

« معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی »

هر معادله شامل یک تابع مجهول (مانند u) که حداقل دارای دو متغیر مستقل (مانند x و y) و مشتقات جزئی u نسبت به x و y باشد را معادله با مشتق جزئی می‌نامیم. برای مثال هر کدام از معادلات زیر یک معادله با مشتق جزئی هستند:

$$1) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2 + 1$$

$$2) u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_t = 2$$

که معادله (۱) دارای دو متغیر و معادله (۲) شامل ۴ متغیر مستقل است. لازم به یادآوری است که به مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله مرتبه معادله مشتق جزئی گفته می‌شود که با این تعریف ملاحظه می‌گردد معادله (۱) مرتبه اول و معادله (۲) مرتبه دوم است.

نکته: اگر u_1, u_2 دو جواب یک معادله‌ی خطی و همگن با مشتق‌های جزئی باشند، آنگاه $C_1 u_1 + C_2 u_2$ (که C_1 و C_2 ضرایب ثابت هستند) نیز یک جواب معادله است.

معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی خطی

صورت کلی معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی خطی مرتبه دوم نسبت به دو متغیر به فرم زیر است:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = G$$

که در آن $A, B, \dots, G$ ممکن است به x و y بستگی داشته باشند، ولی به u بستگی ندارند. هر معادله مرتبه دوم را که به فرم این معادله نیست را غیر خطی می‌نامیم.

البته اگر فقط ضرایب A, B و C به متغیرهای مستقل x و y وابسته بوده و به u وابسته نباشند، آنگاه معادله را شبه خطی می‌نامند. (فرق این حالت نسبت به حالت خطی این است که در این حالت ضرایب D, E, F و G علاوه بر x یا y ممکن است به u نیز بستگی داشته باشند).

اگر $G = 0$ معادله را همگن و اگر $G \neq 0$ آن را ناهمگن می‌نامیم. اگر $B^2 - 4AC > 0$ آنگاه معادله را هذلولی‌گون، اگر $B^2 - 4AC = 0$ آنگاه معادله را سه‌می‌گون و بالاخره اگر $B^2 - 4AC < 0$ معادله را بیضی‌گون می‌نامیم.

معادله $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ (که موسوم به معادله موج است) با توجه به اینکه $A = a^2, B = 0, C = -1$ است، یک معادله هذلولی‌گون است. و معادله $u_t = a^2 u_{xx}$ (که موسوم به معادله گرما است) با توجه به اینکه $A = a^2, B = 0, C = 0$ است یک معادله سه‌می‌گون و معادله $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (که موسوم به معادله لاپلاس است) با توجه به اینکه $A = 1, B = 0, C = 1$ است، یک معادله بیضی‌گون است.

تذکره: رفتار جواب معادله در حالتی که معادله همگن است ($G = 0$) نسبت به حالتی که معادله ناهمگن است ($G \neq 0$) متفاوت است.

مثال ۱: در مورد معادله با مشتق جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3y^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) در ناحیه $xy > 0$ بیضی گون و در ناحیه $xy = 0$ سهمی گون است.

(۲) در ناحیه $xy > 0$ هذلولی گون و در ناحیه $xy < 0$ بیضی گون است.

(۳) در ناحیه $xy > 0$ بیضی گون و در ناحیه $xy < 0$ هذلولی گون است.

(۴) در ناحیه $xy < 0$ هذلولی گون و در ناحیه $xy = 0$ سهمی گون است.

✓ پاسخ: گزینه «۲» در این تست $A = x$ ، $B = 0$ و $C = y$ می باشد لذا $B^2 - 4AC = -4xy$ خواهد بود که در ناحیه $xy > 0$ معادله بیضی گون، در ناحیه $xy < 0$ هذلولی گون و به ازای $xy = 0$ معادله سهموی است.

فرم کانونی معادلات در حالت‌های مختلف

ساده کردن این نوع معادلات به کانونیک کردن معروف است.

معادله کانونی از نوع هذلولی گون

$$u_{\zeta\eta} = H(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$$

معادله کانونی از نوع سهمی گون

$$u_{\zeta\zeta} \text{ یا } u_{\eta\eta} = H(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$$

معادله کانونی از نوع بیضی گون

$$u_{\zeta\zeta} + u_{\eta\eta} = H(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$$

به دست آوردن تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک

برای کانونیک کردن فرم معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی مرتبه دوم، معادله مشخصه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0$$

پس از حل معادله فوق که یک معادله درجه دوم برای $\frac{dy}{dx}$ است، بر حسب نوع جواب‌ها شرایط زیر را داریم:

(۱) **معادلات هذلولی گون:** در حالتی که $B^2 - 4AC > 0$ باشد، آنگاه دو جواب به صورت $f(x, y) = c_1$ و $g(x, y) = c_2$ به دست می‌آیند که تغییر متغیرهای لازم $\zeta = f(x, y)$ و $\eta = g(x, y)$ می‌باشند.

(۲) **معادلات سهمی گون:** در حالتی که $B^2 - 4AC = 0$ باشد، آنگاه یک جواب به صورت $f(x, y) = c_1$ و یک جواب می‌تواند دلخواه در نظر گرفته شود. که تغییر متغیرهای لازم می‌توانند به شکل زیر انتخاب شوند:

$$\begin{cases} \zeta = f(x, y) \\ \eta = y \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \eta = f(x, y) \\ \zeta = x \end{cases}$$

(۳) **معادلات بیضوی:** در حالتی که $B^2 - 4AC < 0$ ، آنگاه معادله دارای دو جواب مختلط است:

$$\begin{cases} \zeta = \alpha + i\beta \\ \eta = \alpha - i\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\zeta + \eta}{2} \\ \beta = \frac{\zeta - \eta}{2i} \end{cases}$$

با استفاده از این تبدیلات، این نوع معادلات به فرم زیر تبدیل می‌شوند:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = (\text{معادله‌ای مرتبه اول})$$

مثال ۲: با کدام تغییر متغیر معادله $xu_{xx} - yu_{xy} = 0$ به فرم کانونی (نرمال) تبدیل می‌شود؟

$$v = xy, z = \frac{x}{y} \quad (۴)$$

$$v = y, z = xy \quad (۳)$$

$$v = x, z = x + y \quad (۲)$$

$$v = x, z = x - y \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به معادله مقادیر A و B و C را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow xu_{xx} - yu_{xy} = 0 \Rightarrow A = x, B = -y, C = 0$$

$$\Rightarrow x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right) \left[x \left(\frac{dy}{dx} \right) + y \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = c_1 \Rightarrow \boxed{v=y} \\ x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow xdy + ydx = 0 \Rightarrow xdy = -ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln y = -\ln x + c_2 = -\ln x + \ln c_3 = \ln \frac{c_3}{x} \Rightarrow y = \frac{c_3}{x} \Rightarrow c_3 = xy \Rightarrow \boxed{z=xy}$$

مثال ۳: معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی (f تابع مفروض و پیوسته) $u_{xx} + 2u_{xy} + (\cos x)u_{yy} = f(x, y)$ با کدام تغییر

متغیرها به صورت کانونیک (استاندارد) خودش در می‌آید؟

$$\left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = y - x \pm 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \quad (۴) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = y + x \pm 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \quad (۳) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = y - x \pm 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \quad (۲) \quad \left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = y + x \pm 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به معادله‌ی داده شده، $A = 1$, $B = 2$, $C = \cos x$ ، لذا داریم:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right) + \cos x = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \cos x = 4(1 - \cos x) > 0$$

از حل معادله فوق دو جواب زیر را داریم:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \pm \sqrt{1 - \cos x} = 1 \pm \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \Rightarrow y = x + 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} + c_1, \quad y = x - 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} + c_2$$

تغییر متغیرهای مناسب، جواب‌های ثابت معادلات فوق هستند و لذا داریم:

$$\eta = c_1 = y - x - 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}, \quad \xi = c_2 = y - x + 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}$$

مثال ۴: نوع معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y$ و صورت نرمال آن کدام است؟

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y, \text{ بیضوی} \quad (۴) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{4} e^x, \text{ بیضوی} \quad (۳) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{4} e^y, \text{ سهمی} \quad (۲) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4} e^y, \text{ سهمی} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\Delta = B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0 \Rightarrow \text{بنابراین معادله از نوع سهمی‌گون می‌باشد.}$$

برای به دست آوردن تغییر متغیرهای مناسب برای تبدیل معادله فوق به فرم استاندارد داریم:

$$A = 1, B = -4, C = 4 \Rightarrow 1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (-4) \left(\frac{dy}{dx} \right) + 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} + 2 \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2$$

$$dy = -2dx \Rightarrow \int dy = -2 \int dx \Rightarrow y = -2x + c \Rightarrow y + 2x = c$$

