زمان پاسخگویی ۲۴۰'

آزمون تئوری دوم

تابستان ۹۴

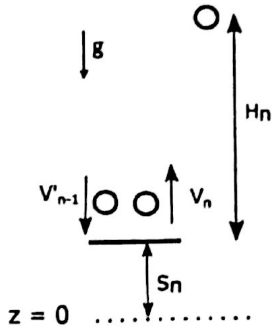
مسئله ۱-

این مسئله از دو بخش مستقل تشکیل شده است:

a. جرم نقطه ای m با فنرهایی بدون جرم به ضرایب k_1 تا k_n به نقاط ثابت r_1 تا r_n از فضا متصل است به طوری که $r_i = (x_i, y_i, z_i)$. نقطه تعادل، نوع تعادل و بسامد نوسان در جهت های مختلف را بر حسب داده های مسئله تعیین کنید.

b. بار Q در نقطه (۰,a) در دستگاه مختصات x-y قرار دارد. دو بار مشابه دیگر αQ نیز طوری قرار دارند که با بار Q یک مثلث متساوی الاضلاع ثابت در صفحه x-y درست می کنند. بار نقطه ای q به جرم m تحت تأثیر این توزیع بار قرار دارد و مقید است که در صفحه x-y بماند. بارهای q و Q را مثبت بگیرید. محل تعادل بار q را پیدا کنید و روی نوع تعادل به ازای مقادیر مختلف پارامتر α بحث کنید. همچنین بسامد نوسانهای کوچک بار q در جهات مختلف را حساب کنید. جای αQ ها به گونه‌ای است که مرکز مثلث در (۰,۰) است.

لم س ۲)



شکل ۱: توپ و صفحه در برخورد nاُم

مطابق شکل توپ و صفحه‌ای را در نظر بگیرید. توپ در دفعات مختلف به صفحه برخورد می‌کند، بالا می‌رود، به اوج می‌رسد و برمی‌گردد. توجه کنید که مساله یک بُعدی است و تنها برای وضوح، توپ‌ها در شکل در یک راستا نیستند. اندازه‌ی سرعت توپ دقیقاً پیش از برخورد nاُم را با v'_{n-1} و اندازه‌ی سرعت توپ بلافاصله بعد از برخورد nاُم را با v_n نشان می‌دهیم. در تمامی قسمت‌های مساله فرض کنید صفحه در زمان برخورد چنان تنظیم می‌شود که:

$$v_n = v'_{n-1} + 2u \qquad (1)$$

که در آن u مقداری ثابت دارد. به طور جداگانه نیز می‌توانیم ارتفاع صفحه را تنظیم کنیم. در لحظه‌ی برخورد nاُم صفحه در مکان S_n قرار دارد. بعد از برخورد nاُم توپ تا ارتفاع H_n نسبت به مکان برخورد بالا می‌رود. سرعت دقیقاً پیش از اولین برخورد v_0 است.

الف) فرض کنید ارتفاع صفحه ثابت است، $S_n = S_0$. v_n و H_n را حساب کنید.

ب) فرض کنید صفحه با سرعت ثابت u بالا می‌رود. v_n ، H_n ، S_n و ارتفاع اوج نسبت به زمین، $Z_n = S_n + H_n$ را حساب کنید ($S_1 = 0$).

ج) S_n را چنان تعیین کنید که $H_n = \frac{u^2}{2g}n^2$ باشد ($S_1 = 0$). در این حالت ارتفاع اوج نسبت به زمین، $Z_n = S_n + H_n$ را حساب کنید.

در این مساله می‌خواهیم با استفاده از مکانیک آماری و کوانتومی اطلاعاتی جالب! به‌دست آوریم.

الف) با استفاده از کمیت‌های k ثابت الکتریسیته، e بار الکترون، $\hbar$ ثابت پلانک و m_e جرم الکترون کمیتی از جنس طول بسازید و آن را a_0 بنامید. ثابت الکتریسیته، $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ است. برای یافتن بُعد ثابت پلانک، از این نکته استفاده کنید که انرژیِ یک فوتون با فرکانس زاویه‌ای ω برابر با $E = \hbar\omega$ است.

ب) با استفاده از کمیت‌های k ثابت الکتریسیته، e بار الکترون، $\hbar$ ثابت پلانک و m_e جرم الکترون کمیتی از جنس انرژی بسازید و آن را E_0 بنامید. برای ادامه‌ی مساله کافی است بدانید که E_0 کمیتی مثبت است.

اتم هیدروژن می‌تواند در حالت‌های مختلفی باشد. هر حالت با سه عدد (n, l, m) مشخص می‌شود. عدد n یک عدد طبیعی و مثبت است $(n \in \mathbb{N})$. برای هر n مشخص، عدد l باید در شرط زیر صرق کند:

$$0 \leq l < n, \qquad l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{۱}$$

برای هر جفت n, l عدد m باید در شرط زیر صدق کند:

$$-l \leq m \leq l, \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{۲}$$

انرژی یک حالت که با سه عدد (n, l, m) مشخص می‌شود، تنها وابسته به n است و از این قرار است:

$$E(n, l, m) = E(n) = -\frac{E_0}{n^2} \tag{۳}$$

که در آن E_0 همان کمیت مثبتی است که در بخش ب یافتید. جایگذاری لازم نیست!

می‌دانیم که احتمال حضور در یک حالت با (n, l, m) مشخص برابر است با:

$$P(n, l, m) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(n,l,m)}. \tag{۴}$$

در این رابطه ضریب $\dfrac{1}{Z}$ برای بهنجار کردن احتمال استفاده شده است. این یک عدد ثابت است و لزومی ندارد که آن را حساب کنید!

ج) احتمال اینکه اتم هیدروژن در حالتی با n مشخص باشد را بنویسید. این را $P(n)$ بنامید.

د) فرض کنید n کمیتی پیوسته است. به ازای $n = n_0$ تابع $P(n)$ کمینه می‌شود. n_0 را حساب کنید.

ه) فرض کنید n کمیتی پیوسته است. تابع $P(n) \times Z$ را رسم کنید.

و) $n_1 \gg \beta E_0$ چنان وجود دارد که $P(n = 1) = P(n = n_1)$. n_1 را حساب کنید.

ز) برای

$$E_. = ۱۰eV, \quad ,k_B = ۱,۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}\frac{J}{K}, \quad T = ۳K, \quad ۱eV = ۱,۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}J \qquad (۵)$$

n_1 را به شکل توانی از 10 بنویسید. ($log_{10}e \simeq 0.43$)

برای اتم هیدروژن در حالت (n, l, m) شعاع از رابطه‌ی

$$r(n, l, m) = r(n) = n^۲ a_. \qquad (۶)$$

به دست می‌آید که در آن a_0 همان کمیتی است که در بخش الف یافتید.

ح) برای مقادیر

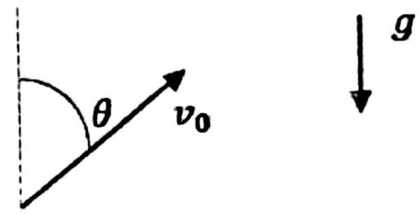
$$k = ۹ \times ۱۰^۹ \frac{Nm^۲}{c^۲}, \quad e = ۱,۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}c, \quad \hbar = ۱۰^{-۳۴}J.s, \quad m_e = ۱۰^{-۳۰}kg \qquad (۷)$$

$r(n_1)$ را به شکل توانی از 10 در واحد متر بنویسید.

پی‌نوشت: آیا از شعاع عالم خبر دارید؟ (بی‌شک لازم نیست به این پرسش پاسخ دهید!)

سوال ۴)

یک شلنگ آب پاش را که بر روی سطح زمین قرار دارد در نظر بگیرید. در زمان $t = 0$ شلنگ باز می شود و مطابق شکل زیر قطرات آب با اندازه سرعت اولیه v_0 و زاویه θ (که عددی رندم می باشد)نسبت به محور قایم از شلنگ خارج می شوند.



تابع توزیع زاویه θ را $f(\theta)$ می نامیم.به این معنی که احتمال آنکه زاویه پرتاب یک قطره نسبت به محور قایم در بازه ی θ و $\theta + d\theta$ باشد برابر با $f(\theta)d\theta$ است.

تابع توزیع زاویه را به صورت خطی و به شکل زیر در نظر بگیرید.

$$f(\theta) = -a\theta + b$$

که در رابطه فوق b و a دو ثابت مثبت می باشند.همچنین θ بر حسب رادیان داده می شود.

