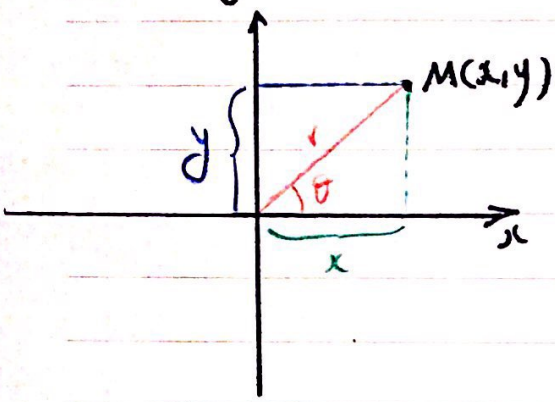
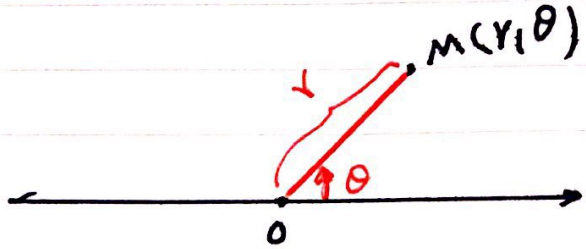
انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

معرفی دستگاه مختصات قطبی

یادآوری دستگاه مختصات دکارتی (یا قائم)





r اندازه شعاع حامل نقطه M $(r \geq 0)$

θ زاویه‌ای که شعاع حامل نقطه M با $\vec{x}$ می‌سازد.

$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = tg^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

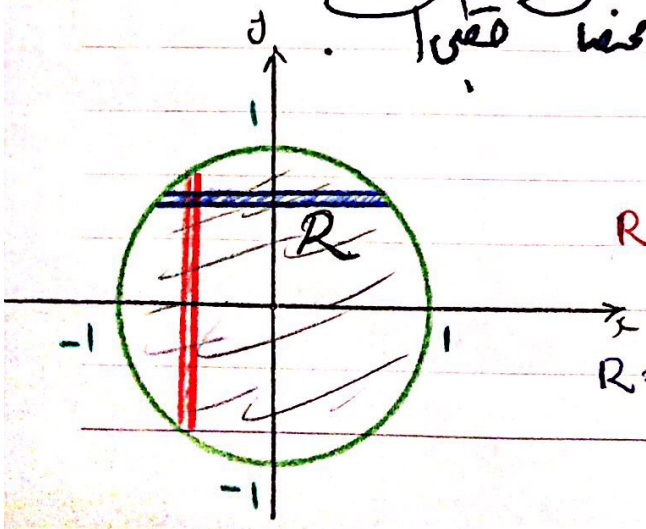
- معادله دایره $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ در مختصات قطبی عبارتست از

$$x^2+y^2=a^2 \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = a \quad (a>0)$$

$$\Longrightarrow \underline{r=a}$$

مثلاً معادله دایره $x^2+y^2=2$ در مختصات قطبی عبارتست از $r=\sqrt{2}$.

$r=1$ معادله دایره $x^2+y^2=1$ در مختصات قطبی است.



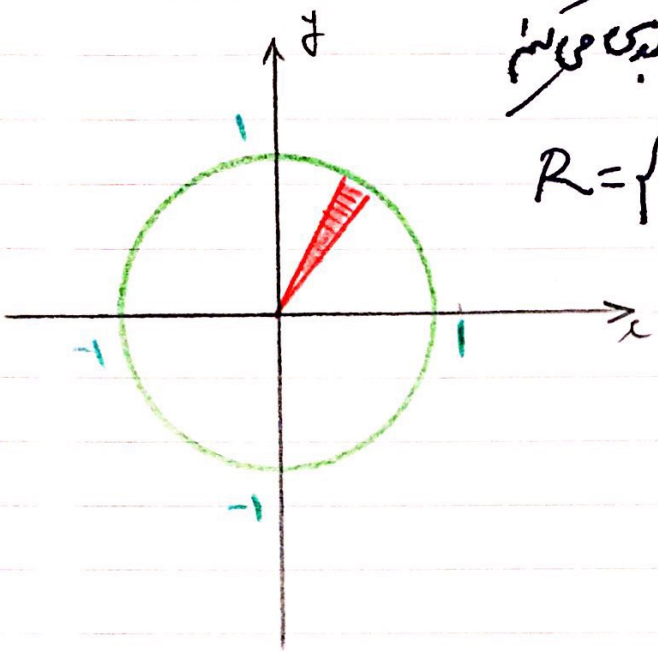
یادآوری المان قائم و افقی.

$$R=\{(x,y): -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \,;\, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$R=\{(x,y): -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \,;\, -1 \leq y \leq 1\}$$

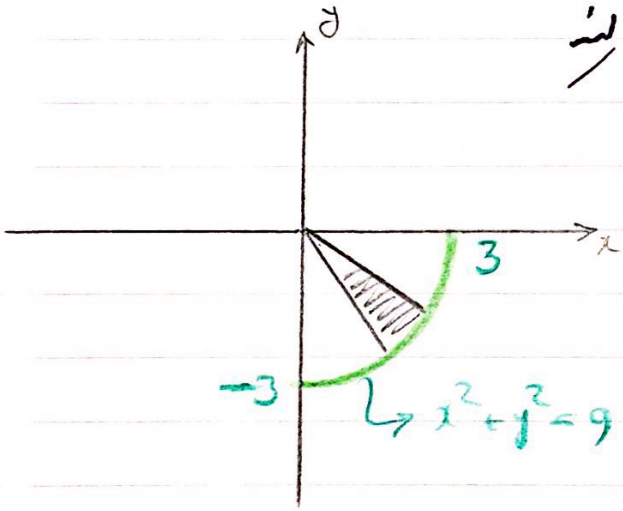
Scanned with CamScanner

حال همان دایره $x^2+y^2=1$ (یعنی $r=1$) را در مختصات قطبی می‌بینیم یا به بیان دیگر درون $r=1$ را با استفاده قطبی کرانبندی می‌کنیم



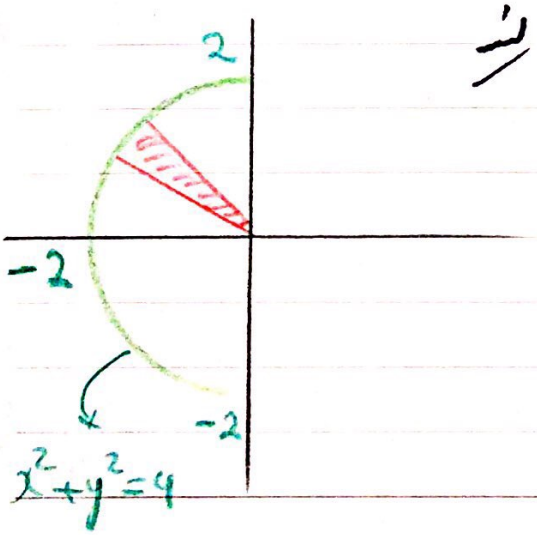
$$R=\{(r,\theta):\ 0\le r\le 1;\ 0\le\theta\le 2\pi\}.$$

- ربع دایره زیر را در مختصات قطبی کرانبندی کنید



$$R=\{(r,\theta):\ 0\le r\le 3;\ \tfrac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi\}$$

- نصف دایره زیر را در مختصات قطبی کرانبندی کنید



$$R=\{(r,\theta):\ 0\le r\le 2;\ \pi/2\le\theta\le\tfrac{3\pi}{2}\}.$$

Scanned with CamScanner

در قضیه زیر ارتباط بین انتگرال دوگانه یک تابع در مختصات دکارتی را با انتگرال دوگانه همان تابع در مختصات قطبی را مشخص می‌کنیم.

قضیه:

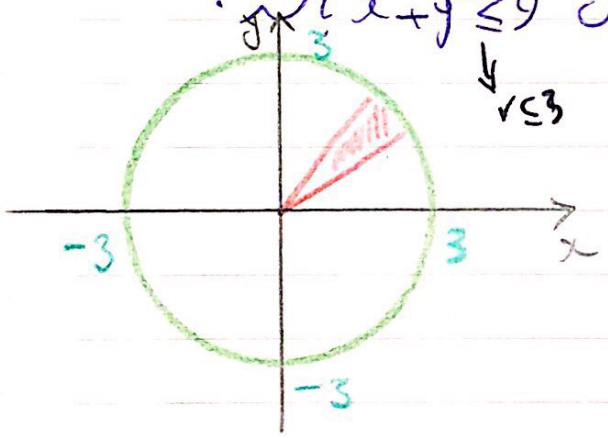
$dxdy$ یا $dydx$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

که در آن R' ناحیه متناظر با ناحیه R در دستگاه قطبی است.

Ex) $I=\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA$ را حساب کنید هرگاه R قرص $x^2+y^2\le 9$ باشد.