یکی از تغییر متغیرها $r = y + 2x$ می باشد و چون معادله مشخصه ریشه مضاعف داشت، تغییر متغیر دیگر به صورت دلخواه $s = y$ انتخاب می شود:

$$\begin{cases} r = 2x + y \\ s = y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} (2) + 0 = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) = u_{rr} + u_{ss} + 2u_{rs}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial r} (u_r + u_s) = 2u_{rr} + 2u_{rs}$$

$$\Rightarrow u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y \Rightarrow 4u_{rr} - 4(2u_{rr} + 2u_{rs}) + 4(u_{rr} + u_{ss} + 2u_{rs}) = e^y$$

$$\Rightarrow 4u_{ss} = e^y = e^s \Rightarrow u_{ss} = \frac{1}{4} e^s \Rightarrow \boxed{u_{yy} = \frac{1}{4} e^y}$$

مثال ۵: فرم کانونی معادله $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$ به کدام صورت است؟

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{1}{\alpha^2} u_{\alpha} \quad (1) \quad u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{1}{\alpha^2} u_{\alpha} \quad (2) \quad u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{\alpha^2} u_{\beta} \quad (3) \quad u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{\alpha^2} u_{\beta} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که $B^2 - 4AC = -4x^2 < 0$ ، لذا معادله بیضوی است و داریم:

$$\frac{dy}{dx} = ix \Rightarrow dy = ix dx \Rightarrow y = \frac{1}{2} ix^2 + k_1 \Rightarrow 2y - ix^2 = c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -ix \Rightarrow dy = (-ix) dx \Rightarrow y = -\frac{1}{2} ix^2 + k_2 \Rightarrow 2y + ix^2 = c_2$$

بنابراین با توجه به نکته خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \zeta = 2y - ix^2 \\ \eta = 2y + ix^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\zeta + \eta}{2} = 2y \\ \beta = \frac{\zeta - \eta}{2i} = -x^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \times (0) + \frac{\partial u}{\partial \beta} (-2x) = -2x \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-2x \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = -2 \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right] (-2x) = -2 \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} (-2x)(-2x) = -2 \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} (4x^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} (2) + \frac{\partial u}{\partial \beta} \times (0) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \times 2 = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \times (2) \times 2 = 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \right)$$

حالا در معادله جایگذاری می کنیم، دقت کنید $\beta = -x^2$ بنابراین به جای x^2 در معادله β قرار می دهیم:

$$-2u_{\beta} - (u_{\beta\beta})(4\beta) + (-\beta)(4u_{\alpha\alpha}) = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \beta} -\frac{1}{\beta^2} (u_{\beta}) - u_{\beta\beta} - u_{\alpha\alpha} = 0 \Rightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{\beta^2} u_{\beta}$$

۱) حذف پارامتر ثابت: در برخی مسائل جواب یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی داده می‌شود و از ما می‌خواهند معادله دیفرانسیل مربوطه را به دست بیاوریم. اگر در رابطه بین متغیرهای مستقل (مثلاً x و y) و متغیر وابسته (مثلاً u) چند پارامتر ثابت وجود داشته باشد، آنگاه با مشتق‌گیری نسبت به متغیرهای مستقل به تعداد کافی معادله ایجاد می‌کنیم، تا پارامترهای ثابت حذف گردند.

مثال ۶: با حذف پارامتر ثابت در رابطه $z = ax^2 + by^2 + x$ معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی حاکم بر آن را بنویسید.
 پاسخ: با دو بار مشتق‌گیری نسبت به x و y داریم:

$$\left. \begin{aligned} z &= ax^2 + by^2 + x \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= 2ax + 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2by \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z - x$$

۲) حذف توابع دلخواه: در این حالت نیز با همان روش اول می‌توانیم تابع دلخواه را حذف کنیم:

مثال ۷: در رابطه $f(x^2 + z^2, y^2 + z^2) = 0$ که x و y متغیرهای مستقل و z متغیر وابسته می‌باشد، تابع دلخواه f را حذف کنید.

پاسخ: با فرض $u = x^2 + z^2$ و $v = y^2 + z^2$ از رابطه $f(u, v) = 0$ نسبت به x و y مشتق می‌گیریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}) \frac{\partial f}{\partial u} + (2z \frac{\partial z}{\partial x}) \frac{\partial f}{\partial v} &= 0 \\ (2z \frac{\partial z}{\partial y}) \frac{\partial f}{\partial u} + (2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y}) \frac{\partial f}{\partial v} &= 0 \end{aligned} \right.$$

برای داشتن جواب غیر صفر در یک دستگاه همگن باید دترمینان ضرایب صفر گردد، لذا داریم:

$$\begin{vmatrix} 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} & 2z \frac{\partial z}{\partial x} \\ 2z \frac{\partial z}{\partial y} & 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0$$

تذکره: در واقع برای رسیدن به معادلاتی که تابع آن‌ها به فرم کلی $F[u(x, y, z), v(x, y, z)] = 0$ است (متغیرهای x و y مستقل از هم، ولی z تابعی از x و y است) باید دترمینان زیر را مساوی صفر قرار دهید:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

یادتان باشد در روابط باید به جای مشتق z نسبت به x ، z_x و به جای مشتق z نسبت به y ، z_y قرار دهید.

مثال ۸: با حذف تابع دلخواه ϕ بین متغیر وابسته z و متغیرهای مستقل x و y در رابطه $\phi(x^2 - z^2, xy) = 0$ کدام معادله دیفرانسیل با مشتق نسبی حاصل می‌شود؟

$$\begin{aligned} xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 \quad (۴) & x \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 \quad (۳) & xz \frac{\partial z}{\partial x} - yz \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 \quad (۲) & x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 \quad (۱) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه «۲» با فرض $u = x^2 - z^2$ و $v = xy$ از رابطه $\phi(u, v) = 0$ نسبت به x و y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix} 2x - 2z \frac{\partial z}{\partial x} & y \\ -2z \frac{\partial z}{\partial y} & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2xz \frac{\partial z}{\partial x} + 2yz \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow xz \frac{\partial z}{\partial x} - yz \frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

مثال ۹: فرض کنید $z = z(x, y)$ در معادله‌ی $\phi(\frac{z}{x^2}, \frac{y}{x}) = 0$ صدق نماید، z در کدام معادله دیفرانسیل صدق می‌کند؟

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 \quad (۴)$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x} = 3z \quad (۳)$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (۲)$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۱» با فرض $u = \frac{z}{x^2}$ و $v = \frac{y}{x}$ داریم:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{cc} x \frac{\partial z}{\partial x} - 3z & -y \\ x^2 & x^2 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow \frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - 3z}{x^4} + \frac{y}{x^4} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} - 3z + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

روش‌های حل معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی

(۱) استفاده از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل معمولی و انتگرال‌گیری

در برخی مسائل، u تابعی از دو متغیر مستقل x و y است، اما فقط یکی از مشتقات جزئی آن (یعنی u_x یا u_y) در معادله وجود دارد. این نوع معادلات را می‌توان با همان روش معادلات دیفرانسیل معمولی حل کرد. فقط توجه کنید، ثابت انتگرال‌گیری مانند معادلات معمولی، عدد ثابت نیست و تابعی از متغیری است که مشتق جزئی آن در معادله وجود ندارد. این نوع معادلات که عموماً صورت‌های ساده‌تر معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی هستند را با حل چند مثال شرح می‌دهیم:

مثال ۱۰: پاسخ معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی $u_{xx} - u = 0$ کدام است؟

$$A(x)e^{-x} + B(y)e^x \quad (۴)$$

$$A(y)e^x + B(y)e^{-x} \quad (۳)$$

$$A(y)e^{-x} + B(x)e^x \quad (۲)$$

$$A(x)e^x + B(x)e^{-x} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳» معادله فوق یک معادله دیفرانسیل معمولی $u'' - u = 0$ می‌باشد که می‌دانیم جواب آن به صورت $Ae^x + Be^{-x}$ خواهد بود. در آن A و B دو مقدار ثابت هستند. اما با توجه به اینکه ممکن است A و B بر حسب y باشند، پاسخ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$u(x, y) = A(y)e^x + B(y)e^{-x}$$

مثال ۱۱: جواب‌های معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی $u_{xy} = -u_x$ کدام است؟

$$f(y)e^{-x} + g(x) \quad (۴)$$

$$f(y)e^x + g(x) \quad (۳)$$

$$f(x)e^{-y} + g(y) \quad (۲)$$

$$f(x)e^y + g(x) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» با فرض $u_x = P$ معادله به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$P_y = -P \Rightarrow \frac{P_y}{P} = -1 \Rightarrow \int \frac{P_y}{P} dy = \int (-1) dy \Rightarrow \ln P = -y + \ln[k(x)] \Rightarrow P = k(x)e^{-y}$$

$$\Rightarrow \int P dx = \int k(x)e^{-y} dx \Rightarrow u = f(x)e^{-y} + g(y)$$

که در این رابطه $f(x) = \int k(x) dx$ است.

مثال ۱۲: جواب معادله $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = x^2$ کدام است؟

$$\frac{x^2}{6} + f(t) + \frac{g(x)}{t^2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{6} t^2 x^2 + f(t) + \frac{g(x)}{t^2} \quad (۳)$$

$$t^2 x^2 + f(t) + g(x) \quad (۲)$$

$$tx^2 + f(t) + g(x) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[t \frac{\partial u}{\partial t} + 2u \right] = x^2 \xrightarrow{\text{نسبت به } x \text{ انتگرال می‌گیریم}} t \frac{\partial u}{\partial t} + 2u = \frac{x^2}{3} + h(t) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2}{t} u = \frac{x^2}{3t} + \frac{h(t)}{t}$$

معادله به دست آمده یک معادله دیفرانسیل معمولی با عامل انتگرال‌ساز t^2 است.

