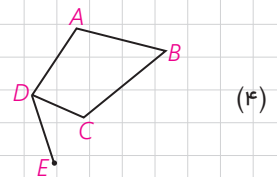
(۱)



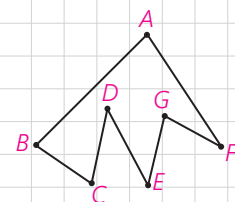
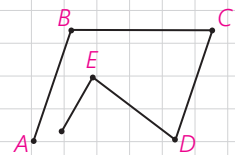
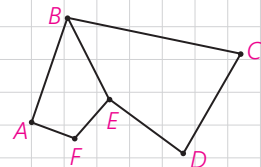
(۲)



(۳)



(۴)



قطر در چندضلعی‌ها

در هر n ضلعی، هر پاره‌خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، قطر می‌نامند.

یک چهار ضلعی چند قطر دارد؟

n ضلعی $A_1A_2\dots A_n$ را در نظر می‌گیریم. از رأس A_1 ، قطر می‌توان رسم کرد. با توجه به اینکه n رأس داریم، آیا می‌توان گفت تعداد قطرهای در n ضلعی $n(n-3)$ است؟

با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد؟

آیا جواب به دست آمده درست است؟

با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبه قطرهای می‌رسیم؟ چرا این تغییر لازم است؟

در هر n ضلعی تعداد قطرهای $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

کاردرکلاس

n نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبه تعداد قطرهای n ضلعی به کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرهای و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

تعریف: n ضلعی را محدب گوییم؛ هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیه نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند.

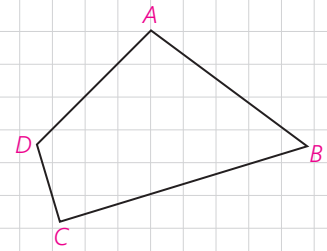
هر «چندضلعی» را که محدب نباشد، مقعر می‌نامند.



■ چهار ضلعی های مهم و ویژگی هایی از آنها

در چهار ضلعی ABCD در شکل، دو ضلع AB و CD، همچنین دو ضلع AD و BC را ضلع های مقابل می نامند. در چهار ضلعی هر دو ضلع غیر مجاور را دو ضلع مقابل می نامند.

ابتدا تعریف چهار ضلعی های مهم را بیان می کنیم.



تعریف ها:

- ۱- متوازی الاضلاع چهار ضلعی ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.
- ۲- مستطیل چهار ضلعی ای است که، همه زاویه های آن قائمه باشند.
- ۳- لوزی چهار ضلعی ای است که، هر چهار ضلع آن هم اندازه باشند.
- ۴- مربع چهار ضلعی ای است که هر چهار ضلع آن هم اندازه و حداقل یک زاویه آن قائمه باشد.

کاردرکلاس

با توجه به تعریف های بالا درستی هر یک از عبارات های زیر را توجیه کنید :

(الف) مستطیل یک متوازی الاضلاع است.

(ب) اگر در متوازی الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟

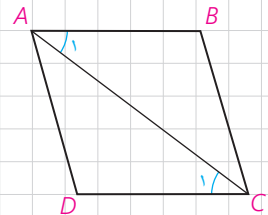
(پ) لوزی یک متوازی الاضلاع است.

در لوزی ABCD قطر AC را رسم می کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت هم نهشت اند. بنابراین دو زاویه و هم اندازه اند.

در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی اند. یعنی لوزی متوازی الاضلاع است.

بنابراین، لوزی متوازی الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم اندازه باشند.

(ت) مربع یک متوازی الاضلاع است.



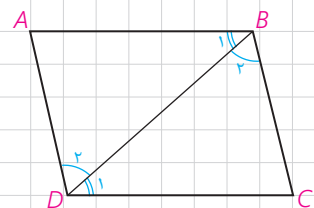
■ ویژگی هایی از متوازی الاضلاع

۱ فعالیت

متوازی الاضلاع ABCD را در نظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع ها چه نتیجه ای می گیرید؟

دو مثلث ABD و CDB به حالت هم نهشت اند.

در نتیجه، $AD = \dots\dots\dots$ و $AB = \dots\dots\dots$.



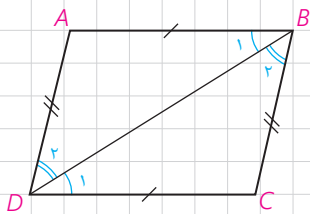
بنابراین قضیه زیر ثابت شده است؛

قضیه ۱: در هر متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم اندازه‌اند.

کاردرکلاس

در فعالیت (۱) مشاهده کردیم که وقتی در هر متوازی‌الاضلاع ABCD یک قطر مثلاً قطر BD را رسم می‌کنیم. دو مثلث هم‌نهشت ABD و CDB پدید می‌آیند. حال پرسش این است، اگر در یک چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم کنیم و $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$ هم‌نهشت باشند، آیا چهارضلعی ABCD همواره متوازی‌الاضلاع است؟ اگر چنین است، آن را ثابت کنید و اگر نادرست است، مثال نقض بیاورید.

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، ضلع‌های مقابل دویهدو هم اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



در چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم می‌کنیم. به حالت، $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. از هم‌نهشتی این دو مثلث نتیجه می‌گیریم، اندازه $\angle B_1$ برابر اندازه است.

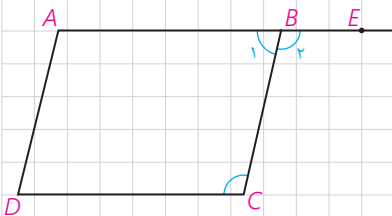
بنابراین ضلع AB موازی ضلع است. از چه قضیه‌ای آن را نتیجه گرفته‌اید؟

موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع‌های AD و BC را چگونه نتیجه می‌گیرید؟ بنابراین چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲ فعالیت

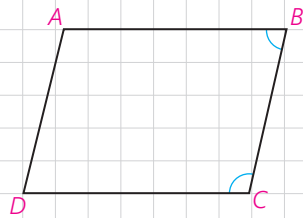
چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. با توجه به شکل، $\angle B_1 = \angle C$ است؛ چرا؟ $\angle B_2$ و $\angle B_1$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle C$ و $\angle B_1$ می‌باشند. بنابراین قضیه زیر ثابت شده است؛

قضیه ۲: در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل‌اند.



عکس قضیه ۲: هر چهارضلعی که هر دو زاویه مجاور آن مکمل باشند، متوازی الاضلاع است.

در چهارضلعی ABCD، دو زاویه $\angle B$ و $\angle C$ با هم مکمل اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع است.
 به همین ترتیب دو زاویه $\angle A$ و $\angle B$ نیز مکمل اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع است؛ بنابراین چهارضلعی ABCD است.

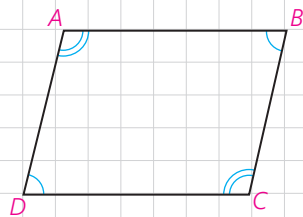


قضیه ۳: در هر متوازی الاضلاع، هر دو زاویه مقابل هم اندازه اند.

با توجه به قضیه قبل آن را ثابت کنید.
 می توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

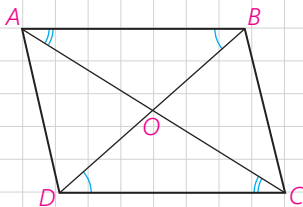
عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مقابل هم اندازه باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

فرض کنیم در چهارضلعی ABCD هر دو زاویه مقابل هم اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و همچنین $\angle A$ و $\angle C$ هم اندازه اند. می دانیم مجموع اندازه های زاویه های درونی هر چهارضلعی محدب 360° است. چگونه به کمک آن ثابت می کنید هر دو زاویه مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل اند؟
 بنابراین به کمک عکس قضیه ۲ ثابت کرده اید متوازی الاضلاع است.



۳ فعالیت

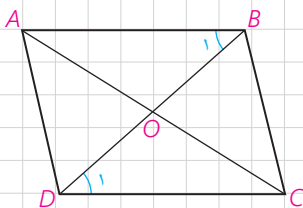
در متوازی الاضلاع ABCD، دو قطر AC و BD را رسم می کنیم و نقطه تلاقی آن دو را O می نامیم. $\triangle AOB \cong \triangle COD$. چرا؟
 بنابراین، $OB = \dots$ و $OA = \dots$. در نتیجه؛



قضیه ۴: در هر متوازی الاضلاع قطرها

۴ فعالیت

فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می دهید این چهارضلعی متوازی الاضلاع است؟



نقطه تقاطع دو قطر را O می‌نامیم. $\triangle AOB \cong \triangle OCD$. چرا؟

اندازه $\angle B_1$ برابر اندازه است. در نتیجه، ضلع AB موازی ضلع است. دو مثلث دیگر را در نظر بگیرید و به طور مشابه نشان دهید دو ضلع دیگر نیز موازی‌اند.
بنابراین؛

عکس قضیه ۴: هر چهار ضلعی که قطرهای آن منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

۵ فعالیت

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم‌اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.

اندازه $\angle A_1$ با اندازه برابر است.

بنابراین، بنابر حالت هم‌نهستی، $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

در نتیجه اندازه $\angle A_2$ برابر اندازه زاویه است که از آن نتیجه می‌گیرید ضلع AD موازی ضلع است. بنابراین، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. یعنی؛

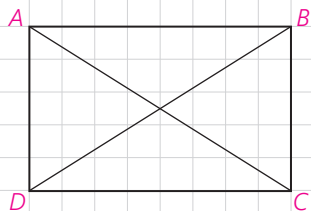
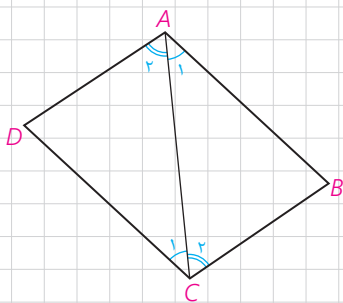
هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی‌الاضلاعی که مستطیل نباشد، برقرار نیست؟ در مورد مربع چطور؟

در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهستی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت $AC=BD$ ؟ این هم‌نهستی را نشان دهید.

بنابراین در هر مستطیل قطرها



اگر دو قطر یک چهارضلعی هم اندازه باشند، آیا می توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟

اگر این چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید.

۶ فعالیت

ویژگی مهمی در مثلث قائم الزاویه

مثلث قائم الزاویه ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانه وارد بر وتر است در نظر می گیریم.

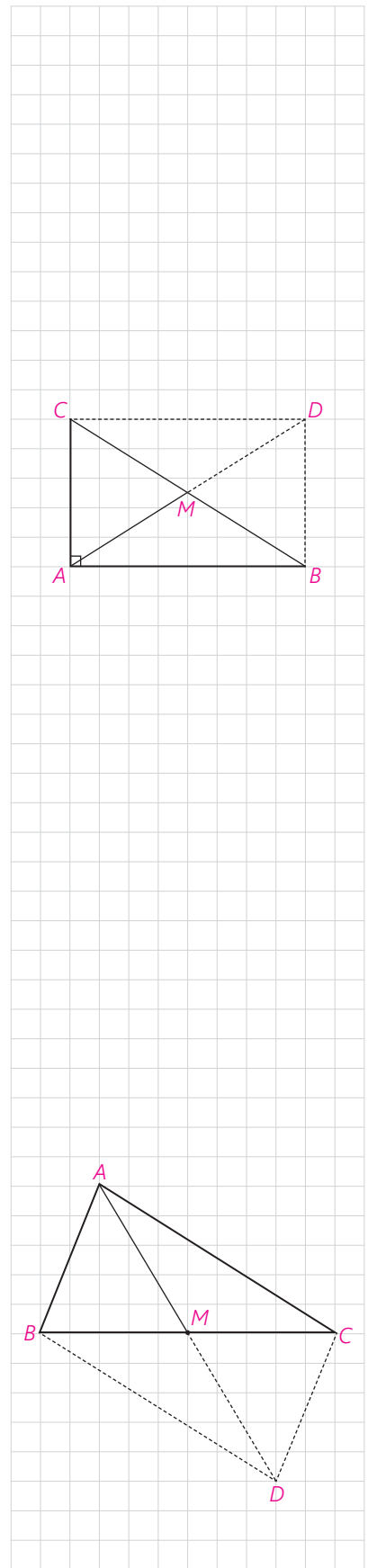
روی نیم خط AM نقطه D را چنان در نظر می گیریم که $AM = MD$.