با فرض آنکه ابعاد آب پاش قابل صرف نظر کردن و همچنین تنها نیروی موثر وارد بر قطرات آب بعد از خروج از آب پاش نیروی گرانش زمین باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف- با فرض آنکه در زاویه $\frac{\pi}{6}$ مقدار $f(\theta)$ برابر با صفر شود، ضرایب b و a را تعیین کنید.

ب- احتمال آنکه برد یک قطره خروجی از شلنگ در بازه R و $R + dR$ باشد چقدر است ؟ با توجه به جواب بدست آمده، تابع توزیع برد قطرات خروجی, $G(R)$, را تعیین کنید.

پ- احتمال آنکه، مدت زمانی که یک قطره خروجی در حال حرکت است،در بازه ی T و $T + dT$ باشد چقدر است ؟

اکنون فرض کنید که دور آب پاش و به صورت یکنواخت گلدان هایی را قرار می دهیم. سطح مقطع خاک هر گلدان برابر با A_0 و چگالی تعداد گلدان ها بر واحد سطح برابر با σ می باشد.گلدان ها از فاصله تقریبا صفر تا فاصله های بسیار بزرگ به دور آب پاش چیده شده اند.

ت- در زمان $t = 0$ یک قطره از شلنگ خارج می شود. احتمال آنکه این قطره در زمان دلخواه t به یک گلدان برخورد کرده باشد چقدر است ؟

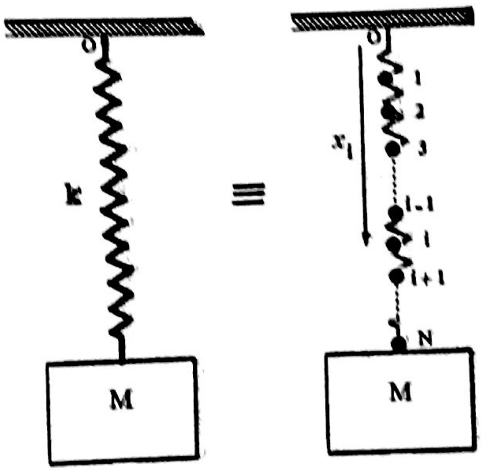
بسمه تعالی

امتحان سوّم المپیاد فیزیک (تابستان ۹۴)   ۹۴/۶/۳

مدت امتحان:۴ ساعت

مسئله ی ۱) در این مسئله می خواهیم اثر جرم فنر در حالت های مختلف را بررسی کنیم. یک انتهای فنری با جرم m_s، به سقف و انتهای دیگرش به جسمی با جرم M متصل است. میدان گرانش g است. ضریب ثابت فنر را k بگیرید.

این فنر جرم دار را می توان معادل N فنر کوچک بدون جرم در نظر گرفت که هر یک دارای ضریب ثابت kN و به انتهای هر یک جرمی به اندازه ی $\frac{m_s}{N}$ متصل است. مکان جرم کوچک i ام از سقف (نقطه ی O)را با x_i ($i=1,2,3,\ldots,N$) نشان می دهیم.



آ) معادله ی حرکت جرم i ام را بنویسید

ب) معادله ی حرکت جرم N ام که به جرم M متصل است، بنویسید. ($M \gg \frac{m_s}{N}$)

فرض کنید جواب x_i به صورت زیر باشد:

$$x_i = A\sin(\alpha i)\sin(\omega t) - \frac{m_s g}{2N^2 k} i(i+1) + \frac{(m_s+M)g}{Nk} i$$

که در آن A یک ثابت دلبخواه است.

ج) با توجه به بندهای (آ) و (ب) معادله هایی بنویسید که در آن α و ω در آن صدق کند.

د) با فرض این که $N \gg 1$ است، با استفاده از معادله های به دست آمده در بند (ج)، ابتدا α را برحسب ω به دست آورید و از روی آن معادله ای برحسب متغیّر $\beta = \omega(\frac{m_s}{k})^{\frac{1}{2}}$ بنویسید.

ه) فرض کنید جرم M هیچ نوسانی نمی کند، یعنی جرم و فنر حالت استاتیک باشد. جرم مؤثّر فنر در کشش کلی فنر را به دست آورید.

راه نمایی: از جواب x_i که در بند (ب) داده شده استفاده کنید.

و) فرض کنید $M \gg m_s$. اوّلاً نشان دهید β هم خیلی کوچک است. حال با استفاده از معادله ی نهایی بند (د) تا اوّلین مرتبه از $\frac{m_s}{M}$ ، فرکانس زاویه ای ω را به دست آورید و از روی آن جرم مؤثّر فنر را تعیین کنید.

ز) فرض کنید $M \ll m_s$. در این حالت فرکانس زاویه ای ω را به دست آورید.

رابطه هایی که مفید هستند:

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\sin x = x, \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2}, \quad \tan x = x+\frac{1}{3}x^3, \quad 1-x \approx \frac{1}{1+x}; \qquad x \ll 1$$

$$\tan^{-1} x \approx \frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}; \qquad x \gg 1$$

مسئله ی ۲)

یک نقطه ی نورانی در ته استخر آبی به عمق L قرار دارد. ضریب شکست آب n است. اگر ما در جایی قرار داشته باشیم که به صورت مایل و با زاویه ی دلخواه θ_1 نسبت به خط عمود بر سطح دریاچه سکّه را ببینیم،

آ) به طور ظاهری سکّه را در چه عمقی خواهیم دید؟

واضح است که اگر θ_1 کوچک باشد عمق ظاهری برابر است با $\frac{L}{n}$.

ب) مکان ظاهری نقطه ی نورانی به طور افقی چه قدر با مکان اصلی آن تفاوت دارد؟

مسئله ی ۳)

یک سیستم شامل N ذره در حجم ثابت نظر بگیرید. هر ذره می‌تواند دو حالت با انرژی $\varepsilon+$ و $\varepsilon-$ داشته باشد ($\varepsilon>0$).

الف) انرژی کل سیستم U و سیستم منزوی است. برای N های بزرگ، اِنتروپی، S ، را حساب کنید. فرض کنید کمیت‌ها چنان‌اند که می‌توان از بسط استرلینگ استفاده کرد. برای پاسخ، کمیت S/Nk_B را تنها بر حسب، $U/N\varepsilon$ بنویسید.

ب) کمیت S/Nk_B را بر حسب $U/N\varepsilon$ رسم کنید. در این نمودار نواحی با دمای مثبت و منفی را مشخص کنید.

ج) فرض کنید دما T است. اگر به سیستم مقدار کوچکی گرما، dQ ، بدهیم، دمای آن به اندازه‌ی

$$dT = \frac{dQ}{C}$$

افزایش می‌یابد. ظرفیت گرمایی این سیستم، C، را حساب کنید. راهنمایی: سطر اول را بخوانید!

د)برای دماهای مثبت بسیار بزرگ و بسیار کوچک، جمله‌ی غالب C را بنویسید.

می‌دانیم که در تحول یک سیستم منزوی، اِنتروپی همواره افزایش می‌یابد.

فرض کنید دو سیستم، هر کدام با N ذره و مشابه با آنچه توصیف شد، داشته باشیم. سیستم‌ها در یک جعبه‌ی بزرگ منزوی قرار دارند، و توسط یک دیواره که نارسانای گرما است یکدیگر جدا شده‌اند. سیستم ۱ دمای $T_1>0$ و سیستم۲ دمای $T_2<0$ دارد.

دیواره را برمی‌داریم.

ه) کدام سیستم به دیگری انرژی می‌دهد؟

و) دمای نهایی سیستم کُل، پس ازگذشت زمان و به تعادل رسیدن دو سیستم را حساب کنید.

ز) اگر $T_2= -T_1$ باشد، دمای نهایی چه‌قدر است؟

ح) اگر $\varepsilon/k_BT_1<<1$ باشد، دمای نهایی چه‌قدر است؟ تنها جمله‌ی غالب را حساب کنید.

ص ۲

مسئله ی ۴)

یک نوسانگر هماهنگ تند میرا به ضریب میرایی γ و بسامد طبیعی ω_0 در نظر بگیرید که $\gamma < \omega_0$.

الف) با فرض آن که $x(0)$=A و $\dot{x}(0)=v_0$ معادلات حرکت $x(t)$ و $v(t)$ را بنویسید.

ب) مسیرهای ممکن دستگاه در فضای فاز (فضای x-p) را برای حالتی که A و v_0 هم علامتند رسم کنید و هر نوع ویژگی (اعم از نقاط خاص، خطوط مجانب و ...) آنها را به دست آورید.