$r\le 3$



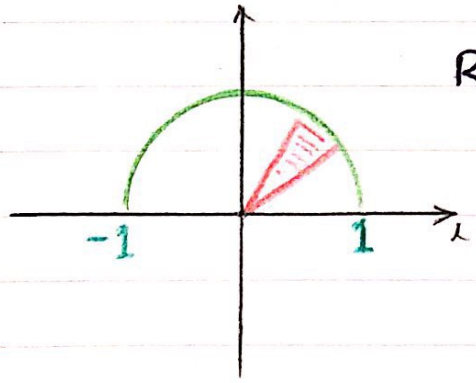
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\; r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{3^3}{3}(2\pi)=18\pi.$$

Ex) $I=\iint_R \frac{dA}{1+x^2+y^2}$ را حساب کنید هرگاه R نیمه مستدیر $x^2+y^2\le 1$ ، $y\ge 0$ باشد.

$r\le 1$

نیمه بالایی



$$R=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^1 \frac{2\times r\,dr\,d\theta}{1+r^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(1+r^2)\Big|_0^1 d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 2-\cancelto{0}{\ln 1})(\pi)$$

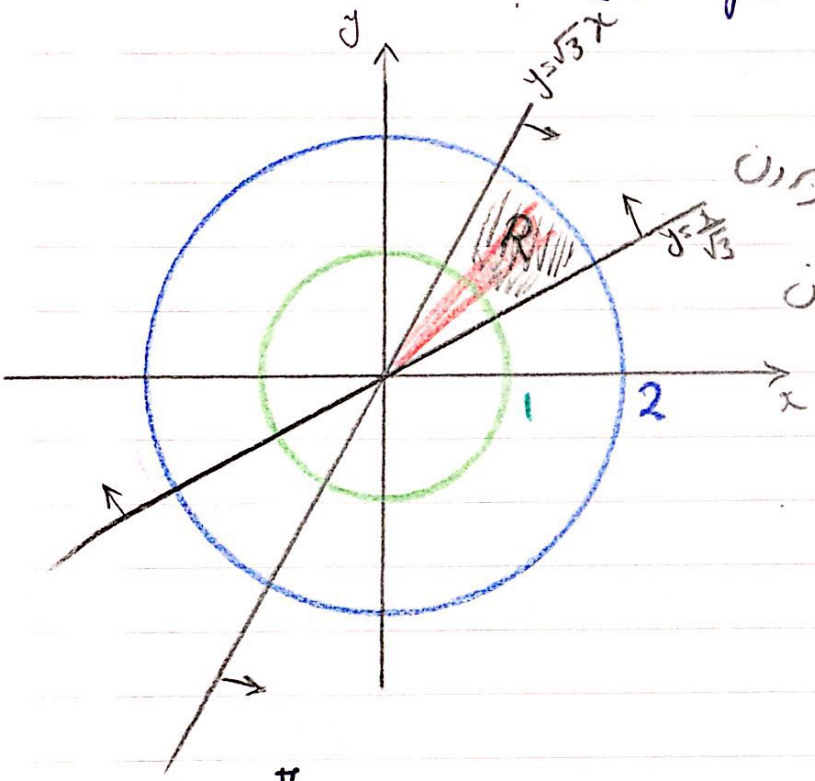
$$=\pi\ln\sqrt{2}$$

Scanned with CamScanner

p:100

Ex) $I=\iint_R tg^{-1}\frac{y}{x}\,dA$ را حساب کنید هرگاه R قطاع طوقی

$\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$, $1\le x^2+y^2\le 4$ باشد.



$1\le x^2+y^2$ ($1\le r$) بیرون دایره $r=1$ است.

$x^2+y^2\le 4$ ($r\ge 2$) درون دایره $r=2$ است.

$y=\sqrt{3}x$ خطی است که از مبدا می‌گذرد با شیب $\frac{\pi}{3}$.

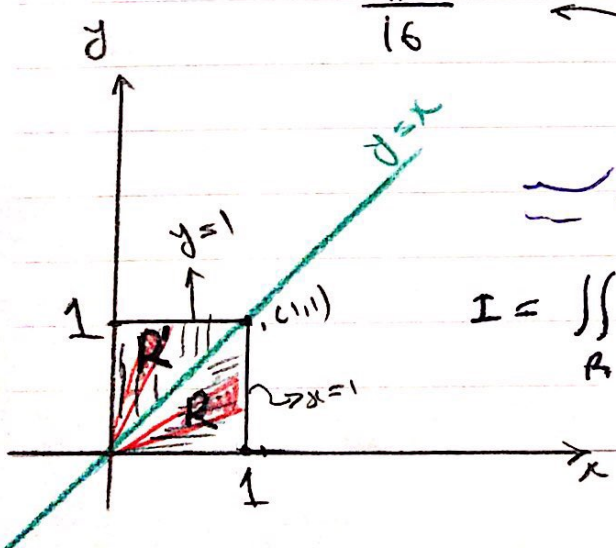
$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ خطی است که از مبدا می‌گذرد با شیب $\frac{\pi}{6}$.

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2 \theta\, r\,dr\,d\theta = \frac{r^2}{2}\Big|_1^2 \left(\frac{\theta^2}{2}\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$=\frac{4-1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^2-\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right)/2$$

$$\frac{\pi^2}{16} \leftarrow = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{3\pi^2}{36}$$

Ex) $I=\int_0^1\int_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy\,dx$ را در مختصات قطبی بنویسید



$$I=\iint_R f(r)\,r\,dr\,d\theta+\iint_{R'} f(r)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{?} f(r)\,r\,dr\,d\theta+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{??} f(r)\,r\,dr\,d\theta$$

Scanned with CamScanner

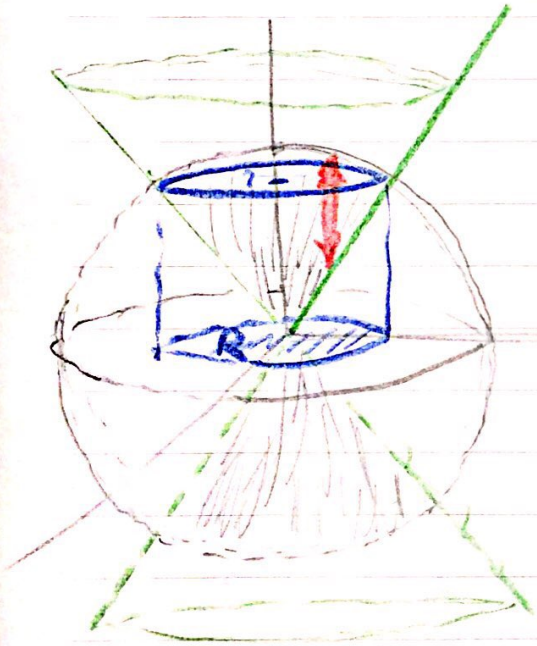
$x=1 \xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}} r\cos\theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow r = \sec\theta = ?$

$y=1 \xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}} r\sin\theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow r = \csc\theta = ??$

پس

$$I = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta} f(r)\, r\, dr\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\int_0^{\csc\theta} f(r)\, r\, dr\, d\theta.$$

Ex) حجم جسم T، که T خارج مخروط $x^2+y^2-z^2=0$ و داخل کره $x^2+y^2+z^2=9$ باشد را حساب کنید.



$$\text{حجم جسم } T = 2\iint_R \left(\sqrt{9-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dA$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{9-r^2} - r\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} -2r\sqrt{9-r^2}\, dr\, d\theta - 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} r^2\, dr\, d\theta$$

$$= -(2\pi)\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} - 2(2\pi)\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\left(9-\frac{9}{2}\right)^{3/2} - 9^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{3^3}{2\sqrt{2}} - 3^3\right) - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right) = \dots$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 9 \\ x^2+y^2-z^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

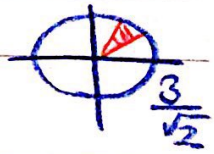
$$2z^2 = 9 \Rightarrow z^2 = 9/2$$

$$\Rightarrow z = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = \frac{9}{2}.$$

$R: x^2+y^2 \le 9/2$

$(r \le 3/\sqrt{2})$



Scanned with CamScanner

«قضیه تغییر متغیر»

تعریف: فرض کنید توابع $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ معکوس‌پذیر باشند (یعنی x و y برحسب u و v بدست می‌آیند)

و

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} := \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0$$

در این صورت توابع u و v را یک تبدیل مختصات گوییم.