چرا چهارضلعی $ABDC$ متوازی الاضلاع است؟

چرا این چهارضلعی مستطیل است؟

در مورد قطرهای چه نتیجه ای می گیرید؟

اندازه AM چه رابطه ای با اندازه BC دارد؟ آن را بیان کنید.



در هر مثلث قائم الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر اندازه وتر است.

می توانیم عکس این ویژگی را نیز ثابت کنیم.

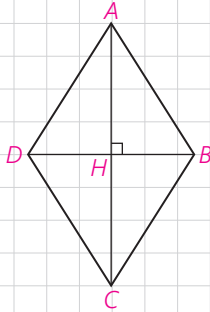
اگر در مثلثی اندازه میانه وارد بر یک ضلع، نصف اندازه آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

در مثلث ABC ، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{2}$. روی نیم خط AM نقطه D را چنان در نظر می گیریم که $MD = AM$.

آیا می توانید نتیجه بگیرید $AD = BC$ و قطرهای AD و BC منصف یکدیگرند؟ چگونه نتیجه می گیرید $\angle A$ قائمه است؟

ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟

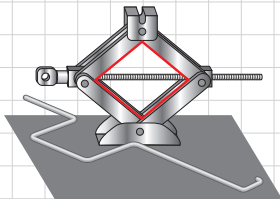


قطرهای لوزی ABCD را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرهای آن منصف یکدیگرند. $\triangle ABD$ چه نوع مثلثی است؟
نقطه تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD، AH چه پاره خطی است؟
چرا پاره خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟
بنابراین؛

در هر لوزی قطرهای یکدیگرند و قطرهای روی زاویه‌ها می‌باشند.

کاردرکلاس

- ۱- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.
 - ۲- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لاقط یک قطر روی نیمساز یک زاویه آن باشد، لوزی است.
- اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.



در شکل یک جک اتومبیل را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟
اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز با هم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته‌شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

دوزنقه

دوزنقه چهارضلعی‌ای است که با چهارضلعی‌هایی که قبلاً بررسی کردیم، کمی متفاوت است.

تعریف: دوزنقه چهارضلعی‌ای است که فقط دو ضلع آن موازی باشند.

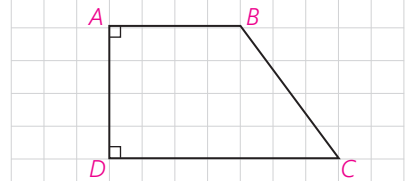
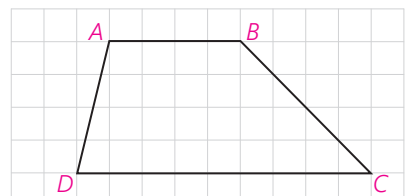
هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی‌اند، قاعده و هر یک از دو ضلع غیرموازی را ساق می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB و CD و قاطع‌های BC و AD در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ هستند. همچنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ هستند.

اگر در یک دوزنقه اندازه‌های دو ساق برابر باشند، آن را دوزنقه متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک دوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر قاعده دیگر نیز عمود است؛ چرا؟

در این صورت دوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.



۷ فعالیت

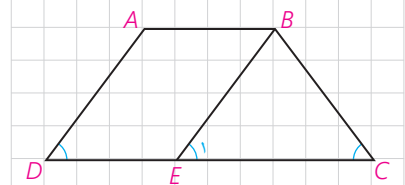
دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ را که در آن $AD = BC$ است، در نظر می‌گیریم. از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده DC را در E قطع کند. این صورت چهارضلعی $ABED$ است.

چرا دو زاویه $\angle D$ و $\angle E$ هم اندازه‌اند؟

چرا $BC = BE$ ؟

بنابراین اندازه $\angle E$ برابر اندازه است.

اکنون $\angle C$ و $\angle D$ هم اندازه‌اند. چرا؟ بنابراین:

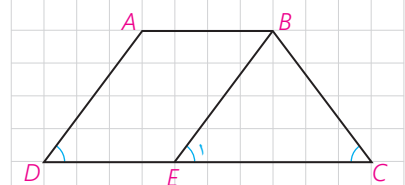


در هر دوزنقه متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.

آیا عکس این ویژگی نیز درست است؟

فرض کنید در دوزنقه $ABCD$ ، دو زاویه $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. از B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در E قطع کند. از اینکه $\angle D$ و $\angle E$ نیز هم‌اندازه‌اند، پس دو زاویه هم‌اندازه‌اند و در نتیجه $BC = BE$.

چون $ABED$ متوازی‌الاضلاع است، پس $AD = BE$. در نتیجه، $AD = BC$ است؛ بنابراین:



اگر در یک دوزنقه دو زاویه مجاور به یک قاعده هم‌اندازه باشند، دوزنقه متساوی‌الساقین است.

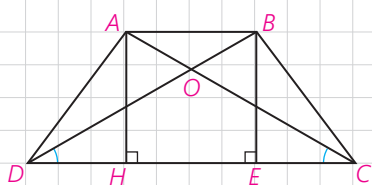
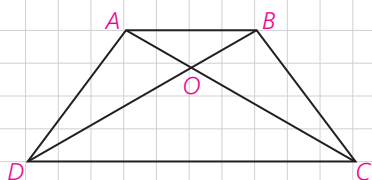
به کمک ویژگی دوزنقه متساوی الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می‌شود. آن را ثابت کنید.

در هر دوزنقه متساوی الساقین، قطرهای مساوی دارند و بر عکس.

۸ فعالیت

در دوزنقه ABCD :

از هم‌نهستی کدام دو مثلث نتیجه می‌گیرید $AC = BD$ است؟
 اما اثبات عکس آن نیاز به تفکر بیشتر دارد. فرض کنیم $DB = AC$. آیا می‌توانید در شکل مقابل دو مثلث هم‌نهست پیدا کنید که از آن $AD = BC$ یا مساوی بودن اندازه‌های دو زاویه مجاور به قاعده نتیجه شود؟
 با کمی دقت مشاهده می‌کنید چنین دو مثلثی ظاهراً وجود ندارند؛ اما یک ویژگی در مسئله هست که از آن هنوز استفاده نکرده‌ایم. دو قاعده دوزنقه موازی اند یا رأس‌های A و B از قاعده CD به یک فاصله‌اند. با رسم دو ارتفاع AH و BE و هم‌نهستی دو مثلث $\triangle AHC$ و $\triangle BED$ تساوی اندازه‌های دو زاویه را نتیجه بگیرید. به کمک آنها هم‌نهستی دو مثلث $\triangle ADC$ و $\triangle BCD$ نتیجه می‌شود و به حل مسئله منجر خواهد شد.



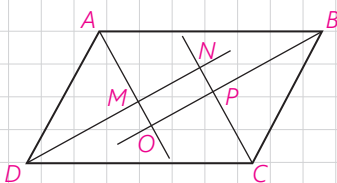
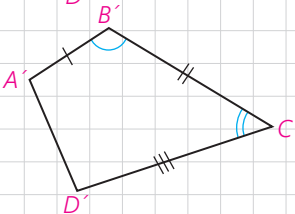
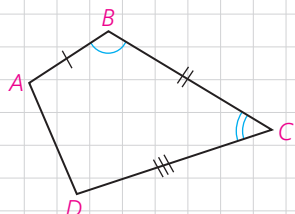
تمرین

۱- در کدام n ضلعی تعداد قطرهای و ضلع‌ها برابر است؟

۲- در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$ ، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

۳- از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است. اگر ABCD مستطیل باشد، نشان دهید چهارضلعی MNPQ مربع است.



۴- در مسئله قبل، اگر اندازه‌های ضلع‌های مستطیل a و b باشند، اندازه ضلع مربع را بر حسب a و b محاسبه کنید.

۵- مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازه $\angle C$ برابر 30° است، در نظر می‌گیریم. میانه وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMB و AMC چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{2}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازه یک زاویه 30° باشد، اندازه ضلع مقابل آن نصف اندازه وتر است.

سپس با استفاده از قضیه فیثاغورث نشان دهید، $AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه 60° باشد، اندازه ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ اندازه وتر است.

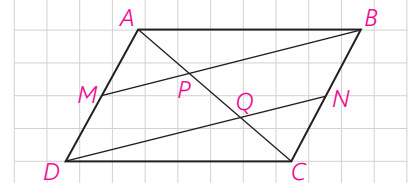
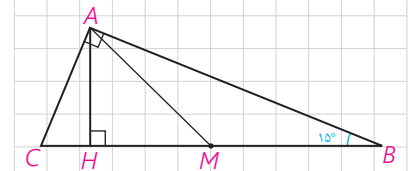
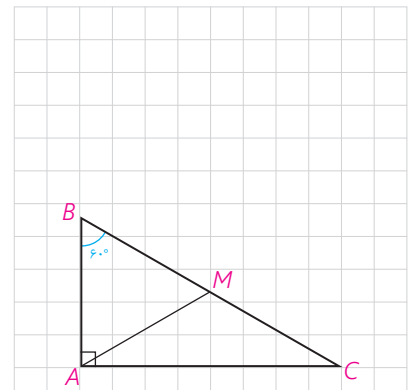
اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازه یک زاویه آن 45° باشد و نشان دهید که اندازه هر ضلع قائم‌الزاویه در آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ اندازه وتر است.

۶- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، اندازه زاویه B برابر 15° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازه وتر است.

۷- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های DN و MB موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.

۸- ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید. این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟



مساحت و کاربردهای آن

یادآوری

در سال‌های قبل با مساحت چهارضلعی‌های مهم آشنا شده‌اید.

۱- اگر اندازه یک ضلع مربع a باشد، $S = a^2$ مساحت آن است.

۲- اگر اندازه یک ضلع مثلث a و اندازه ارتفاع نظیر آن ضلع h_a باشد، آنگاه

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

بنابراین در هر مثلث ABC اگر اندازه ضلع‌های BC ، AC و AB را به ترتیب به

a ، b و c و اندازه‌های ارتفاع‌های نظیر آنها را به ترتیب به h_a ، h_b و h_c نشان دهیم آن‌گاه،

$$2S = a h_a = b h_b = c h_c$$

۳- اگر اندازه یک ضلع متوازی‌الاضلاع a و اندازه ارتفاع نظیر آن h باشد، $S = ah$.

۴- اگر اندازه‌های دو قطر لوزی m و n باشند، $S = \frac{1}{2} mn$.

۵- اگر اندازه‌های دو قاعده یک ذوزنقه a و b و اندازه ارتفاع آن h باشد.

