

پاسخ سوال اول

$$\begin{cases} t_i = \frac{Nl}{c} \\ t_E = \frac{R_0}{c} \end{cases}$$

$$Nl^2 = R_0^2 \rightarrow Nl = \frac{R_0^2}{l} \rightarrow t_i = \frac{R_0^2}{lc}$$

$$\rightarrow t_i = t_E \times \frac{R_0}{l} \quad \textcircled{I}$$

$$L_E t_E = L_i t_i \xrightarrow{\textcircled{I}} \frac{L_E}{L_i} = \frac{t_i}{t_E} = \frac{R_0}{l}$$

$$m + 26.78 = -2.5 \log\left(\frac{L_E}{L_i}\right) \Rightarrow m = -26.78 - 2.5 \log\left(\frac{R_0}{l}\right) \quad \textcircled{II}$$

$$\ln \sigma = 1$$

$$\rho = n \bar{m} = n \mu m_H \rightarrow n = \frac{2\rho}{m_H} \left\{ l \times \frac{2\rho}{m_H} \sigma = 1 \rightarrow l = \frac{m_H}{2\rho\sigma} = 6.755 \times 10^{-11} \text{ m} \right.$$

$$\sigma = \pi r_B^2$$

مساحت اتم بزرگ

$$\textcircled{II} \rightarrow \boxed{m = -74.3}$$

$$\downarrow$$

$$\rho = \bar{\rho} = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$$

استفاده از فرض چگالی ستاره یکنواخت می باشد. طبق معادله تعادل هیدرواستاتیک

دایره:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= - \frac{G M(r) \rho}{r^2} \\ M(r) &= \frac{4\pi \rho r^3}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{P_m}^0 dP = - \frac{4\pi G \rho^2}{3} \int_r^R r dr$$

$$\Rightarrow P(r) = \frac{4\pi G \rho^2}{6} (R^2 - r^2) \quad (1)$$

ستاره قشری از گاز کامل می باشد

$$P(r) = \frac{\rho k T(r)}{m_H} = \frac{\rho k T_0 (1 - r/R)}{m_H} \quad (2)$$

$$(1) (2) \Rightarrow \frac{4\pi G \rho^2}{6} (R^2 - r^2) = \frac{\rho k T_0}{m_H} (1 - r/R)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3 k T_0}{2\pi G m_H} \cdot \frac{(1 - r/R)}{R^2 (1 - r^2/R^2)} = \frac{3 k T_0}{2\pi G m_H R^2} \cdot \frac{1}{(1 + r/R)}$$

که در رابطه بالا چگالی تابعی از r دارد و ستاره یکنواخت نیست که با فرض یکنواختی ما در تضاد است!!

نسبت درخشندگی ستاره در حالتی که در آن جذب رخ می دهد نسبت به حالتی که جذب

رخ نمی دهد، را می توان نسبت مدت زمانی که طول می کشد تا فوٹون از

مرکز ستاره به سطح در دو حالت بدین جذب در همراه با جذب در نظر گرفت.

نیابریلین می توان نوشت:

$$\frac{L}{4\pi R^2 \sigma T_c^4} = \frac{t_1}{t_2} \quad (T_c: \text{تقریبی مرکز ستاره})$$

$$t_1 = R/c, \quad t_2 = \frac{Nl}{c} \quad N: \text{تعداد برخورد ها در حرکت فوٹون از مرکز ستاره تا سطح}$$

$$N = R^2/l^2$$

میانگین که

(طول آزاد میانگین: l)

$$\rightarrow t_2 = \frac{R^2}{lc} \rightarrow \boxed{L = 4\pi R^2 \sigma T_c^4 \times \frac{l}{R}} \quad (*)$$

طبق تعادل هیدرواستاتیکی:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2} \rightarrow P_c = \frac{4\pi G \rho^2 R^2}{6} \quad (1)$$

الفق فشار گاز داخل نیز طبق:

$$p_c = \frac{8 k_B T_c}{\bar{m}} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{8 k_B T_c}{\bar{m}} = \frac{4 \pi G \bar{\rho}^2 R^2}{6} \rightarrow T_c = \frac{2 \pi G \bar{\rho} R^2 \bar{m}}{3 k_B} \quad (*)$$

$$(*), (*)' \rightarrow L = 4 \pi R^2 \bar{\rho} \times \frac{R}{R} \times \left(\frac{2 \pi G \bar{\rho} R^2 \bar{m}}{3 k_B} \right)^4$$

$$\rightarrow L = \frac{\pi^2 \bar{\rho}^4 \bar{m}^4 G^4 M^3}{3 k k_B^4} \quad (I) \rightarrow L \propto M^3$$

در بالا از رابطه $\bar{\rho} = \frac{1}{k_B}$ استفاده شده که k کمی متغیر می باشد!