Ex) $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ، $\theta = tg^{-1}\frac{y}{x}$ یک تبدیل مختصات است ، $\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{r}$

تعریف:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

قضیه:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \times \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1.$$

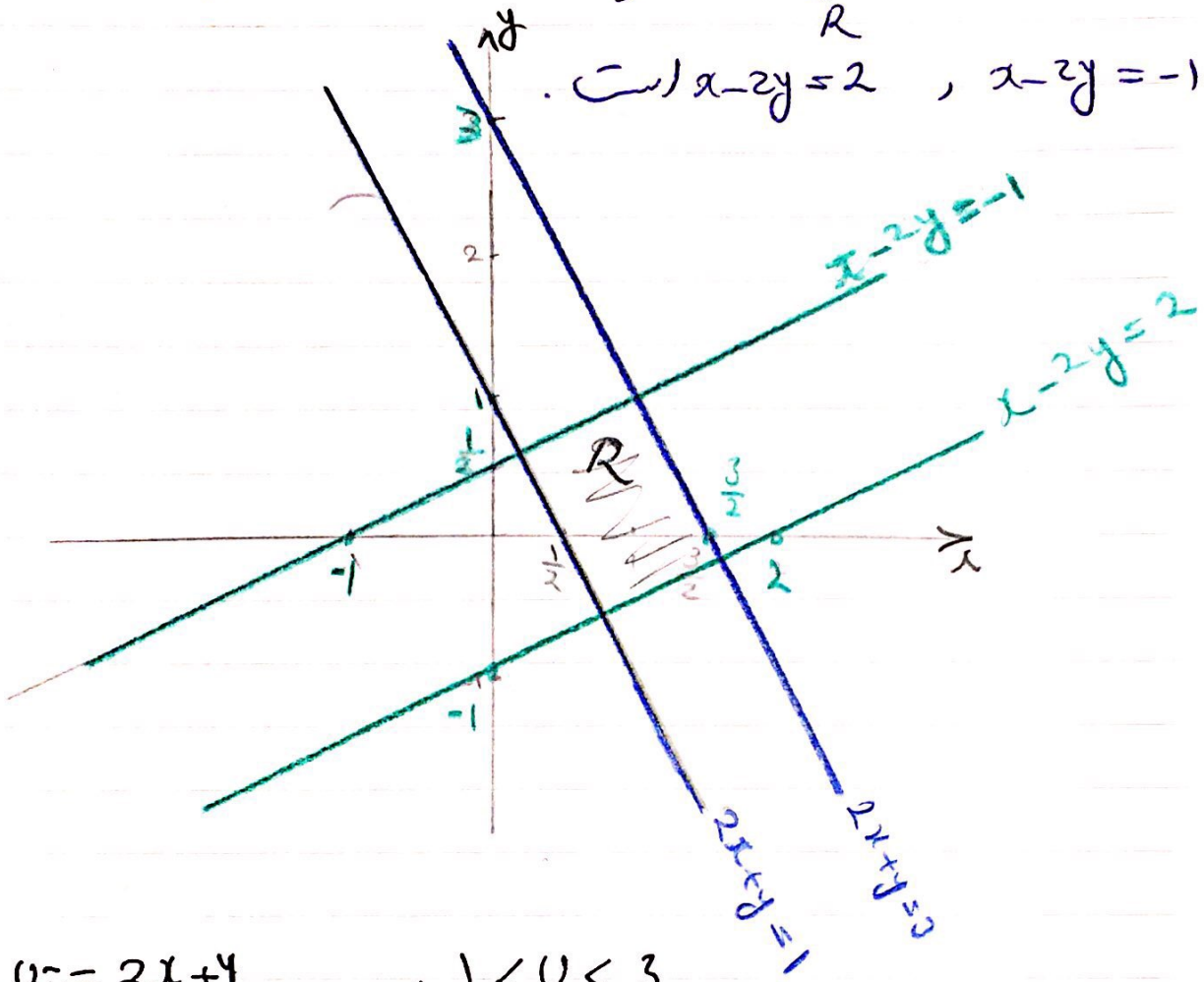
قضیه تغییر متغیر: فرض کنید $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ تبدیل مختصات باشند، در این صورت

$$\iint_R f(x,y)\, \overset{dydx \text{ یا } dxdy}{dA} = \iint_{R'} f(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \overset{dvdu \text{ یا } dudv}{dA'}$$

که در آن R' ناحیه متناظر در دستگاه مختصات uv است.

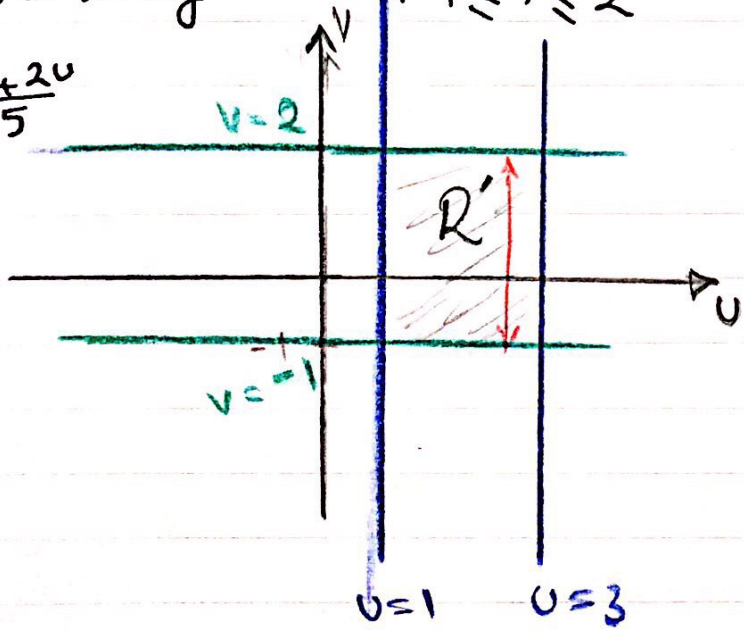
P:103

(Ex $I=\iint_R x^2\,dA$ را حساب کنید هرگاه R ناحیه محدود به $2x+y=1$, $2x+y=3$, $x-2y=-1$, $x-2y=2$ است.



$$2\begin{cases} u := 2x+y \\ v = x-2y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ -1 \le v \le 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{v+2u}{5}$$



$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

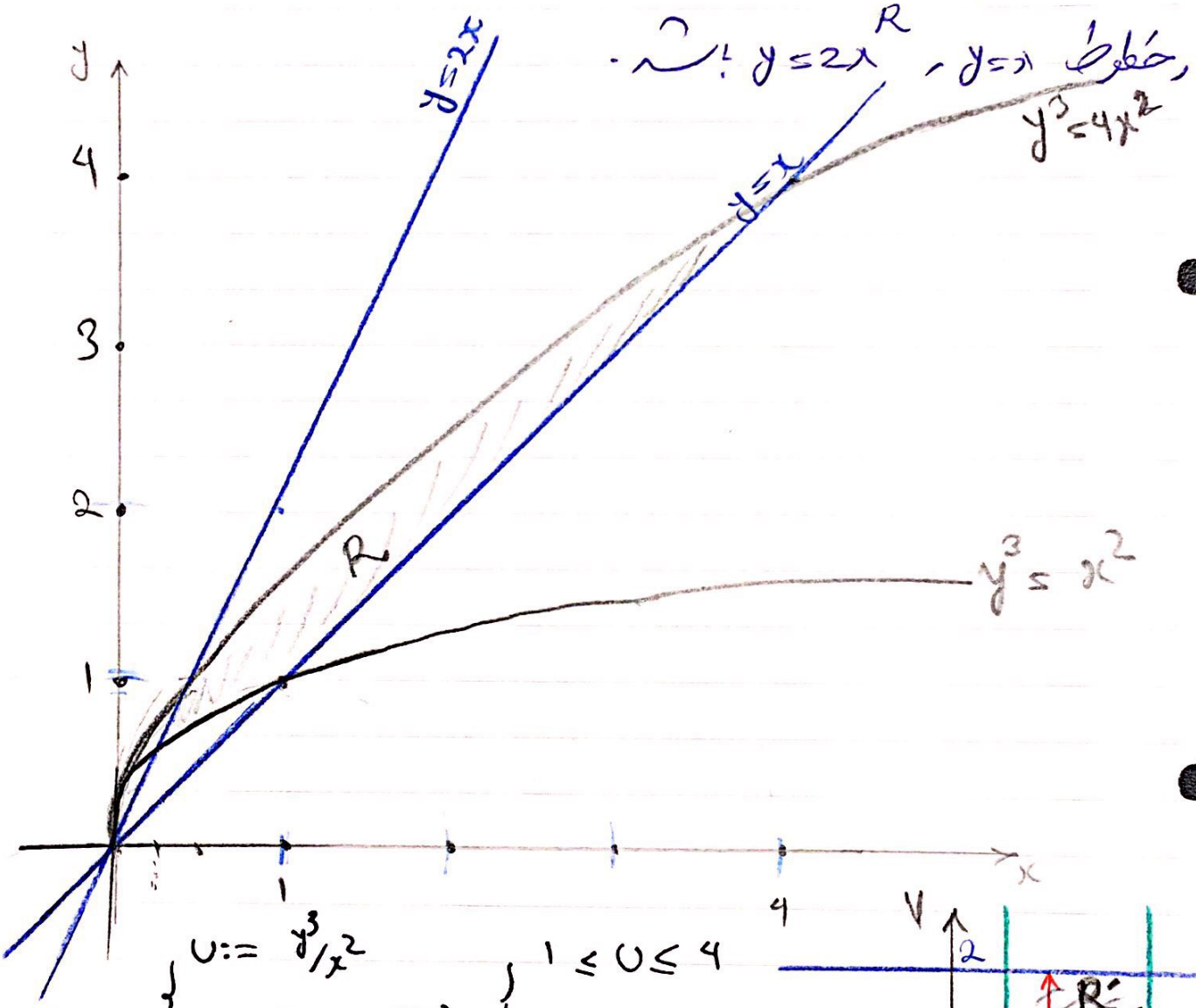
$$\Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{-1}{5}\right| = \frac{1}{5}$$