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

کاردرکلاس

فرض کنیم اندازه هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH

را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

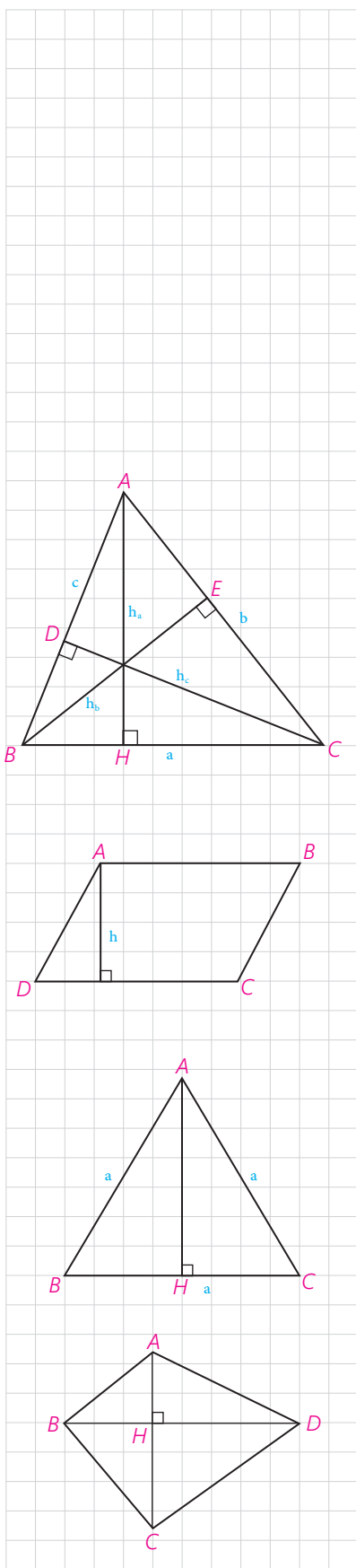
به کمک قضیه فیثاغورث نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

فعالیت

در چهارضلعی $ABCD$ دو قطر AC و DB برهم عموداند.

$$S_{ADB} = \dots\dots\dots$$

$$S_{DBC} = \dots\dots\dots$$



با جمع این دو مساحت داریم،

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD(\dots + \dots) = \frac{1}{2}BD\dots$$

بنابراین؛

در هر چهارضلعی که دو قطر آن برهم عمود باشند، مساحت برابر است با،

.....

کاربردهایی از مساحت

قبلاً با کاربرد مساحت در اثبات قضیه تالس آشنا شدید. بعضی رابطه‌ها و ویژگی‌هایی را که با آن آشنا شده‌اید یادآوری می‌کنیم.

ویژگی ۱. در دو مثلث اگر اندازه قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

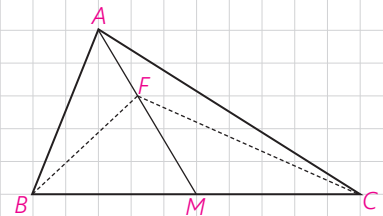
$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$$

ویژگی ۲. در دو مثلث که اندازه دو ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

کاردرکلاس

نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

اگر F هر نقطه‌ای روی میانه AM به جز نقطه M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟



فعالیت

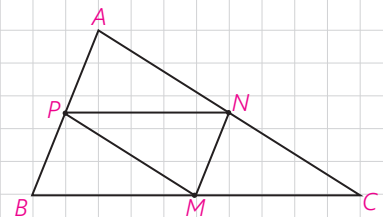
M و N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC مطابق شکل اند.

پاره خط PN موازی ضلع است و پاره خط PM موازی ضلع است؛ چرا؟

بنابراین چهارضلعی $PNCM$ است، در نتیجه، $\triangle MNP \cong \triangle NMC$ ؛ چرا؟

به همین ترتیب برای بقیه مثلث‌ها نیز می‌توان نشان داد که دو به دو هم نهشت‌اند.

$$\triangle APN \cong \triangle MNP \cong \triangle BPM$$



اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه با مساحت‌های برابر پدید می‌آید.

فعالیت

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانه مثلث را ثابت می‌کنید.

دو میانه AM و BN از $\triangle ABC$ را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطه G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانه BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟ N وسط ضلع AC است؛ بنابراین، چرا؟ $AF = 2NF$. چرا؟ در نتیجه، $AM = 3GM$. چرا؟

بنابراین، $GM = \frac{1}{3}AM$ و $AG = \frac{2}{3}AM$ و G بین A و M است؛ در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم‌خط AM است که $AG = \frac{2}{3}AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{2}{3}BN$. پس برای هر دو میانه دلخواه نقطه G با این ویژگی به دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G هم‌رس‌اند.

به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون $AB = 2MN$ پس $AG = 2GM$ و $BG = 2GN$. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.

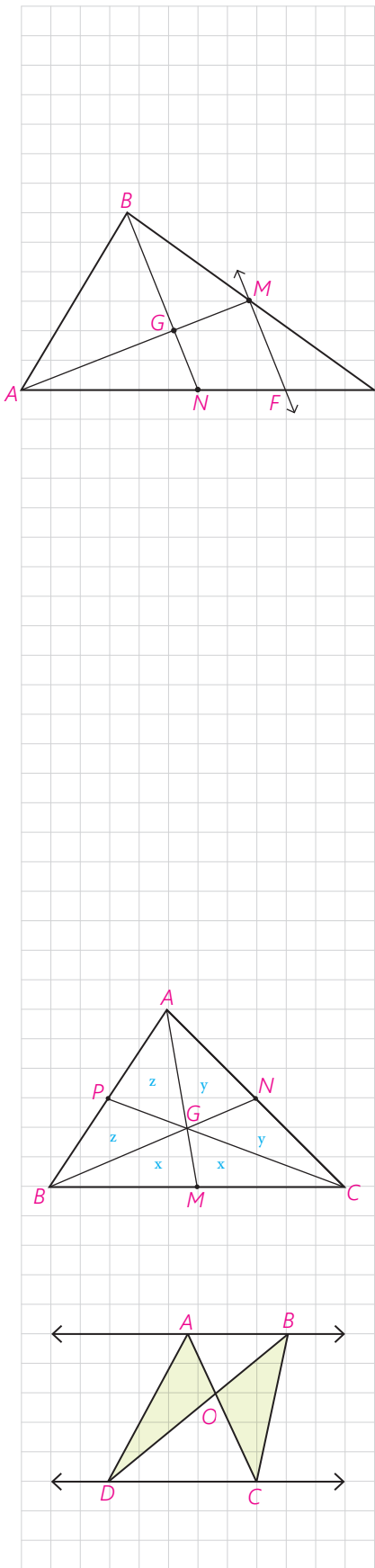
سه میانه هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث هم‌رس‌اند؛ به طوری که فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است.

با رسم سه میانه مثلث نشان دهید، سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابر فعالیت قبلی $S_{BGM} = S_{MGC} = x$. چرا؟ به همین ترتیب برای بقیه برقرار است.

اکنون میانه AM را در نظر بگیرید، $2z + x = \dots\dots\dots$ در نتیجه $y = \dots\dots\dots$. میانه BN را در نظر بگیرید $2z + y = \dots\dots\dots$ در نتیجه، $z = \dots\dots\dots$ پس، $\dots\dots\dots$

ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$. چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟

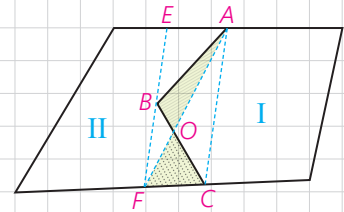
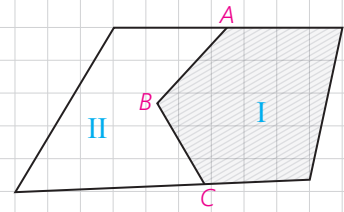
این ویژگی که در هر دوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.



یک مسئله

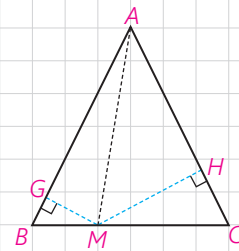
در شکل دو مزرعه I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟ فکر اصلی این عمل براساس مسئله قبلی است.

از A به C متصل، و از B موازی خط AC رسم کنید تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می‌تواند مرز AF باشد؛ چرا؟ البته می‌تواند مرز EC نیز باشد.



فعالیت

در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است؛ نقطه دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C در نظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMB} و S_{AMC} را بنویسید. مساحت مثلث ABC را نیز وقتی پاره خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید. چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

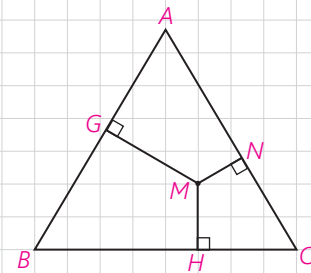


در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از برابر است. به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعده BC از خط‌های شامل دو ساق برابر اندازه ارتفاع وارد بر ساق است.

فعالیت

نقطه دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازه a در نظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MAC، MAB و MBC را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت ΔABC چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$MH + MN + MG = \dots\dots\dots$

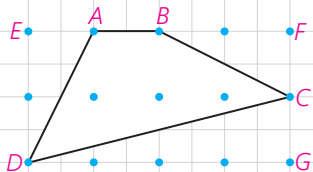


مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر

اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصله‌های نقطه‌های M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۲ ، ۴ و ۶ باشند. اندازه ضلع مثلث را محاسبه کنید.

■ نقاط شبکه‌ای و مساحت

مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند؛ به طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند $ABCD$ را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.



نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

به طور مثال در شکل بالا چهارضلعی $ABCD$ یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطه مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

در این چهارضلعی، شبکه‌ای با به کار بردن مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و مستطیل نشان دهید مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر ۴ واحد سطح است.

می‌توان نقاط شبکه‌ای را در دستگاه مختصات عمود بر هم $x'x$ و $y'y$ نیز به صورت زوج مرتب‌های (x, y) که x و y هر دو اعداد صحیح‌اند، نشان داد. x و y مختص‌های هر نقطه‌اند.

در چندضلعی‌های شبکه‌ای، تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان می‌دهند. اکنون می‌خواهیم به طور شهودی رابطه‌ای بین مساحت چندضلعی شبکه‌ای و نقاط مرزی و درونی شبکه‌ای نظیر آن را پیدا کنیم.

فعالیت

۱- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

۲- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه درونی می‌تواند داشته باشد؟

۳- در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است،

یعنی $i = 0$ و تعداد نقاط مرزی، $b = 3, 4, 5, \dots$.

جدول زیر را با محاسبه مساحت چندضلعی های شبکه ای کامل کنید.

$$i = 0, b = 3, 4, 5, \dots$$

تعداد نقاط مرزی i	3	4	5	6	7	8
مساحت	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$			

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه ای وجود دارد؟

$$S = \frac{b}{2} - \dots + 0$$

۴- اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه ای $b = 3$ باشند. با توجه به شکل ها جدول زیر را کامل کنید. (نتیجه گیری $S = \frac{b}{2} - 1 + 0$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده اید در نظر داشته باشید.)