حال نسبت به t انتگرال می‌گیریم:

$$t^2 u = \frac{t^2 x^2}{6} + \int t h(t) dt + g(x) \Rightarrow u = \frac{x^2}{6} + f(t) + \frac{g(x)}{t^2}$$

(۲) حل معادلاتی به فرم کلی $au_x + bu_y + cu = 0$

جواب عمومی این نوع معادلات وقتی $a \neq 0$ به صورت کلی زیر است:

$$u = e^{-\frac{c}{a}x} f(ay - bx) \quad (a \neq 0)$$

و وقتی $b \neq 0$ می‌توان جواب عمومی را به صورت زیر نمایش داد:

$$u = e^{-\frac{c}{b}y} f(ay - bx) \quad (b \neq 0)$$

مثال ۱۳: جواب معادله $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = x$ کدام است؟

$$u = \sin(y - 2x) + x \quad (۴) \quad u = \sin(y - 2x) - \frac{x^2}{2} + 1 \quad (۳) \quad u = f(y - 2x) + \frac{x^2}{2} \quad (۲) \quad u = e^{y-2x} - \frac{x^2}{2} + 1 \quad (۱)$$

✓ پاسخ: گزینه «۲» جواب عمومی معادله $u_x + 2u_y = 0$ با توجه به اینکه در این تست $a=1, b=2, c=0$ می‌باشد، به صورت $u = f(y - 2x)$ است، اما چون این معادله همگن نیست باید جواب خصوصی را نیز به دست آورده و به جواب عمومی اضافه کنیم، با توجه به طرف دوم و گزینه‌ها اگر جواب خصوصی را به صورت kx^2 در نظر بگیریم، با قرار دادن آن در معادله $k = \frac{1}{2}$ به دست خواهد آمد.

(۳) حل معادلاتی به فرم کلی $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$

برای حل این معادلات معادله مشخصه $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ را تشکیل می‌دهیم، اگر معادله مشخصه دو جواب متمایز λ_1 و λ_2 داشته باشد، آنگاه جواب‌های معادله با مشتق جزئی فوق برابر است با:

$$u = f(y + \lambda_1 x) + g(y + \lambda_2 x)$$

و اگر معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف (λ) باشد، آنگاه جواب‌های معادله با مشتق جزئی فوق برابر است با:

$$u = f(y + \lambda x) + xg(y + \lambda x)$$

واضح است که اگر معادله مشخصه یک جواب مانند λ داشته باشد، آنگاه $u = f(y + \lambda x)$ تنها جواب معادله با مشتق جزئی است. در نهایت در حالتی که جواب‌های معادله مشخصه مختلط باشد، آن‌گاه جواب را به یکی از دو صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$\begin{cases} u = f[x + (\alpha + i\beta)y] + g[x + (\alpha - i\beta)y] \\ u = f[y + (\alpha - i\beta)x] + g[y + (\alpha + i\beta)x] \end{cases}$$

مثال ۱۴: جواب عمومی معادله $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ کدام است؟

$$z = f(y - 1 + \frac{x}{\sqrt{2}}) + g(y - 1 + \frac{x}{\sqrt{2}}) \quad (۲)$$

$$z = f(\frac{y+x}{\sqrt{2}} - y) + g(\frac{y-x}{\sqrt{2}} + y) \quad (۱)$$

$$z = f(y - 1 + \frac{x}{\sqrt{2}}) + g(y - x - \frac{x}{\sqrt{2}}) \quad (۴)$$

$$z = f(y + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)x) + g(y - (\frac{1}{\sqrt{2}} + 1)x) \quad (۳)$$

✓ پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مطالب فوق داریم:

$$2\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16-2}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z = f(y + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)x) + g(y - (\frac{1}{\sqrt{2}} + 1)x)$$

لذا جواب عمومی به صورت مقابل است:

مثال ۱۵: پاسخ معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:
 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$
 لذا جواب عمومی به صورت مقابل است:
 $u(x, y) = f(y + \lambda x) + xg(y + \lambda x) \xrightarrow{\lambda=1} u(x, y) = f(x+y) + xg(y+x)$

مثال ۱۶: پاسخ معادله با مشتق جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 10e^{2x+y}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲» پاسخ‌های معادله همگن با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه که $\lambda = \pm i$ می‌باشد به صورت زیر است:
 $u = F_1(x+iy) + F_2(x-iy) + 2e^{2x+y}$
 $u = F_1(x+iy) + F_2(x-iy) + e^{2x+y}$
 از طرفی با توجه به طرف دوم معادله برای به دست آوردن پاسخ خصوصی می‌توانیم جواب $u_p = ke^{2x+y}$ را در معادله جایگزین کنیم که پس از این جایگزینی $k = 2$ به دست خواهد آمد، لذا جواب کامل معادله به فرم زیر است:

$$u = F_1(x+iy) + F_2(x-iy) + 2e^{2x+y}$$

مثال ۱۷: جواب‌های معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = e^{2x+y}$ برابر کدام گزینه است؟

پس داریم:
 برای به دست آوردن جواب خصوصی آن از اپراتور D استفاده می‌کنیم:
 $(D_x^2 + 3D_x D_y + 2D_y^2)u = e^{2x+y} \Rightarrow u_p = \frac{1}{D_x^2 + 3D_x D_y + 2D_y^2} e^{2x+y} = \frac{1}{2^2 + 3(2)(1) + 2(1)^2} e^{2x+y} = \frac{1}{12} e^{2x+y}$
 $u = \frac{1}{F(D_x, D_y)} e^{\alpha x + \beta y} = \frac{1}{F(\alpha, \beta)} e^{\alpha x + \beta y}$
 $u(x, y) = f(y-x) + g(y-2x) + \frac{1}{12} e^{2x+y}$

توضیح: در قسمت آخر حل فوق از رابطه مقابل استفاده کردیم:

بنابراین جواب نهایی به شکل مقابل نوشته می‌شود:

۴) حل معادلات خطی مرتبه اول با استفاده از دستگاه لاگرانژ

برای حل معادلاتی به فرم کلی $A(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$ ابتدا باید دو جواب دستگاه لاگرانژ را به دست آورد:

$$\frac{dx}{A(x, y, z)} = \frac{dy}{B(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

که اگر $u(x, y, z) = c_1$ و $v(x, y, z) = c_2$ دو جواب عمومی دستگاه باشند آنگاه جواب عمومی معادله را می‌توان به یکی از سه حالت $u = H(v)$, $v = H(u)$ یا $H(u, v) = 0$ نوشت.

مثال ۱۸: جواب‌های معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$ به صورت $u = f(\frac{xy}{x+y})$ کدام است؟

$$u = \frac{Cxy}{x+y} \quad (۲)$$

$$u = \frac{Cx^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (۱)$$

$$u = C\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 \quad (۴)$$

(۳) جواب به صورت خواسته شده وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۳»

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2u} \Rightarrow \frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{u}{y^2} = c_2$$

با توجه به دو جواب عمومی جواب معادله را می‌توان به صورتهای $h(\frac{u}{y^2}, \frac{x}{y}) = 0$ و $u = y^2 f(\frac{x}{y})$ بیان نمود. ملاحظه می‌گردد هیچکدام از جواب‌ها به فرم خواسته شده در صورت سؤال نیست.

مثال ۱۹: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ کدامیک از توابع زیر است؟

$$z = f(x^2 - y^2) \quad (۲)$$

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad (۱)$$

$$z = f(x - y) \quad (۴)$$

$$z = f(xy) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow xdx = ydy \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 2c_1 \Rightarrow x^2 - y^2 = c \Rightarrow u(x, y) = c \Rightarrow v = h(u) \text{ یا } z = f(x^2 - y^2)$$

مسائل مقدار مرزی

هر مسأله مقدار مرزی شامل یک معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی می‌باشد که پس از حل معادله جواب‌های این معادله با مشتق جزئی باید در شرایطی به نام شرایط مرزی (که عموماً در صورت مسأله این شرایط ذکر می‌گردند) صدق کنند.

