

نشانده تعریف اعداد مختلط: عنصر تعریف شده در مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\sqrt{-1} = i$

بین اعداد مختلط در نرم دکارتی $z = x + iy$ (x, y حقیقی اند)

Real $\text{Re } z = x$: قسمت حقیقی z : طول نقطه

Imaginary $\text{Im } z = y$: قسمت مجروری z : عرض نقطه

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{در طول یا اندازه } z$$

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{مزدوج } z$$

توجه مهم: ضرب یک عدد مختلط در مزدوجش حاصلی حقیقی دارد

$$z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

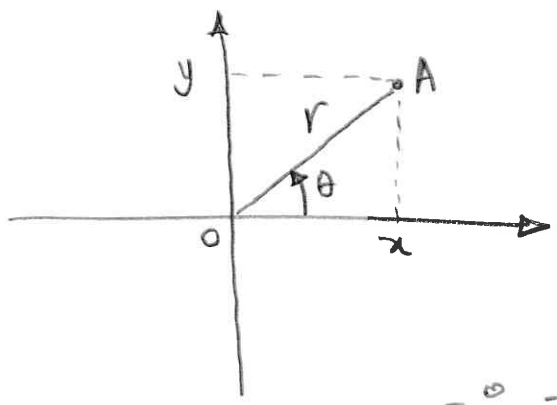
هر عدد مختلط نظیر یک نقطه در صفحه است.
: توصیف هندسی

$$z = x + iy \equiv (x, y) \text{ در صفحه دکارتی}$$

توجه: به طور کلی وقتی معادله کلی به حسب z داده شود، برای شناسایی آن کافیست، به جای

z عبارت $x + iy$ را قرار دهیم تا آن معادله بر حسب متغیرهای دکارتی x و y توصیف شود

رشته مختصات قطبی:



OA: شعاع حامل نقطه A

r: طول شعاع حامل نقطه A

theta: زاویه ای که شعاع حامل نقطه A با جهت مثبت محور x می سازد

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

theta: با توجه به محل قرار گرفتن نقطه در صفحه و این که در کدام ربع رشته مختصات واقع است انتخاب می شود

بیان اعداد مختلط در فرم قطبی: $z = re^{i\theta}$ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

مدول z: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

آرگومان z: $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$

به همگی است: $(n \in \mathbb{N}) \quad z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

$$\frac{z_1 z_2}{z_3} = \frac{r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}}{r_3 e^{i\theta_3}} = \frac{r_1 r_2}{r_3} e^{i(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)} = \dots$$

دو به دو: $z = re^{i\theta}$

$re^{-i\theta} = \overline{z}$ $-re^{i\theta} = re^{i(\theta + \pi)} = -z$

معرفی چند معنی خاص در صفحه مختلط

به کسی می توان نشان داد که z_1, z_2 در یک حلقه معلوم باشند (که دو نقطه را مشخص می کنند)

حاصل $|z_1 - z_2|$ بین فاصله بین این دو نقطه خواهد بود. بنابراین اگر $z = x + iy$ فرض شود و R عددی حقیقی و مثبت باشد:

(الف) $|z - z_1| = R$ بین دایره ای است به مرکز z_1 و شعاع R

$$|z - z_1| + |z - z_2| = R \quad \text{(ب)}$$

باز فرض $|z_1 - z_2| < R$ بین بیضی با کانونهای z_1, z_2 است

$|z_1 - z_2| = R$ بین پاره خط واصل z_1, z_2 است

$|z_1 - z_2| > R$ بین هیچ گاه نیست (تخیلی)

$$|z - z_1| - |z - z_2| = R \quad \text{(ج)}$$

باز فرض $|z_1 - z_2| > R$ بین هذلولی با کانونهای z_1, z_2 است

$|z_1 - z_2| = R$ بین نیم خطی در امتداد واصل z_1, z_2 در سمت z_2 است

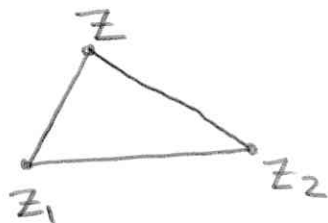
$|z_1 - z_2| < R$ بین هیچ گاه نیست (تخیلی)

(د) $|z - z_1| = |z - z_2|$ بین عمود منصف پاره خطی است با دو سر z_1, z_2

(ه) $|z - z_1| = R|z - z_2|$ بین یک دایره است ($R \neq 1$)

$\frac{4}{D}$

توجه: برای موارد ب و ج به نامساویهای مثلثی که در هر مثلث باید برقرار باشند دقت کنید



$$|z - z_1| + |z - z_2| > |z_1 - z_2|$$

$$||z - z_1| - |z - z_2|| < |z_1 - z_2|$$

جایگاه n ام و n امین نقطه

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$$

می‌دانیم که k عددی صحیح است

زادافرض $z = re^{i\theta}$ می‌توان نوشت.

$$(n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = (re^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = \left\{ re^{i(\theta + 2k\pi)} \right\}^{\frac{1}{n}} \quad \text{(الف)}$$

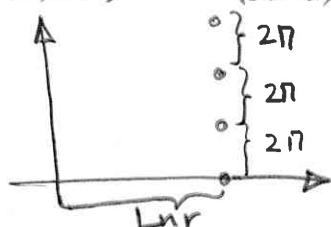
$$= r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right\}$$

می‌توانیم به ازای n مقدار متوالی برای k (مثلاً $k = 0, 1, \dots, n-1$)

n جواب متغیر از رابطه فوق بدست می‌آید و تکرار دادن متغیر دیگر برای k به جوابهای گنگاری منجر خواهد شد پس هر عدد مختلط دارای n ریشه n ام متغیر بوده که همگی به فاصله $\sqrt[n]{r}$ از مبدأ مختصات قرار گرفته و رؤس یک n ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln(re^{i(\theta + 2k\pi)}) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad \text{(ب)}$$

می‌توان دید به ازای هر مقدار صحیح برای k یک جواب از رابطه فوق بدست می‌آید و به تعبیری لگاریتم n امین عدد مختلط دارای بی‌شمار مقدار است که قسمت حقیقی همگی $\ln r$ و فاصله $2\pi, 2\pi, \dots$ به اندازه محور