تعداد نقاط درونی i	0	1	2	3	4	5
$\frac{b}{2} - 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$				

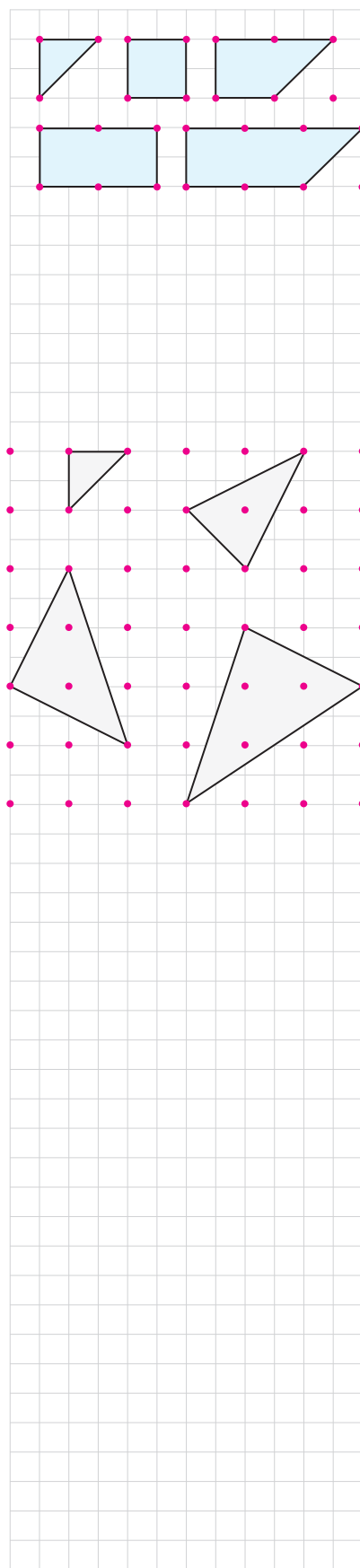
با تکمیل جدول بالا و مقایسه اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب هایی ظاهر می شوند.

$$S = \frac{b}{2} - \dots + \dots$$

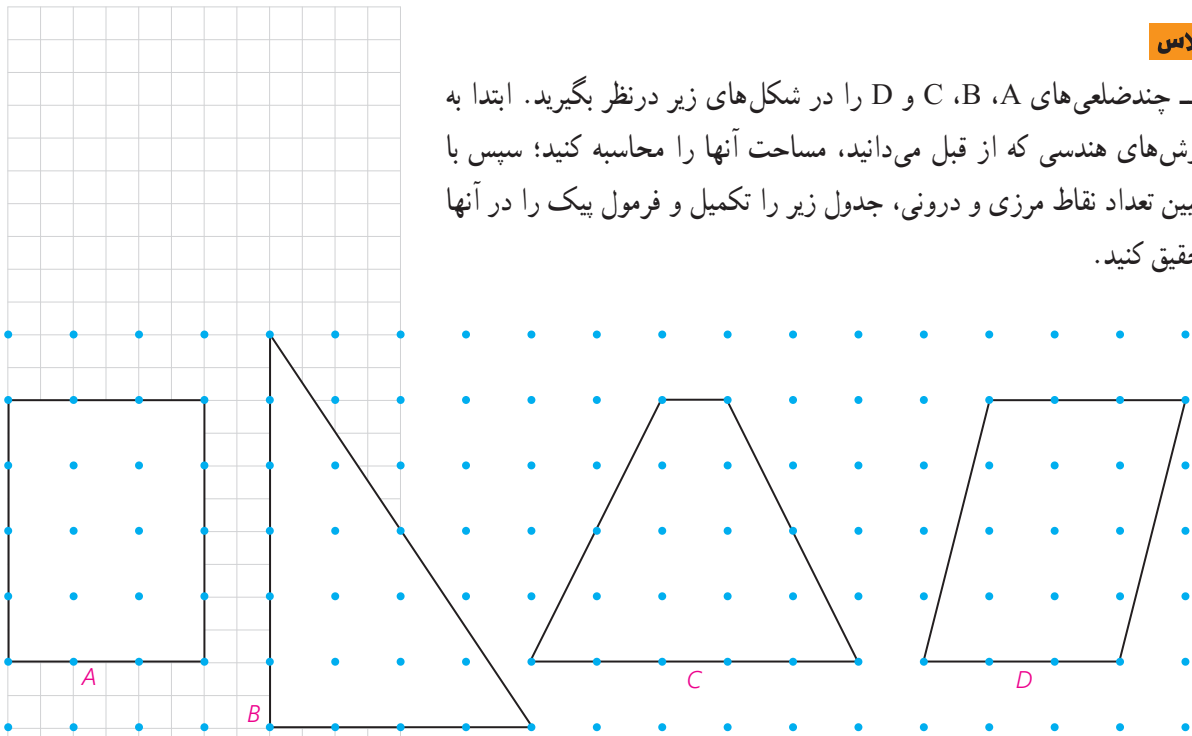
توجه داشته باشید که این فرمول را به طور شهودی پیدا کرده ایم. اثبات دقیق این فرمول در حالت کلی نیاز به مقدمات بیشتری دارد.

این فرمول به فرمول پیک معروف است که جرج الکساندر پیک (۱۸۵۹-۱۹۴۳) آن را کشف کرد و از سال ۱۹۷۰ به طور گسترده ای در کتاب های هندسه مقدماتی به کار برده شده است.

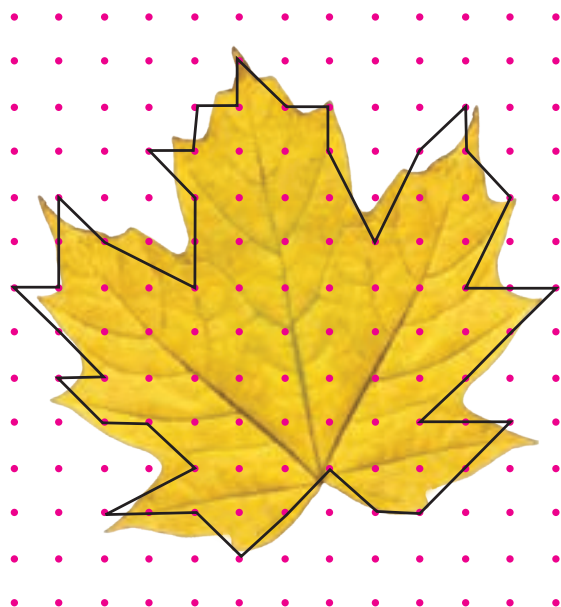
به کمک این فرمول می توانیم مساحت شکل های نامنظم هندسی را نیز به طور تقریبی پیدا کنیم.



۱- چندضلعی‌های A، B، C و D را در شکل‌های زیر در نظر بگیرید. ابتدا به روش‌های هندسی که از قبل می‌دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



چند ضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b				
تعداد نقاط درونی i				
مساحت				



اگر فاصله نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحه شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به‌طور تقریبی محاسبه کنید. واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.

۱- در یک لوزی اندازه هر ضلع $2\sqrt{3}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

۲- در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل $AB = AD$ و $BC = CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمود منصف قطر دیگر است.

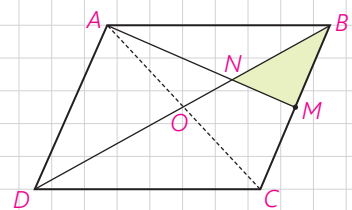
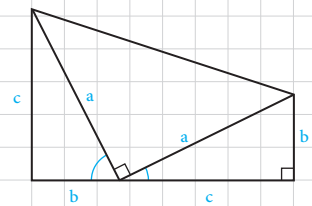
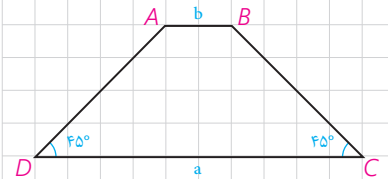
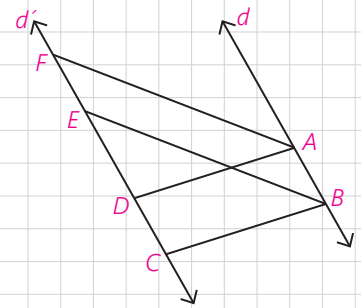
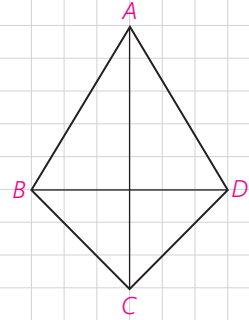
۳- در شکل دو خط d و d' موازی اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی الاضلاع اند. اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری بر حسب S چقدر است؟

۴- در دوزنقه شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت دوزنقه را بر حسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.

۵- مساحت دوزنقه مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟

۶- در متوازی الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:

$$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$



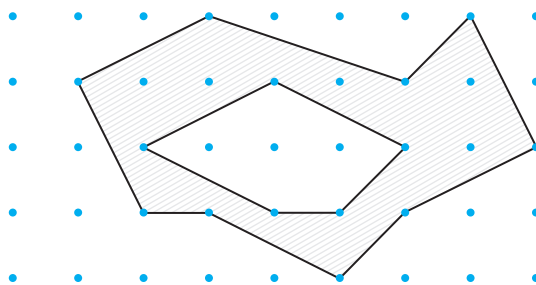


۷- در مثلث ABC ، خط موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$ است. S_{MQPB} و S_{AQN} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۸- زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه M که $MC = 20$ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه با مساحت های مساوی بین آن دو تقسیم شود.

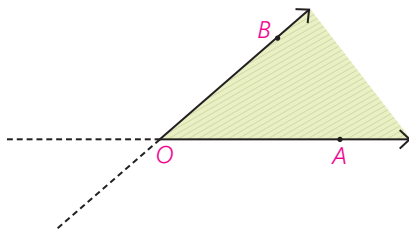
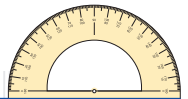
۹- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم الزاویه می سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت های ساخته شده روی ضلع های زاویه قائمه است.

۱۰- با توجه به مساحت چندضلعی های شبکه ای، مساحت قسمت سایه زده را محاسبه کنید.

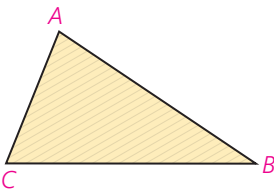


۱۱- یک مستطیل شبکه ای با ضلع های افقی و قائم که اندازه های ضلع های آن m و n واحدند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

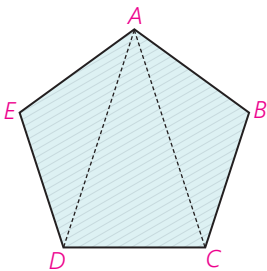
۱۲- مساحت یک چندضلعی شبکه ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل های چهارضلعی های نظیر آن را نیز رسم کنید.



مساحت یکی از مفاهیم اساسی هندسه است. وقتی با یک زاویه هندسی $\angle AOB$ روبه‌رو هستیم که اجتماع دو نیم خط OA و OB است، قسمت سایه زده مطابق شکل را درون زاویه $\angle AOB$ می‌نامند. به‌طور دقیق‌تر اشتراک طرفی از خط OA را که شامل B است با طرفی از خط OB که شامل A است، درون زاویه $\angle AOB$ می‌نامند.



به همین ترتیب اشتراک درون زاویه‌های مثلث را درون مثلث می‌نامند. درون مثلث و روی مثلث را ناحیه مثلثی می‌نامند.



سرانجام ناحیه چندضلعی شکلی است که بتوان آن را به‌صورت اجتماع تعداد متناهی ناحیه‌های مثلثی تبدیل کرد به‌طوری که اگر دو ناحیه مثلثی اشتراک داشته باشند، این اشتراک روی ضلعی از هر دو یا رأسی از هر دو باشد. به هر ناحیه چندضلعی عددی حقیقی و مثبت نظیر می‌کنیم که مساحت آن نامیده می‌شود.

فرض کنیم A هر ناحیه چندضلعی باشد. عددی حقیقی و مثبت به A نظیر می‌کنیم که آن را مساحت A می‌نامیم و با $S(A)$ نشان می‌دهیم که شرایط زیر در آن برقرار است:

$$S(A) > 0$$

۱

اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت‌های آنها برابرند.

۲

اگر اشتراک دو ناحیه چندضلعی فقط روی ضلع‌ها یا رأس‌ها باشد یا اصلاً اشتراک نداشته باشد، مساحت اجتماع آنها برابر مجموع مساحت‌های آنهاست.







۳

مساحت مستطیل با ضلع‌های a و b برابر $S = ab$ است.

۴

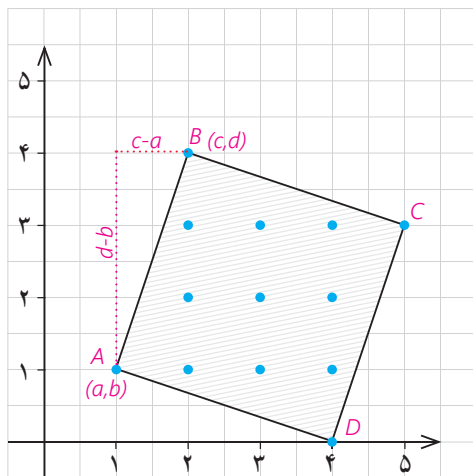
برای سادگی به جای مساحت ناحیه چندضلعی، همان مساحت چندضلعی را به‌کار می‌بریم.

ویژگی های چهارضلعی های مهم در یک نگاه
جدول زیر را تکمیل کنید.