مثال ۲۰: پاسخ معادله $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$ با شرایط مرزی $z(x, 0) = x^2$ و $z(1, y) = \cos y$ کدام است؟

$$z = \frac{x^2 y^2}{6} + \cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - 1 \quad (۲)$$

$$z = \frac{x^2 y^2}{6} + \cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 \quad (۱)$$

$$z = -\frac{x^2 y^2}{6} + \cos y + \frac{y^2}{6} + x^2 - 1 \quad (۴)$$

$$z = \frac{x^2 y^2}{6} + \cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - 1 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = x^2 y \xrightarrow{\text{نسبت به } x \text{ انتگرال می‌گیریم}} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 y}{2} + F(y) \xrightarrow{\text{نسبت به } y \text{ انتگرال می‌گیریم}} z = \frac{x^2 y^2}{6} + \int F(y) dy + g(x)$$

$$z(x, y) = \frac{1}{6} x^2 y^2 + h(y) + g(x)$$

$$z(x, 0) = x^2 \Rightarrow g(x) + h(0) = x^2 \Rightarrow g(x) = x^2 - h(0)$$

$$z = \frac{x^2 y^2}{6} + h(y) + x^2 - h(0) \quad (۱)$$

با فرض $\int F(y) dy = h(y)$ شرایط مرزی را در جواب کنترل می‌کنیم:

یعنی جواب به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$z(1, y) = \cos y \Rightarrow \cos y = \frac{y^2}{6} + h(y) + 1 - h(0) \Rightarrow h(y) = \cos y - \frac{1}{6} y^2 - 1 + h(0) \quad (۲)$$

$$z = \frac{x^2 y^2}{6} + \cos y - \frac{y^2}{6} + x^2 - 1$$

اگر مقدار $h(y)$ از رابطه (۲) را در معادله (۱) قرار دهیم، داریم:

مثال ۲۱: کدامیک از موارد زیر حل معادله $u_x = 4u_y$ با شرط $u(0, y) = \lambda e^{-2y}$ می باشد؟

۴) $u(x, y) = \lambda e^{12x-2y}$

۳) $u(x, y) = \lambda e^{4x-2y}$

۲) $u(x, y) = \lambda e^{-12x+2y}$

۱) $u(x, y) = \lambda e^{-12x-2y}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از دستگاه لاگرانژ داریم: ☒

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-4} = \frac{du}{0} \Rightarrow \begin{cases} du = 0 \\ -4dx = dy \end{cases} \Rightarrow u = c_1, 4x + y = c_2$$

$$u(x, y) = f(y + 4x) \xrightarrow[u(0, y) = \lambda e^{-2y}]{u(0, y) = f(y)} f(y) = \lambda e^{-2y} \Rightarrow f(y + 4x) = \lambda e^{-2(y+4x)} = \lambda e^{-12x-2y}$$

حل معادلات با مشتقهای جزئی به روش تفکیک متغیرها

فرض کنیم بخواهیم معادله با مشتق جزئی با پارامتر وابسته u و متغیرهای مستقل x و y را حل کنیم، برای این منظور تابع u را به صورت $u(x, y) = F(x).G(y)$ در نظر می گیریم (با این تفکر که جواب به این صورت است) پس از مشتق گرفتن از عبارت و قرار دادن آن در معادله با مشتق جزئی در نهایت به معادله های دیفرانسیل معمولی خواهیم رسید که با توجه به شرایط مسأله قابل حل خواهد بود.

مثال ۲۲: جوابی از معادله $u_x + u_y = 2(x+y)u$ کدام است؟

۴) $u = Ce^{x^2-y^2+k(x+y)}$

۳) $u = Ce^{x^2+y^2+k(x+y)}$

۲) $u = Ce^{x^2-y^2+k(x-y)}$

۱) $u = Ce^{x^2+y^2+k(x-y)}$

پاسخ: گزینه «۱» با فرض $u(x, y) = F(x).G(y)$ و جایگزین کردن آن در معادله داریم: ☒

$$F'G + FG' = (2x + 2y)FG$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} + \frac{G'(y)}{G(y)} = 2x + 2y \Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} - 2x = -\frac{G'(y)}{G(y)} + 2y$$

با تقسیم طرفین تساوی بر FG داریم:

ملاحظه می شود به یک تساوی که طرفین آن شامل دو متغیر مختلف هستند، رسیدیم. برای برقراری این تساوی باید هر دو طرف برابر مقدار ثابت k در نظر گرفته شوند:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} - 2x = k \Rightarrow \ln \frac{F}{C_1} = x^2 + kx \Rightarrow F(x) = C_1 e^{x^2+kx}$$

$$\frac{G'(y)}{G(y)} + 2y = k \Rightarrow \ln \frac{G}{C_2} = y^2 - ky \Rightarrow G(y) = C_2 e^{y^2-ky}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = F(x).G(y) \Rightarrow u(x, y) = C_1.C_2 e^{x^2+y^2+k(x-y)} = Ce^{x^2+y^2+k(x-y)}$$

مثال ۲۳: کدامیک از معادلات زیر را نمی توان با روش جداسازی متغیرها حل کرد؟

۴) $u_{xy} + u_x + x + y = 0$

۳) $x^2 y u_x + u_y = 0$

۲) $u_{xy} + u_x = x$

۱) $u_{xx} + u_x - u_y = 0$

پاسخ: گزینه «۴» با فرض $u = F(x).G(y)$ داریم: ☒

۱) $F''G + F'G - F.G' = 0 \Rightarrow \frac{F'' + F'}{F} = \frac{G'}{G} = k$

۲) $F'.G' + F'.G = x \Rightarrow \frac{F'}{x} = \frac{1}{G' + G} = k$

۳) $x^2 y.F'.G + F.G' = 0 \Rightarrow \frac{x^2 F'}{F} = -\frac{G'}{yG} = k$

۴) $F'.G' + F'.G + x + y = 0$

ملاحظه می گردد که گزینه (۴) را نمی توان با این روش حل نمود.

رابطه‌های دیفرانسیل: ۲۴ مثال: کدامیک از معادلات زیر را می‌توان با روش جدا کردن متغیرها حل کرد؟

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + bu = 0 \quad (1)$$

(۳) هیچکدام

(۴) گزینه‌های (۱) و (۲) صحیح هستند.

پاسخ: گزینه «۴» با فرض $u(x, y) = F(x).G(y)$ داریم:

$$1) aF'(x)G'(y) + bF(x)G(y) = 0 \Rightarrow a \frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{bG(y)}{G'(y)} = k$$

$$2) x^2 F''(x).G(y) + yF(x).G''(y) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 F''(x)}{F(x)} = -y \frac{G''(y)}{G(y)} = k$$

۲۵ مثال: جواب معادله $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3y^2 u = 0$ کدام است؟

$$u = ce^{-k(x+y^3)} \quad (4)$$

$$u = ce^{(\frac{1}{kx} - ky^3)} \quad (3)$$

$$u = ce^{-(\frac{1}{ky} + kx^3)} \quad (2)$$

$$u = ce^{-(\frac{1}{kx} + ky^3)} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱» با فرض $u(x, y) = F(x).G(y)$ داریم:

$$x^2 F'G' + 3y^2 FG = 0 \Rightarrow x^2 \frac{F'}{F} = -3y^2 \frac{G'}{G} = k_1$$

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 \frac{F'(x)}{F(x)} = k_1 &\Rightarrow \ln \frac{F}{c_1} = -\frac{k_1}{x} \Rightarrow F(x) = c_1 e^{-\frac{k_1}{x}} \\ -3y^2 \frac{G'(y)}{G(y)} = k_1 &\Rightarrow \ln \frac{G}{c_2} = -\frac{y^3}{k_1} \Rightarrow G(y) = c_2 e^{-\frac{y^3}{k_1}} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow u(x, y) = c_1.c_2 e^{-\frac{k_1}{x} - \frac{y^3}{k_1}} = ce^{-(\frac{k_1}{x} + \frac{y^3}{k_1})}$$

با فرض $k_1 = \frac{1}{k}$ جواب به صورت $u = ce^{-(\frac{1}{kx} + ky^3)}$ نوشته می‌شود.

روش سه گام در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم با استفاده از تفکیک متغیرها

گام اول: در این گام سعی می‌کنیم معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به دو معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کنیم. برای این منظور به دنبال جوابهایی به صورت $u(x, y) = F(x)G(t)$ هستیم. و به دو معادله دیفرانسیل یکی فقط بر حسب x و یکی فقط بر حسب t خواهیم رسید.

گام دوم: با داشتن معادلات دیفرانسیل معمولی که از مرحله‌ی اول به دست آورده‌ایم و شرایط مرزی (مکانی)، با یک دستگاه معادله دیفرانسیل روبه‌رو هستیم که معروف به «مسائل اشتروم لیوویل» هستند و باید مقادیر ویژه و توابع ویژه را تعیین کنیم که با داشتن آن‌ها فرم کلی جواب (البته با ضرایب مجهول) تعیین می‌شود.

گام سوم: در آخرین گام با استفاده از شرایط اولیه، ضرایب مجهول به کمک تحلیل فوریه مشخص می‌شوند.