موجودی از هم فاصله دارند

$$\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

$$\vec{v} = m\hat{i} + n\hat{j} + p\hat{k}$$

$$\vec{w} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$$

یا اادی از ضرب بردارها:

۱- بردار زیر را به نظر بگیرید

۱۱ ضرب داخلی دو بردار $\vec{u} \cdot \vec{v}$ به صورت زیر قابل محاسب است

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = am + bn + cp$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cos \theta$$

شرط عمود بودن دو بردار آن است که ضرب داخلی آنها صفر باشد

۱۲ ضرب خارجی دو بردار $\vec{u} \times \vec{v}$ به صورت زیر قابل محاسب است

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

شرط مسواری بودن دو بردار آن است که ضرب خارجی آنها صفر باشد. بی توان نشان دهنده بردار حاصله از

$\vec{u} \times \vec{v}$ بر صفحه دو بردار عمود است و طول آن برابر با حاصل مسواری الاضلاع قابل ساخت روی این دو بردار است که دارای مقدار $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$ می باشد.

۱۳ ضرب مخلوط سه بردار $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$ به صورت زیر قابل محاسب است

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

قدر مطلق عدد بدست آمده از ضرب مخلوط حجم مسواری السطح قابل ساخت روی این سه بردار را نشان می دهد و اگر حاصل صفر باشد یعنی سه بردار در یک صفحه واقعند (وابستگی خطی دارند)

پارامتری از معادلات صفحه و خط در فضا:

1) معادله صفحه ای که از نقطه (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد و بردار نرمال آن $\vec{N} = (a, b, c)$ می‌باشد

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \text{چنین است}$$

2) معادله خطی که از نقطه (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد و بردارهای آن $\vec{u} = (p, q, r)$ می‌باشد چنین است

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} = t \quad \text{فرم استاندارد}$$

$$\begin{cases} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0 \\ z = rt + z_0 \end{cases} \quad \text{فرم پارامتری}$$

چند نکته:

1) اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو بردار باشند

الف) تصویر $\vec{A}$ روی $\vec{B}$ عبارت است از

$$\vec{A}_{\vec{B}} = (\vec{A} \cdot \vec{\lambda}_{\vec{B}}) \cdot \vec{\lambda}_{\vec{B}}$$

که در آن $\vec{\lambda}_{\vec{B}} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ بردار یک برهه $\vec{B}$ است.

$$\vec{A}'_{\vec{B}} = 2\vec{A}_{\vec{B}} - \vec{A}$$

ب) کرینه $\vec{A}$ نسبت به $\vec{B}$ عبارت است از:

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} + \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

ج: نیمساز داخلی زاویه ساخته شده روی $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عبارت است از

2) نامنه نقطه (x_0, y_0, z_0) صفحه $ax + by + cz + d = 0$ را به

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3. فاصله دو صفحه موازی

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax+by+cz+d'=0 \end{cases}$$

از رابطه

$$\frac{\frac{7}{D}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} |d-d'|$$

پست می آید

تاب سهت فریب سختی از صنف است
اگر سختی ده صنف باشد تاب صنف است

خبرنامه در ارتباط با توابع برداری

فرض کنید حرکتی در صفحه C که از طریق بردار موقعیتی
تعریف شده، در حال حرکت باشد، بردارهای سهت، دشتب این حرکت بصورت زیر پست می آید

$$\vec{R}'(t) = \vec{V}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

$$\vec{R}''(t) = \vec{V}'(t) = \vec{a}(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}$$

بردار یکسانی ماس به سختی از رابطه

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}$$

پست می آید

بردار یکسانی عمودی اصلی (نوع اول) از رابطه

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

پست می آید

انحنای سختی از رابطه

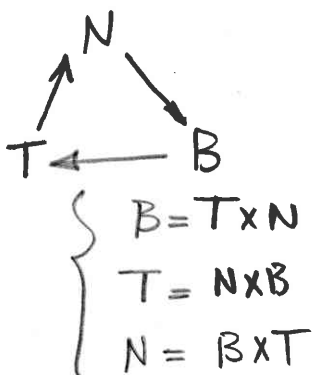
$$k(t) = \frac{|\vec{R}'(t) \times \vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}$$

پست می آید

تاب سختی از رابطه

$$\tau(t) = \frac{\vec{R}'(t) \cdot (\vec{R}''(t) \times \vec{R}'''(t))}{|\vec{R}'(t) \times \vec{R}''(t)|^2}$$

پست می آید

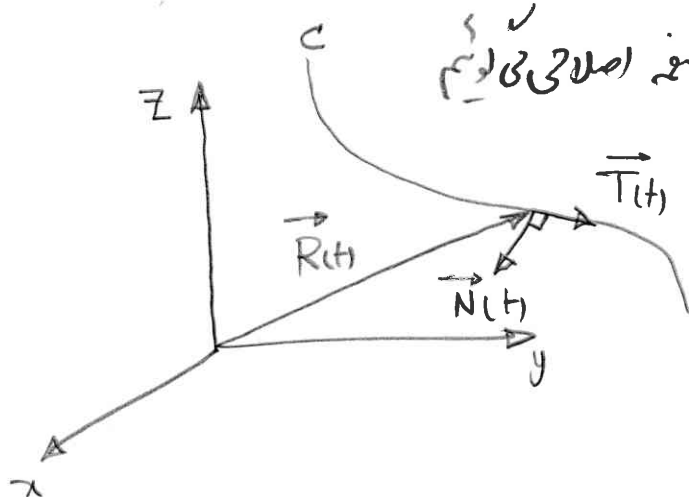


تعریف:

صفحه‌ای که نرمال آن $\vec{T}(t)$ است، صفحه قائم منتهی می‌گوییم

صفحه‌ای که نرمال آن $\vec{B}(t)$ است، صفحه بوسان منتهی می‌گوییم

صفحه‌ای که نرمال آن $\vec{N}(t)$ است، صفحه اصلی می‌گوییم



* رابطه اینجا برای مختصات تعریف شده در صفحه

(1) اگر منتهی C در صفحه با معادله دکارتی $F(x, y) = 0$ تعریف شده باشد داریم

$$K(x) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

تعریف شده باشد داریم $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

(2) اگر منتهی C در صفحه با معادله پارامتری

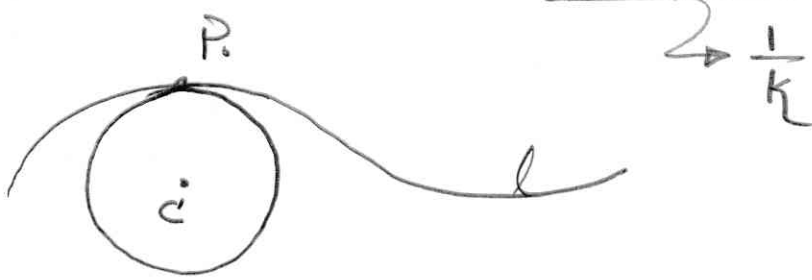
$$K(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

(3) اگر منتهی C در صفحه با معادله قطبی $r = f(\theta)$ تعریف شده باشد داریم:

$$K(\theta) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

* دایره انحنا (دایره بوسان)

اگر ℓ یک منحنی در صفحه بوده و در نقطه P_0 انحنا مخالف صفر باشد، دایره ای که در نقطه P_0 به ℓ مماس می شود و مرکزش در طرف سمت منحنی بوده و شعاع آن برابر شعاع انحنا در نقطه مذکور است، دایره انحنا یا دایره بوسان منحنی در نقطه P_0 می گویند.



بوسان منحنی در نقطه P_0 می گویند.

مختصات مرکز انحنا چنین است:

$$x_c = x_{P_0} - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \Big|_{P_0}$$

$$y_c = y_{P_0} + \frac{1+y'^2}{y''} \Big|_{P_0}$$

۱۰
D

حد و پیوستگی در یک نقطه:

گاهی توابع تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای حد است، هرگاه حد چپ و حد راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند.

گاهی توابع تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه در این نقطه دارای حد بوده و مقدار تابع در این نقطه موجود و با حد مذکور مساوی باشد.

قاعده هسپیتال:

در نوع اجهام حد $I = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ که یکی از حالات مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را داراست.

خیابانی $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد (متناهی یا نامتناهی) حاصل آن I نشان می دهد

یار آوری ۳ قاعده مشتق گیری:

$$y(x) = f(g(x)) \rightarrow y'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$y(x) = f(x)^{g(x)} \rightarrow y'(x) = \left\{ g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\} \cdot f(x)$$

$$y(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt \rightarrow y'(x) = g'(x) h(g(x)) - f'(x) h(f(x))$$

موردی که نباید با اجهام $0 \times \infty$ اشتباه گرفت:

بی‌انتهی و صغیر معجم $0 \times \infty$ وقتی رخ می‌دهد که راسته با ∞ :

بی‌انتهی بزرگ $\times$ صغیر حدی (بی‌انتهی کوچک)

در حالیکه بدون هیچ اجهامی داریم:
 $\rightarrow 0$ (کرانه‌دار و محدود حقیقی، معلوم) $\times$ (صغیر حدی)

$$0 = (\text{بی‌انتهی بزرگ}) \times (\text{صغیر واقعی})$$

حافظه‌دار که بی‌انتهییم:

$$\frac{\text{صغیر حدی}}{\text{صغیر حدی}} = \text{معجم}$$

$$\text{تعریف نه} : \frac{\text{صغیر واقعی}}{\text{صغیر واقعی}}, \quad \frac{\text{صغیر حدی}}{\text{صغیر واقعی}}$$

$$\frac{\text{صغیر واقعی}}{\text{صغیر حدی}} = 0 \quad \rightarrow 0 \quad \frac{\text{صغیر حدی}}{\text{عدد غیر میل کننده به صفر}}$$

جایگزین در ابتدا و یا در اواسط حل یک مسئله، هم‌ارز و معادل برخی جملات موجود در مساله را قرار داده و سپس عمل رفع ابهام را ادامه دهیم.

- در استفاده از هر نوع قاعده هم‌ارزی حتماً باید هم‌ارزی از جملات را قرار داده و دقیقاً قرینه همان عبارت در حال جمع شدن به آن بود، لذا است از فرم تعیین یافته آن قاعده هم‌ارزی استفاده کنیم.

قاعده هم‌ارزی:

وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ داریم:

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots} \sim \begin{cases} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right| & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

$$(1^p + 2^p + \dots + n^p) \sim \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} \quad \text{وقتی } n \rightarrow \infty \text{ داریم:}$$

برای فرم تعیین یافته استفاده می‌شود

$$\sqrt[n]{1 + A(x)} \sim 1 + \frac{A(x)}{n} \quad \text{وقتی } A(x) \rightarrow 0 \text{ داریم:}$$

$$[A(x)] \sim A(x) \quad \text{وقتی } A(x) \rightarrow \pm\infty \text{ داریم:}$$

$$\sqrt[n]{(kn)!} \sim \left(\frac{kn}{e} \right)^k \quad \text{وقتی } n \rightarrow \infty \text{ داریم:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \text{ جمله ای بر حسب } n} \simeq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\log_a (n \text{ جمله ای بر حسب } n)} \simeq 1$$

$$e^A \sim 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots$$

$$\cos A \sim 1 - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - + \dots$$

$$\sin A \sim A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - + \dots$$

$$\tan A \sim A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{15} + \dots$$

$$\text{Arc Sin } A \sim A + \frac{1}{2} \frac{A^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{A^5}{5} + \dots$$

$$\text{Arc Cos } A \sim \frac{\pi}{2} - \text{Arc Sin } A$$

$$\text{Arc tan } A \sim A - \frac{A^3}{3} + \frac{A^5}{5} - + \dots$$

$$\cosh A \sim 1 + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh A \sim A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-A} \sim 1 + A + A^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1+A} \sim 1 - A + A^2 - + \dots$$

$$\ln(1+A) \sim A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - + \dots$$

$$(1+A)^m \sim 1 + \frac{m}{1!} A + \frac{m(m-1)}{2!} A^2 + \dots$$

تساوی بین بی‌نهایت بزرگها و تساوی بین بی‌نهایت کوچیکها

هرگاه $x \rightarrow +\infty$ و $a > b > 0$ ، $1 < n < m$ باشد، همگی عبارت زیر از جنس بی‌نهایت بزرگانه و از حیث جمله به اهمیت کمتر داریم:

$$x^m \gg x^n \gg \sum_n x \gg x^a \gg x^b \gg x^n \gg x^m \gg x! \gg x^x$$

(هرگاه همگی بینهایت شوند فقط جمله قویتر باقی می‌ماند)

نوع مهم: وقتی که $A \gg B$ و $A \gg B$ ، بی‌نهایت‌های بزرگ شوند به ازای هر د عدد دلخواه

برای α, β داریم:

$$\alpha A + \beta B \sim \alpha A$$

$$\lim \frac{A}{B} \rightarrow \infty$$

$$\lim \frac{B}{A} \rightarrow 0$$

اگر بعضی از عوامل موجود در بی‌نهایت شوند و بعضی دیگر بینهایت نشوند فقط عاملی که بی‌نهایت شود باقی می‌ماند.