Scanned with CamScanner

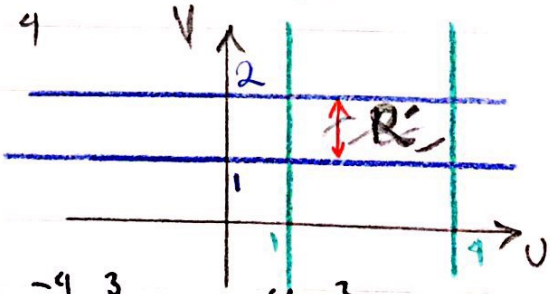
p: 104

$$I = \int_1^3 \int_{-1}^2 \frac{(V+2U)^2}{25} \times \frac{1}{5}\, dV\, dU = \dots = \frac{134}{125}$$

EX) $I = \iint_R \frac{1}{y}\, dA$ را حساب کنید هرگاه R محدود به منحنی‌های $y^3 = x^2$ ، $y^3 = 4x^2$ ، خطوط $y = x$ ، $y = 2x$ باشد.



$$\begin{cases} U := y^3/x^2 \\ V := y/x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 \le U \le 4 \\ 1 \le V \le 2 \end{cases}$$



$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -2x^{-3}y^3 & 3y^2x^{-2} \\ -x^{-2}y & x^{-1} \end{vmatrix} = -2x^{-4}y^3 + 3x^{-4}y^3 = x^{-4}y^3$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x^4 y^{-3}$$

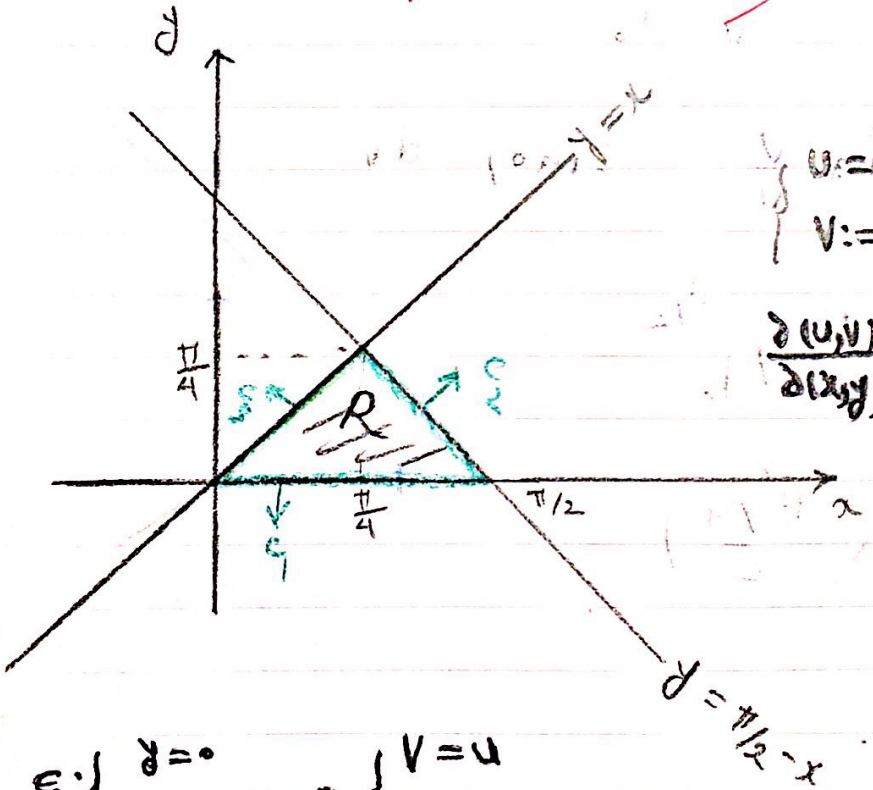
Scanned with CamScanner

$$I = \iint_{R'} \frac{1}{y} x^4 y^{-3} \, dA' = \iint_{R'} \frac{x^4}{y^4} \, dA'$$

$$= \int_1^4 \int_1^2 \frac{1}{v^4} \, dv \, du = \int_1^4 \left. \frac{v^{-3}}{-3} \right|_1^2 du$$

$$= \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{8} - 1 \right) (4-1) = \left(\frac{+7}{8} \right)$$

تمرین: $I = \iint_R \cos \frac{x-y}{x+y} \, dA$ را حساب کنید هرگاه R ناحیه محدود به محور xها، خطوط $y=x$ و $x+y=\frac{\pi}{2}$ باشد.



$$\begin{cases} u := x - y \\ v := x + y \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}$$

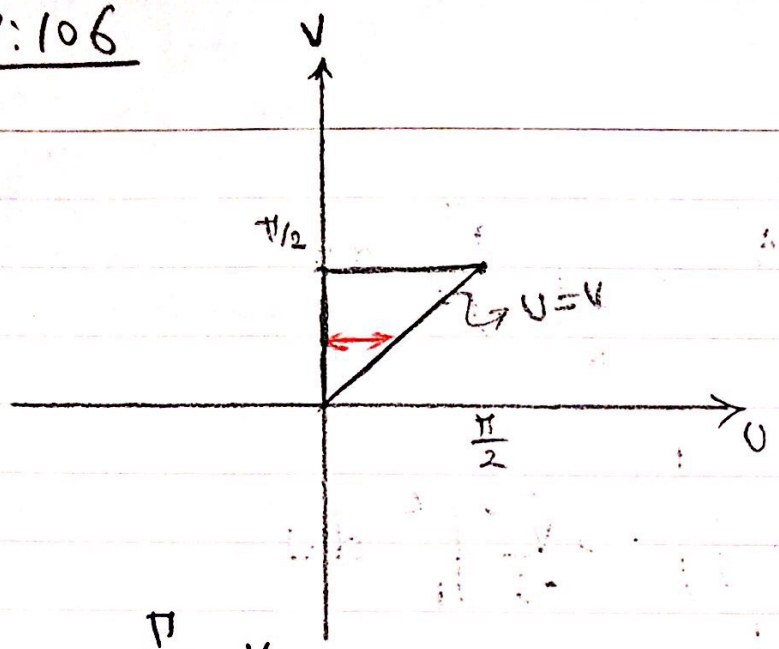
$$C_1 : \begin{cases} y = 0 \\ 0 \le x \le \pi/2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v = u \\ 0 \le u \le \pi/2 \end{cases}$$

$$C_2 : \begin{cases} x + y = \pi/2 \\ \frac{\pi}{4} \le x \le \pi/2 \\ 0 \le y \le \pi/4 \\ (-\pi/4 \le -y \le 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = \pi/2 \\ 0 \le u = x - y \le \pi/2 \end{cases}$$

$$C_3 : \begin{cases} x = y \\ 0 \le y \le \pi/4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ 0 \le v \le \pi/2 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

P:106



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{v} \sin \frac{u}{v} \left(\frac{1}{2}\right) du\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{1}{v}} \sin \frac{u}{v} \Big|_0^{v} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} v\left(\sin \frac{v}{v} - \sin 0\right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{v^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 1) \left(\frac{\pi^2/4}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \sin 1.$$

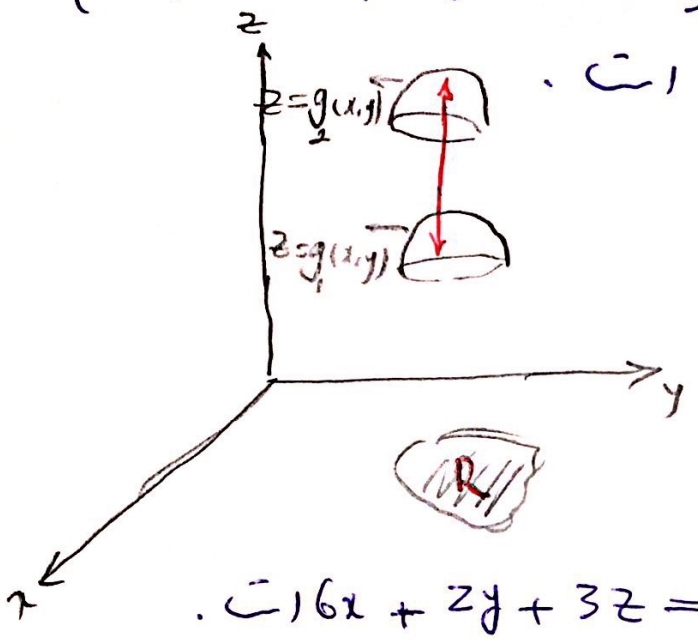
Scanned with CamScanner

انتگرال سه‌گانه

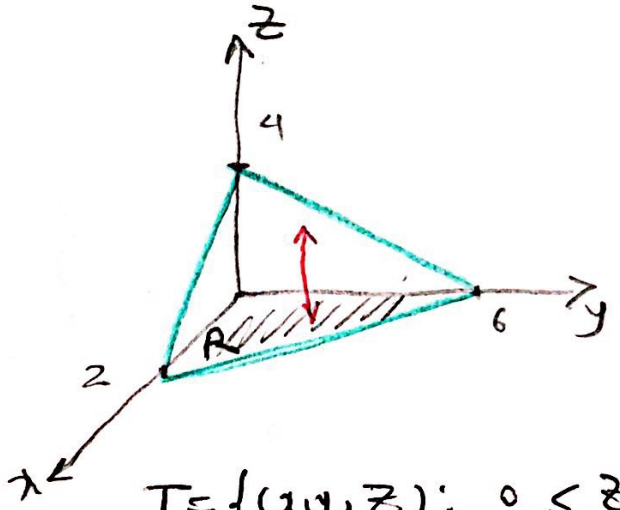
تعریف: جسم T را z-ساده گوییم هرگاه

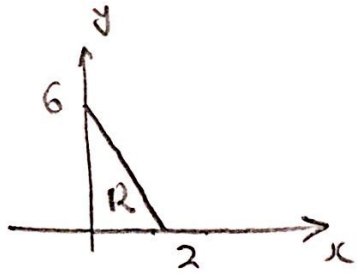
$$T=\{(x,y,z):\ g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\ ;\ (x,y)\in R\}$$

که در آن R ناحیه ساده در صفحه xy است.