۲۶ مثال: در مسأله زیر، جواب معادله به کدام صورت است؟

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & -1 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(-1, t) = u(1, t), & u_x(-1, t) = u_x(1, t) \\ u(x, 0) = |x| \end{cases}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] e^{-2n^2 \pi^2 t} \quad (2)$$

$$u(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] e^{-2n^2 \pi^2 t} \quad (4)$$

$$u(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] e^{-n^2 \pi^2 t} \quad (1)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] e^{-n^2 \pi^2 t} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به روش سه گام مرحله به مرحله به این سؤال جواب می‌دهیم:

گام اول: فرض می‌کنیم جواب به صورت $u(x, t) = F(x).G(t)$ می‌باشد. بنابراین با جایگزین کردن آن در معادله داریم:

$$[F(x).G(t)]_t = \tau[F(x).G(t)]_{xx} \Rightarrow G'(t).F(x) = \tau[F''(x).G(t)]$$

با تقسیم طرفین بر $\tau G(t).F(x)$ داریم:

$$\frac{G'(t)}{\tau G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

برای این که عبارت فوق که یکی فقط بر حسب x و دیگری فقط بر حسب t می‌باشد، بتوانند مساوی هم باشند، لازم است هر دوی آن‌ها برابر مقدار ثابتی مانند λ فرض شوند. بنابراین داریم:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \Rightarrow F''(x) - \lambda F(x) = 0 \quad (1), \quad \frac{G'(t)}{\tau G(t)} = \lambda \quad (2)$$

گام دوم: با توجه به معادلات به دست آمده در مرحله‌ی اول، حالا باید سراغ حل آن‌ها برویم. ابتدا معادله (۱) را با در نظر گرفتن شرایط مکانی مسأله حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ F(-1) = F(1) \\ F'(-1) = F'(1) \end{cases}$$

خب در این مرحله باید برای λ سه حالت $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ و $\lambda < 0$ را در نظر بگیریم و ببینیم کدام یک از آن‌ها جواب غیر بدیهی (غیر صفر) مسأله را به ما معرفی می‌کند.

حالت اول: فرض می‌کنیم $\lambda > 0$ باشد: در این حالت فرض می‌کنیم $\lambda = k^2$. پس معادله به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$F'' - k^2 F = 0 \Rightarrow F = c_1 \sinh kx + c_2 \cosh kx$$

با اعمال شرط $F(-1) = F(1)$ داریم:

$$c_1 \sinh k(-1) + c_2 \cosh k(-1) = c_1 \sinh k(+1) + c_2 \cosh k(+1) \Rightarrow \tau c_1 \sinh k = 0$$

چون $k \neq 0$ ، لذا $\sinh \tau k \neq 0$ و این یعنی $c_1 = 0$ می‌باشد. بنابراین تا این جا می‌توان گفت جواب به شکل $F = c_2 \cosh kx$ است. اما با اعمال شرط $F'(-1) = F'(1)$ داریم:

$$c_2 k \sinh k(-1) = c_2 k \sinh k(+1)$$

که نتیجه می‌دهد $\tau c_2 k \sinh k = 0$ و چون $k \neq 0$ ، لذا $\sinh k \neq 0$ و در نتیجه $c_2 = 0$ و بنابراین در این حالت تابع ویژه وجود ندارد.

حالت دوم، فرض می‌کنیم $\lambda = 0$ باشد: در این شرایط، واضح است. $F'' = 0$ و در نتیجه $F(x) = Ax + B$ با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$F(1) = F(-1) \Rightarrow A(1) + B = A(-1) + B \Rightarrow \tau A = 0 \Rightarrow A = 0$$

بنابراین تا اینجا $F = B$ و چون از شرط دوم نتیجه‌ای حاصل نمی‌شود. بنابراین می‌توان در نظر گرفت تابع ویژه به صورت $F_0 = 1$ است. پس تا اینجا، $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه برای این مسأله است.

حالت سوم: فرض کنیم $\lambda < 0$ باشد: در این حالت با فرض $\lambda = -k^2$ داریم:

$$F'' + k^2 F = 0 \Rightarrow F(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$F(1) = F(-1) \Rightarrow c_1 \sin k + c_2 \cos k = c_1 \sin(-k) + c_2 \cos(-k) \Rightarrow \tau c_1 \sin(+k) = 0$$

برای این که یک جواب غیر صفر داشته باشیم، لازم است $\sin(+k) = 0$ و لذا $k = n\pi$ و بنابراین توابع ویژه مسأله به صورت زیر است:

$$F_n(x) = c_1 \sin n\pi x + c_2 \cos n\pi x$$

بنابراین مقادیر ویژه به صورت $\lambda_n = -(n\pi)^2$ هستند. حالا می‌رویم سراغ حل معادله (۲) و تعیین توابع ویژه G به ازای مقادیر ویژه‌ای که در حالت سوم به دست آمده است:

$$\frac{G'(t)}{\tau G(t)} = -n^2 \pi^2 \Rightarrow \int \frac{G'(t)}{G(t)} dt = \int -\tau n^2 \pi^2 dt \Rightarrow \ln G(t) = (-\tau n^2 \pi^2) t \Rightarrow G_n(t) = e^{(-\tau n^2 \pi^2) t}$$

از طرفی فراموش نشود در حالت دوم مقدار ویژه $\lambda = 0$ را نیز داشتیم، $G(t)$ متناظر $\lambda = 0$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{G'(t)}{2G(t)} = 0 \Rightarrow G'(t) = 0 \Rightarrow G(t) = C$$

بنابراین فرم کلی جواب به صورت مقابل است:

$$u(x, t) = H + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \sin n\pi x + c_p \cos n\pi x] e^{(-2n^2\pi^2)t}$$

دقت کنید عبارت H همان حاصل ضرب $F(x).G(t) = B \times C$ که هر دو عددی ثابت هستند، در نظر گرفته شده است. (بنابراین خودش نیز عدد ثابت است)

$$|x| = H + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \sin n\pi x + c_p \cos n\pi x]$$

گام سوم: با توجه به شرط اولیه؛ $u(x, 0) = |x|$ ، داریم:

همان‌طور که می‌بینید باید ضرایب سری فوریه $|x|$ ، یعنی a_0 ، a_n و b_n (یا با توجه به این مسأله و نامگذاری انجام شده: H ، c_p و c_n) تعیین شوند:

$$H = 1, \quad c_p = \frac{2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1], \quad c_n = 0$$

پس فرم نهایی جواب به صورت زیر است:

$$u(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos n\pi x}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] e^{(-2n^2\pi^2)t}$$

توضیح مهم: همان‌طور که می‌بینید؛ روش حل کامل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم بسیار طولانی است و اصلاً مناسب طرح به عنوان تست در آزمون‌های کارشناسی ارشد نیست. در واقع بیشتر طراحان قسمت‌هایی از حل را مورد سؤال قرار می‌دهند (سوالاتی نظیر فرم کلی پاسخ، تعیین ضرایب مجهول، تعیین مقادیر ویژه و توابع ویژه و ...) و برخی دیگر از طراحان فرض را بر این می‌گیرند، داوطلب فرم کلی جواب را می‌داند و مقادیر جواب را به ازای شرایط اولیه خاص، مورد سؤال قرار می‌دهند.

به هر حال ما در بخش‌های آموزش کتاب و پایان این فصل چند مسأله را به روش تشریحی حل می‌کنیم. اما با توجه به انواع شرایط مرزی و شرایط اولیه و نوع مسأله، مقادیر ویژه یا توابع ویژه و همین‌طور شکل کلی جواب را از طریق جدول کتاب تعیین می‌کنیم و سعی می‌کنیم اکثر تست‌ها را با به کارگیری این جدول و مطالب درسی بعد از آن پاسخ دهیم.

مسائل اشتروم لیوویل

هر مسأله با شرایط زیر را یک مسأله اشتروم لیوویل می‌نامند:

$$\begin{cases} (f(x)y')' + [g(x) + \lambda h(x)]y = 0, & a < x < b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad \text{دو شرط مکانی}$$

در مسأله فوق $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ اعداد ثابت هستند، λ یک پارامتر ثابت، $f(x)$ و $g(x)$ توابع حقیقی مفروض و $h(x)$ یک تابع مثبت معلوم با نام تابع وزن است. در برخی مسائل $h(x)$ در نقاط منفرد مانند نقاط ابتدایی یا انتهایی بازه $a < x < b$ ممکن است، صفر شود. به ازای یک انتخاب مفروض از مقدار λ ، $y_\lambda(x)$ یک تابع ویژه (مخالف صفر) وابسته به λ نامیده می‌شود. این ثابت λ ، مقدار ویژه این مسأله نام دارد.

لازم به ذکر است در مسأله فوق شرایط مرزی دیگری هم ممکن است به همراه معادله دیفرانسیل مطرح شوند.

نکته ۲: به ازای هر مقدار ویژه λ_n ، مسأله دارای یک تابع ویژه $y_n(x)$ است که آن را می‌توان به صورت مجموعه متعامد زیر نمایش داد:

$$\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$$

این مجموعه نسبت به تابع وزن $h(x)$ متعامد است. در واقع به ازای هر $y_m(x)$ و $y_n(x)$ رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) h(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

مثال ۲۷: مسأله با مقدار مرزی $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ، $[x^2 e^x \phi'(x)]' - x\phi(x) + \lambda \cos x \cdot \phi(x) = 0$ با شرایط مرزی $\phi(\frac{\pi}{2}) = 2\phi'(\frac{\pi}{2})$.