اگر قدرت حد و خروج برابر باشد حاصل حد، صفرو بی‌نهایت نخواهد بود

چنانچه در محاسبه $I = \lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x)$ یکی از حالات مهم نامی یعنی $0, \infty$ و ∞

و 0 و 1^∞ برخورد کردیم، از طرف رابطه فوق $\ln$ گرفته می نویسیم

$$\ln I = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))$$

سپس می یابیم که نسبت راست را که ریشه اجهان معدنی دارد از اجهان نموده و به جای $\ln I$ حاصل I را به دست می آوریم.

توجه ۱) اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{kx+b})^{cx+d}$ حاصل a, b, c, d, k اعداد نامی باشند، حاصل $e^{\frac{ac}{k}}$ خواهد شد.

توجه ۲) اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[m]{ax^m + bx^{m-1} + \dots}$ حاصل $a, b, \dots$ و نیز m اعداد نامی باشند، حاصل a خواهد شد.

که اجهان ∞ دارد، 1 خواهد شد

توجه ۳) از توجه ۱) می شود $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{\beta/x} = e^{\alpha\beta}$

نقطه مشت تابع در یک نقطه:

توانیم تابع $f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر است و اولاً در این نقطه پیوسته باشد و ثانیاً

مشتق چپ و راست تابع در این نقطه وجود داشته باشد و برابر باشند به تعبیری

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

درست است اگر

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

توجه ۱) $f'(x_0)$ را در صورت وجود می توان از طریقتوجه ۲) $f'(x_0)$ را در صورت وجود بین ضرایب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه ای به طول x_0 می گیریم.توجه ۳) زاویه بین دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در نقطه تقاطعی به طول x_0 همان

زاویه بین خطوط مماس بر آن دو منحنی در نقطه مذکور بوده داریم:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

که در آن $m_1 = f'(x_0)$ و $m_2 = g'(x_0)$

استفاده از مشتق در تعیین مقدار تقریبی یک تابع در یک نقطه

اگر Δx به اندازه کافی کوچک باشد داریم:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$$

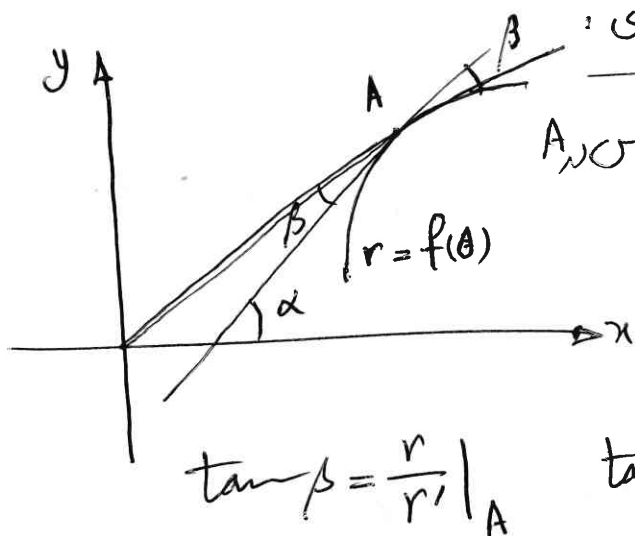
یعنی اگر مقدار یک تابع و مشتق آن را در نقطه‌ای مانند x_0 بدانیم، قادریم مقدار تقریبی آن تابع

را در نزدیکی نقطه $x_0 + \Delta x$ تعیین کنیم.

استفاده از مشتق در بحث نسبتهای وابسته:

از آنجا که مشتق به معنای سرعت تغییرات می باشد، چنانچه کمیتی به گونه متغییر وابسته باشد و تمامی آن متغییرها خود بازمان در حال تغییر باشند (تابعی از زمان باشند) برای مشخص کردن سرعت تغییرات آن کمیت کافی است رابطه آن را با متغییرهای مذکور نوشته و از طرفین این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم.

دو رابطه در ارتباط با خطوط مماس به منحنیهای قطبی:



β : زاویه بین خط مماس و شعاع حامل نقطه تماس در A

α : زاویه بین خط مماس در A و محور x ها

$$\tan \beta = \frac{r}{r'} \Big|_A \quad \tan \alpha = \frac{r + r' \tan \theta}{-r \tan \theta + r'} \Big|_A$$

می توان نشان داد که دو منحنی قطبی در نقطه‌ای مانند A جداگانه را قطع کنند، برای حساب زاویه بین این دو منحنی کافی است زاویه β مربوط به هر کدام را در نقطه A پیدا کرد و از طریق $|\beta_1 - \beta_2|$ زاویه بین آن دو منحنی را در نقطه A بدست می آوریم

چند قاعده مشتق گیری

1. مشتق گیری ضمنی:

هنگامی که رابطه $F(x, y) = 0$ طبیعی است در این رابطه یکی از دو متغیر x یا y می تواند به عنوان متغیر مستقل و دیگری به متغیر وابسته (تابع) مد نظر قرار گیرد.
 اگر بخواهیم مشتقات تدریجی را نسبت به x پیدا کنیم، کافی است سوالاً در رابطه $F(x, y) = 0$ نسبت به متغیر x و با عنایت به آن که y تابعی از x است، مشتق بگیریم.
 $(x)' = 1 \quad (y)' = 1 \times y'$

$$\frac{dy}{dx} = y' = - \frac{F'_x}{F'_y}$$

به عنوان رابطه ای آن به خاطر داریم:

2. مشتق گیری از تابع مرکب:

هنگامی که $y(x) = f(g(x))$ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

اگر تابعی از تابع باشد، مشتق آن فرود

و اگر تابعی فرود باشد، مشتق آن زنجیر خواهد بود ولی معکوس آن (اگرچه) درست نیست

3. مشتق گیری زنجیره ای

هنگامی که $y = f(t)$, $t = g(w)$, $w = h(x)$ داریم:

هنگامی که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dg}{dw} \cdot \frac{dh}{dx}$$

(4) مشتق گیری با زنجیره:

فرض کنیم $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$ هرگاه داشته باشیم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{q'(t)}{p'(t)}$$

همچنین می توان نوشت:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{q'(t)}{p'(t)} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{q'(t)}{p'(t)} \right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{q'(t)}{p'(t)} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{q''(t)p'(t) - p''(t)q'(t)}{p'(t)^2} \cdot \frac{1}{p'(t)}$$

$$= \frac{q''(t)p'(t) - p''(t)q'(t)}{p'(t)^3}$$

(5) مشتق گیری از تابع به تابع تابع $g(x)$

فرض کنیم $y(x) = f(x)$ می توان نوشت:

$$\ln y = g \ln f \rightarrow \frac{y'}{y} = g' \ln f + g \frac{f'}{f}$$

$$\rightarrow y'(x) = \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \cdot f(x)$$

۱۶. مشتق لیک از انتگرال (قضیه لایب نیتس)

$$y(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, t) dt$$

حرکت داده داریم

$$y'(x) = g'(x)h(x, g(x)) - f'(x)h(x, f(x)) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} dt$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f(x))}$$

۱۷. مشتق لیک از معکوس یک تابع

تکلی نیست

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

بی داریم

$$f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)) = 1 \rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

به تعبیر هرگاه نقطه (a, b) به نمودار تابع f متعلق داشته باشد، و طبیعتاً نقطه (b, a) به نمودار

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

تابع f^{-1} متعلق باشد داریم

۱۸. مشتق لیک از تابع نسبت به تابع

برای f و g که f نسبت به g متغیرات تابع f به g

$$\frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تغییرات تابع g به f داریم

تابع مل ل، د، " لا ، ... وسیہ کردن یک وال منطقی بین آنها وضعیت^(۱۱) و راه سوم

(دود صورت کمال صحت این مری را به استغناء نشان دهد)

توجه: می‌توان آن‌ها را برای n بزرگتر به صورت $y(x) = u(x) v(x)$ داریم.

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^{(n-i)} v^{(i)}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

ترکیب : n, j

نہیں

$u^{(n-i)}$ $u^{(n-i)}$ $\frac{1}{n-i}$

صَوْنِہ اُمّ بَیج ۷ ۷ (۱)

* استفاده از علامت مشتق اول در تعیین وضعیت صعودی و نزولی بودن یک تابع
و تعیین نقاط اکسترمیمی

الف تابع $f(x)$ در فاصلای پیوسته باشد.

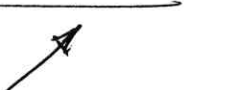
جاهایی که $f'(x)$ مثبت است و یا احتمالاً در تعداد نقاط شمارش پذیر صفر باشد، تابع f آید صعودی و

جاهایی که $f'(x)$ منفی و یا احتمالاً در تعداد نقاط شمارش پذیر صفر باشد، تابع f آید نزولی است.

(جاهایی که بیش از یک صفر عبارت آید بکار نمی رود)

و با توجه به این موضوع می توان نقطه اکسترمیمی را با توجه به ترتیب که در تابع f در $x=a$

پیوسته بوده و علامت f' در اطراف $x=a$ عوض شود تابع f در $x=a$ دارای اکسترمیمی است

x	a		
f'		-	+
f			
		min	

x	a		
f'		+	-
f			
		Max	

بکار می رود:

* استفاده از علامت مشتق دوم در تعیین وضعیت تغییر و تحدب یک تابع و تعیین نقاط عطف

الف تابع $f(x)$ در فاصلای پیوسته باشد.

جاهایی که $f''(x)$ مثبت باشد، انحنا (تغییر) مثبت است و تابع f مقعر است

$f''(x)$ منفی باشد، انحنا (تغییر) منفی است و تابع f محدب است

و با توجه به این موضوع می توان نقطه عطف تابع را با توجه به ترتیب که در تابع f در $x=a$ پیوسته بوده و نمودار

f در این نقطه دارای خط مماس باشد (نقطه گریز نداشته باشد) و علامت f'' در اطراف $x=a$ عوض شود تابع f

در $x=a$ دارای نقطه عطف است

23
D ویژگی منحصر به فرد نقطه عطف آن است که خط مماس بر منحنی در آن نقطه از راجع منحنی عبور می کند.

x	a
f''	- +
f	∩ ∪

عطف

x	a
f''	+ -
f	∪ ∩

عطف

۳ تغییر

۱. هرگاه $f'(a) = 0$ بود ولی $f'(x)$ در اطراف $x=a$ تغییر علامت ندهد طبعاً تابع f در $x=a$

دارای اکسترم نمی باشد ولی ثابت می شود در این شرایط تابع f در $x=a$ دارای عطف است.

۲. هرگاه تابع f در $x=a$ دارای اکسترم نمی باشد، باینهم $f'(a)$ موجود است، الزاماً باید $f'(a) \neq 0$ باشد.

۳. آزمون مشتق دوم:

هرگاه $f'(a) = 0$ ، $f''(a) > 0$ باشد، تابع f در $x=a$ دارای $\min$ می باشد.

هرگاه $f'(a) = 0$ ، $f''(a) < 0$ باشد، تابع f در $x=a$ دارای $\max$ می باشد.

هرگاه $f'(a) = 0$ ، $f''(a) = 0$ ، تابع f در $x=a$ ممکن است دارای اکسترم نباشد یا عطف باشد.

* روش دیگر:

۱. اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه (a, b) دارای اکسترم نمی باشد.