ج) مسیرهای ممکن دستگاه را در فضای فاز برای حالتی که A و v_0 علامت مخالف دارند رسم کنید و هر نوع ویژگی (اعم از نقاط خاص، خطوط مجانب و ...) آنها را به دست آورید.

راهنمایی: ثابت کنید در این حالت دو ناحیه مختلف دو طرف خطی با شیب منفی که از مبدا می گذرد وجود دارد که رفتار مسیرها در دو طرف آن خط متفاوت است. شیب این خط را به دست آورید.

بسمه تعالی

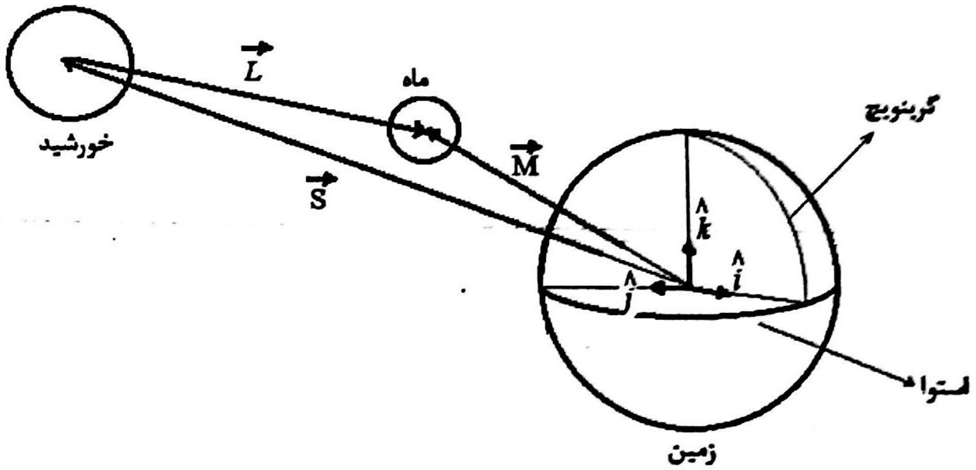
امتحان نهایی اوّل المپیاد فیزیک (تابستان ۹۴)

مدت امتحان: ۵ ساعت

سوال پنج یک پاسخ نامه هم دارد که باید بچه ها همراه پاسخ نامه شان ان را هم تحویل دهند.

مسئله ی ۱)

مطابق شکل مرکز های خورشید و ماه از مرکز زمین به ترتیب با بردارهای $\vec{S}$ و $\vec{M}$ و مرکز ماه از مرکز خورشید با بردار $\vec{L}$ نشان داده شده است. بردارهای $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ در صفحه ی استوای زمین و امتداد $\hat{\imath}$ در صفحه ی نصف النهار گرینویچ است. جهت $\hat{k}$ نیز به سمت شمال جغرافیایی است (این دستگاه چپ گرد است).



فرض کنید جهت خورشید در امتداد عرض جغرافیایی λ_s و طول جغرافیایی l_s است و جهت ماه در امتداد عرض جغرافیایی λ_m و طول جغرافیایی l_m است (عرض جغرافیایی زاویه ای است که از صفحه ی استوا سنجیده می شود و به سمت شمال مثبت می گیریم و طول جغرافیایی زاویه ای است که از صفحه ی نصف النهار گرینویچ سنجیده می شود و در اینجا به سمت غرب مثبت گرفته می شود.). فاصله ی متوسط خورشید تا زمین D، فاصله ی متوسط ماه تا زمین d، و شعاع زمین را R بگیرید.

آ) بردارهای $\vec{S}$ و $\vec{M}$ و $\vec{L}$ را روی محورهای مختصات نشان داده شده بر حسب λ_s، λ_m، l_s، l_m، D و d بنویسید.

ص ۱ از ۱۰

ب) فرض کنید نقطه ی مرکزی سایه ی ناشی از کسوف(خورشید گرفتگی) روی زمین با مختصات طول و عرض جغرافیایی به ترتیب l_e و λ_e باشد. معادله هایی بنویسید که بتوان l_e و λ_e را بر حسب λ_m ،λ_s ،l_s ،l_m ،D ،d و R به دست آورد.

ج) فرض کنید کسوفی در حالت $l_s = l_m$ و $\lambda_s = \lambda_m$ روی سطح زمین اتفاق بیفتد. اگر این کسوف در ساعت 5:08 بعد از ظهر نسبت به شخصی که روی نصف النهار گرینویچ قرار گرفته صورت گیرد و جهت ماه و خورشید در امتداد عرض جغرافیایی $20°$ باشد، طول و عرض جغرافیایی نقطه ی مرکزی کسوف کامل روی سطح زمین چیست؟ اگر قطر زاویه ای ماه و خورشید از مرکز زمین تحت زاویه ی $0.5°$ دیده شوند، قطر سایه ی روی سطح زمین چه قدر است؟

د) فرض کنید ماه با سرعت $950 \frac{m}{s}$ نسبت به ناظری که بیرون زمین است، به دور زمین و به سمت شرق می چرخد. حالت کسوف قسمت (ج) را در نظر بگیرید. مدت زمان از شروع تا انتهای کسوف برای شخصی که در مرکز کسوف قرار می گیرد، چه قدر است؟

توجه : اطلاعاتی که ممکن است مفید باشند.

معادله ی کره ای به شعاع R که مرکز آن در مبدأ دستگاه مختصات باشد به صورت $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ است.

شعاع زمین: $R = 6.4 \times 10^6 m$

مسئله ی ۲)

مطابق شکل می خواهیم ماشین کارنویی بسازیم که کار مفید آن برای راه انداختن دستگاه F به کار رود. کلّ سیستم در میدان گرانش ثابت g قرار دارد. در این ماشین یک گاز کامل پنج مرحله ی مجزّا را طی می کند.

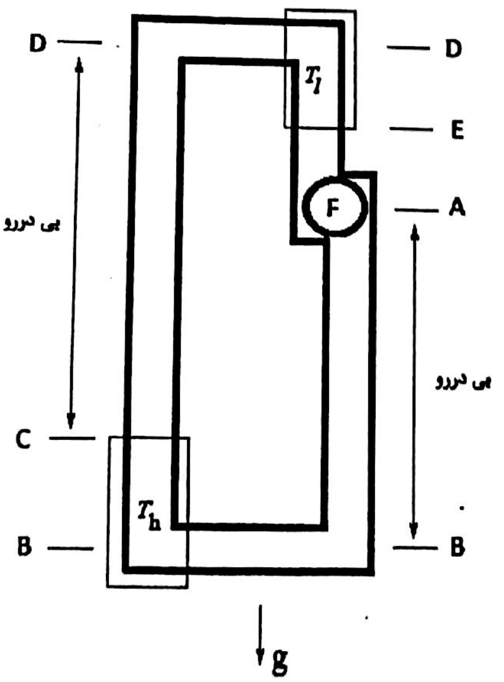
۱) در ستون AB گاز به طور بی دررو از نقطه ی A به نقطه ی B می رود. فشار و دما در نقطه ی A به ترتیب P_A و T_l و در نقطه ی B به ترتیب برابر P_B و T_h است.

۲) از نقطه ی B تا C گاز در ناحیه ی تکدمای T_h صعود می کند.

۳) ناحیه ی CD نیز بی دررو است، که گاز پس از صعود، در نقطه ی D به دمای T_l می رسد.

۴) در ناحیه ی DE گاز مجدّداً به طور تکدما ی T_l به نقطه ی E می رود.

۵) از نقطه ی E تا A گاز تنها از دستگاه برگشت پذیر F عبور می کند تا انرژی پتانسیل گاز در میدان گرانش توسط دستگاه F استخراج شده و به کار مفید تبدیل شود؛ ولی در عین حال هیچ تغییر دما و فشار در این مرحله به وجود نمی آید. به این ترتیب چرخه مجدّداً تکرار می شود. خطوط B-B و D-D به اغراق بزرگ نشان داده شده است تا شکل واضح شود. در عمل دما و فشار گاز در خطوط افقی تغییر نمی کند. همچنین سرعت گاز در طول کلّ چرخه ثابت است.



فرض کنید $T_h = 100°C$ و $T_l = 0°C$ و گاز مورد استفاده گاز تک اتمی زینون با جرم مولی M=131g و $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$ است و طول BC=100m .