اگر ϕ_n و ϕ_m دو تابع ویژه مختلف برای این مسأله باشند، در این صورت کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ $\phi(-\frac{\pi}{2}) = \phi'(-\frac{\pi}{2})$ مفروض است.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\phi_n(x)\phi_m(x) - 1] \cos x dx = -2 \quad (2)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi_n(x) \cdot \phi_m(x) \cos x dx = 2\pi \quad (1)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\phi_n(x) \cdot \phi_m(x) - n] \cos x dx = 0 \quad (4)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi_n(x) \phi_m(x) \cos x dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi_n(x) dx \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۲» تابع وزنی $h(x) = \cos x$ است، و برای انتگرال گزینه‌ی (۲) داریم:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi_n(x) \phi_m(x) \cos x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 - 2 = -2$$

مثال ۲۸: در مسأله مقدار ویژه اشتروم لیوویل $\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = 0$ در فاصله $0 < x < a$ با شرایط مرزی $\phi'(a) = \phi'(0) = 0$ ، پایه‌های متعامد کدامند؟

$$\{1, \sin(\frac{\pi x}{a}), \cos(\frac{\pi x}{a}), \dots, \sin(\frac{4\pi x}{a}), \cos(\frac{4\pi x}{a}), \dots\} \quad (2)$$

$$\{1, \cos(\frac{\pi x}{a}), \cos(\frac{2\pi x}{a}), \dots, \cos(\frac{(2n-1)\pi x}{a}), \dots\} \quad (1)$$

$$\{1, \cos(\frac{\pi x}{a}), \cos(\frac{2\pi x}{a}), \dots, \cos(\frac{n\pi x}{a}), \dots\} \quad (4)$$

$$\{1, \sin(\frac{\pi x}{a}), \sin(\frac{2\pi x}{a}), \dots, \sin(\frac{n\pi x}{a}), \dots\} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۴» λ سه مقدار $\lambda < 0$ ، $\lambda = 0$ و $\lambda > 0$ را می‌تواند داشته باشد، لذا سه حالت داریم:

حالت اول: اگر $\lambda < 0$ باشد، با فرض $\lambda = -k^2$ داریم:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \phi}{dx^2} - k^2 \phi = 0$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و همگن با ضرایب ثابت است، لذا داریم:

$$\phi(x) = A \cosh(kx) + B \sinh(kx)$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\phi'(0) = 0 \Rightarrow Ak \sinh(0) + Bk \cosh(0) \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow Bk = 0 \Rightarrow B = 0$$

بنابراین معادله $\phi(x) = A \cosh(kx)$ به شکل خلاصه می‌شود.

با اعمال شرایط مرزی $\phi'(a) = 0$ داریم: $Ak \sinh(ka) = 0$ ، با توجه به این که a و k مخالف صفر هستند، بنابراین k و $\sinh(ka)$ نمی‌توانند صفر شوند و لذا باید $A = 0$ شود و در این صورت، جواب غیر صفر برای ϕ نداریم. پس به سراغ حالت بعدی می‌رویم.

حالت دوم: اگر $\lambda = 0$ باشد، داریم:

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} \frac{d\phi(x)}{dx} = A_0 \xrightarrow{\text{دوباره انتگرال می‌گیریم}} \phi(x) = A_0 x + B_0$$

حالا اگر شرایط مرزی را اعمال کنیم، داریم:

$$\phi'(x) = A_0, \quad \phi'(0) = 0 \Rightarrow A_0 = 0$$

پس $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه برای تابع با تابع ویژه متناظر $\phi_0(x) = B_0$ است.

حالت سوم: اگر $\lambda > 0$ ، آنگاه با فرض $\lambda = k^2$ داریم:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + k^2 \phi(x) = 0$$

معادله‌ی فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت است، لذا داریم:

$$\phi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\phi'(0) = 0 \Rightarrow -Ak \sin(kx) + Bk \cos(kx) \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow Bk = 0 \Rightarrow B = 0$$

پس معادله $\phi(x) = A \cos(kx)$ با اعمال شرایط مرزی $\phi'(a) = 0$ داریم: $-kA \sin(ka) = 0$ اگر قرار باشد $A = 0$ شود، دیگر تابع ویژه $\phi(x)$ نداریم، بنابراین باید فرض کنیم: $\sin ka = 0$ و لذا داریم:

$$ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \lambda_n = k^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

بنابراین مجموعه پایه‌های متعامد به شکل زیر است:

$$1, \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right), \dots, \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \dots$$

مثال ۲۹: معادله دیفرانسیل $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \lambda \varphi = 0$ ، $\lambda > 0$ و $0 < x < \pi$ ، با شرایط مرزی $\varphi(0) + \varphi(\pi) = 0$ و $\varphi'(0) = 0$ مفروض است مقادیر ویژه توابع

آن عبارت است از: $(n = 1, 2, 3, \dots)$

$$\sqrt{\lambda} = n, \cos \sqrt{\lambda} x \quad (۲)$$

$$\sqrt{\lambda} = n\pi, \cos \sqrt{\lambda} x \quad (۱)$$

$$\sqrt{\lambda} = 2n - 1, \cos \sqrt{\lambda} x \quad (۴)$$

$$\sqrt{\lambda} = (2n - 1)\pi, \cos \sqrt{\lambda} x \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۴» به راحتی با حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت، داریم:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \lambda \varphi = 0 \Rightarrow \varphi(x) = k_1 \cos \sqrt{\lambda} x + k_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0 \Rightarrow \varphi(x) = k_1 \cos \sqrt{\lambda} x$$

با جایگذاری $\varphi(x)$ در رابطه $\varphi(0) + \varphi(\pi) = 0$ خواهیم داشت:

$$k_1 + k_1 \cos \sqrt{\lambda} \pi = 0 \Rightarrow \cos \sqrt{\lambda} \pi = -1 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \pi = (2n - 1)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = 2n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

مثال ۳۰: جواب مسئله با مقادیر مرزی $y'' + \lambda y = 0$ ، $y(0) = y(1) = 0$ کدام است؟

$$\text{ctg}(\sqrt{n\pi})x \quad (۴)$$

$$\text{ctg}(n\pi)x \quad (۳)$$

$$c \sin(n\pi)x \quad (۲)$$

$$c \sin \sqrt{n\pi}x \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» یک مسئله اشتروم لیوویل با مقدار ویژه $\lambda_n = (n\pi)^2$ و تابع ویژه $y_n = c \sin n\pi x$ است.

حالت خاصی از نمایش معادله لژاندار به صورت زیر است:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y$$

که n یک عدد صحیح و نامنفی می باشد، این معادله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$$

که معادله ای اشتروم لیوویل با در نظر گرفتن توابع به شکل زیر است:

$$h(x)=1, \lambda_n = n(n+1), f(x)=1-x^2, g(x)=0$$

در فاصله $[-1, 1]$ ، جواب $P_n(x)$ با شرایط مرزی $f(1) = f(-1) = 0$ ، نسبت به تابع وزن $h(x)=1$ متعامد است و داریم:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad (m \neq n)$$

فرمول رودریگز: چند جمله ای های لژاندار را می توان به صورت زیر معرفی کرد:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \right]$$

معادله موج (یک بعدی و متناهی)

فرض کنید دو سر یک سیم (مثلاً سیم یک تار) را از دو طرف بکشیم تا طول آن به L برسد، اگر ابتدا و انتهای آن در $x=0$ و $x=L$ ثابت شود و در لحظه $t=0$ ، سیم را به وسیله ای حرکت دهیم با صرف نظر از نیروهای نظیر مقاومت هوا، وزن نخ و نیروهای عکس العمل، معادله حرکت سیم یعنی مکان سیم در نقطه x و در زمان t ، به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & ; \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) & , \quad 0 \leq x \leq L \\ u_t(x, 0) = g(x) & , \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

در معادله ی فوق $f(x)$ وضعیت اولیه سیم و $g(x)$ سرعت اولیه سیم است. c^2 با کشش سیم ارتباط مستقیم و با جرم واحد طول سیم نسبت عکس دارد و نمایانگر سرعت انتشار موج در طول سیم است. در برخی مسائل ممکن است شرایط مرزی به صورت های دیگری نیز تعریف شود، مثلاً به صورت $u_x(0, t) = 0$ که معنی آن این است ابتدای تار آزاد است.

معادله گرما (یک بعدی و متناهی)

معادله ی انتقال گرما در یک میله یا یک سیم فلزی نازک و همگن با طول L که منطبق بر محور x ها است، در نقطه ای به طول x در لحظه ی t به شکل $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ تعریف می شود، c^2 در این رابطه «ثابت نفوذ» نامیده می شود. اگر دمای دو انتهای میله صفر در نظر گرفته شود در این حالت شرایط مرزی و معادله گرما به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) & , \quad 0 \leq t \leq L \\ u(x, 0) = f(x) & , \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

در معادله ی داده شده $u(x, 0)$ دمای اولیه است. در برخی مسائل شرایط مرزی دیگری نیز مطرح می شود؛ مثلاً $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$ به این معناست که دو سر میله عایق می باشد و به عبارت دیگر تغییرات دما نسبت به x صفر است.