ویژگی \ چهارضلعی	متوازی الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع	ذوزنقه	ذوزنقه متساوی الساقین
						
مساوی بودن اندازه ضلع ها	هر دو ضلع مقابل					
موازی بودن ضلع ها	هر دو ضلع مقابل					
عمود بودن ضلع ها	به شرطی که مستطیل یا مربع باشد					کلاً وجود ندارد
زاویه های با اندازه های برابر						
زاویه های مکمل						
وضعیت قطر ها نسبت به هم						اندازه های مساوی دارند

■ درباره چندضلعی‌های شبکه‌ای بیشتر بدانیم

نقطه شبکه‌ای در دستگاه محورها، نقطه‌ای به مختصات (x,y) است که x و y اعداد صحیح‌اند. بنابر فرمول بیک مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای $S = \frac{b}{4} + i - 1$ همواره عددی گویا و مثبت است. بنابراین اگر b زوج باشد S ، عددی صحیح است.

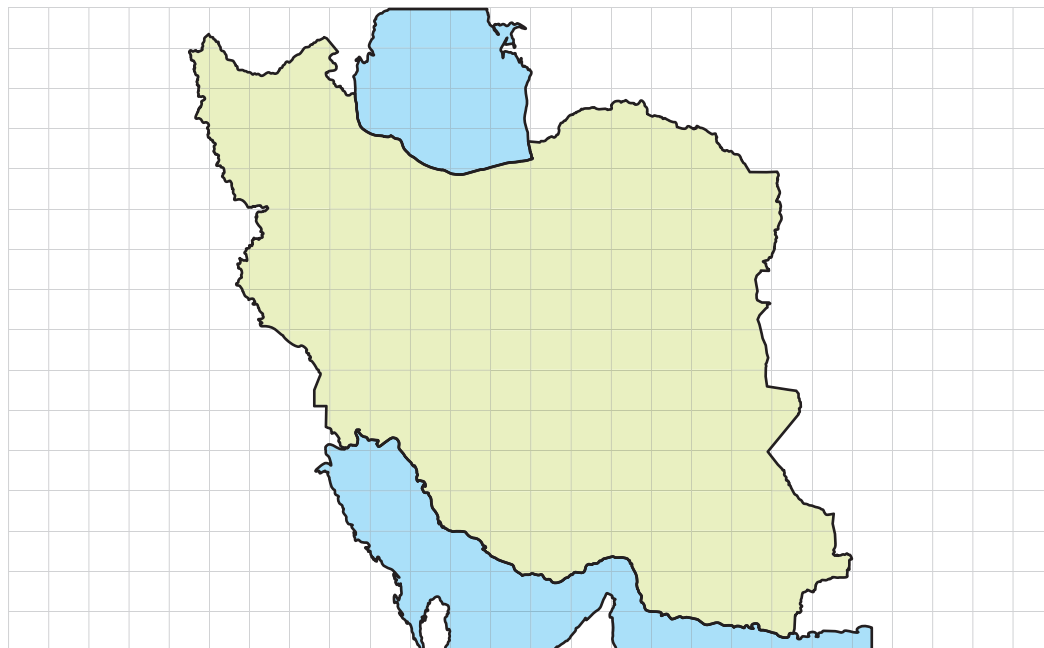


در هر مربع شبکه‌ای مساحت صحیح و مثبت است، زیرا اگر دو رأس مجاور مربع باشند، (c,d) و (a,b) دو رأس مجاور مربع باشند، $S = (a-c)^2 + (b-d)^2$ (چرا؟) که a, b, c, d صحیح‌اند. حال اگر مثلث متساوی‌الاضلاعی شبکه‌ای داشته باشیم، بنابر فرمول بیک مساحت آن عددی گویا و مثبت است. از طرف دیگر اگر m اندازه هر ضلع آن باشد، $S = \frac{m^2 \sqrt{3}}{4}$ مساحت آن است.

اما، $m^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$ که صحیح و مثبت است در نتیجه عددی گنگ یا اصم است که متناقض با آن چیزی است که از فرمول بیک به دست می‌آید؛ بنابراین

هیچ مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود ندارد که مختصات تمام رأس‌های آن اعداد صحیح باشند.

در شکل زیر نقشه ایران را مشاهده می‌کنید. می‌توانید با انتخاب واحدهای مناسب مساحت آن را به طور تقریبی پیدا کنید.



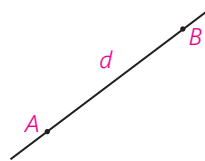
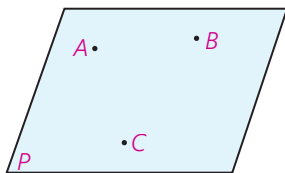
تجسم فضایی



▀ تصویر سمت راست، آرامگاه ابوعلی سینا، واقع در همدان است. در مورد تصویر سمت چپ چه حدسی می‌زنید؟

خط، نقطه و صفحه

مفاهیم نقطه، خط و صفحه از اساسی‌ترین مفاهیم در هندسه است که معمولاً برای نمایش آنها به صورت زیر عمل می‌کنیم:



صفحه ABC ، BAC ، ... یا صفحه P

خط AB یا BA ، یا خط d

خط راست از هر دو طرف نامحدود است. صفحه نیز از هر طرف ادامه دارد و ضخامتی ندارد.

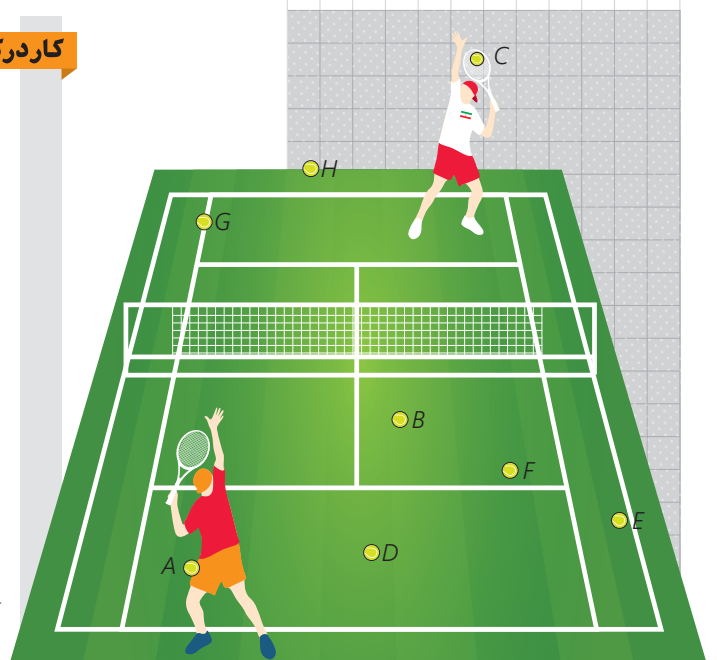
کاردکلاس

به این تصویر دقت کنید. توپ A داخل جیب یکی از بازیکن‌ها و توپ C روی راکت بازیکن دیگر است و بقیه توپ‌های تنیس روی زمین افتاده‌اند.

الف) سه توپ نام ببرید که در یک راستا هستند.

ب) سه توپ نام ببرید که در یک صفحه‌اند ولی هم راستا نیستند.

ج) چهار توپ نام ببرید که همگی در یک صفحه نیستند.



حالت‌های مختلف دو خط در صفحه و فضا

به تصاویر روبه‌رو نگاه کنید.

دو خط در یک صفحه نسبت به هم موازی یا متقاطع یا منطبق اند.

فعالیت

مکعب روبه‌رو را در نظر بگیرید.

در هر مورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید و بنویسید که آیا می‌توان صفحه‌ای شامل آن دو در نظر گرفت؟

: HD و HG

: HG و EF

: FD و EC

: GC و EA

: AB و GD

: BC و HD

تعریف: دو خط را که نقطه اشتراکی ندارند، در نظر بگیرید:

۱) اگر صفحه‌ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد، آن دو خط را موازی می‌نامیم.

۲) اگر هیچ صفحه‌ای وجود نداشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد، آن دو خط را متنافر می‌نامیم.

دو خط در فضا نسبت به هم یا یا هستند.

کاردرکلاس

۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)

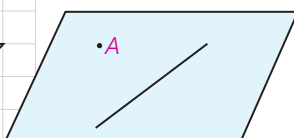
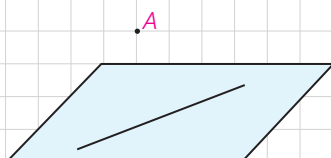
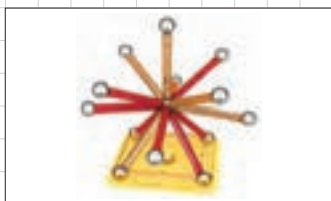
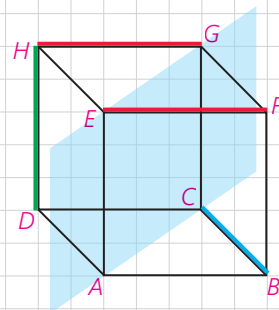
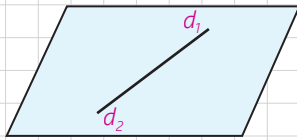
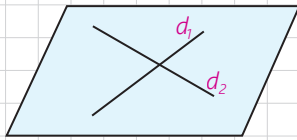
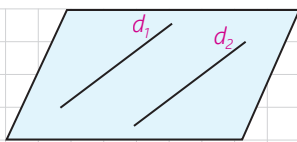
- در صفحه از هر نقطه چند خط می‌گذرد؟

در فضا چطور؟

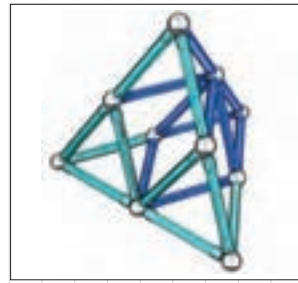
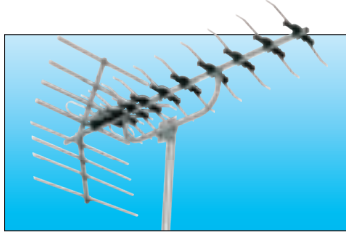
- در صفحه از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، چند

خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد؟

در فضا چطور؟



۲- در شکل‌های زیر در صورت وجود، به خطوط موازی، متقاطع و متناظر اشاره کنید.



۳- دو خط موازی رسم کنید و آنها را d_1 و d_2 بنامید.

حالا خط d_3 را موازی با d_2 رسم کنید. دو خط d_1 و d_3 نسبت به هم چه وضعی دارند؟

نتیجه ۱: در یک صفحه دو خط موازی با یک خط

آیا در فضا نیز این نتیجه برقرار است؟

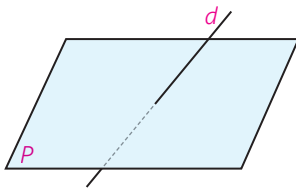
۴- می‌دانیم که در صفحه دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.

آیا در فضا هم این رابطه برقرار است؟

۵- خط d با صفحه P متقاطع است.

خط‌های موجود در صفحه P نسبت به خط d چه

وضعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند؟



حالت‌های مختلف خط و صفحه

► **مادداتان را طوری در دست بگیرید که مداد یا امتداد آن، صفحه‌میز را قطع نکند.**

اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم هستند.

► **نوک مداد را روی میز بگذارید. در این حالت مادداتان در یک نقطه با میز اشتراک دارد.**

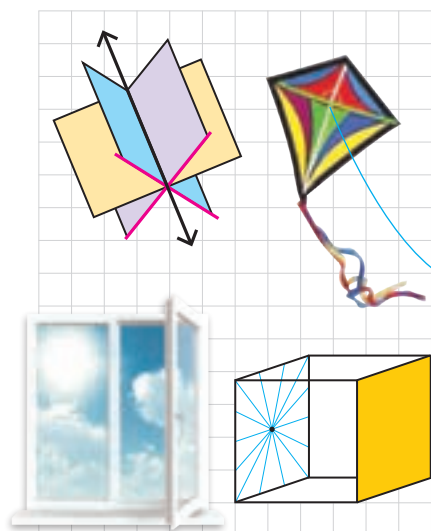
اگر خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند، نسبت به هم هستند.