آ) با توجّه به این که ستون گاز در AB و CD تحت گرانش است ، طول AB و CD را برحسب دمای T_h، T_l ، γ و M به دست آورید.

ب) گرمای داده شده و یا گرفته شده در انتقال BC و DE برای واحد جرم گاز چه قدر است؟ آن را از نظر گرفتن یا دادن گرما به گاز مشخص کنید.

ج) کار مفید W که توسّط دستگاه F برای واحد جرم گاز دریافت می شود چه قدر است؟

د) بازده این ماشین چه قدر است؟

مسئله ی ۳)

الف) یک کره با ضریب شکست $(n > 1)$ داریم، یک پرتو نور از هوا (ضریب شکست ۱) وارد آن می شود و بعد از k بازتاب داخلی از آن خارج می شود. کمینه زاویه انحراف پرتو را برای $(k \neq 0)$ به صورت تابعی از n بدست آورید. (در $k = 0$ بدیهی است که کمینه انحراف صفر است.)

ب) قطرات آب معلق در هوا و یا در حال سقوط را کروی بگیرید. نور سفید از ترکیب رنگ های مختلف (از بنفش تا قرمز) تشکیل شده است که ضریب شکست آب برای آنها اندکی با هم تفاوت دارد. به این ترتیب کمینه ی انحراف پرتو نور سفید از قطره آب (بخش الف) برای رنگ های مختلف با هم فرق دارد. این امر باعث ایجاد رنگین کمان در زاویه کمینه ی انحراف می شود. برای $k = 1$ و $k = 2$ زاویه ی کمینه ی انحراف در ناحیه ی دوم و سوم مثلثاتی است و به آنها رنگین کمان اول $(k = 1)$، و دوم $(k = 2)$ می گویند که در حالت پشت به خورشید قابل رؤیت است. ضریب شکست متوسط آب را $n = 1.333$ بگیرید. اگر پهنای زاویه ای رنگین کمان اول از رنگ بنفش تا قرمز $\Delta\varphi = 0.030\,rad$ باشد، اختلاف ضریب شکست آب برای نور بنفش و نور قرمز را به دست آورید.

$\Delta\varphi = 0.030\,rad$

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{n^2 - \sin\theta_1}}{k+1} \qquad \sqrt{\frac{k(k+2) - (n^2-1)}{k(k+2)}} = \sin\theta$$

$n^2 - 1 + \cos^2\theta_1$

$$\cos^2\theta_1 = \frac{1}{(k+1)^2}\left(n^2 - \sin^2\theta\right)$$

$$\cos^2\theta_1\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{(n^2-1)}{(k+1)^2}$$

$k^2 + 2k + 1$

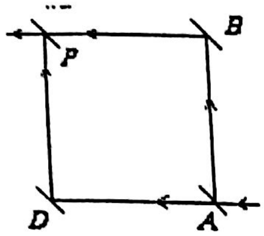
$k(k+2)$

$$\cos\theta_1 = \sqrt{\frac{n^2-1}{k(k+2)}}$$

$$\sin^2\theta_1 = 1 - \frac{(n^2-1)}{k(k+2)}$$

ص ۵ از ۱۰

مسئله ی ۴)



تداخل سنجی به شکل روبرو داریم. در این تداخل سنج، نوری با طول موج λ از یک منبع وارد نیم آینه ی A می شود. این نیم آینه، نور را به دو قسمت در دو مسیر تقسیم می کند. در مسیر اوّل نور عبوری از نیم آینه ی A پس از بازتاب از آینه ی D به نیم آینه ی P می رسد. درمسیر دوّم نور بازتابی از نیم آینه ی A پس از بازتاب از آینه ی B به نیم آینه ی P می رسد. نوری که از مسیر اوّل گذشته پس از بازتاب از نیم آینه ی P با نور مسیر دوّم که از نیم آینه یP عبور کرده تداخل می کند. فرض کنید شکل این تداخل سنج، به صورت مستطیل است و داریم $\overline{AB} = \overline{DP} = a$ و $\overline{AD} = \overline{BP} = b$. مرکز این مستطیل را مبدأ مختصات بگیرید.

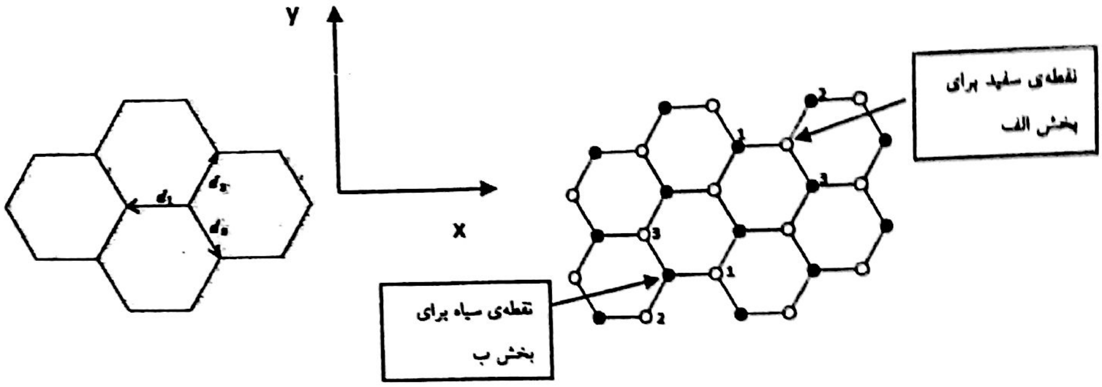
آ) اختلاف راه نوری در دو مسیر چه قدر است؟

ب) حال اگر این مستطیل را با سرعت زاویه ای Ω حول مرکز مستطیل بچرخانیم. اختلاف راه نوری در این حالت، تا مرتبه اوّل نسبت به Ω چه قدر است؟ چه تعداد فریز در این حال به وجود می آید و یا از بین می رود؟

ج) اگر این مستطیل را حول نقطه ی دلخواه (x, y) بچرخانیم. اختلاف راه نوری در این حالت، تا مرتبه اول نسبت به Ω چه قدر است؟ تعداد فریزهای بوجود آمده یا از بین رفته چقدر خواهد بود؟

راهنمایی:

اگر این مستطیل را در خلاف جهت عقربه های ساعت حول مرکز مستطیل بچرخانیم، در مدت زمانی که نور از A به سمت B می رود، نقطه ی B از نقطه ی A دور می شود، ولی در مورد رسیدن نور از D به P، این موضوع برعکس است و چون سرعت نور محدود و برابر c است، راه نوری از A به B بیشتر از راه نوری از D به P خواهد بود.



در شکل شبکه‌ی لانه زنبوری را می‌بینید. این ساختار گرافین است که در هر نقطه یک اتم کربن نشسته است. تمامی شش‌ضلعی‌ها در این شبکه منتظم هستند. اندازه‌ی هر ضلع a است. همان‌طور که در شکل مشخص است، نقاط شبکه را می‌توان رنگ کرد. نقاط مشکی، تنها همسایه‌هایی سفیدرنگ دارند. نقاط سفید، تنها همسایه‌هایی مشکی‌رنگ دارند. فرض کنید در هر نقطه از شبکه یک جرم m و بین هردو جرم، روی هر ضلع یک فنر با ثابت k و طول اولیه‌ی a قرار داده شده است. تعریف می‌کنیم

$$\Omega^2 := \frac{k}{m}$$

هر نقطه در این شبکه می‌تواند تنها در صفحه جابه‌جا شود. تمامی مساله در صفحه است و همه چیز دوبُعدی است. می‌خواهیم مُدهای نوسانی را حساب کنیم.

راهنمایی: تمامی محاسبات را تا رتبه‌ی اول از جابه‌جایی‌ها بنویسید. برای نوشتن نیروی فنر در ادامه‌ی مساله دقت کنید، با توجه به اینکه تغییر طول فنر از رتبه‌ی اول جابه‌جایی است، جایگذاری راستای نیرو تا رتبه‌ی صفرُم(یعنی همین راستای اضلاع) کافی است.