پاسخ معادلات موج و گرما با شرایط مرزی همگن (در بازه $0 < x < L$)

در حالت کلی برای حل معادلات موج و گرما در بازه $0 < x < L$ جواب را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) F_n(x)$$

که $F_n(x)$ یک تابع سینوسی و یا کسینوسی است و با توجه به شرایط مرزی نوع آن تعیین می شود. در حل این معادلات «معمولاً» با چهار نوع شرایط مرزی برخورد می کنیم:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases}$$

حالت اول

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

حالت دوم

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases}$$

حالت سوم

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

حالت چهارم

در حالت های اول و دوم $F_n(x)$ سینوسی و در حالت های سوم و چهارم $F_n(x)$ کسینوسی است.

با توجه به مطالب فوق و شرایط مرزی هر مسأله، «مقادیر ویژه» نیز فرق می کند و $F_n(x)$ ها به صورت زیر خواهند بود:

حالت اول

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

حالت دوم

$$F_n(x) = \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2L}x\right)$$

حالت سوم

$$F_n(x) = \cos\left((2n-1)\frac{\pi}{2L}x\right)$$

حالت چهارم

$$F_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

در واقع اگر بخواهیم یک روش برای حفظ کردن برای خود اختراع کنیم می توانیم این جور استدلال کنیم هر جا $u(0, t) = 0$ تابع $F_n(x)$ سینوسی و هر جا $u_x(0, t) = 0$ تابع کسینوسی است. اما راجع به عبارت «ضرب x » در کمان سینوس یا کسینوس، می توانیم این طور استدلال کنیم هر جا هر دو شرط بر روی u و یا هر دو شرط بر روی مشتق u بودند، $\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ و به محض این که شرط مختلط شد (یکی از شرایط مرزی بر روی u و دیگری بر روی مشتق u بود) باید به صورت $(2n-1)\frac{\pi}{2L}$ انتخاب شود.

پس از مشخص شدن λ_n معادله زیر را حل می کنیم و از حل آن $G(t)$ را مشخص می کنیم:

$$\begin{cases} G'_n(t) + c^2 \lambda_n G_n(t) = 0 & \text{اگر معادله گرما باشد} \\ G''_n(t) + c^2 \lambda_n G_n(t) = 0 & \text{اگر معادله موج باشد} \end{cases}$$

ضابطه $F_n(x)$ را که داشتیم، $G_n(t)$ نیز از این معادلات معلوم می شود و ما می توانیم به راحتی $u(x, t)$ را به دست بیاوریم.

تذکره ۲: در حالت چهارم که هر دو شرط مرزی بر روی مشتق u هستند، باید دنبال جوابی به صورت زیر باشیم:

$$u(x, t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) F_n(x)$$

معایب «توابع ویژه» و «مقادیر ویژه» در معادلات موج و حرارت با شرایط مرزی همگن (در بازه $0 < x < L$)

اگر نکات فوق را فراموش کردید و در روز آزمون خواستید به صورت کاملاً تشریحی «توابع ویژه» و «مقادیر ویژه» را حساب کنید، به شکل زیر عمل کنید:

(۱) ابتدا جواب کلی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$u(x, t) = G(t)[c_1 \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x]$$

(۲) با اعمال شرط مرزی در $x = 0$ نوع تابع ویژه مسأله را مشخص کنید.

(۳) با اعمال شرط مرزی در $x = L$ ، مقدار ویژه مسأله را مشخص کنید.

مثال ۳۱: اگر شرایط مرزی در مسأله‌ی موج در بازه $0 < x < L$ به صورت $u_x(0, t) = u(L, t) = 0$ باشد، «تابع ویژه» و «مقادیر ویژه» مسأله کدامند؟

(۱) تابع ویژه به صورت کسینوسی و مقدار ویژه برابر $\lambda_n = \left[\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2\right]$ می‌باشد.

(۲) تابع ویژه به صورت سینوسی و مقدار ویژه برابر $\lambda_n = \left[\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2\right]$ می‌باشد.

(۳) تابع ویژه به صورت کسینوسی و مقدار ویژه برابر $\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ می‌باشد.

(۴) تابع ویژه به صورت سینوسی و مقدار ویژه برابر $\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ می‌باشد.

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که گفتیم با اعمال شرط مرزی $u_x(0, t) = 0$ ، تابع ویژه را به دست می‌آوریم، با مشتق گرفتن از $u(x, t)$ و قرار دادن $x = 0$ داریم:

$$u_x(0, t) = 0 \Rightarrow c_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x - c_2 \sin \sqrt{\lambda} x \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow c_1 \sqrt{\lambda} \cos(0) = 0 \Rightarrow c_1 \sqrt{\lambda} = 0$$

اگر قرار باشد $\sqrt{\lambda}$ صفر شود که دیگر مقدار ویژه‌ای نداریم، بنابراین $c_1 = 0$ و این یعنی معادله‌ی اصلی به صورت زیر است:

$$u(x, t) = [c_2 \cos \sqrt{\lambda} x] G(t)$$

و به عبارت دیگر تابع ویژه کسینوسی است.

حالا برویم سراغ به دست آوردن مقدار ویژه مسأله، با اعمال شرط $u(L, t) = 0$ داریم:

$$u(L, t) = 0 \Rightarrow c_2 \cos(\sqrt{\lambda_n} L) \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow c_2 \cos(\sqrt{\lambda_n} L) = 0$$

اگر قرار باشد، c_2 صفر باشد، عملاً به جواب بدیهی $u(0, t) = 0$ می‌رسیم که مدنظر ما نیست، پس $\cos(\sqrt{\lambda_n} L) = 0$ و بنابراین داریم:

$$\sqrt{\lambda_n} L = (2n-1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = \left(\frac{2n-1}{2L}\right) \pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2L}\right)^2 \pi^2$$

توضیح: البته اگر نکات را حفظ کرده باشید به راحتی معلوم است، چون شرایط مرزی به صورت مختلط می‌باشد (یکی بر روی u و دیگری بر روی

مشتق u) لذا مقدار ویژه به صورت $\sqrt{\lambda_n} = (2n-1) \frac{\pi}{2L}$ است و با توجه به این که شرط مرزی در نقطه $x = 0$ به صورت $u_x(0, t) = 0$ است، پس تابع ویژه کسینوسی است.

مثال ۳۲: جواب مسأله موج $0 \leq x \leq \pi$ ، $0 \leq t < \infty$ ، $u_{tt} = u_{xx}$ ، $u(0, 0) = 0$ ، $u(\pi, 0) = 2 \sin x$ ، $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ، $t \geq 0$ کدام است؟

$$u(x, t) = 2 \sin x \sin t \quad (۲)$$

$$u(x, t) = 2 \sin x \cos t \quad (۴)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \sin x \sin nt \quad (۱)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos nx \sin nt \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: با توجه به آنچه گفته شد، با در نظر گرفتن این که $u(0, t) = 0$ ، لذا تابع ویژه مسأله از نوع سینوسی است، لذا $F_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$ ، از طرفی هر دو شرط مکانی (مرزی) بر روی u هستند، پس $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2$ و یا به عبارت دیگر $\lambda_n = n^2$ می‌باشد، پس جواب کلی مسأله به شکل زیر است:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx$$

رابطه
تفتم برای معادله‌ی موج باید معادله‌ی زیر را برای به دست آوردن $G_n(t)$ حل کنیم:

$$G_n''(t) + n^2 G_n(t) = 0$$

که یک معادله‌ی درجه دوم همگن با ضرایب ثابت است و جواب آن به صورت مقابل است:

$$G_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

پس معادله به شکل کلی مقابل قابل نمایش است:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx$$

با توجه به شرط $u(x, 0) = 0$ داریم:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \Rightarrow a_n = 0$$

بنابراین جواب به صورت مقابل خلاصه می‌شود:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nt) \sin nx$$

با اعمال شرط $u_t(x, 0) = 2 \sin x$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (n \cos nt) \sin nx \Big|_{t=0} = 2 \sin x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin nx = 2 \sin x$$

واضح است $n b_n$ ضریب بسط فوریه سینوسی تابع $2 \sin x$ است، لذا داریم:

$$n b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin x \sin(nx) dx \Rightarrow b_n = \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx dx = \begin{cases} 0 & ; n \neq 1 \\ 2 & ; n = 1 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 2$$

انتگرال فوق با توجه به نکات ابتدای فصل سری فوریه در مورد تعامد به راحتی حساب شد. البته نیازی به محاسبه آن نبود، چون سری فوریه $\sin x$ خودش است، لذا از همان اول $b_1 = 2$ معلوم بود.

$$u(x, t) = (2 \sin t)(\sin x)$$

پس جواب کلی به شکل مقابل است:

روش دوم: البته یک روش بسیار پرکاربرد و راحت در پاسخگویی به این نوع سؤالات استفاده از شرایط مرزی و اولیه می‌باشد. با چک کردن شرط $u(x, 0) = 0$ مشخص می‌شود گزینه ۴ غلط است، اگر شرط $u(0, t)$ را برای گزینه‌ها بررسی کنیم، گزینه ۳ نیز از بین جواب‌ها حذف خواهد شد، اما با بررسی شرط $u_t(x, 0) = 2 \sin x$ ملاحظه می‌گردد، فقط گزینه (۲) این شرط را ارضا می‌کند.