اگر ϵ را مقدار انرژی آزاد شده در هر کیلو گرم از ماده در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{dL}{dm} = \epsilon \rightarrow \frac{dk}{dr} = 4 \pi r^2 \bar{\rho} \epsilon dr$$

مقدار تابان در سطحی می توان در نظر گرفت

$$\epsilon = \epsilon_0 \bar{\rho}^\alpha T^\beta = \epsilon_0 \bar{\rho} T^4$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dr} = 4 \pi r^2 \bar{\rho}^2 T^4$$

با استفاده از تناسب می توان نوشت:

$$\frac{L}{R} \propto R^2 \gamma^4 T^4$$

$$\textcircled{*} \rightarrow T \propto \gamma R^2 \bar{m}$$

$$\rightarrow L \propto \gamma^2 R^3 \gamma^4 R^8 \bar{m}^4 \propto \frac{R^{11} \bar{m}^4 M^6}{R^{18}}$$

$$\textcircled{I} \rightarrow L \propto \frac{\bar{m}^4 M^3}{k}$$

$$\rightarrow \frac{\bar{m}^4 M^3}{k} \propto \frac{\bar{m}^4 M^6}{R^7} \rightarrow M^3 \propto \frac{R^7}{k}$$

$$\textcircled{I} \rightarrow L \propto \frac{\bar{m}^4 R^7}{k^2}$$

نیابراین برای ستارگان رشته اصلی با شعاع ثابت، $L \propto \frac{\bar{m}^4}{k^2}$ می باشد.

نیابراین ستارگانی که کدری بیشتری دارند، درخشانتری هستند و دارند. نیابراین

در عواقب لغت ستارگان رشته اصلی با شعاع ثابت، هر چه که فلزیت بیشتری

دارند، درفشندنی کمتر دارند بالعکس. (وقت شود که جمله m را در نظر

بگرفتیم زیرا طبق رابطه $\frac{m_H}{m} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{Z_1}{2}$ ، تأثیر مقدار Z

(تغییر ملزمت) تغییر زیادی در m به وجود نمی آید!!

به صورت شهودی نیز می توان گفت که ستارگانی ملزمت بیشتری در پویایی خود دارند،

این همچون یک پویایی برای عمل می کنند و ~~در این پویایی~~ ~~تغییراتی~~ باعث

می شود انرژی ستاره به مقدار کمتری بیرون رود!

الف) $V_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G M_r \rho}{r^2} = - \frac{G \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right) \rho}{r^2} = - \frac{4}{3} \pi G \rho^2 r$$

$\xrightarrow{P(R)=0} P(r) = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 (R^2 - r^2)$

دوره سون
نقطه
نقطه

$$\pi \approx 2 \int \frac{dr}{V_s} \approx 2 \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{3} \gamma \pi G \rho (R^2 - r^2)}} \Rightarrow \pi = \sqrt{\frac{3\pi}{2\gamma G \rho}}$$

ک: $\gamma = 5/3$ تک ای $\rightarrow \pi = \sqrt{\frac{9\pi}{10 G \rho}}$

۱) $L = \sigma T^4 4\pi R^2 \sim L \propto R^2 T^4$

$P = \frac{\rho K T}{\bar{m}} \rightarrow P \propto \rho T \rightarrow T \propto P^{\gamma-1}$

و ۳. $P \propto \rho^\gamma$

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G M(r) \rho}{r^2} \rightarrow P \propto \rho^2 R^2 \Rightarrow R \propto \rho^{\frac{\gamma-2}{2}}$$

$$L \propto \rho^{\gamma-2} \times \rho^{4(\gamma-1)} \rightarrow L \propto \rho^{5\gamma-6} \rightarrow L \propto P^{\frac{5\gamma-6}{\gamma}} ; L \propto P^\beta$$

ک: $\gamma = 5/3$ تک ای $\rightarrow \beta = \frac{7}{5} = 1.4$

۲) $L = K R^2 T^4 \rightarrow \ln L = \ln K + 2 \ln R + 4 \ln T$

$$\rightarrow \frac{dL}{L} = 2 \frac{dR}{R} + 4 \frac{dT}{T}$$

$$P \propto \rho^\gamma \rightarrow \frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad \frac{dL}{L} = \frac{5\gamma-6}{\gamma} \frac{dP}{P} = (5\gamma-6) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\rightarrow (5\gamma-6) \frac{d\rho}{\rho} = 2 \frac{dR}{R} + 4 \frac{dT}{T} \quad \left. \frac{dR}{R} \left(-15\gamma + 18 - 2 \right) = 4 \frac{dT}{T} \right\}$$

$$\rho \propto R^{-3} \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -3 \frac{dR}{R} \rightarrow \frac{dT}{T} = \left(4 - \frac{15\gamma}{4} \right) \frac{dR}{R}$$