الف) مطابق شکل یک نقطه‌ی سفیدرنگ را در نظر بگیرید. جابه‌جایی این نقطه نسبت به نقطه‌ی تعادل را با

$$\delta x_w, \delta y_w$$

نشان می‌دهیم. مطابق شکل همسایه‌ها را نام‌گذاری کرده‌ایم. جابه‌جایی این نقاط نسبت به نقطه‌ی تعادل را با

$$\delta x_{b,1}\,, \delta y_{b,1}$$

$$\delta x_{b,2}\,, \delta y_{b,2}$$

$$\delta x_{b,3}\,, \delta y_{b,3}$$

نشان می‌دهیم. قانون دوم نیوتون را برای این ذره‌ی سفیدرنگ بنویسید. ضرایب عددی خواسته شده را در محل نقطه‌چین در پاسخ‌نامه بنویسید. پرواضح است که صرف تعیین ضرایب بدون نوشتن راه حل و محاسبات نمره‌ای ندارد .

ب) مطابق شکل یک نقطه‌ی سیاه‌رنگ را در نظر بگیرید. جابه‌جایی این نقطه نسبت به نقطه‌ی تعادل را با

$$\delta x_b, \delta y_b$$

نشان می‌دهیم. مطابق شکل همسایه‌ها را نام‌گذاری کرده‌ایم. جابه‌جایی این نقاط نسبت به نقطه‌ی تعادل را با

$$\delta x_{w,1}\ ,\delta y_{w,1}$$

$$\delta x_{w,2}\ ,\delta y_{w,2}$$

$$\delta x_{w,3}\ ,\delta y_{w,3}$$

نشان می‌دهیم. قانون دوم نیوتون را برای این ذره‌ی سیاه‌رنگ بنویسید. ضرایب عددی خواسته شده را در محل نقطه‌چین در پاسخ‌نامه بنویسید. پرواضح است که صرف تعیین ضرایب بدون نوشتن راه حل و محاسبات نمره‌ای ندارد .

ج) برای معادلات فوق چنین پاسخی(موج تخت) بگیرید:

$$\delta x_w(r) = W_x e^{i(\omega t - q.r)}$$

$$\delta y_w(r) = W_y e^{i(\omega t - q.r)}$$

$$\delta x_b(r) = B_x e^{i(\omega t - q.r)}$$

$$\delta y_b(r) = B_y e^{i(\omega t - q.r)}$$

در این معادلات r مکان تعادلی(اولیه) هر جرم، ω فرکانس و q بردار موج است. این پاسخ‌ها را در معادلات پیشین جایگذاری کنید، و ضرایبی که در پاسخ‌نامه آمده را برحسب q و بردارهای d_1، d_2 و d_3 که درشکل آمده‌اند، بنویسید. بی‌شک یک‌سری عدد و i ظاهر می‌شوند!

د) می‌توان مساله را در حالت کلی حل کرد و رابطه‌ای بین فرکانس و بردار موج به‌دست آورد. شما برای سادگی فرض کنید:

$$q.d_2 = \frac{\pi}{3}, q.d_3 = -\frac{\pi}{3}$$

چهار فرکانس مشخصه‌ی سیستم را بیابید. بی‌شک مطابق پاسخ‌نامه باید عدد گزارش کنید. نوشتن راه حل را فراموش نکنید!

پی‌نوشت: اگر مایل بودید، در منزل رابطه‌ی فرکانس و بردار موج را در حالت کلی و بدون فرض بخش د، بیابید.

پاسخ‌نامه برای سوال شبکه‌ی لانه‌زنبوری–شما باید این برگه را تحویل دهید!

الف)

$$\frac{۱}{\Omega^۲}\delta\ddot{x}_w = \ldots\ldots\delta x_w + \ldots\ldots\delta y_w$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{b,۱} + \ldots\ldots\delta y_{b,۱}$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{b,۲} + \ldots\ldots\delta y_{b,۲}$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{b,۳} + \ldots\ldots\delta y_{b,۳}$$

$$\frac{۱}{\Omega^۲}\delta\ddot{y}_w = \ldots\ldots\delta x_w + \ldots\ldots\delta y_w$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{b,۱} + \ldots\ldots\delta y_{b,۱}$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{b,۲} + \ldots\ldots\delta y_{b,۲}$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{b,۳} + \ldots\ldots\delta y_{b,۳}$$

ب)

$$\frac{۱}{\Omega^۲}\delta\ddot{x}_b = \ldots\ldots\delta x_b + \ldots\ldots\delta y_b$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{w,۱} + \ldots\ldots\delta y_{w,۱}$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{w,۲} + \ldots\ldots\delta y_{w,۲}$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{w,۳} + \ldots\ldots\delta y_{w,۳}$$

$$\frac{۱}{\Omega^۲}\delta\ddot{y}_b = \ldots\ldots\delta x_b + \ldots\ldots\delta y_b$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{w,۱} + \ldots\ldots\delta y_{w,۱}$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{w,۲} + \ldots\ldots\delta y_{w,۲}$$
$$+\ldots\ldots\delta x_{w,۳} + \ldots\ldots\delta y_{w,۳}$$

ج)

$$\left(-\frac{\omega^۲}{\Omega^۲}+\ldots\ldots\right)\begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{\omega^۲}{\Omega^۲}+\ldots\ldots\right)\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_x \\ W_y \end{pmatrix}$$

د)

$$\frac{\omega_۱}{\Omega} = \ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\omega_۲}{\Omega} = \ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\omega_۳}{\Omega} = \ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\omega_۴}{\Omega} = \ldots\ldots\ldots$$

بسمه تعالی

امتحان نهایی دوّم المپیاد فیزیک (تابستان ۹۴)

مدت امتحان: ۵ ساعت

مسئله ی ۶)

الف- سه فنر به ضرایب k_1، k_2 و k_3 و طول‌های عادی a_1، a_2 و a_3 یک مثلث درست می‌کنند. سه جرم نقطه‌ای m_1، m_2 و m_3 در محل اتصال فنرها طوری قرار دارند که جرم m_i مقابل فنر k_i است. فرض کنید مختصات حالت تعادل جرم m_i با بردار (X_i , Y_i) و جابه‌جایی آن از حالت تعادل با بردار (x_i , y_i) نشان داده شود که $i=1, 2, 3$. جرم‌ها و فنرها همواره در صفحه باقی می‌مانند. معادلات حرکت هر کدام از جرم‌ها را با فرض کوچک بودن جابه‌جایی‌ها از نقاط تعادل تا حد تقریب خطی نسبت به جابه‌جایی‌ها به دست آورید.

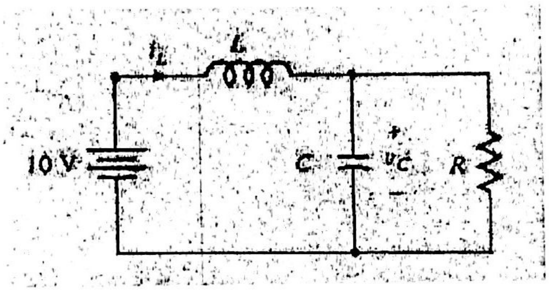
ب- فرض کنید $m_1 = m_2 = m_3 = m$، $k_1 = k_2 = k_3 = k$ و $a_1 = a_2 = a_3 = a\sqrt{3}$. راس ۱ را در نقطه $(0 , a)$ و مبدا مختصات را مرکز مثلث بگیرید. راس ۲ سمت چپ و پایین راس ۱ است. هر شش معادله حرکت برای جابه‌جایی‌های (x_i , y_i) بنویسید.

ج- مدهای نوسانی دستگاه را به دست آورید. (توجه داشته باشید که حدس‌های اولیه ما برای این مسئله در کلاس مکانیک کامل و دقیق نبودند.)

د- نشان دهید حرکت‌های انتقالی و دورانی نیز پاسخ معادلات حرکت قسمت الف هستند. برای این کار ابتدا باید حرکت‌های مذکور را به درستی بر حسب جابه‌جایی‌ها توصیف کنید و سپس آنها را در معادلات حرکت جا گذاری کنید.

مسئله ی ۷)

در مدار شکل زیر در ابتدا باتری وصل نبوده و بار اولیه‌ی خازن صفر است و جریانی از سلف عبور نمی‌کرده. در $t = 0$ باتری به مدار وصل می‌شود. (لطفا از نوشتن توضیح فارسی به جز در قسمت‌های خواسته شده خودداری کرده و با روابط ریاضی و معادلات به مساله پاسخ دهید. $L = 4H\ , C = 1F\ , R = \frac{1}{2}\Omega$)



الف) $V_c(0^+)$، $\frac{dV_c}{dt}(0^+)$ و $\frac{d^2V_c}{dt^2}(0^+)$ را بیابید. (منظور از 0^+ بلافاصله بعد از وصل شدن باتری است.)

ب) جریان هر شاخه را بر حسب زمان بیابید.