► **مادداتان را روی میز قرار دهید.**

اگر خط و صفحه بی‌شمار نقطه اشتراک داشته باشند خط بر صفحه واقع است.

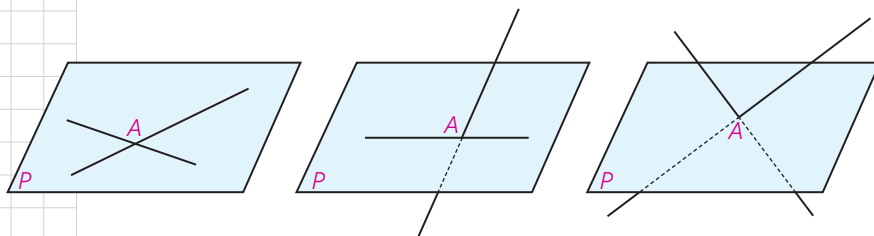
خط و صفحه در فضا نسبت به هم یا هستند یا خط بر صفحه است.





- ۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می توانید از تصاویر کمک بگیرید.)
 - از یک خط در فضا چند صفحه می گذرد؟
 - از دو خط متقاطع چند صفحه می گذرد؟
 - از دو خط موازی چطور؟
 - از یک نقطه غیر واقع بر یک صفحه، چند خط موازی با آن صفحه می توان رسم کرد؟

۲- دو خط در نقطه A متقاطع اند و صفحه P شامل نقطه A است. با توجه به شکل های زیر حالت های مختلف خطوط متقاطع و صفحه P را بررسی کنید.

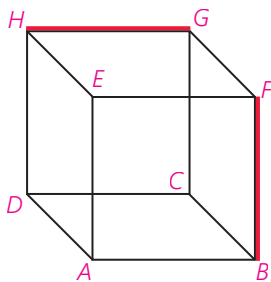


۳- دو خط d_1 و d_2 در فضا با هم موازی اند. الف) اگر صفحه ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟

ب) اگر صفحه P شامل یکی از این دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

ج) اگر صفحه P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

۴- مسئله قبل را برای حالتی حل کنید که دو خط، متناظرند.



حالت‌های مختلف دو صفحه

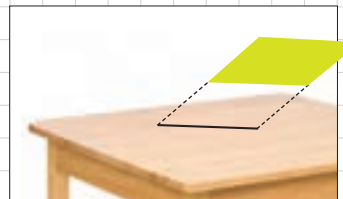
► یک برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحه‌ی میز را قطع نکند.

اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم هستند.



► برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحه‌ی میز را قطع کند. اشتراک صفحه‌ای که برگه قسمتی از آن است، با سطح میز به چه شکلی است؟

اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم هستند. خط راستی که اشتراک دو صفحه متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.



► برگه را روی میز قرار دهید.

دو صفحه در فضا نسبت به هم یا یا هستند.



کاردرکلاس

به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟

DC و HG چگونه؟

GC و EF چگونه؟

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟

با چند خط موازی است؟

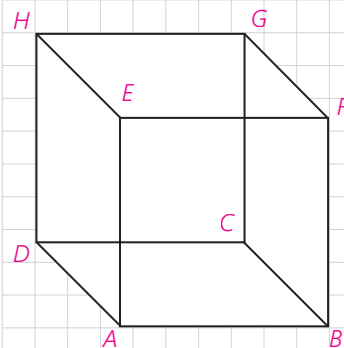
با چند خط متنافر است؟

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟

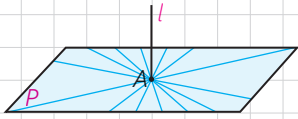
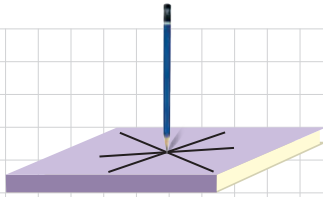
با کدام متقاطع است؟

بر کدام منطبق است؟

د) دو صفحه موازی و دو صفحه متقاطع نام ببرید.

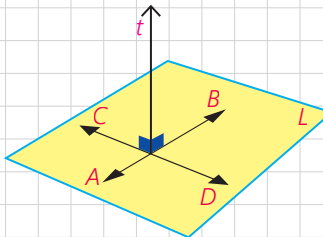
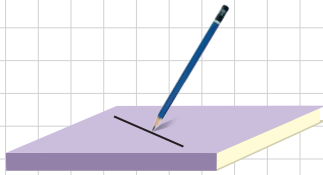


نوک مداد خود را مطابق شکل به صورت قائم بر صفحه کتاب نگه دارید. در این حالت ماداتان با بقیه خطهای موجود در صفحه که از نقطه تقاطع مداد و سطح میز می گذرند، چه وضعیتی دارد؟



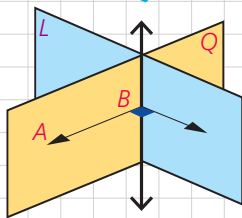
تعریف: فرض کنید خط l در نقطه A صفحه P را قطع می کند. خط l بر صفحه P عمود است؛ هرگاه بر تمام خطهای صفحه P که از نقطه A می گذرند، عمود باشد.

آیا اگر خطی فقط بر یکی از خطوط صفحه ای عمود باشد، می توانیم بگوییم آن خط به آن صفحه عمود است؟



می توان نشان داد که:

اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه ای، در محل تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.



تعریف: دو صفحه بر هم عمودند؛ هر گاه هر کدام شامل خطی باشد که بر دیگری عمود است.

کاردرکلاس

(۲)



(۱)



می دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی اند.

(الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی اند؟

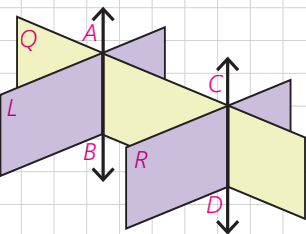
(ب) آیا دو صفحه عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی اند؟

(ج) دو صفحه عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟

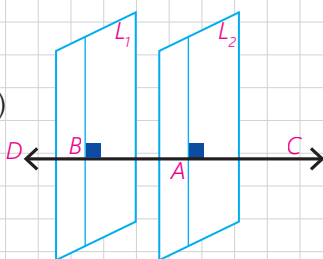
(د) اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

(ه) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید.

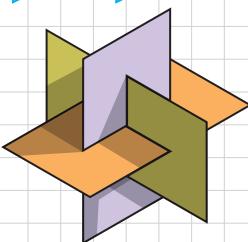
(۳)



(۴)

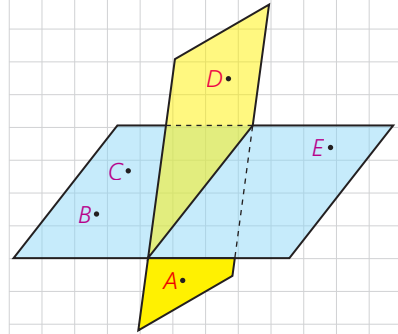


(۵)

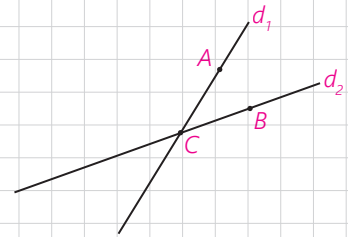




- ۱- با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید :
 الف) چند صفحه در شکل می بینید، نام ببرید.
 ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه اند.
 ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.
 د) دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ AC و CE چطور؟

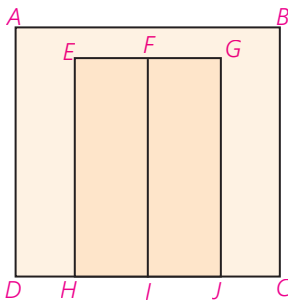


- ۲- خطوط d_1 و d_2 و نقاط A و B و C مانند شکل مقابل اند. صفحه P را در حالت های زیر در نظر بگیرید و وضعیت نسبی آن را با هر یک از خطوط d_1 و d_2 بررسی کنید.
 الف) صفحه P شامل نقطه C است.
 ب) صفحه P شامل A و C باشد؛ ولی شامل B نباشد.
 ج) صفحه P شامل نقاط A و B و C است.
 د) صفحه P شامل خط d_1 و نقطه B است.



- ۳- دو صفحه P_1 و P_2 را به گونه ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).
 الف) اگر P' صفحه ای باشد که با P_1 موازی باشد، نسبت به P_2 چه وضعیتی خواهد داشت.
 ب) اگر P' صفحه ای باشد که با P_1 متقاطع است، با P_2 چه وضعیتی می تواند داشته باشد.

- ۴- شکل مقابل یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می دهد. وضعیت خط ها و صفحه های زیر را مشخص کنید.
 الف) وضعیت صفحات $EFIH$ و $ABCD$ و $FGJI$ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.



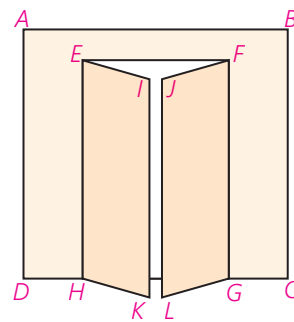
- ب) خطوط BC و FI
- ج) خطوط AB و FI
- د) خطوط EF و FG
- ه) خطوط HI و FG
- و) یکی از خطوط (به دلخواه) و یکی از صفحات (به دلخواه)





۵- تجسم کنید دو لنگه در هر کدام 30° باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های

زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحه‌های EIKH و ABCD و

JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه EIKH

ج) خط JL و صفحه EIKH

د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

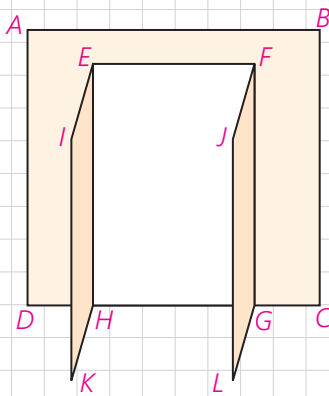
ه) خطوط EI و JF

و) خطوط EI و FG

ت) خطوط BC و FJ

۶- تصور کنید دو لنگه در هر کدام 90° باز شده‌اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های

زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحات EIKH و ABCD و FGLJ را دو به دو نسبت به هم بررسی

کنید.

ب) خط FJ و صفحه EIKH

ج) خط JL و صفحه EIKH

د) خطوط EI و FJ

ه) خطوط FJ و HK

۷- منشور سه‌پهلوی زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

الف) سه جفت خط متمایز دو به دو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دو به دو متناظر نام ببرید.

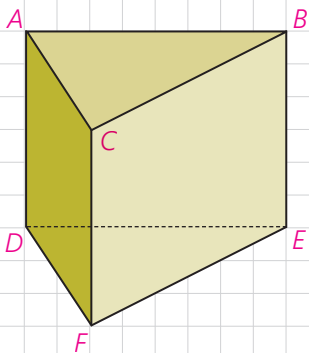
ج) سه جفت خط دو به دو متقاطع نام ببرید.

د) سه خط هم‌رس نام ببرید.

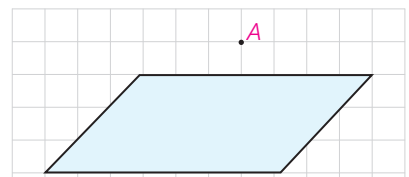
ه) سه جفت خط و صفحه موازی نام ببرید.

و) دو صفحه موازی نام ببرید.

ز) سه صفحه دو به دو متقاطع نام ببرید.