اولاً $f(a) = b$ باشد، ثانیاً $f'(a)$ در صورت وجود برابر صفر شود.

۲. اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه (a, b) دارای عطف باشد.

اولاً $f(a) = b$ باشد، ثانیاً $f''(a)$ در صورت وجود برابر صفر شود.

۱. جاهایی که $f'(x)$ برابر صفر است و به اصطلاح $f'(x)$ موجود نمی باشد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ می گویند

۲. اگر $f'(a) = 0$ و $f'(a) \neq 0$ باشد ولی علامت $f'(x)$ در اطراف $x=a$ تغییر علامت ندهد،

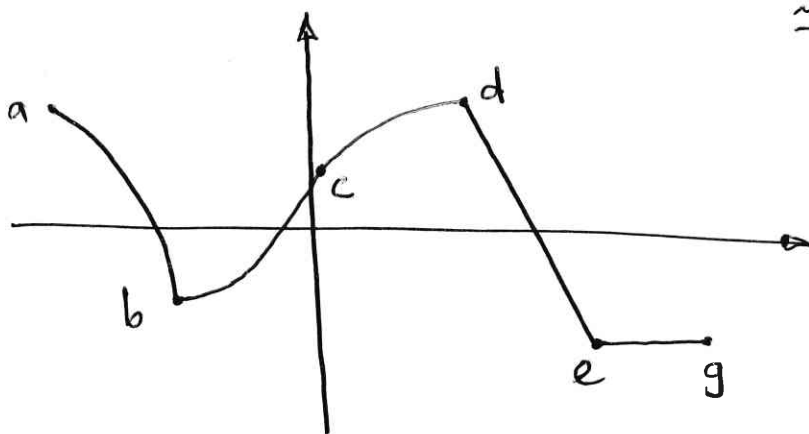
طبیعیاً تابع f در $x=a$ دارای عطف نمی باشد و اصطلاحاً در این شرایط می گویند تابع در $x=a$ دارای

نقطه پیلا است.

Mepla

مثال، نمودار تابع f در شکل ترسیم شده است. علامت f' ، f'' در دستگاهی مختلف اظهار نظر کرده و

نوع نقاط b ، c ، d را برای منحنی f تعیین کنید



در فواصلی که با افزایش x مقدار y کاهش می یابد تابع f نزولی و f' منفی است
در فواصلی که با افزایش x مقدار y افزایش می یابد تابع f صعودی و f' مثبت است

در فواصلی که خط مماس بالای منحنی قرار می گیرد و انحنا منحنی به سمت پایین است، f'' منفی است
در فواصلی که خط مماس پایین منحنی قرار می گیرد و انحنا منحنی به سمت بالا است، f'' مثبت است

پس ملاحظه می شود :

در فاصله a تا b ، $f' < 0$ ، $f'' < 0$

در فاصله b تا c ، $f' > 0$ ، $f'' > 0$

در فاصله c تا d ، $f' > 0$ ، $f'' < 0$

در فاصله d تا e ، $f' < 0$ و چون نمودار f دارای انحنای منفی است $f'' = 0$

در فاصله e تا g چون تعداد و ثابت ماند $f' = 0$ ، $f'' = 0$

تابع f در نقطه a دارای $\min$ نسبی است (نسبت به نقاط در همسایگی خود کمترین را دارد)

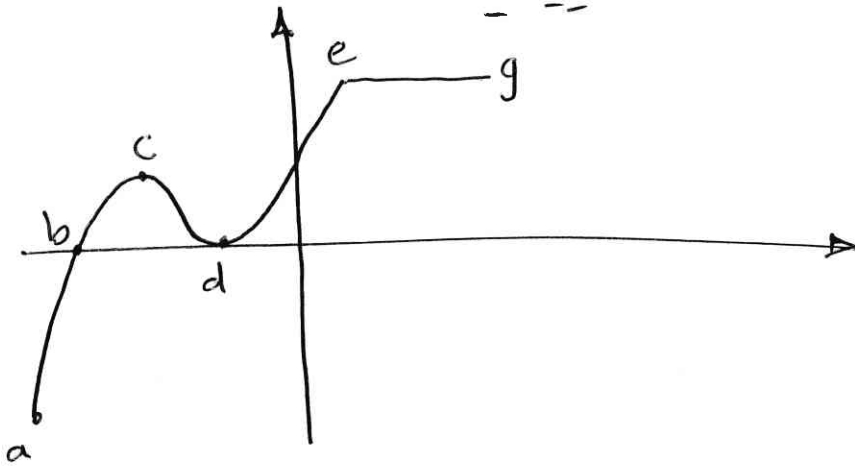
وقت داریم اگر چه جهت تغییر و تحریف منحنی در اطراف a عوض شده ولی تا اگر که نقطه عطف نمی داریم ، زیرا نمودار منحنی در اینجا دارای نقطه نوک تیز است .

تابع f در c دارای عطف است زیرا نمودار منحنی در اینجا پیوسته ، غیره نوک تیز بود و در اطراف این نقطه جهت انحنا منحنی عوض می شود ، وقت داریم خط مماسی که در این نقطه قابل ترسیم است ، از داخل منحنی عبور می کند .

تابع f در نقطه d دارای $\max$ نسبی است (نسبت به نقاط در همسایگی خود بیشترین را دارد) وقت داریم در هر

دو نقطه اکثر هم نسبی a و d تابع f مستقیم نمی باشد .

نمودار مشتق تابع f (یعنی f') در شکل ترسیم شده است، روی علامت f' ، f'' در قسمتی
خلف اظهار نظر کرده و نوع نقاط a ، b ، c ، d ، e را برای منحنی f تعیین کنید.