(راهنمایی: جواب معادله دیفرانسیلی $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$، به صورت e^{st} است که با جایگزاری در معادله دیفرانسیل مقادیر مجاز s به دست می‌آیند. توجه کنید که معادله درجه‌ی دوم، دو جواب مستقل داشته و نیاز به دو شرط اولیه برای حل کلی دارد.)

پ) توان مصرف شده در مقاومت را بر حسب زمان حساب کنید

ت) توان تحویل داده شده به مدار توسط باتری را بر حسب زمان محاسبه کنید. آیا مقدار این توان با مقدار توان به دست آماده در قسمت قبل برابر است؟ توضیح دهید.

ث) انرژی تلف شده در مقاومت را بر حسب زمان حساب کنید

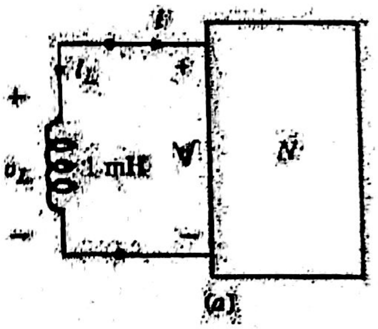
ج) انرژی تحویل داده شده به مدار توسط باتری را بر حسب زمان حساب کنید. آیا مقدار این انرژی با مقدار انرژی به دست آماده در قسمت قبل برابر است؟ توضیح دهید.

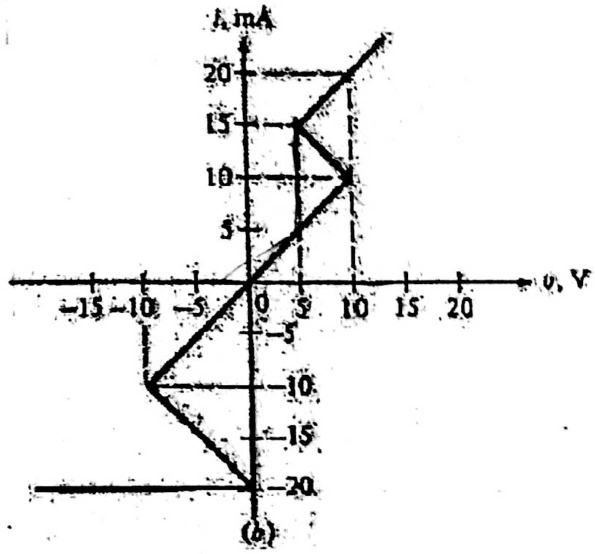
چ) نسبت توان تلف شده در مقاومت نسبت به توان داده شده به مدار توسط باتری را بر حسب زمان محاسبه کرده و این مقدار را به ازای گذشت مدت زمان طولانی حساب کنید. همچنین نسبت انرژی تلف شده در مقاومت تا زمان t را نسبت به انرژی داده شده به مدار توسط باتری تا همان زمان را محاسبه کرده و این مقدار را به ازای گذشت مدت زمان طولانی حساب کنید.

مسئله ی ۸)

در مدار شکل زیر شبکه N یک مقاومت غیر خطی است که توسط منحنی داده شده توصیف می‌گردد.

در همه‌ی قسمت‌ها مراحل حل را به طور کامل بنویسید.





I = - V - 20

الف) اگر جریان اولیه سلف $i_l(0) = 20mA$ باشد، منحنی جریان عنصر غیرخطی را بر حسب زمان رسم کنید.

ب) حال اگر منحنی داده شده را با تغییر دو محور افقی و عمودی در نظر بگیریم (یعنی محور عمودی تبدیل به ولتاژ و محور افقی تبدیل به جریان شود)، تحت همان شرایط اولیه بند قبل ($i_l(0) = 20mA$)، منحنی جریان عنصر غیر خطی برحسب زمان را رسم کنید

پ) در قسمت قبلی اگر جریان اولیه‌ی سلف $i_l(0) = -20mA$ باشد، منحنی تغییرات زمانی جریان عنصر غیر خطی چگونه خواهد بود؟

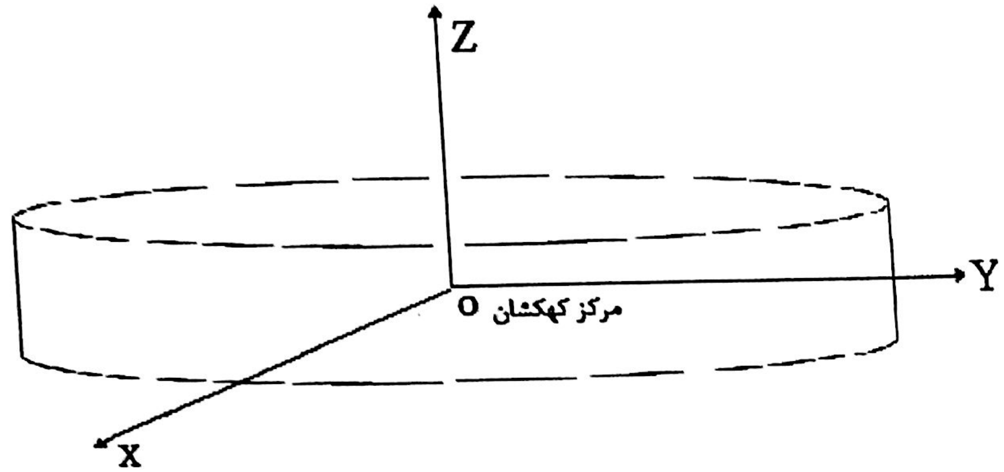
(راهنمایی: جواب معادله دیفرانسیلی $\dot{x} + ax = 0$، به صورت e^{st} است که با جایگزاری در معادله دیفرانسیل مقدار مجاز s به دست می‌آید. توجه کنید که معادله درجه‌ی اول، فقط یک جواب مستقل داشته و نیاز به یک شرط اولیه برای حل کلی دارد.)

مسئله ی ۹)

در این مساله می خواهیم به بررسی حرکت ستارگان در دیسک های کهکشانی بپردازیم.

کهکشان ها سامانه های بسیار بزرگ از ستارگان و مواد میان ستاره ای می باشند که به واسطه نیروی گرانشی گرد هم آمده اند. در یک تقریب می توان این سامانه ها را محیط هایی پیوسته از اجرام گرانشی در نظر گرفت که حول نقطه ای مرکزی دوران می کنند.

مطابق شکل زیر کهکشانی را که به شکل یک دیسک می باشد در نظر بگیرید. شعاع این کهکشان را D و ضخامت آن را d بنامید.



با فرض آنکه تنها نیروی موثر در کهکشان بر همکنش گرانشی بین ستارگان باشد، می توان تابع پتانسیل گرانشی زیر را برای هر نقطه از این دیسک کهکشانی در نظر گرفت.

$$\phi(r,\theta,z) = \phi(r,z) = \phi_0 \ln\left(r_c^2 + r^2 + \frac{z^2}{q^2}\right)$$

که در عبارت فوق (r,θ,z) مولفه های مختصات استوانه ای نسبت به مرکز کهکشان(نقطه ی O) و q،ϕ_0 و r_c سه پارامتر ثابت می باشند.

بخش اول :

ستاره ای را با جرم m_s در مختصات اولیه $\overrightarrow{R_0} = (r_0, z_0)$ درنظر بگیرید.

الف- برای این ستاره معادلات شتاب در دستگاه مختصات استوانه ای (نسبت به مرکز کهکشان) را نوشته و با فرض برقراری قانون دوم نیوتن یک دستگاه معادله برای مختصات ستاره (r_s, θ_s, z_s) و مشتقات آنها بنویسید.

- راهنمایی : می‌دانیم که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بردار نیرو بر حسب تابع پتانسیل به فرم زیر قابل استخراج است.

$$\vec{F} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

ب- برای این ستاره پارامتر L را به صورت $L = r_s^2\dot{\theta}_s$ تعریف می کنیم. نشان دهید که این پارامتر یک کمیت ثابت می باشد.

اکنون فرض کنید که ستاره در ابتدا در صفحه ی میانی کهکشان ($Z = 0$) قرار دارد.

پ- بردار سرعت اولیه ستاره ($\overrightarrow{V_0}$) را بگونه‌ای تعیین کنید تا ستاره در مداری دایروی منطبق بر صفحه کهکشان و به شعاع r_0، حول مرکز دوران کند. (جواب خود را بر حسب r_0 و سایر ثوابت داده شده در مساله بنویسید.)

