پایداری تکاملی:
همکاری جهش و تعادل

تکامل و نظریه بازی

تأثیر نظریه بازی بر علوم زیستی.

مانند استفاده از نظریه بازی به منظور تحلیل رفتار جانداران

استراتژی‌ها: ژنها

منفعت: برازندگی ژنتیکی

ایده: استراتژی‌های خوب رشد می‌کنند. اما این استراتژی‌ها انتخاب نمی‌شوند بلکه به وسیله ژنها سیم بندی شده‌اند.

تأثیر علوم زیستی بر نظریه بازی و انتخاب اجتماعی.

بهترین شرکت‌ها در بازار رقابت باقی می‌مانند [اصل بقای اصلح]

مفاهیم پایه

- یک مدل ساده شده.
  - تمرکز بر رقابت‌های درون گونه‌ای.
  - بازی‌های ۲ نفره متقارن.
  - یک جمعیت بزرگ، هر بازی بین دو بازیکن تصادفی و در نظر گرفتن میانگین سودمندی.
  - ایده: استراتژی‌های نسبتاً بهتر در جمعیت رشد می‌کنند.
- یک فرض دیگر.
  - تکثیر غیر جنسی.
- استراتژی‌های پایدار تکاملی.

مثال

معمای زندانی‌ها.

	C	D
C	2 , 2	0 , 3
D	3 , 0	1 , 1

(C: همکاری در شکار — D: عدم همکاری)

پرسش. آیا استراتژی C پایدار تکاملی است؟ خیر!

$C\ vs.[(1-\epsilon)C, \epsilon D]$ $\qquad Avg = (1-\epsilon)\cdot 2 + \epsilon \cdot 0 = 2(1-\epsilon)$

$D\ vs.[(1-\epsilon)C, \epsilon D]$ $\qquad Avg = (1-\epsilon)\cdot 3 + \epsilon \cdot 1 = 3(1-\epsilon) + \epsilon$

معمای زندانی‌ها: اجرای نمایشی

0.00	0.00	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	2.00	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	2.00	0.00	0.00	2.00	0.00	2.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.00	2.00	0.00	0.00	0.00
2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	2.00	2.00	0.00	0.00	0.00	2.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	2.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	2.00	0.00	0.00	0.00	2.00	0.00	0.00

مثال

معمای زندانی‌ها.

	C	D
	همکاری در شکار	عدم همکاری
C	2 , 2	0 , 3
D	3 , 0	1 , 1

پرسش. آیا استراتژی D پایدار تکاملی است؟ بلی!

$D\ vs. [\epsilon C, (1-\epsilon)D]$ $\qquad Avg = \epsilon \cdot 3 + (1-\epsilon) \cdot 1 = 2\epsilon + 1$

$C\ vs. [\epsilon C, (1-\epsilon)D]$ $\qquad Avg = \epsilon \cdot 2 + (1-\epsilon) \cdot 0 = 2\epsilon$

معمای زندانی‌ها: اجرای نمایشی

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

معمای زندانی‌ها: نتیجه‌گیری

در س ۱. طبیعت ممکن است اشتباه کند؟!!!

استراتژی D یک استراتژی پایدار تکاملی است اما استراتژی C این گونه نیست.

پرسش. آیا استدلال فوق درست است؟

درس ۲. یک استراتژی اکیداً مغلوب نمی‌تواند پایدار تکاملی باشد!

یک مثال دیگر

پرسش. آیا در بازی داده شده، استراتژی c پایدار تکاملی است؟

	a	b	c
a	2 , 2	0 , 0	0 , 0
b	0, 0	0 , 0	1 , 1
c	0, 0	1 , 1	0 , 0

$c\ vs.\ [(1-\epsilon)c, \epsilon b]$ $\quad Avg = (1-\epsilon)\cdot 0 + \epsilon \cdot 1 = \epsilon$

$b\ vs.\ [(1-\epsilon)c, \epsilon b]$ $\quad Avg = (1-\epsilon)\cdot 1 + \epsilon \cdot 0 = 1-\epsilon$

پرسش. آیا در بازی داده شده، بردار استراتژی (c, c) تعادل نش است؟

خیر، زیرا انحراف به b به نفع عامل است!

یک مثال دیگر

پرسش. آیا در بازی داده شده، استراتژی b پایدار تکاملی است؟

	a	b	c
a	2 , 2	0 , 0	0 , 0
b	0, 0	0 , 0	1 , 1
c	0, 0	1 , 1	0 , 0

$b\ vs.[(1-\epsilon)b,\epsilon c]$ $\qquad$ $Avg=(1-\epsilon)\cdot 0+\epsilon\cdot 1=\epsilon$

$c\ vs.[(1-\epsilon)b,\epsilon c]$ $\qquad$ $Avg=(1-\epsilon)\cdot 1+\epsilon\cdot 0=1-\epsilon$

استراتژی‌های پایدار تکاملی و تعادل نش

درس ۳. اگر پیامد (s, s) تعادل نش نباشد، آنگاه استراتژی s پایدار تکاملی نیست.