۸- از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟

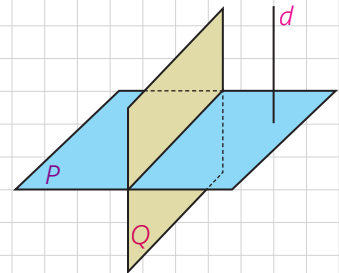


۹- از هر خط غیر واقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

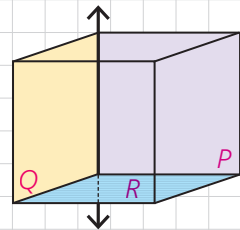
الف) خط بر صفحه عمود باشد.

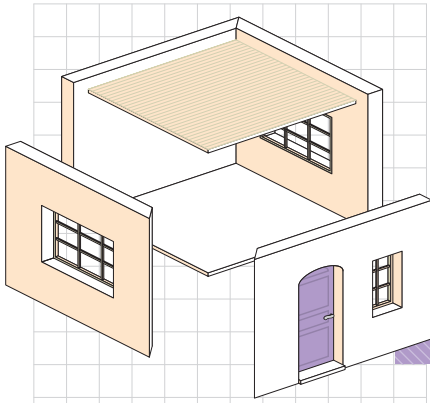
ب) خط بر صفحه عمود نباشد.

۱۰- دو صفحه P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟

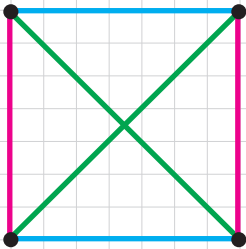
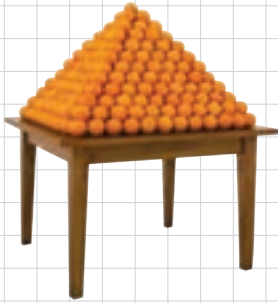


۱۱- دو صفحه متقاطع P و Q بر صفحه R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحه R چه وضعیتی دارد؟





تفکر تجسمی



– چهره پدر یا مادر خود را در ذهن تصور کنید. چه ویژگی‌هایی دارند؟ به نظر شما اگر ده سال جوان‌تر یا ده سال پیرتر بودند به چه شکل بودند؟

– در شکل روبه‌رو چند پرتقال روی میز چیده شده است؟

– سعی کنید برای دوستان توصیف کنید که خانه‌تان به چه شکل است؟ تصور کنید یک اتاق کمتر یا آشپزخانه بزرگ‌تری داشتید. در این صورت خانه جدید، چه شکلی می‌توانست داشته باشد؟

– در بسیاری از موارد مانند آنچه در تصویر می‌بینید، لازم است تصویری از مسیر حرکتمان را ترسیم کنیم. شما هم طرح فوری^۱ مسیر خانه تا مدرسه را برای دوستان رسم کنید.

– در شکل روبه‌رو چه می‌بینید؟

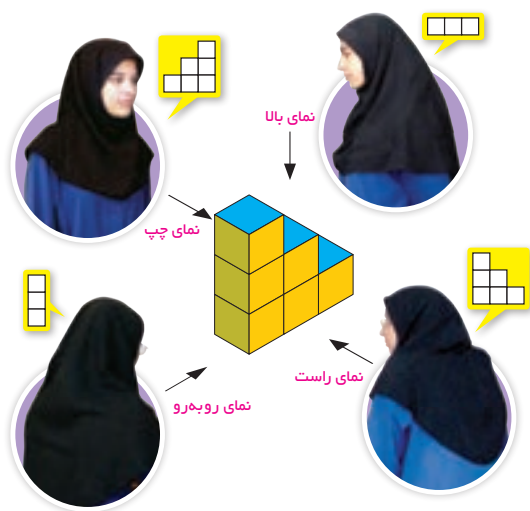
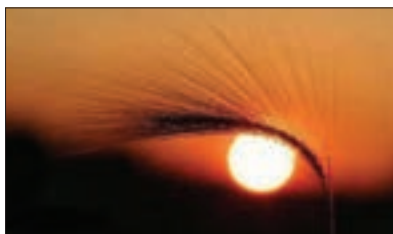
– اگر بدانید که این تصویر به یک جسم هندسی مربوط است که از بالا به آن نگاه شده است، چه جسم هندسی را تصور می‌کنید؟

در تمام حالت‌های بالا شما در واقع از تفکر تجسمی خود استفاده کرده‌اید.

در تفکر تجسمی از عبارات و جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نمی‌شود؛ بلکه این تصاویر هستند که در ذهن ما نقش می‌بندند و به ما کمک می‌کنند درباره موضوع مورد نظر فکر کنیم.

۱- «طرح فوری» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «کروکی» به کار می‌رود.

عکاس‌ها، نقاش‌ها، هنرمندان و بسیاری از انسان‌ها معمولاً می‌توانند متفاوت از سایرین به اطراف خود نگاه کنند. حتماً شما هم تصاویری مشابه تصاویر زیر دیده‌اید.



– تصویر زیر چه چیزی را به شما نشان می‌دهد؟

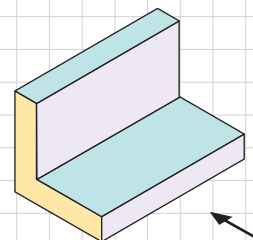
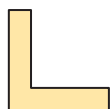
آیا می‌توان ادعا کرد که یکی از این تصاویر نسبت به بقیه کامل‌تر یا بهتر است؟

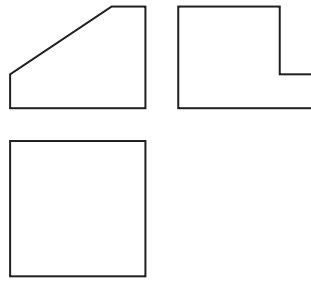
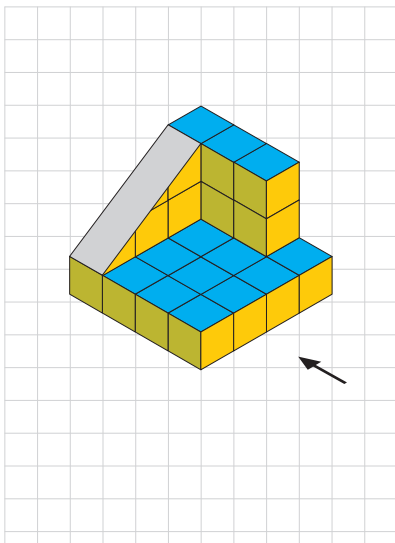
آیا می‌توان بدون چرخاندن شکل یا تغییر زاویه دید، تمام این تصاویر را دید؟

آیا نمونه‌هایی شبیه به این موضوع را در زندگی واقعی دیده‌اید؟



تصویر زیر از نمای بالا، چپ و روبه‌رو رسم شده است.





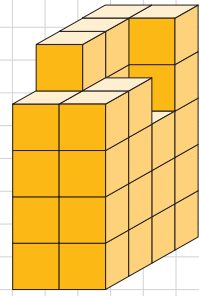
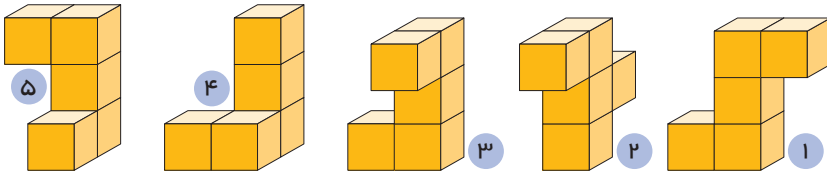
۱- شکل روبه‌رو از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟

۲- سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن نما را رسم کنید.

	نمای چپ	نمای بالا	نمای روبه‌رو

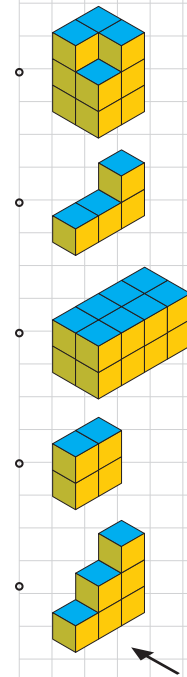
۳- دو مکعب مستطیل را روی هم قرار داده‌ایم. ابعاد مکعب مستطیل بالایی از مکعب مستطیل پایینی کمتر است. تصویری از این دو مکعب مستطیل رسم کنید که نمای روبه‌رو و نمای بالا را نشان دهد.

۱- کدام قطعه، شکل سمت راست را به یک مکعب مستطیل کامل تبدیل می کند؟

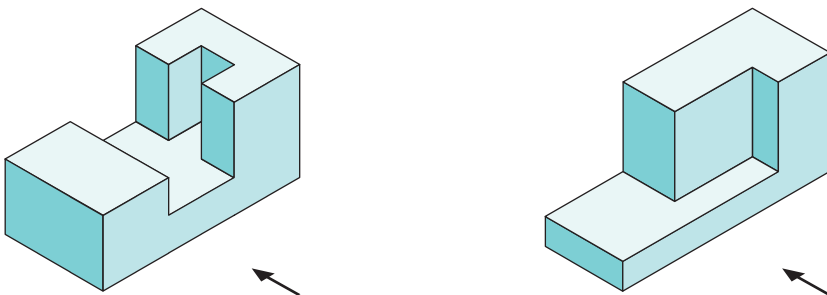


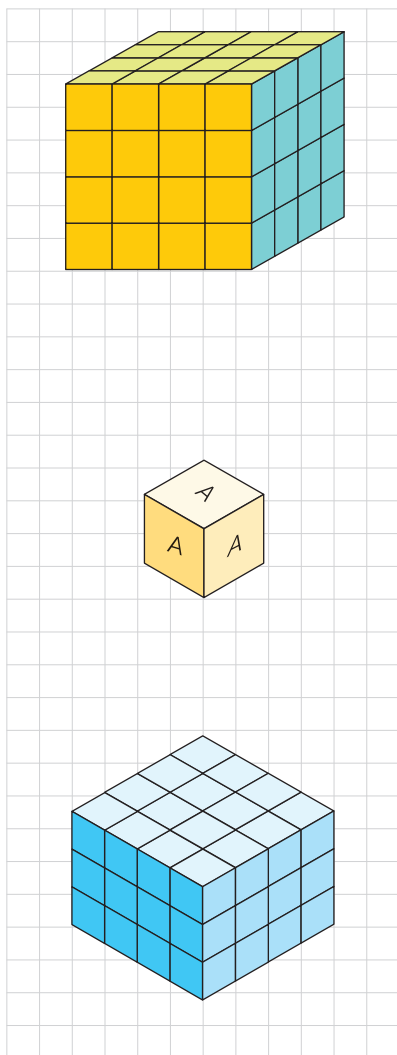
۲- نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید.

نمای بالا	نمای چپ	نمای روبه‌رو	
			<input type="radio"/>
			<input type="radio"/>
			<input type="radio"/>
			<input type="radio"/>
			<input type="radio"/>



۳- در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.

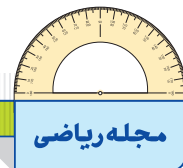
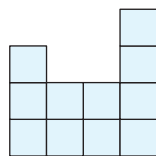




- ۴- تمام وجه‌های مکعبی را رنگ آمیزی کرده‌ایم.
 - چند مکعب کوچک در این شکل وجود دارد؟
 - چند مکعب، رنگ نشده است؟
 - چند مکعب، رنگ شده است؟
 - چند مکعب، فقط دو وجه رنگ شده دارد؟
 - چند مکعب، سه وجه رنگ شده دارد؟

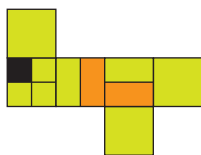
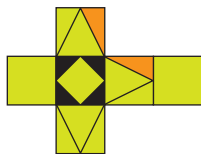
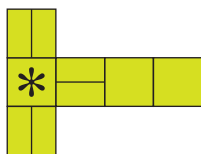
۵- روی تمام وجه‌های مکعب‌هایی حرف A نوشته شده است. ۸ تا از این مکعب‌ها را به شکل ستونی روی هم می‌چینیم. چند حرف A دیده می‌شود؟

۶- شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟ حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟



مجله ریاضی

در هر شکل، مکعب گسترده‌ی سمت چپ مربوط به کدام یک از مکعب‌های سمت راست است؟



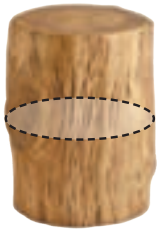
برش

حتماً تا به حال ناچار شده‌اید که برای خوردن برخی میوه‌ها یا مواد غذایی دیگر، آنها را برش بزنید. آیا همه میوه‌ها به یک شکل برش زده می‌شوند و شکل هندسی یکسانی از برش زدن آنها به دست می‌آید؟

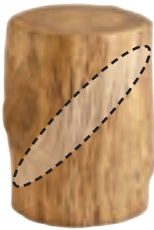
حال فرض کنید که می‌خواهیم یک جسم هندسی را برش بزنیم.

