

باسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری پایانی نخست

زمان آزمون: ۵ ساعت

سه‌شنبه ۱۱ شهریور ۱۳۹۳

پرومشی نخست. بسه در حد اسبه! ۲۰ امتیاز

یک گراف ساده‌ی جهت‌دار بدون دور داریم. رأس‌ها به ترتیبی نامشخص، در یک ردیف از چپ به راست چیده شده‌اند. در هر مرحله، به طور تصادفی، یک یال انتخاب می‌شود که جهت آن به سمت چپ باشد؛ سپس جای این دو رأس در ترتیب، عوض می‌شود. ثابت کنید پس از متناهی گام، به وضعیتی خواهیم رسید که جهت تمام یال‌ها به سمت راست باشند.

پرومشی دوم. آرمین و جیپ دشمن! ۴۰ امتیاز

آبتین همراه با آقای «و-غار»، علی‌رغم فرد بودن درجه‌ی تمام رأس‌ها، در حال پیدا کردن یک تور اویلری روی گراف پترسن هستند.

حال دو نفر با هم بازی می‌کنند. در ابتدا یک گراف $2n$ -رأسی با رئوس $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ داریم که هیچ یالی ندارد. در هر مرحله، نفر نخست یک یال به گراف اضافه می‌کند، طوری که دور ایجاد نشود؛ سپس نفر دوم به هر رأسی که عددی ندارد و درجه‌ی آن نیز صفر نیست، یک عدد از مجموعه‌ی $A = \{2^1, 2^2, \dots, 2^{2n}\}$ نسبت می‌دهد. پس از $2n - 1$ مرحله، بازی تمام می‌شود و یک درخت ساخته می‌شود. نفر دوم باید طوری بازی کند که در انتها، هر عدد مجموعه‌ی A ، دقیقاً به یک رأس نسبت داده شده باشد.

فرض کنید پس از پایان بازی، رأس v_i ، درجه‌ی d_i داشته باشد و عدد نسبت داده شده به آن، a_i باشد. امتیاز هر یال $v_i v_j$ را برابر $a_i + a_j$ در نظر می‌گیریم. جمع امتیاز یال‌ها در پایان بازی را $f(n)$ می‌نامیم. به عبارتی دیگر،

$$f(n) = \sum_{i=1}^{2n} d_i \times a_i$$

است. نفر نخست می‌خواهد $f(n)$ کمینه شود و نفر دوم می‌خواهد $f(n)$ بیشینه شود. فرض کنید هر دو بازی‌کن، به‌ترین بازی ممکن را انجام دهند. ثابت کنید:

$$f(n) = \frac{2^{2n+3} - 8}{3} + 2n - 4$$

پروستش سومه هر تیم در هر ست! ۴۰ امتیاز

باز هم رئیس مجلس، تصمیم به محاکمه‌ی وزیر المپیاد گرفته است. باور کنید این هماهنگی کار یک روز و دو روز نیست.

ضمن این که $n - 2$ وزنه‌ی ۱- گرمی و ۲ وزنه‌ی $\frac{1}{2}$ - گرمی داریم. وزنه‌ها از نظر ظاهری کاملن شبیه به هم هستند. دست‌گاهی داریم که با گذاشتن تعدادی وزنه بر روی آن، به ما می‌گوید مجموع وزن این وزنه‌ها، مقداری صحیح هست یا خیر.

می‌خواهیم حداقل یکی از وزنه‌های $\frac{1}{2}$ - گرمی را پیدا کنیم. کمینه‌ی تعداد دفعات استفاده از دست‌گاه را که به طور تضمینی بتوان این کار را انجام داد، $f(n)$ در نظر می‌گیریم. $\theta(f(n))$ را بیابید.