به عبارت دیگر، اگر s یک استراتژی پایدار تکاملی باشد، آنگاه (s, s) تعادل نش است.

پرسش. اگر پیامد (s, s) یک تعادل نش باشد، آیا s لزوماً پایدار تکاملی است؟

خیر. در بازی داده شده (b, b) در تعادل نش است، اما استراتژی b پایدار تکاملی نیست.

	a	b
a	1 , 1	0 , 0
b	0 , 0	0 , 0

$NE: (a, a), (b, b)$

درس ۴. اگر (s, s) یک تعادل نش اکید باشد، آنگاه s لزوماً پایدار تکاملی است.

استراتژی‌های پایدار تکاملی و تعادل نش

تعریف رسمی. [مِینارد اسمیت، ۱۹۷۲]. در یک بازی ۲-نفره متقارن، استراتژی خالص $\hat{s}$ یک استراتژی پایدار تکاملی است (در استراتژی‌های خالص)، اگر حداقل یک اپسیلون-بار مثبت وجود داشته باشد به گونه‌ای که:

$$(1-\epsilon)\cdot u(\hat{s},\hat{s})+\epsilon\cdot u(\hat{s},s')>(1-\epsilon)\cdot u(s',\hat{s})+\epsilon\cdot u(s',s') \quad \forall s', \forall \epsilon<\bar{\epsilon}$$

$\hat{s}\ vs.\ [(1-\epsilon)\hat{s},\epsilon s']$ $\qquad$ $s'\ vs.\ [(1-\epsilon)\hat{s},\epsilon s']$

استراتژی‌های پایدار تکاملی و تعادل نش

یک تعریف معادل. در یک بازی ۲-نفره متقارن، استراتژی خالص $\hat{s}$ یک استراتژی پایدار تکاملی است (در استراتژی‌های خالص)، اگر

$(\hat{s}, \hat{s})$ یک تعادل نش (متقارن) باشد،

$$u(\hat{s}, \hat{s}\,) \geq u(s', \hat{s}) \quad \forall s'$$

و اگر $u(\hat{s}, \hat{s}\,) = u(s', \hat{s})$ (برای حداقل یک s')، آنگاه باید

$$u(\hat{s}, s'\,) > u(s', s')$$

استراتژی‌های پایدار تکاملی و تعادل نش

اثبات غیر رسمی.

فرض کنید $(\hat{s},\hat{s})$ یک تعادل نش باشد، یعنی:

$$u(\hat{s},\hat{s}) \geq u(\hat{s},s') \quad \forall s'$$

حالت اول. به ازای هر s' داریم $u(\hat{s},\hat{s}) > u(\hat{s},s')$.

آنگاه استراتژی جهش یافته پس از مدتی از بین می‌رود زیرا در اغلب موارد با $\hat{s}$ مواجه می‌شود.

حالت دوم. در این حالت $u(\hat{s},\hat{s}) = u(s',\hat{s})$، اما $u(\hat{s},s') > u(s',s')$.

در این صورت استراتژی جهش یافته s' در برابر $\hat{s}$ به خوبی عمل می‌کند،

اما این استراتژی در برابر خود عملکرد خوبی ندارد.

مثال

پرسش. در بازی داده شده، کدام استراتژی پایدار تکاملی است؟

	a	b
a	1 , 1	1 , 1
b	1 , 1	0 , 0

پاسخ.

بردار استراتژی (a, a) یک تعادل نش متقارن است.

بنابراین تنها استراتژی a می‌تواند پایدار تکاملی باشد.

اکنون باید بررسی کنیم آیا بردار (a, a) یک تعادل نش اکید است یا خیر؟ خیر

با توجه به قسمت دوم تعریف داریم:

$$u(a,b) > u(b,b)$$

بنابراین استراتژی a پایدار تکاملی است.

تکامل یک قرارداد اجتماعی

مثال. رانندگی در سمت چپ یا راست.

	L	R
L	2 , 2	0 , 0
R	0 , 0	1 , 1

چون هر دو بردار (L, L) و (R, R) تعادل نش اکید هستند، هر دو استراتژی L و R پایدار تکاملی هستند.

نتیجه‌گیری. ممکن است در یک بازی بیش از یک استراتژی پایدار تکاملی داشته باشیم که لزوماً به یک اندازه خوب نباشند.

تکامل یک قرارداد اجتماعی

یک مثال دیگر.

	a	b
a	0 , 0	2 , 1
b	1 , 2	0 , 0

جمعیت تک‌ریختی

در این بازی تعادل نش خالص متقارن وجود ندارد!

بنابراین یک استراتژی خالص که پایدار تکاملی باشد وجود ندارد.

اما در این بازی یک تعادل نش مخلوط متقارن وجود دارد.

جمعیت چندریختی

$$N.E. = \left[\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right]$$

استراتژی‌های پایدار تکاملی مخلوط

یک تعریف معادل برای استراتژی‌های مخلوط.