Ex) حجم محدود به صفحات مختصات و صفحه $6x+2y+3z=12$ است.





$$T=\{(x,y,z):\ 0\le z\le \tfrac{1}{3}(12-6x-2y)\ ;\ (x,y)\in R\}$$

$$R=\{(x,y):\ 0\le y\le \tfrac{1}{2}(12-6x)\ ;\ 0\le x\le 2\}$$

Scanned with CamScanner

خواص انتگرال سه‌گانه

1- اگر $w = f(x,y,z)$ چگالی حجمی جسم T باشد، آنگاه $\iiint_T f(x,y,z)\,dV$ برابر جسم T است.

2- $\iiint_T dV$ حجم جسم T است.

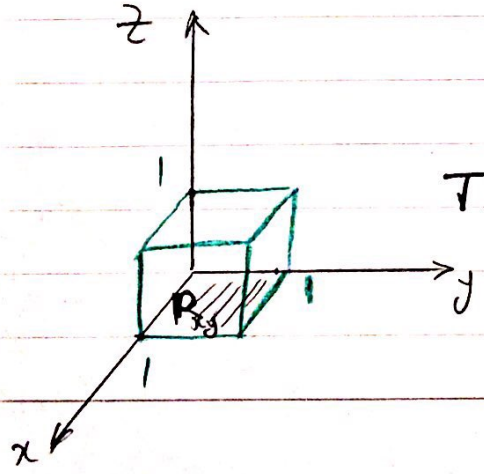
قضیه: اگر T یک جسم z-ساده باشد، یعنی اگر

$$T=\{(x,y,z):\ g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y);\ (x,y)\in R_{xy}\}$$

آنگاه

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iint_{R_{xy}} \underbrace{\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}_{\text{کار اول}}\,dA$$

Ex) $I=\iiint_T (x+y+z)\,dV$ را حساب کنید که T جسم محدود به صفحات $x=0$، $x=1$، $y=0$، $y=1$، $z=0$، $z=1$ باشد.



حل:

$$T=\{(x,y,z):\ 0\le z\le 1;\ (x,y)\in R_{xy}\}$$

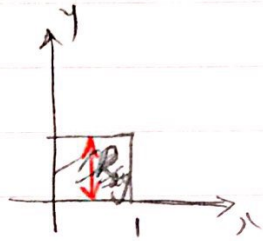
$$R_{xy}=\{(x,y):\ 0\le y\le 1;\ 0\le x\le 1\}$$

ادامه در صفحه بعد ⟶

$$I = \iiint_{R_{xy}} \int_0^1 (x + y + z)\, dz\, dA$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left(xz + yz + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 dA$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left(x + y + \frac{1}{2}\right) dA$$



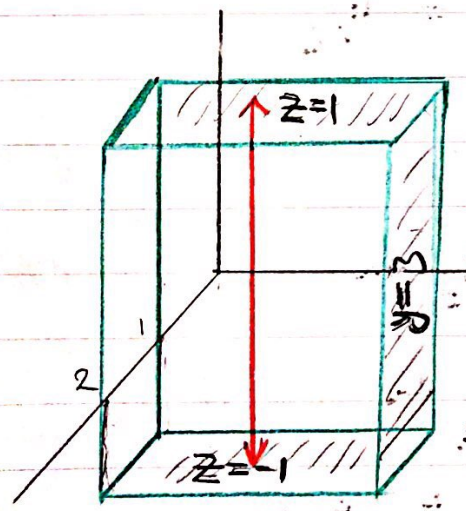
$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2}\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{3}{2}$$

Ex) $I = \iiint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$ را حساب کنید، هرگاه محدود به صفحات $x=1$ ، $x=2$ ، $y=0$ ، $y=3$ ، $z=1$ ، $z=-1$



$$I = \iint_R \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dA$$

$$= \iint_R \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} dA$$

$$= \iint_R x^2(1-(-1)) + y^2(1-(-1)) + \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \iint_R \left(2x^2 + 2y^2 + \frac{2}{3}\right) dA$$

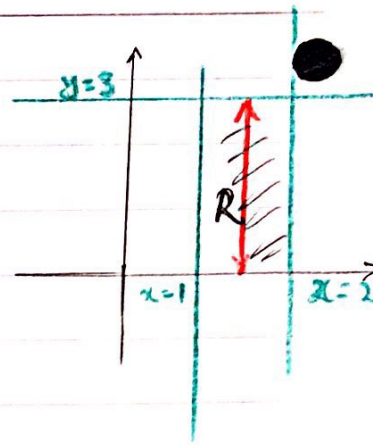
ادامه در صفحه بعد ←

Scanned with CamScanner

P:110

$$= \int_1^2 \int_0^3 \left(2x^2 + 2y^2 + \frac{2}{3}\right) dy\, dx$$

$$= \int_1^2 \left(2x^2 y + \frac{2y^3}{3} + \frac{2}{3} y\right)\Big|_0^3 dx$$

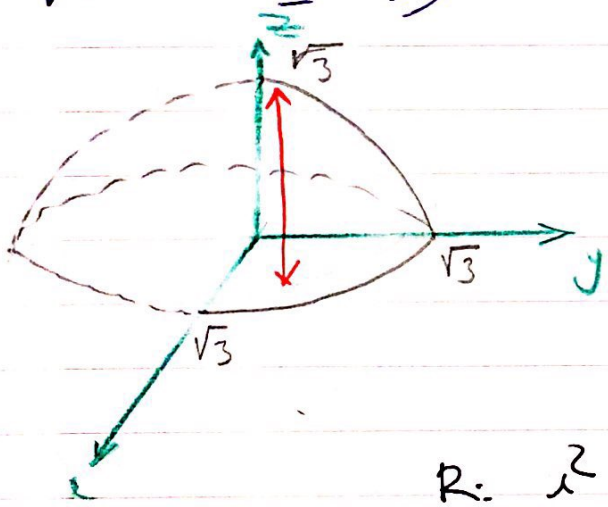


$$= \int_1^2 (6x^2 + 18 + 2)\, dx$$

$$= \frac{6x^3}{3} + 20x \Big|_1^2 = 2(8-1) + 20(2-1)$$

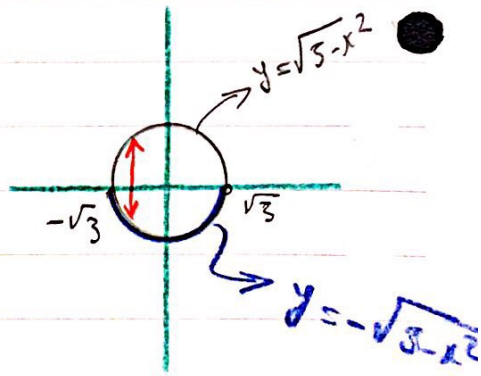
$$= 34.$$

Ex) حجم $I = \iiint_T f(x,y,z)\, dV$ را بنویسید هرگاه T کره بالای $x^2+y^2+z^2=3$ باشد.



$$I = \iint_R \int_0^{\sqrt{3-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dz\, dA$$

$$R: x^2 + y^2 \le 3.$$

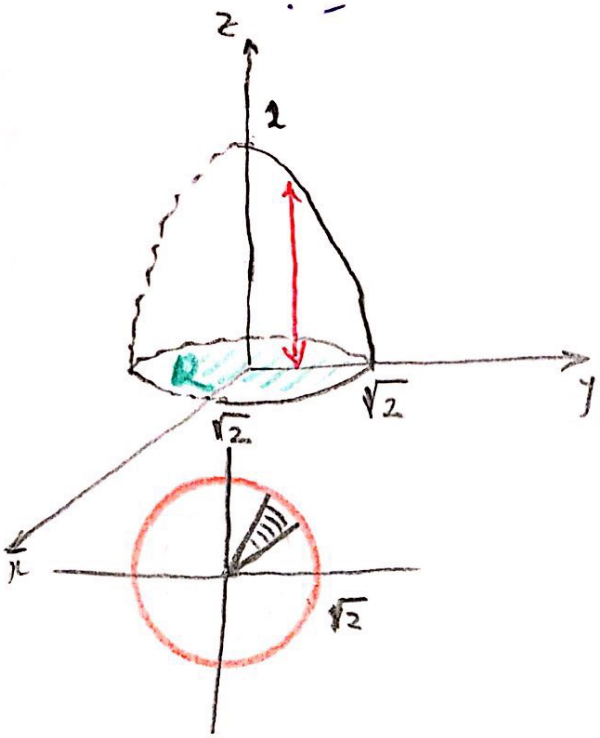


و آخر

$$I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_0^{\sqrt{3-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