در فواصلی که نمودار f' بالای محور x است، f' مثبت است $\rightarrow$ تابع صعودی است

" " " " f' پایین محور x است، f' منفی است $\rightarrow$ تابع نزولی است

در فواصلی که نمودار f' نزولی می شود، مشتق f' یعنی f'' منفی است $\rightarrow$ نقطه روبه پایین دارد

در فواصلی که نمودار f' صعودی است، مشتق f' یعنی f'' مثبت است $\rightarrow$ نقطه روبه بالا دارد

پس خلاصه می شود

در فاصله a تا b ، $f' < 0$ ، $f'' > 0$

در فاصله b تا c ، $f' > 0$ ، $f'' > 0$

در فاصله c تا d ، $f' > 0$ ، $f'' < 0$

در فاصله d تا e ، $f' < 0$ ، $f'' > 0$

در فاصله e تا g ، $f' > 0$ ، چون f' ثابت ماند $f'' = 0$

27
 $\frac{D}{D}$ از آنجا که $f'(b) = 0$ بود و $f'(b^+) > 0$ و $f'(b^-) < 0$ لذا تابع f در نقطه b دارای
 $\min$ نسبی است. البته چون $f'(b) = 0$ و $f''(b) > 0$ می باشد، قضیه آزمون مشتق دوم نیز

همین نتیجه را می دهد
 از آنجا که $f''(c) > 0$ و $f''(c^+) < 0$ و البته $f''(c) = 0$ (از اینجاست که f در اینجا صفر است)

لذا تابع f در نقطه c دارای عطف است

از آنجا که $f'(d) > 0$ و f''

از آنجا که $f'(d) = 0$ بود و $f'(x)$ در اطراف نقطه d تغییر علامت ندارد $f'(d^+)$ و $f'(d^-)$ هر دو مثبتند
 لذا تابع f در نقطه d نیز دارای عطف است، البته چون $f'(d) = 0$ بود و $f''(d^-) < 0$ و $f''(d^+) > 0$
 است، از اینجا نیز می توان دریافت نمودار f در نقطه d دارای عطف می باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \text{نزولی: } f : a, b \\ \text{صعودی: } f : b, c \end{array} \right\} x=b \text{ سینکسید است}$$

$x=c$	
صعودی f'	نزولی
$f'' +$	$-$
$f \cup$	$\cap$
عطف	

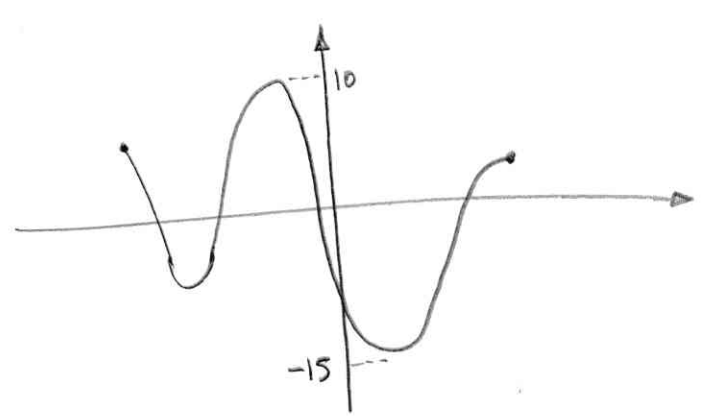
$x=d$	
صعودی f'	نزولی
$f'' -$	$+$
$f \cap$	$\cup$
عطف	

اکتّمهای مطلق یک تابع و استفاده از آن برای یافتن برد تابع پیوسته:

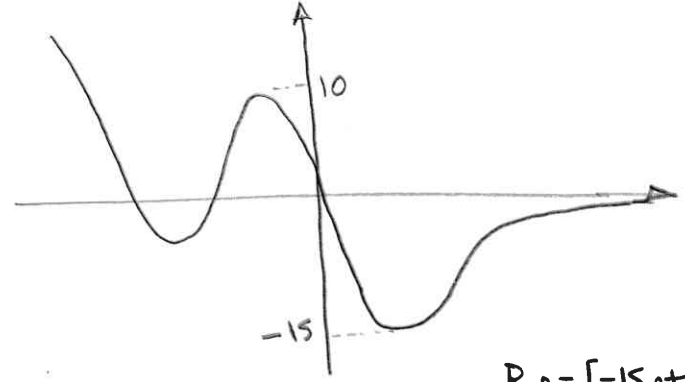
نقاط اکتّم مطلق یک تابع نقاطی از نمودار آن تابع هستند که در کل منحنی تابع دارای بیشترین و کمترین مقادیر لای باشند (و نت کنند مقادیر اکتّم مطلق باید در یک یا دو نقطه و قابل حصول باشند و صرف نزدیک شدن به آنها کافی نیست)

توضیح: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، قطعاً در این فاصله دارای $\max$ و $\min$ مطلق خواهد بود و این مقادیر اکتّم مطلق را یا در یکی از نقاط بحرانی تابع $f(x)$ که در فاصله (a, b) واقع است و یا در یکی از نقاط مرزی $x=a$ یا $x=b$ احتمالی کند

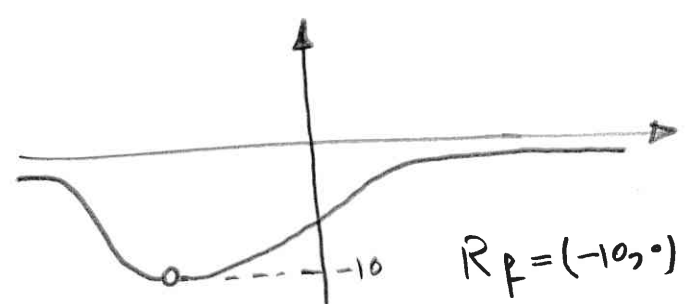
نکته: وقتی $f(x)$ در تمام دامنه تعریفش پیوسته است، با استفاده از مقادیر اکتّم مطلق تابع و بررسی رفتار تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی فاصله تعریف کرد احتمالاً بصورت باز مطرح شده اند) می توان برد تابع را تعیین کرد



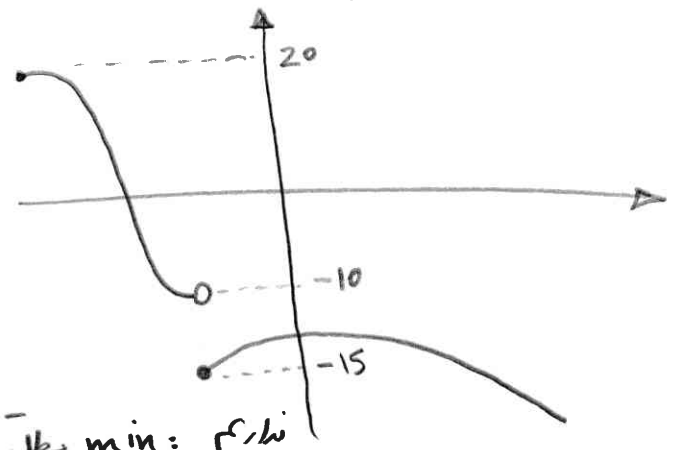
$\min$ مطلق $= -15$
 $\max$ مطلق $= 10$
 $R_f = [-15, 10]$



$R_f = [-15, +\infty)$
 $\min$ مطلق $= -15$
 $\max$ مطلق: نداریم



$\min$ مطلق: نداریم
 $\max$ مطلق: نداریم



$\min$ مطلق: نداریم
 $\max$ مطلق: 20

قضیه مقدار میانی: هرگاه تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، آن گاه $f(x)$ هر مقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را به ازای $x \in [a, b]$ اختیار می کند.