حال می خواهیم پایداری حرکت ستاره را در دو راستای عمودی و شعاعی بررسی کنیم.فرض کنید که به علت یک نیروی اختلالی که در یک مدت زمان بسیار کوتاه به ستاره وارد می شود، بردار مکان ستاره به میزان $\Delta\overrightarrow{R_0} = \Delta r_0\hat{r} + \Delta z_0\hat{k}$ تغییر کند. با فرض آنکه بردار سرعت ستاره در مکان جدید، مجددا همان $\overrightarrow{V_0}$ باشد معادلات حرکت ستاره را تا اولین مرتبه نسبت به Δr_0 و Δz_0 بازنویسی کرده و با توجه معادلات بدست آمده به سوالات زیر پاسخ دهید.

ت- نشان دهید که حرکت ستاره در صفحه ی میانی کهکشان(صفحه ی $X - Y$) نسبت به اختلال در راستای z همواره پایدار است. فرکانس نوسانات حرکت پایدار ستاره حول $z_0 = 0$، (Ω_z) را بیابید.

ث- به ازای چه مقادیری از r_0 حرکت ستاره نسبت به اختلال شعاعی (Δr_0) پایدار است؟ فرکانس نوسانات حرکت پایدار ستاره حول، $r = r_0$، (Ω_r) را بیابید.

بخش دوم :

ص ۵ از ۱۱

در این بخش از مساله باید با کمک اطلاعات عددی که در ادامه ی سوال در اختیار شما قرار میگیرد ثوابت q،Φ_0 و r_c را تعیین کنید.

- دقت کنید که در این مساله تمامی اعداد به صورت بی بعد ارائه شده اند.

۱- از داده های رصدی می دانیم سرعت ستاره هایی که در مدارهایی دایروی، منطبق بر صفحه ی میانی کهکشان و در فواصل بسیار دور از مرکز حرکت می کنند برابر یک مقدار ثابت است. این مقدار ثابت را ۲ قرار دهید.

$$\lim_{r\to\infty} v_{circle}(r, z=0) = 2$$

۲- ستاره ی A در مداری مطابق شکل ۱ که در صفحه کهکشان($z=0$) قرار دارد به دور مرکز می گردد. عدد های زیر از این مدار را در اختیار داریم.

$$\vec{V}(r=3, \theta=0) = 2.03\,\hat{\theta}$$

۳- ستاره ی B در مداری که مولفه ی عمودی آن نیز می تواند مخالف صفر باشد($z \neq 0$) به دور مرکز کهکشان حرکت می کند.برای مدار این ستاره ۲ نمودار در اختیار شما قرار دارد.

- شکل ۲ : نمودار $z-r$ برای ستاره ی B
- شکل ۳ : نمودار $V_r - r$ برای ستاره ی B (منظور از V_r مولفه شعاعی بردار سرعت ستاره می باشد.)

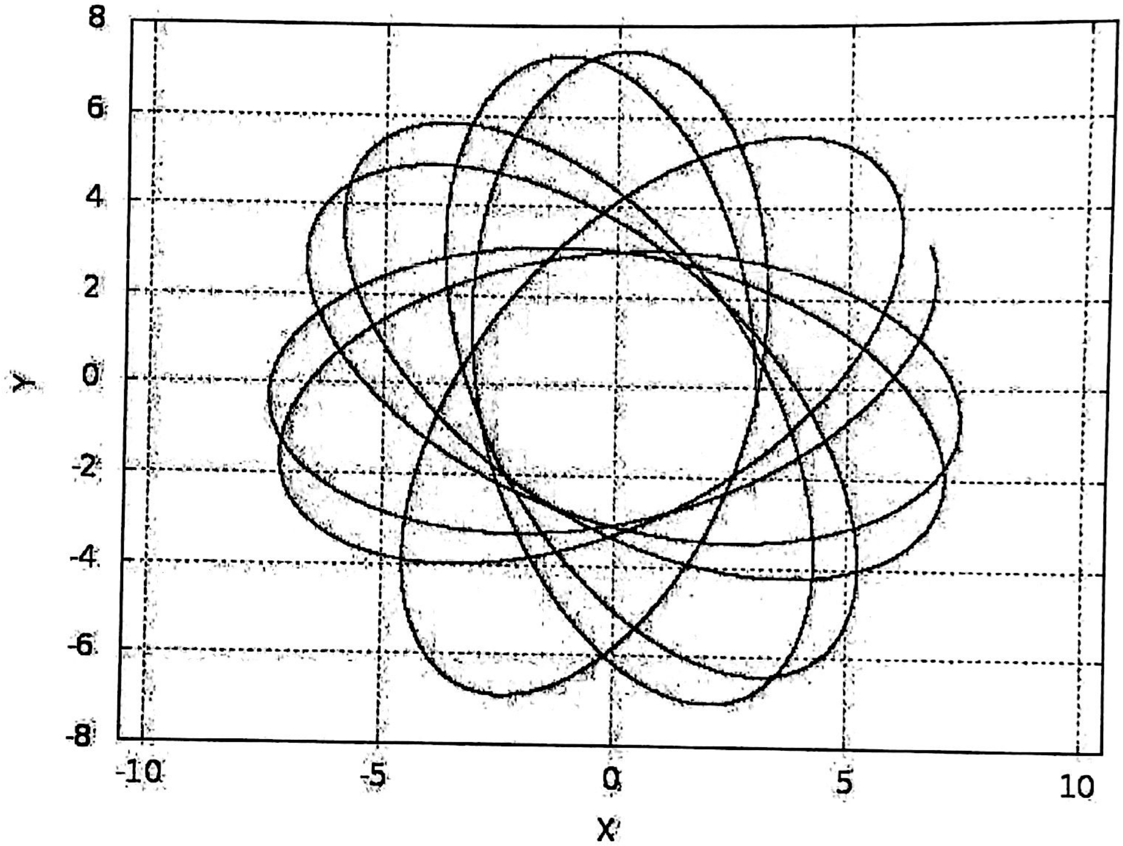
همچنین برای مدار این ستاره اطلاعات عددی زیر را در اختیار داریم :

$$\vec{V}(r=3.2, \theta=0, z=0) = 2.38\,\hat{\theta} + 0.5\,\hat{k}$$

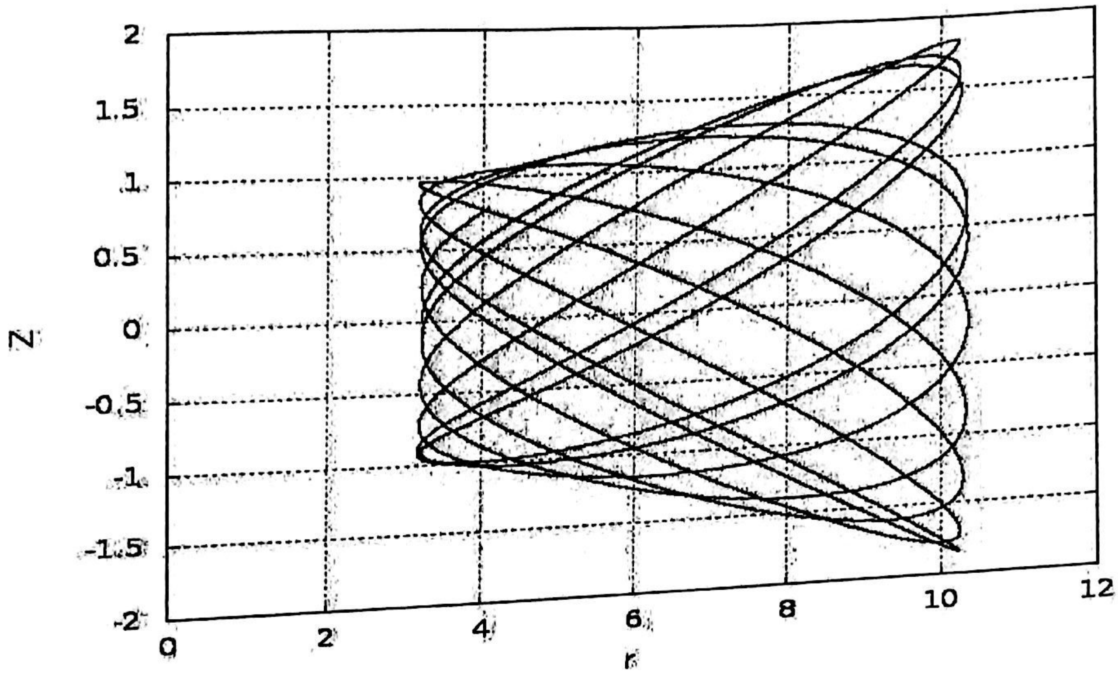
- جرم هر ۲ ستاره ی A و B را واحد(برابر با یک) در نظر بیگرید.