Scanned with CamScanner

Ex) حجم جسم محدود به صفحه $z=0$ و سهمی‌گون $z=2-x^2-y^2$ را بیابید



حل:

$$\iint_R (2-x^2-y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \left(\frac{\cancel{2}r^2}{\cancel{2}} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} (2\pi)$$

$$= \left(2-\frac{4}{4}\right)2\pi = 2\pi.$$

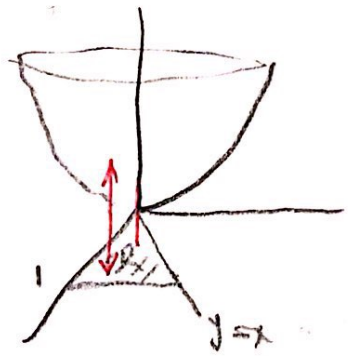
حل با انتگرال سه‌گانه

$$\iiint_T dV = \iint_R \int_0^{2-x^2-y^2} dz\,dA = \iint_R (2-x^2-y^2)\,dA$$

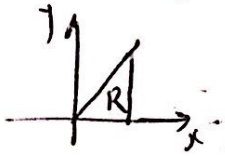
$$= \cdots = 2\pi$$

Ex) حجم جسم محدود به سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ و صفحات $x=1$ ، $y=x$ ، $z=0$ ، $y=0$ کدام است؟

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{3}{2}$



$$\iiint_R \int_0^{x^2+y^2} dz\,dA = \int_0^1\int_0^x (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

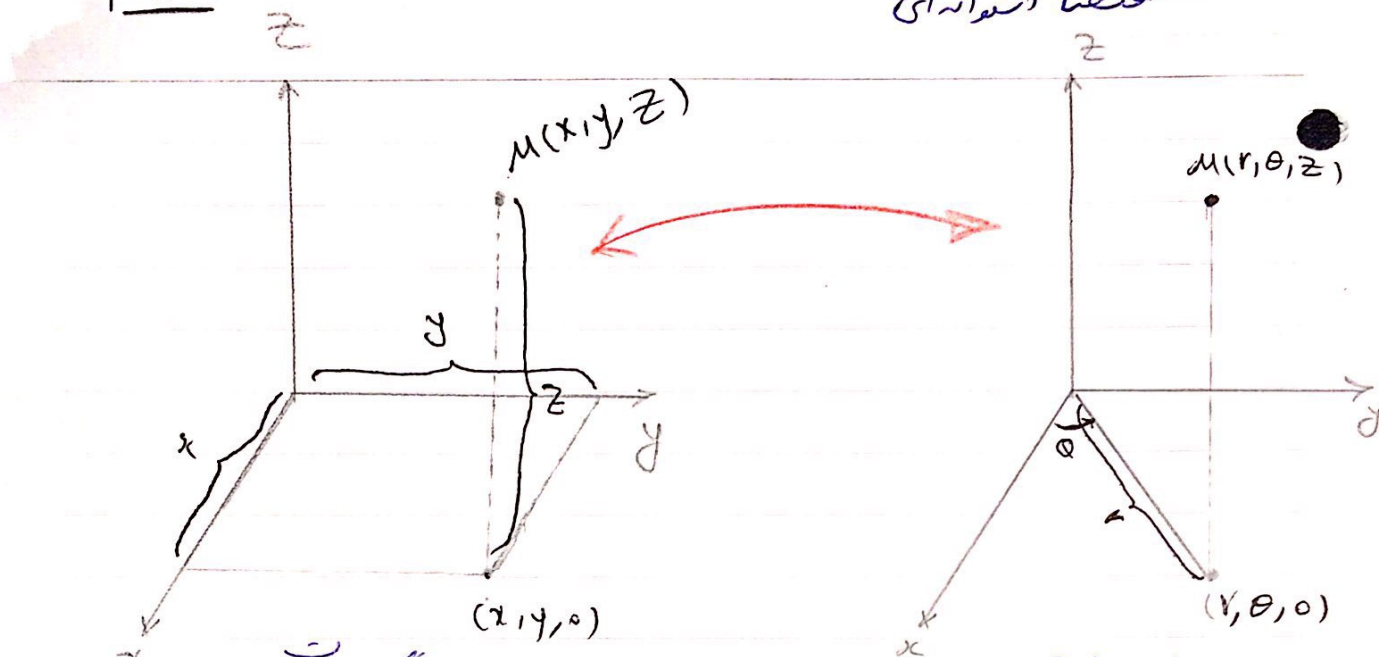


$$= \cdots = \frac{1}{3}.$$

قبلا حل کردیم

Scanned with CamScanner

مختصات استوانه‌ای



دستگاه مختصات قایم (یا دکارتی)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

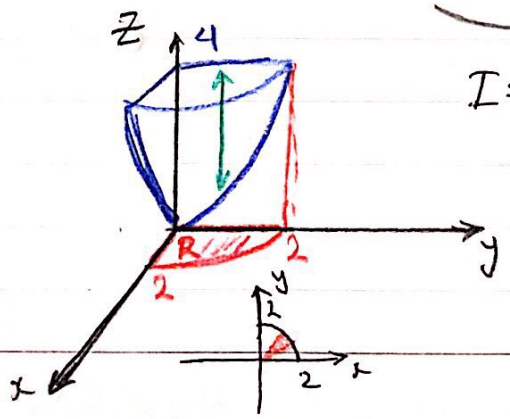
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} & (r \geq 0) \\ \theta = tg^{-1} y/x & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \\ z = z \end{cases}$$

قضیه:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iiint_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

که در آن T' جسم متناظر با جسم T در دستگاه مختصات استوانه‌ای است.

EX) $I = \iiint_T xz\,dV$ را حساب کنید هرگاه T ناحیه توپر واقع در یک هشتم اول و محدود به سهمی‌گون $z = x^2+y^2$ و صفحات $x=0$ ، $y=0$ ، $z=4$ باشد.



$$I = \iint_R \int_{x^2+y^2}^{4} x\, z\, dz\, dA$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} r\cos\theta\; z\; r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$=$$

$\longrightarrow$

P: 113

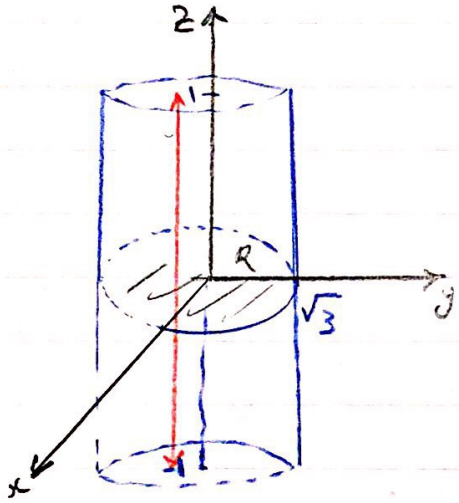
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \cos\theta \left(\frac{4^2}{2} - \frac{r^4}{2}\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(8\frac{r^3}{3} - \frac{r^7}{14}\Big|_0^2\right) \cos\theta\, d\theta = \left(\frac{64}{3} - \frac{128}{14}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\right.$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{128}{14} = \frac{64}{3} - \frac{64}{7} = \frac{7\times 64 - 3\times 64}{21} = \frac{4\times 64}{21} = \frac{256}{21}.$$

Ex) $I = \iiint_T (\underbrace{x^2+y^2}_{r^2}+z^2)\, dv$ را محاسبه کنید که T ناحیه توپر محدود به استوانه $x^2+y^2=3$

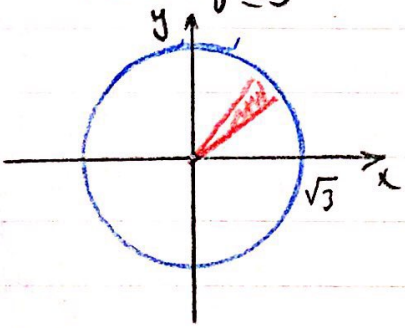
و صفحات $z=1$ و $z=-1$ باشد.