در یک بازی ۲-نفره متقارن، استراتژی مخلوط $\hat{p}$ پایدار تکاملی است اگر

$(\hat{p}, \hat{p})$ یک تعادل نش متقارن باشد، $u(\hat{p}, \hat{p}\,) \geq u(p', \hat{p}) \quad \forall s'$

و اگر $u(\hat{p}, \hat{p}\,) = u(p', \hat{p})$ (برای حداقل یک p’)، آنگاه باید

$u(\hat{p}, p'\,) > u(p', p')$

ادامه مثال

پرسش. آیا در بازی قبل تعادل نش مخلوط محاسبه شده یک تعادل نش اکید است؟

$$N.E. = \left[\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right]$$

توجه. یک تعادل نش مخلوط هرگز نمی‌تواند یک تعادل نش اکید باشد. (چرا؟)

در نتیجه باید قسمت دوم تعریف را بررسی کنیم: (چگونه؟)

$$u(\hat{p},p') > u(p',p') \quad \forall p'$$

تفسیر جمعیت‌های چندریختی. مانند جمعیت فیل‌های دریایی!

بازی شاهین-قمری

بازی شاهین-قمری.

V: یک مقدار مثبت بیانگر پاداش.

C: یک مقدار مثبت بیانگر هزینه.

	H	D
H	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$v, 0$
D	$0, v$	$\frac{v}{2}, \frac{v}{2}$

پرسش. آیا استراتژی D یک استراتژی پایدار تکاملی است؟

خیرا! زیرا بردار (D, D) تعادل نش نیست.

بازی شاهین-قمری: ادامه

بازی شاهین-قمری.

V: یک مقدار مثبت بیانگر پاداش.

C: یک مقدار مثبت بیانگر هزینه.

	H	D
H	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$v, 0$
D	$0, v$	$\frac{v}{2}, \frac{v}{2}$

پرسش. آیا استراتژی H یک استراتژی پایدار تکاملی است؟

آیا (H, H) تعادل نش است؟ بله، اگر $\frac{v-c}{2} \geq 0$

حالت اول: اگر $v > c$، آنگاه (H, H) تعادل نش اکید است و H پایدار تکاملی است.

حالت دوم: اگر $v = c$، آنگاه $u(H, H) = u(D, H)$.

- چون در حالت دوم بخش دوم تعریف برقرار است، استراتژی H پایدار تکاملی است.

بازی شاهین-قمری

بازی شاهین-قمری.

V: یک مقدار مثبت بیانگر پاداش.

C: یک مقدار مثبت بیانگر هزینه.

	H	D
H	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$v, 0$
D	$0, v$	$\frac{v}{2}, \frac{v}{2}$

پرسش. اگر $c > v$ باشد چه می‌شود؟

در این صورت هیچ یک از دو استراتژی H و D پایدار تکاملی نیستند.

تعادل نش مخلوط متقارن.

$$N.E. = \left[\left(\frac{v}{c}, 1-\frac{v}{c}\right), \left(\frac{v}{c}, 1-\frac{v}{c}\right)\right]$$

بازی شاهین-قمری: ادامه

چون تعادل نش مخلوط محاسبه یک تعادل نش اکید نیست، باید قسمت دوم تعریف بررسی شود.

یعنی باید به ازای هر p' نشان دهیم:

$$u(\hat{p}, p') > u(p', p')$$

یک استدلال هیوریستیک.

جهشی را فرض کنید که در آن درصد بیشتری از اعضای جمعیت استراتژی H را بازی می‌کنند (نسبت به تعادل نش مخلوط). در این صورت این جهش در برابر خود منفعت بسیار کمی به دست می‌آورد. (مقدار منفعت منفی است)

جهشی را فرض کنید که در آن درصد بیشتری از اعضای جمعیت استراتژی D را بازی می‌کنند (نسبت به تعادل نش مخلوط). در این صورت این جهش در برابر خود منفعت بسیار کمی به دست می‌آورد.

بازی شاهین-قمری: ادامه

نتیجه. اگر $v < c$، آنگاه در استراتژی پایدار تکاملی تعداد شاهین‌ها $\frac{v}{c}$ است.

با افزایش پاداش تعداد شاهین‌ها افزایش می‌یابد و با افزایش هزینه تعداد قمری‌ها افزایش می‌یابد.

منفعت‌ها. منفعت استراتژی قمری به طور متوسط (برابر با منفعت استراتژی شاهین)

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(\frac{v}{2}\right)$$

یعنی با افزایش هزینه، مقادیر منفعت به طور متوسط افزایش می‌یابد.

با مشاهده داده‌های واقعی می‌توان نسبت $\frac{v}{c}$ را تعیین نمود.

یک مثال دیگر

محاسبه استراتژی پایدار تکاملی.

	S	B	T
S	1 , 1	v , 0	0 , v
B	0, v	1 , 1	v , 0
T	v, 0	0 , v	1 , 1

$1 < v < 2$

تعادل نش مخلوط: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

بررسی قسمت دوم تعریف. باید نشان دهیم:

$$u(\hat{p}, p') > u(p', p')$$

فرض کنید $p' = S$. در این صورت

$$u(\hat{p}, S) = \frac{1+v}{3} < 1$$

$$u(S, S) = 1$$

در نتیجه هیچ استراتژی پایدار تکاملی وجود ندارد! (چرخه)