ج- با کمک مجموع داده های فوق،مقادیر عددی ثوابت q،Φ_0 و r_c را بیابید.

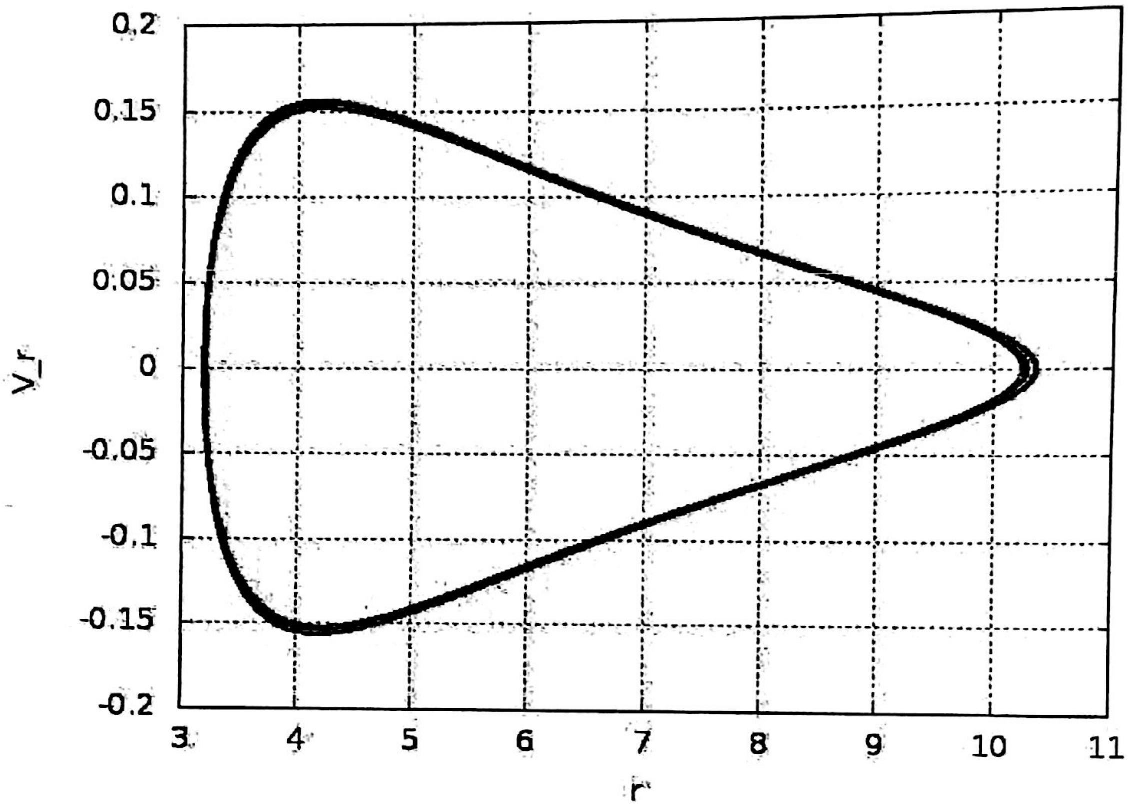
- تمامی مفروضات و راه حل خود را به صورت واضح و دقیق بنویسید. به اعدادی که بدون راه حل مشخص ارائه شده باشند نمره ای تعلق نخواهد گرفت.
- در این مساله نیازی نیست که خطا ی پاسخ خود را برآورد کنید.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

مسأله ۱۰)

یک گاز فوتونی در ظرفی به حجم V و دمای T در نظر بگیرید. فوتون‌ها ویژگی عجیبی دارند، تندی‌شان همواره برابر سرعت نور، c، است در حالی که تکانه‌شان، p، هر مقدار دلخواهی می‌تواند باشد. رابطه‌ی بین انرژی فوتون با تکانه‌اش به صورت

$$E = pc$$

است.

احتمال این که مقدار تکانه‌ی یک فوتون داخل این ظرف بین p و $p + dp$ باشد

$$\mathrm{P}(p)dp = A\,\mathrm{e}^{-pc/k_BT}\, 4\pi p^2 dp, \quad 0 \le p < \infty$$

است. در این مدل کلاسیکی فرض کنید تعداد فوتون‌های داخل ظرف N است (در واقع تعداد فوتون‌های داخل ظرف تابع حجم و دما است).

آ) با محاسبه‌ی A تابع توزیع داده شده را بهنجار کنید.

ب) محتمل‌ترین مقدار تکانه‌ی یک فوتون را حساب کنید.

پ) متوسط مقدار تکانه‌ی یک فوتون را حساب کنید.

ت) معادله‌ی حالت گاز فوتونی را به دست آورید (برخورد فوتون به دیواره‌ی ظرف را کاملا کشسان بگیرید).

ث) انرژی داخلی گاز فوتونی را به دست آورید.

ج) ظرفیت گرمایی در حجم ثابت و فشار ثابت را حساب کنید.

اگر یک روزنه‌ی کوچک در دیواره‌ی ظرف ایجاد کنیم:

چ) محتمل‌ترین مقدار تکانه‌ی فوتون‌هایی که از روزنه خارج می‌شوند را به دست آورید.

ح) تعداد فوتون‌هایی که در واحد زمان از واحد سطح روزنه خارج می شوند را محاسبه کنید.

خ) انرژی فوتون‌های خروجی در واحد زمان از واحد سطح روزنه را حساب کنید.

د) متوسط انرژی فوتون‌هایی که از روزنه خارج می‌شوند را حساب کنید.

در صورت نیاز: $$\int_0^\infty x^n\, \mathrm{e}^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

مسائل ۱۱)

گازی متشکل از ملکول‌های دو اتمی مانند H_2 در ظرفی به حجم V و در دمای T در نظر بگیرید. در دمای بالا برخورد ملکول‌ها با یکدیگر سبب شکستن پیوند بین اتم‌ها در یک ملکول و تجزیه‌ی ملکول‌ها می‌شود. همچنین اتم‌ها نیز می‌توانند مجدداً با هم ترکیب شوند و تشکیل ملکول دهند. به این ترتیب در حجم V هم ملکول H_2 و هم اتم H وجود دارد. در حالت تعادل داریم:

$$H_2 \rightleftharpoons H+H.$$

واضح است که تعداد کل اتم‌های هیدروژن یعنی مجموع اتمهای تشکیل دهنده‌ی ملکول‌ها و اتم‌های مجزا (غیر پیوندی) ثابت است، آن را N_0 در نظر بگیرید.

در حالت تعادل اگر n_{H_2} و n_H به ترتیب تعداد ملکول‌ها و تعداد اتم‌های مجزا در واحد حجم باشد طبق قانون اثر جرم داریم:

$$\frac{n_{H_2}}{n_H^2} = K(T), \quad K(T) = \left(\frac{h^2}{m\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{E_B}{k_B T}}$$

که m جرم یک اتم هیدروژن، h ثابت پلانک و E_B انرژی لازم برای تجزیه‌ی یک ملکول به دو اتم است و مقداری است ثابت. گاز موجود در ظرف را کامل در نظر بگیرید. بر حسب پارامترهای داده شده

آ) n_H و n_{H_2} را به دست آورید.

ب) فشار گاز داخل ظرف را حساب کنید.

پ) انرژی داخلی گاز داخل ظرف چقدر است؟

ت) ظرفیت گرمایی گاز در حجم ثابت و نیز در فشار ثابت را به دست آورید.

ث) یک ماشین کارنو در نظر بگیرید که با این گاز و بین دمای T_h و T_l کار می‌کند. اگر در فرآیند تک‌دمایی که گاز از منبع گرم به دمای T_h گرما دریافت می‌کند حجم گاز از V_1 به V_2 برسد، کار انجام شده در یک چرخه را به دست آورید.

ج) در دمای اتاق چند درصد گاز هیدرژن یونیزه است؟ در این قسمت می‌توانید از اطلاعات زیر استفاده کنید.

$$E_B = 4.48\ \text{eV},\ k_B = 1.38\times10^{-23}\ \text{J/K},\ h=6.63\times10^{-34}\ \text{J.s},\ m = 1.67\times10^{-27}\ \text{kg}$$