$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{-1}^{1} (r^2+z^2)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \left(r^3 z + r\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} dr\, d\theta$$

$R: x^2+y^2 \le 3$



$$= \int_0^{2\pi} \left(2\frac{r^4}{4} + \frac{2}{3}\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times 9 + \frac{1}{3}\times 3\right) 2\pi$$

$$= 11\pi.$$

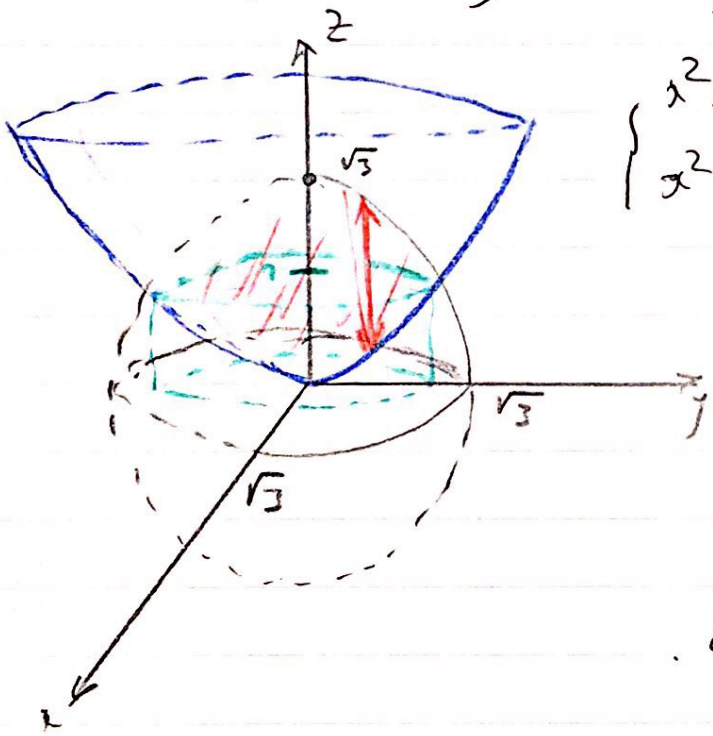
Scanned with CamScanner

P:114

Ex) حدود $I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{\sqrt{3-(x^2+y^2)}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$ را در مختصات استوانه‌ای بنویسید. ضمناً جسم مورد نظر را هم مشخص نمایید.

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{2}r^2}^{\sqrt{3-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

و جسم مورد نظر محدود به سهمی‌گون $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ و کره $x^2+y^2+z^2=3$ است.



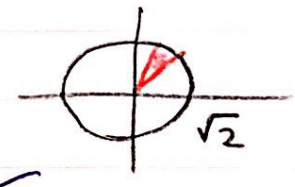
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x^2+y^2=2z \end{cases} \Rightarrow z^2+2z-3=0$$

$$\Rightarrow (z+3)(z-1)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{z=-3}_{\text{غیرقابل قبول}},\ z=1 = ?$$

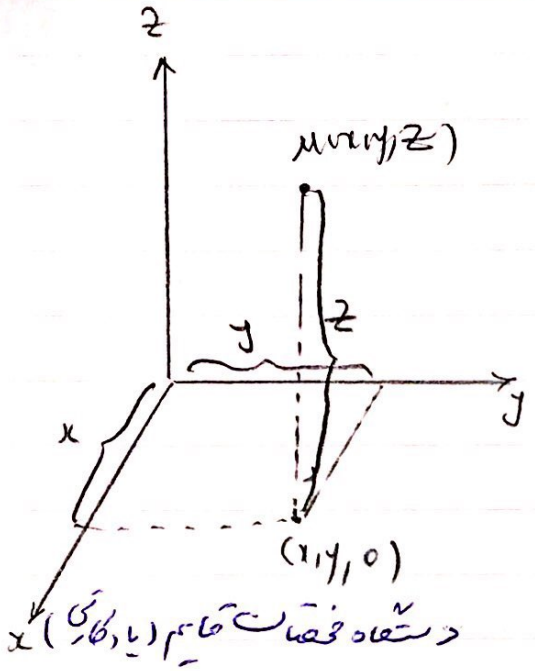
$$\xrightarrow[x^2+y^2=2z]{z=1} x^2+y^2=2$$

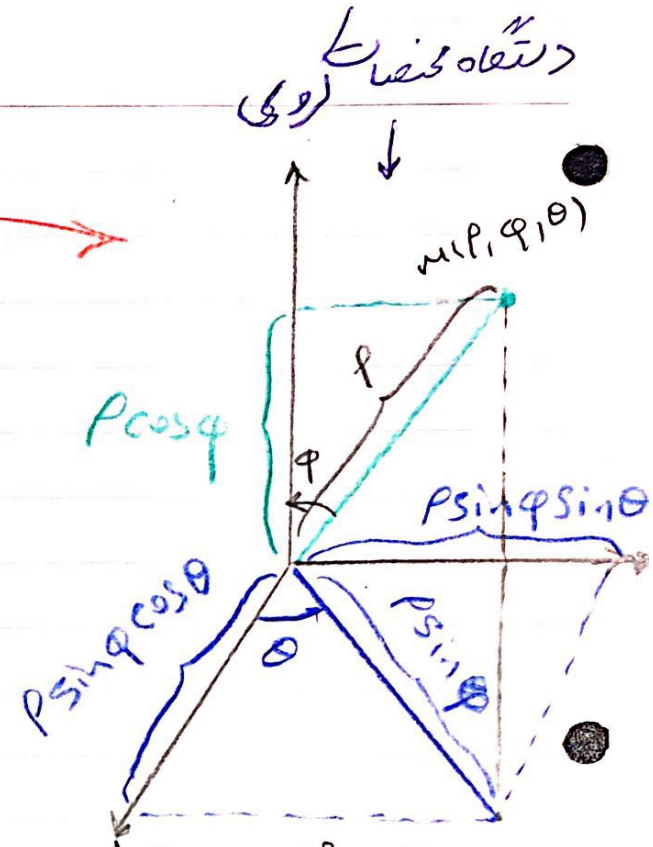
R: داخل دایره $x^2+y^2=2$ است.



تمرین: حجم جسم T را حساب کنید، هرگاه T، جسم مثال قبل باشد. (یا حجم جسم T را حساب کنید هرگاه T محدود به سهمی‌گون $2z=x^2+y^2$ و کره $x^2+y^2+z^2=3$ باشد.

Scanned with CamScanner





$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$\rho \geq 0$ اندازه شعاع حامل نقطه M

$0 \leq \varphi \leq \pi$ زاویه‌ای که شعاع حامل نقطه با $\vec{k}$ می‌سازد

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ زاویه‌ای که تصویر شعاع حامل نقطه در صفحه xy با $\vec{i}$ می‌سازد (θ قطبی)

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi=\cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \theta=tg^{-1}\, y/x \end{cases}$$

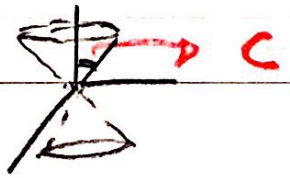
چند معادله مهم در مختصات کروی

① $\rho = c \quad (c>0)$

معادله یک کره به مرکز (0,0,0) شعاع c است یعنی معادله $x^2+y^2+z^2=c^2$ است.

② $\varphi = c \quad (0<c<\pi/2)$

معادله یک مخروط است به شکل زیر و معادله دکارتی آن عبارت است از

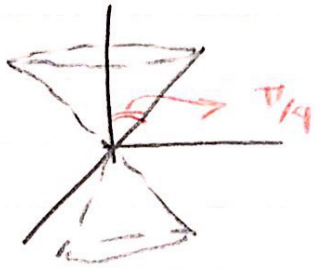


$$z=\pm(\cot g\, c)\sqrt{x^2+y^2}.$$

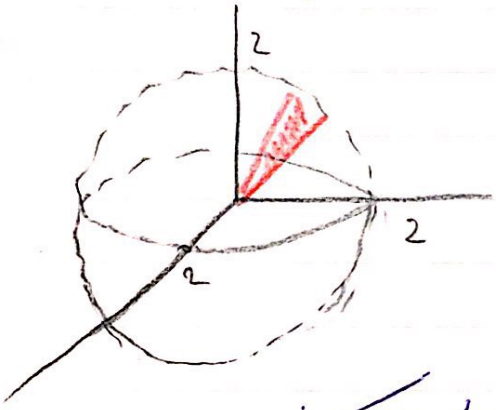
Scanned with CamScanner

مثلا مخروط $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ چه معادله‌ای در مختصات کروی دارد؟

$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

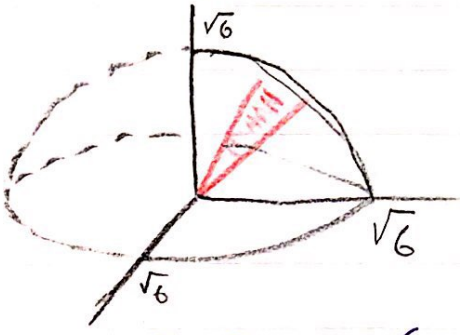


Ex کره $x^2+y^2+z^2=4$ را در مختصات کروی گرا بندی کنید.
$(\rho=2)$



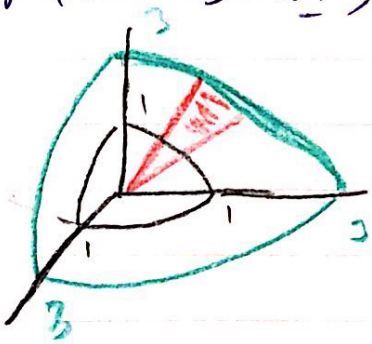
$\{(\rho,\varphi,\theta):\ 0\le\rho\le 2;\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

Ex) کره بالای $x^2+y^2+z^2=6$ را در مختصات کروی گرا بندی کنید.
$(\rho=\sqrt{6})$



$\{(\rho,\varphi,\theta):\ 0\le\rho\le\sqrt{6},\ 0\le\varphi\le\pi/2;\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