تعریف: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

– سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحه‌های مایل که از قاعده استوانه عبور نکند به چه شکل است؟



.....

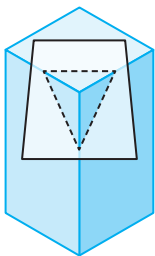


..... بیضی

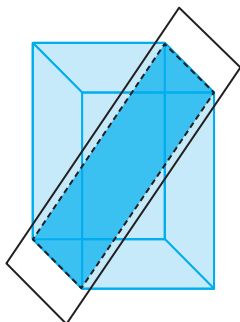


.....

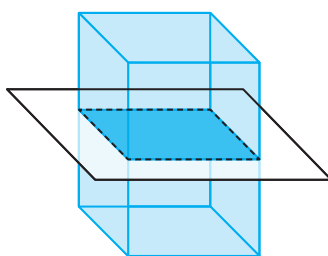
– سطح مقطع یک مکعب مستطیل با صفحه‌های قائم، افقی و مایل به چه شکل است؟



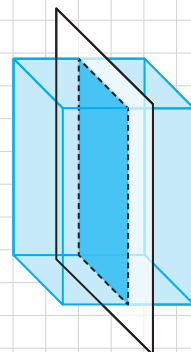
.....



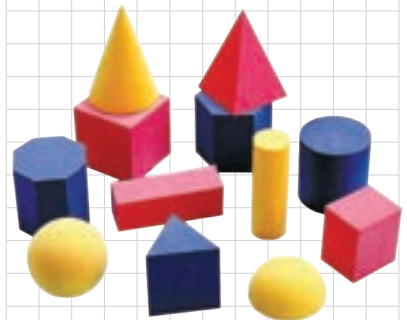
.....



.....

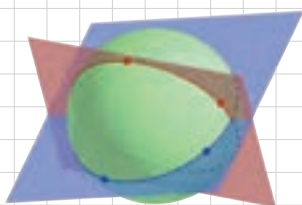
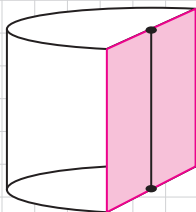
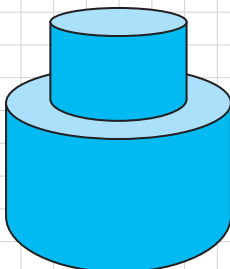
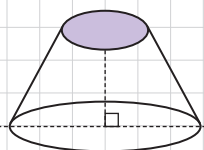
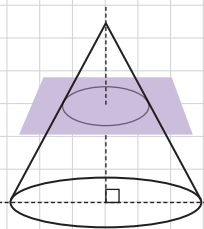


.....



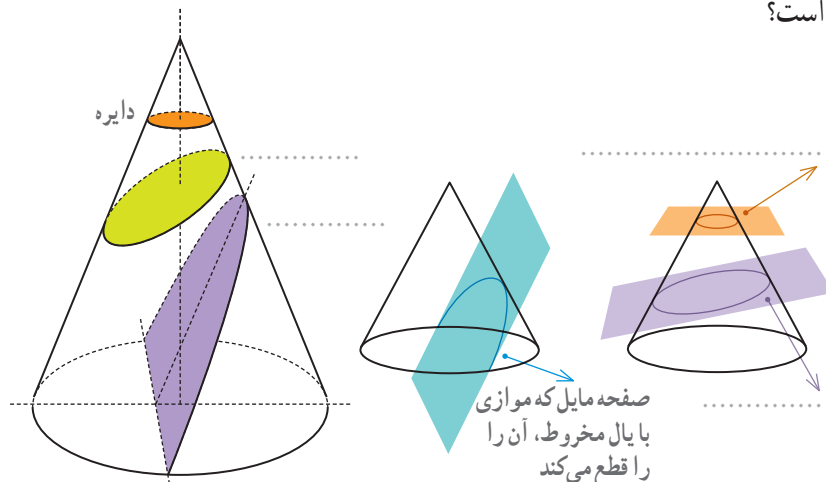
در سال‌های آینده با تعریف دقیق‌تر بیضی آشنا خواهید شد.

سهمی، بیضی و دایره جزء مقاطع مخروطی هستند. مقاطع مخروطی در مطالعه مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار و قمرهای مصنوعی کاربرد زیادی دارند. همین‌طور در مطالعه ساختار اتم‌ها، سامانه‌های راهنمای هواپیماها، ساختن عدسی‌ها، وسایل نوری و وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی و ساختن پل‌ها به کار می‌روند.



سطح مقطع یک مخروط قائم در برخورد با صفحه‌های افقی و مایل به چه شکل

است؟



مخروط قائمی را مطابق شکل با صفحه‌ای موازی قاعده آن برخورد داده‌ایم. این

صفحه مخروط را به دو بخش تقسیم می‌کند. بخش بالایی به چه شکل است؟

بخش زیرین را مخروط ناقص می‌نامند.

اگر صفحه‌ای به شکل عمودی مخروط ناقص را قطع کند، سطح مقطع حاصل

چیست؟

کاردکلاس

۱- دو استوانه را روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر دو

این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟

۲- در شکل زیر نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در

برخورد با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحه‌ای مایلی که از قاعده استوانه عبور

نکند به چه شکل است؟

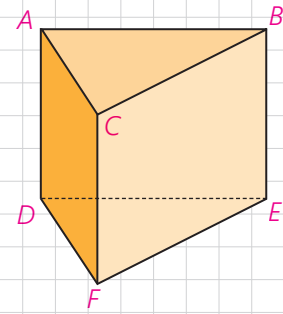
۳- سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟

در چه صورت این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را خواهد داشت؟

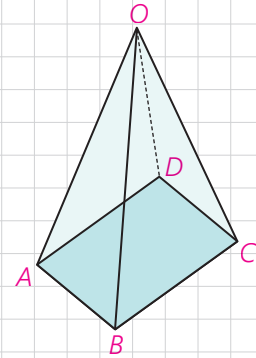
۱- واژه «سامانه» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «سیستم» به کار می‌رود.



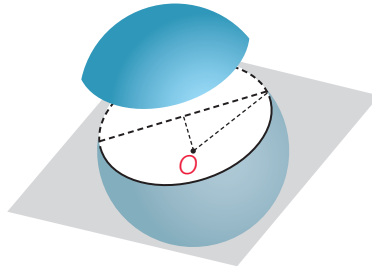
۱- فرض کنید منشور زیر، یک قطعه چوبی توپر باشد. این قطعه چوبی را طوری اریه می‌کنیم که از سه نقطه مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟
الف) M, N, P وسط پاره‌های BE, CF, AD و
ب) C, D, E
ج) C, F, Q (وسط پاره خط AB)



۲- قاعده هرمی، مستطیل $ABCD$ است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.
الف) صفحه P بر ارتفاع هرم عمود باشد.
ب) صفحه P از O بگذرد و بر قاعده هرم عمود باشد.
ج) صفحه P از O نگذرد؛ ولی بر قاعده هرم عمود باشد.



۳- صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصله نقطه O از صفحه ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟



۴- دو کره با شعاع‌های r و r' یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟
اگر همه این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

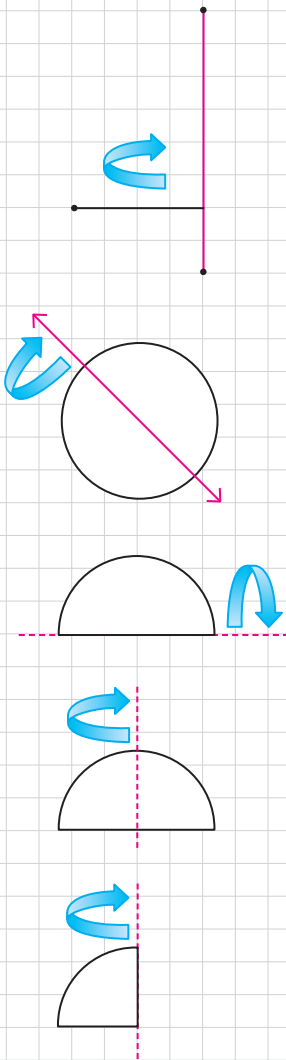


دوران حول محور

از دوران دادن شکل‌های متفاوت هندسی، حول یک محور می‌توان جسم‌های هندسی مختلفی را تصور کرد.



– فرض کنید دو پاره‌خط برهم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده‌ایم. چه شکل هندسی‌ای ساخته می‌شود؟



– دایره‌ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران داده‌ایم. شکل حاصل چیست؟

– یک نیم دایره را حول قطر دوران می‌دهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟

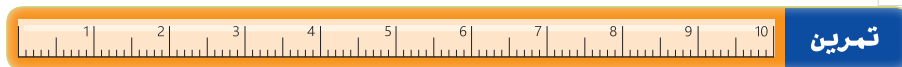
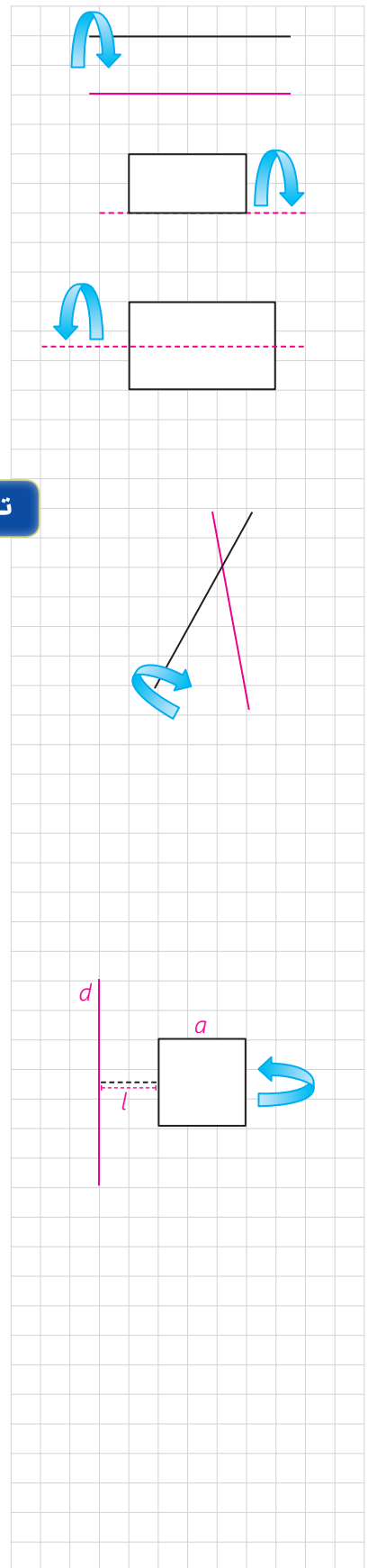
– اگر همین نیم دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران دهیم، چه شکلی ساخته می‌شود؟

– اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟

– دو خط موازی را در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته می شود؟

– اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، چطور؟

– اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟



۱- دو خط متقاطع را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته می شود؟

۲- در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

- (الف) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول ارتفاع آن :
- (ب) دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه :
- (پ) دوران یک ذوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده ها :
- (ت) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول قاعده آن :

۳- مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.

۴- شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید.