$\bar{R} = 8.13 R_\odot \quad \bar{m} = 4.1 \quad d = \frac{1}{0.00278} \text{ pc}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{m} - m_{\odot} &= -2.5 \log \left(\frac{\frac{L}{4\pi d^2}}{1370} \right) \\ L &= 4\pi R^2 \sigma \bar{T}^4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\longrightarrow \bar{T} = 14277.9 \text{ K} \\ &\downarrow \\ &L = 9.5 \times 10^{29} \text{ J/s} \end{aligned}$$

$$\Delta T = \left| \bar{T} \times \left(4 - \frac{15}{4} \times \frac{5}{3} \right) \times \frac{\Delta R}{\bar{R}} \right| = \underline{\underline{9637.5 \text{ K}}}$$

$$\frac{\Delta R}{\bar{R}} = 0.3$$

$\begin{matrix} R = 1.15 \bar{R} \\ \uparrow \\ R: \text{max}, T: \text{min} \end{matrix} \longrightarrow L_{\text{max}} = 2.4 \times 10^{29} \text{ J/s} \rightarrow m_{(R\text{max})} = 5.58$
 $\begin{matrix} T = \bar{T} + \frac{\Delta T}{2} \\ \nearrow \\ T: \text{min} \end{matrix}$
 >) $\begin{matrix} R: \text{min}, T: \text{max} \\ \searrow \\ R = 0.85 \bar{R} \end{matrix} \longrightarrow L_{\text{min}} = 3.3 \times 10^{28} \text{ J/s} \rightarrow m_{(R\text{min})} = 7.74$
 $\begin{matrix} T = \bar{T} + \frac{\Delta T}{2} \\ \nwarrow \\ T: \text{max} \end{matrix}$

$$\longrightarrow \begin{cases} m_{\text{min}} = \bar{m} = 4.1 \\ m_{\text{max}} = m_{(R\text{min})} = 7.74 \end{cases}$$

$$E = K + U$$

(الف)

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (\text{طول ارتعاش})$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

(ب) در حوالی تعادل (حوالی نزدیکاً تعادل) :

$$x = 0 + \Delta x, \quad p = 0 + \Delta p; \quad \Delta x \Delta p \approx \hbar$$

$$E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

برای آن که انرژی کمینه شود (مادامه که باید صفر باشد). اگر مشتق جزئی نسبت به Δp صفر باشد، همانند

دیدیم مشتق جزئی نسبت به Δx نیز صفر است. (نما همان مشتق نسبت به Δp را می‌بینیم):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial (\Delta p)} = \frac{\Delta p}{m} + k \Delta x \frac{\partial \Delta x}{\partial \Delta p} &= 0 \\ \Delta x (\Delta p) = \frac{\hbar}{\Delta p} \Rightarrow \frac{\partial \Delta x}{\partial \Delta p} &= -\frac{\hbar}{(\Delta p)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta p}{m} = k \Delta x \frac{\hbar}{(\Delta p)^2}$$

$$\Rightarrow (\Delta p)^3 = k m \hbar \Delta x \Rightarrow (\Delta p)^4 = k m \hbar \Delta x \Delta p = k m \hbar^2$$

$$\Rightarrow \Delta p = \sqrt[4]{k m \hbar^2}$$

$$Dx) / = \frac{1}{\sqrt{km}} \sqrt{\hbar} \quad \text{از آن حالت به } Dxdp = \hbar$$

(در واقع $\frac{\partial E}{\partial p} = 0$ در حوز $Dxdp \approx \hbar$ وجود است اگرچه داریم امکان می‌دهد.)

$$E_{\text{base}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kmx^2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{km} \hbar}{m} + \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{km}} \hbar = \sqrt{\frac{k}{m}} \hbar = \omega \hbar$$

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow E_{\text{base}} = \hbar \omega$$

(ج) از اینجا می‌توانیم معادله حرکت به صورت زیر خواهد بود:

$$m \ddot{r} = - \frac{GM(r)m}{r^2} = - \frac{G \times \frac{4}{3} \pi r^3 \rho m}{r^2} \Rightarrow \ddot{r} = - \frac{4\pi G}{3} \rho r$$

این معادله نوسان قوی با $\omega = \sqrt{\frac{4\pi G}{3} \rho}$ است.

$$f = \frac{E_{\text{base}}}{\hbar \omega} = \frac{\hbar \sqrt{\frac{4\pi G}{3} \rho}}{\hbar \sqrt{\frac{4\pi G}{3} \rho}} \quad (7)$$

از فرض کار این که تمام استقامت (توده) به صورتی $\frac{3}{2} kT_B$ است.

$$\rho = \frac{3 \times 3M_{\odot}}{4\pi (10 \text{ km})^3} \quad \text{از این درون می‌توانه نوردهی باشد}$$

$$f_{\text{NS}} = \frac{\sqrt{P_{\text{NS}}}}{T_{\text{NS}}} \frac{T_{\odot}}{\sqrt{P_{\odot}}} \approx 1.8 \times 10^6 \quad \text{از آن به } f_{\odot} = \frac{3M_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^3}$$

که در آن از $T_{\odot} \approx 5700 \text{ K}$ استفاده شد (که در توان می‌دهد).