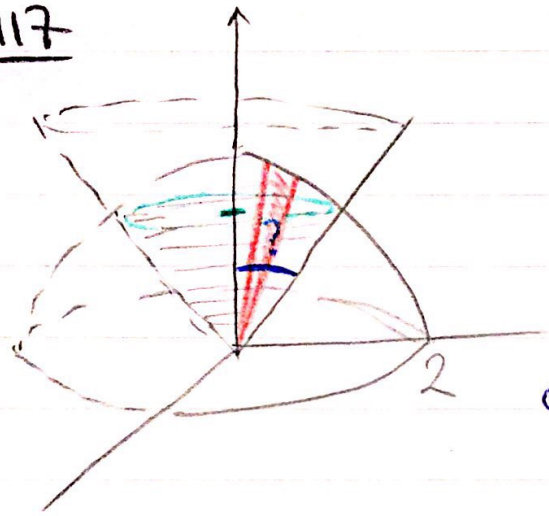
Ex: جسم T را داخل کره $x^2+y^2+z^2=9$ و بیرون کره $x^2+y^2+z^2=1$ در یک هشتم اول گرا بندی کنید



$T=\{(\rho,\varphi,\theta):\ 1\le\rho\le 3;\ 0\le\varphi\le\pi/2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

Scanned with CamScanner

p:117



Ex: فرض کنید جسم T به شکل زیر باشد.

و محدود به نیمکره $x^2+y^2+z^2=4$ و مخروط

$x^2+y^2=3z^2$ باشد. جسم T را در مختصات کروی کراندی کنید.

$$z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \cot g\, c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{\pi}{3}$$

پس

$$T = \left\{(\rho,\varphi,\theta):\ 0\le\rho\le 2;\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3},\quad 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

تمرین: جسم T را در مختصات دکارتی و استوانه‌ای هم بنویسید.

حل:

دکارتی $T = \left\{(x,y,z):\ \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2};\ -\sqrt{3-x^2} \le y \le +\sqrt{3-x^2};\ -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\right\}$

استوانه‌ای $T = \left\{(r,\theta,z):\ \frac{r}{\sqrt{3}} \le z \le \sqrt{4-r^2};\quad 0\le r\le\sqrt{3};\quad 0\le\theta\le 2\pi\right\}$

تمرین*: حد $\iiint_T f(x,y,z)\,dV$ را در مختصات دکارتی و استوانه‌ای بنویسید هرگاه T جسم مثال بالا باشد.

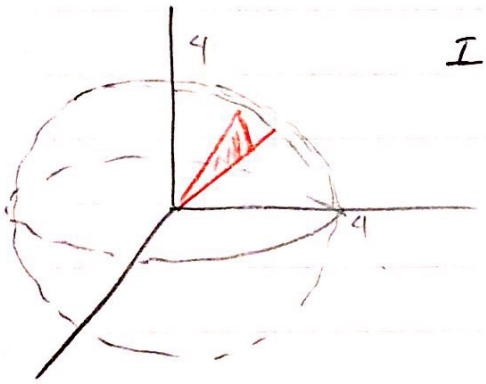
Scanned with CamScanner

- نکته:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dv = \iiint_{T'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

که در آن T' حجم متناظر با حجم T در دستگاه مختصات کروی است

- مثال) $I=\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$ را حساب کنید هرگاه T، کره $x^2+y^2+z^2\le 16$ باشد. $(\rho\le 4)$

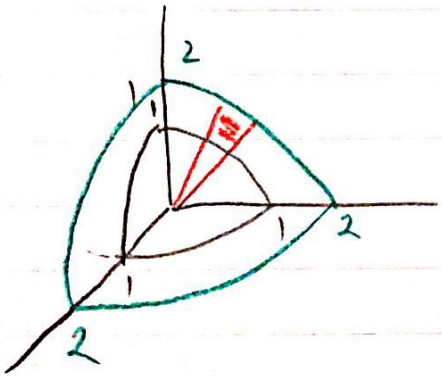


$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{4} \rho\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\frac{4^4}{4}\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\right)(2\pi)$$

$$=4^3\times(+1+1)(2\pi)=256\pi$$

- مثال) حجم $\iiint_T f(x,y,z)\,dv$ را در مختصات کروی محاسبه کنید هرگاه T بخشی از فضا کروی $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$ در یک هشتم اول باشد.

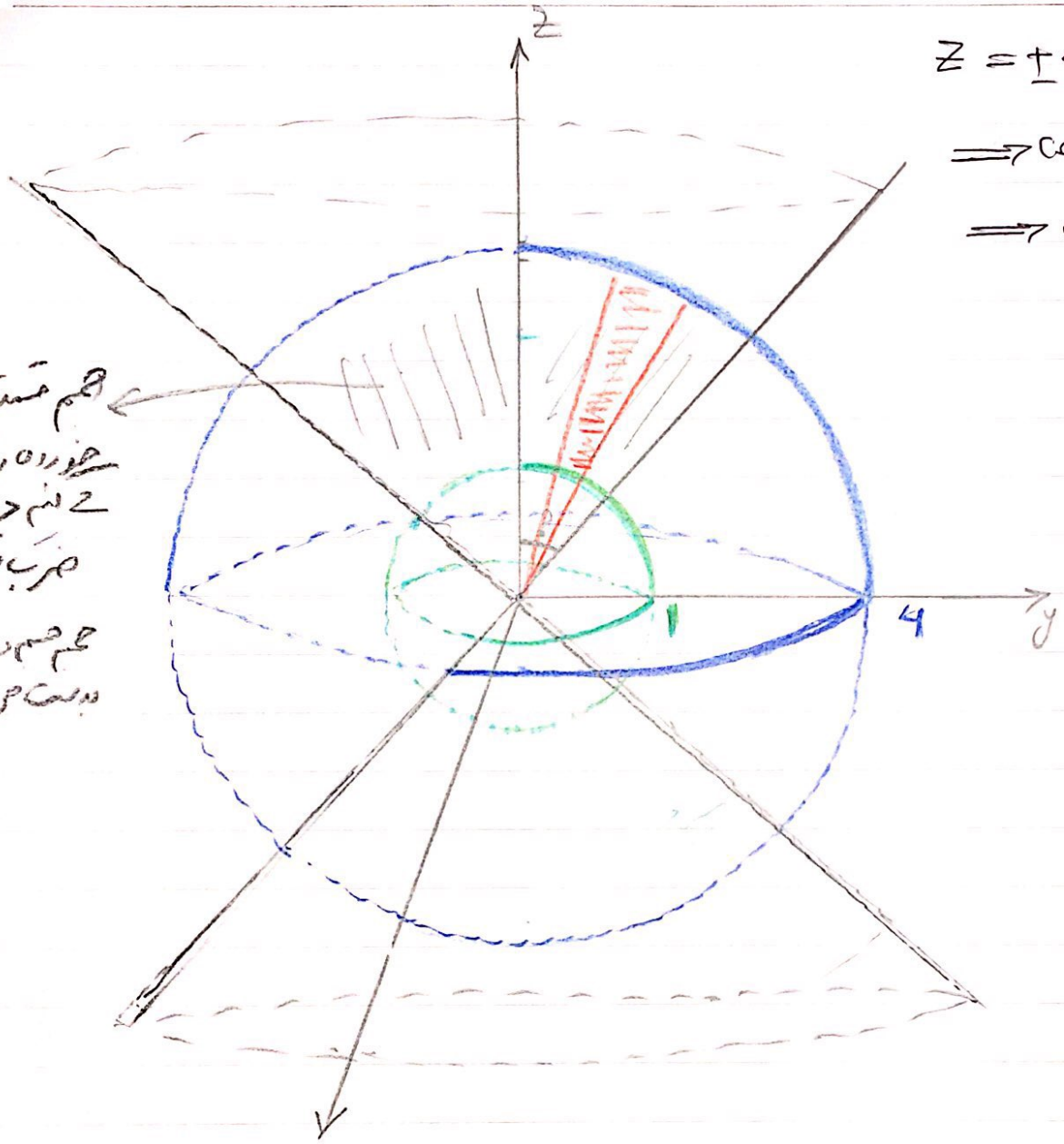


$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi/2}\int_1^{2} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

- مثال) حجم ناحیه توپر محدود به کرات $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=16$ و داخل یک مخروط $x^2+y^2-z^2=0$ را بدست آورید.

Scanned with CamScanner

p:119



$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$

$\Longrightarrow \cot g\, c = 1$

$\Longrightarrow c = \frac{\pi}{4} = ?$

حجم قسمت هاشور خورده را حساب کنیم در 2 ضرب می‌کنیم. حجم جسم مورد نظر بدست می‌آید

$$\text{حجم } T = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^4 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 2\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} (2\pi)$$

$$= 2\left(\frac{47}{3}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + 1\right)(2\pi)$$

Ex) صدر $\iiint_T f(x,y,z)\,dV$ را در مختصات دکارتی و استوانه‌ای بنویسید، هرگاه T قسمتی از جسم مثال قبل باشد که بالای صفحه xy قرار دارد.

Scanned with CamScanner