قضیه بولتزانه: هرگاه $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته بوده و $f(a) \cdot f(b) < 0$ باشد، آن گاه

$$\exists c \in (a, b) \mid f(c) = 0$$

یعنی نمودار تابع f در فاصله (a, b) حداقل یک بار محور x ها را قطع می کند.

قضیه رول: هرگاه: $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد
 $f(x)$ در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد

$$f(a) = f(b)$$

$$\exists c \in (a, b) \mid f'(c) = 0$$

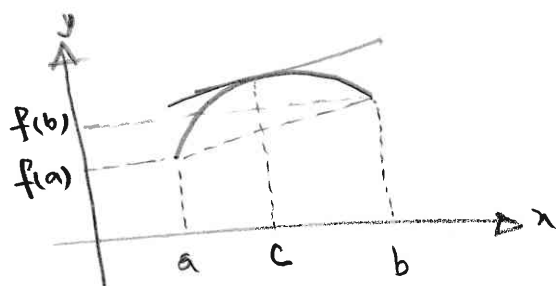
یعنی ضیب خط مماس بر نمودار f در فاصله (a, b) حداقل یک جا صفر می شود.

قضیه لاکرانژ (قضیه مقدار میانی در مشتق): هرگاه:

$f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد

$f(x)$ در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد

$$\exists c \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



یعنی خط مماس در فاصله (a, b) حداقل یک جا موازی با خط وصل بین نقاط $x=a$ و $x=b$ می شود.

قضیه کووشی: هرگاه: $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشند
 $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشند

$$\exists c \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

دو شیبه از قضیه لانه را داریم:

هنگامه $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ دارای شرایط قضیه لانه باشد داریم:
الف) خنثی معاله $f'(x) = 0$ در فاصله $[a, b]$ دارای k تار شبه حقیقی باشد معاله $f(x) = 0$ در فاصله $[a, b]$ حداکثر $k+1$ بار می تواند دارای تار شبه حقیقی باشد.

ب) خنثی m و مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق $f(x)$ برای x های در بازه $[a, b]$ باشد داریم:

$$m < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < M$$

سایل بینه سازی:

گاهی می خواهیم یک کمیت را که به دو متغیر وابسته بوده و البته رابطه ای خاص بین آن دو متغیر برقرار می باشد، اکتهم کنیم.

برای این منظور رابطه بین آن دو متغیر و نیز رابطه بین آن کمیت با دو متغیر مذکور را یافته و از این کمیت جدا بحث را بر حسب تنها یک متغیر باز نویسی می کنیم. لکن با توجه به محدودیت مجاز برای این متغیر و با استفاده از روش مقادیر اکتهم کمیت مورد نظر را حساب می کنیم.

تعیین اکتهم فاصله نقاط یک منحنی تابعه مختصات.

به عنوان مثال خاص از سایل بینه سازی یافتن بیشترین و کمترین فاصله نقاط یک منحنی تابعه مختصات مطرح می شود.

طبیعی است فاصله نقطه (x, y) تا مبدأ برابر $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد، لذا اگر معاله منحنی مورد نظر را بتوان

بصورت صریح $y = q(x)$ یا $x = p(y)$ بیان کرد، به سادگی می توان d را بر حسب تنها یک متغیر نوشته و مقادیر اکتهم آن را حساب کرد.

(در صورتیکه معاله منحنی بصورت ضمنی $F(x, y) = 0$ بیان شده باشد مساله ما یافتن مقادیر اکتهم تابع دو متغیره d ؛ شرط $F(x, y) = 0$ است که با روش لاگرانژ در مبحث II قابل تحلیل می باشد)

توجه هم: از آنجا که در مختصات قطبی r به معنای فاصله هر نقطه از منحنی تا مبدأ می باشد،
 در اکثر بیان منحنی در نرم قطبی سازه باشد و از آنجا بتوان r را بصورت تابعی از θ بدست آورد، برای یافتن
 اکسترم تعادله فاصله نقاط مختلف منحنی تا مبدأ کافیست اکسترم تعادله فاصله نقاط مختلف منحنی تا مبدأ کافی
 است اکسترم تعادله ممکنه برای r که به ازای θ های مختلف حاصل می گردد ($0 < r < +\infty$) را بدست آوریم.

چند نکته در یافتن اکسترمهای مربوط:

اگر x, y, z نسبت باشند می توان بیان کرد:

(1) هرگاه $x+y+z=k$ آنگاه حدالته عبارت $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ زمانی رخ می دهد که: $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$

(2) هرگاه $xyz=k$ آنگاه حدالته عبارت $x^k+y^k+z^k$ زمانی رخ می دهد که: $x=y=z$

(3) هرگاه $x^2+y^2+z^2=k$ آنگاه حدالته عبارت $\alpha x+\beta y+\gamma z$ زمانی رخ می دهد که:

$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ (اعداد نسبتند)

(4) هرگاه $x^\alpha y^\beta z^\gamma = k$ آنگاه حدالته عبارت $x+y+z$ زمانی رخ می دهد که:

$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$

(5) هرگاه $x+y+z=k$ آنگاه حدالته عبارت $x^n+y^n+z^n$ زمانی رخ می دهد که $x=y=z$

(6) هرگاه $x^n+y^n+z^n=k$ آنگاه حدالته عبارت $x+y+z$ زمانی رخ می دهد که $x=y=z$