مثال ۳۳: جواب مسأله موج $0 < x < \pi$, $t > 0$ است؟

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & ; 0 < x < \pi , t > 0 \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = 0 & , 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & , t \geq 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)x) \sin((2n-1)t) \quad (۲)$$

$$u(x, t) = 1 + \sin t \cos x \quad (۱)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)t) \sin((2n-1)x) \quad (۴)$$

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)t) \sin((2n-1)x) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به شرایط مرزی تابع ویژه به صورت $F_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x$ و $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 = n^2$ می‌باشد، لذا مانند مثال قبل جواب به صورت زیر خواهد بود.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx$$

که $G_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt$ می‌باشد و لذا داریم:

با توجه به شرط $u_t(x, 0) = 0$ ، به راحتی $b_n = 0$ و کافیت مقدار a_n حساب شود:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \times \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & , n \text{ فرد} \\ 0 & , n \text{ زوج} \end{cases} \Rightarrow u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)t) \sin((2n-1)x)$$

روش تستی: لازم است داوطلب این موضوع را در نظر بگیرد در روز آزمون می توان به طریقی راحت تر به سؤال جواب داد. دقت کنید؛ با توجه به شرط مرزی $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ متوجه می شویم که گزینه ی ۳ یا ۴ درست است! حال با توجه به $u(x,0) = 1$ کافی است در سری فوریه ی تابع $f(x) = 1$ فقط b_1 حساب کنیم:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است}$$

مثال ۳۴: جواب معادله گرمای زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} ; 0 < x < L, t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 6 + 4 \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \end{cases}$$

$$6 + \left[4 \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\right] e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}t} \quad (2)$$

$$\left[6 + 4 \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\right] e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}t} \quad (1)$$

$$6 + \left[4 \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\right] e^{-\frac{81\pi^2}{L^2}t} \quad (4)$$

$$\left[6 + 4 \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\right] e^{-\frac{81\pi^2}{L^2}t} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این که شرایط مرزی به صورت $u_x(0,t) = 0$ می باشد، لذا تابع ویژه به صورت $\cos \sqrt{\lambda_n} x$ می باشد و چون هر دو شرط مرزی بر روی مشتق u می باشد، لذا مقدار ویژه به صورت $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ خواهد بود و بنابراین جواب کلی به شکل زیر است:

$$u(x,t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

برای به دست آوردن $G(t)$ داریم:

$$G'_n(t) + \alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G_n(t) = 0 \Rightarrow \frac{G'_n(t)}{G_n(t)} + \frac{\alpha n^2 \pi^2}{L^2} = 0 \Rightarrow G(t) = a_n e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{L^2}t}$$

حالا با اعمال شرط اولیه داریم:

$$6 + 4 \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

به راحتی واضح است $G_0(t) = a_0 = 6$ و $a_3 = 4$ و بقیه a_n ها صفر هستند، یعنی جواب نهایی به شکل زیر است:

$$u(x,t) = 6 + 4 \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) e^{-\frac{81\pi^2}{L^2}t}$$

مثال ۳۵:

از حل معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}$ تحت شرایط مرزی - اولیه: $\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) + \beta \theta(L,t) = 0$ و $\theta(0,t) = 0$ ، $\theta(x,0) = g(x)$ در بازه $0 < x < L$ کدام فرم از جواب های ذیل به دست می آید؟

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\sqrt{\lambda_n} x) e^{-\alpha \lambda_n t} \quad (1)$$

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\sqrt{\lambda_n} x) e^{-\alpha \lambda_n t} \quad (2)$$

$$\theta(x,t) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\sqrt{\lambda_n} x) e^{-\alpha \lambda_n t} \quad (4)$$

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n [\cos(\lambda_n x) + \sin(\sqrt{\lambda_n} x)] e^{-\alpha \lambda_n t} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که شرط مرزی به شکل $\theta(0, t) = 0$ می باشد لذا تابع $F_n(x)$ به صورت سینوسی است. با دقت در گزینه ها می بینیم لازم نیست λ_n معلوم شود، لذا داریم:

$$G'_n(t) + \alpha \lambda_n G(t) = 0 \Rightarrow \frac{G'_n(t)}{G(t)} + \alpha \lambda_n = 0 \Rightarrow \int \frac{G'_n(t)}{G(t)} dt = -\alpha \lambda_n$$

$$\Rightarrow \ln[G_n(t)] = -\alpha \lambda_n t \Rightarrow G_n(t) = D_n e^{-\alpha \lambda_n t}$$

مثال ۳۶: فرض کنید میله ای به طول ۱ متر که دو سر آن در دمای صفر است، در لحظه اولیه در دمای $u(x, 0) = x(1-x)$ باشد، اگر در نقطه x و در زمان t دما با رابطه روبرو مشخص شود: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \sqrt{\lambda_n} x \cdot e^{-\lambda_n c^2 t}$ و $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{1}\right)^2$ و $c^2 = 1$ باشد، معادله دما در وسط میله برابر کدام گزینه می شود؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{(2n-1)^2 \pi^2} (-1)^{n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{100} t} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{(2n-1)^2 \pi^2} (-1)^{n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{100} t} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{(2n-1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{100} t} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{(2n-1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{100} t} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه «۱» به راحتی با استفاده از شرط اولیه $u(x, 0) = x(L-x)$ داریم:

$$x(L-x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{1}\right) x e^0$$

همان طور که ملاحظه می کنید، ضریب بسط سینوسی تابع $x(1-x)$ است:

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x(1-x) \sin\left(\frac{n\pi}{1}\right) x dx$$

پس از محاسبه، a_n به صورت مقابل خلاصه می شود:

$$a_n = \frac{400}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n]$$

با توجه به اینکه به ازای n های زوج، a_n صفر می شود؛ لذا $u(x, t)$ به شکل زیر نوشته می شود:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{(2n-1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{1} x \cdot e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{100} t}$$

با قرار دادن $x = 0.5$ (چون دما در وسط میله سؤال شده) داریم:

$$u(0.5, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{(2n-1)^2 \pi^2} \sin(2n-1) \frac{\pi}{2} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{100} t}$$

برای کسی پوشیده نیست که همواره رابطه $\sin(2n-1) \frac{\pi}{2} = (-1)^{n-1}$ برقرار است، پس گزینه (۱) جواب این تست است. حالا که تست را با هم حل کردیم، بگویم این تست در سال ۱۳۷۳ در رشته برق به عنوان سؤال مطرح شده بود و قطعاً به لحاظ حجم انتگرال گیری و محاسبات، تست قشنگی با توجه به مدت زمان آزمون نیست. ولی تمرین خوبی برای مسأله گرما بود، این طور نیست! توجه: به روش تستی حل این سؤال فکر کنید!

مسئله گرما برای یک میله نامتناهی

در این حالت معادله به صورت روبرو نوشته می شود:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & t > 0, -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x), & u(-\infty, t) = u(+\infty, t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{c^2 \pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(v-x)^2}{4c^2 t}} dv$$

و جواب معادله به صورت روبرو خواهد بود:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x] e^{-c^2 \omega^2 t} d\omega$$

البته جواب این حالت به صورت روبرو نیز بیان می شود:

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

که $a(\omega)$ و $b(\omega)$ از روابط روبرو قابل محاسبه هستند:

مثال ۳۷: جواب معادله حرارت در یک میله نامتناهی با شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ عبارت است از:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \sqrt{c^2 t} z) e^{-z^2} dz, c > 0$$

$$\text{اگر } f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \text{ آنگاه: (راهنمایی: تابع خطا عبارت است از: } \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} dw$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{-x}{\sqrt{c^2 t}}\right) \quad (۱)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{c^2 t}}\right) \quad (۱)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{-x}{\sqrt{c^2 t}}\right) \quad (۲)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{c^2 t}}\right) \quad (۲)$$

پاسخ: گزینه «۲» این نوع معادلات که در آزمون ها به ندرت مورد سؤال قرار می گیرد، بیشتر به درد امتحانات پایان ترم می خورد:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \sqrt{c^2 t} z) e^{-z^2} dz \quad (۱) \quad x + \sqrt{c^2 t} z = y \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{c^2 t} dz = dy \\ z \rightarrow \pm \infty \Rightarrow y \rightarrow \pm \infty \\ z = \frac{y-x}{\sqrt{c^2 t}} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱)} \frac{1}{\sqrt{c^2 t} \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\left(\frac{y-x}{\sqrt{c^2 t}}\right)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{c^2 t} \sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\left(\frac{y-x}{\sqrt{c^2 t}}\right)^2} dy + \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{y-x}{\sqrt{c^2 t}}\right)^2} dy \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2 t} \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{y-x}{\sqrt{c^2 t}}\right)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{c^2 t}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^0 e^{-z^2} dz + \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz \right) \quad \text{اگر } y \rightarrow 0 \text{ آنگاه } z \rightarrow \frac{-x}{\sqrt{c^2 t}} \text{ پس داریم:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{-x}{\sqrt{c^2 t}}} e^{-z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{-x}{\sqrt{c^2 t}}\right) + \frac{1}{2}, \quad \left[\text{توجه: } \text{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = 1 \right]$$

مسئله گرما برای یک میله نیمه متناهی

در این حالت معادله به صورت زیر نوشته می شود و شرط مرزی $u(0, t) = g(t)$ می باشد:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & t > 0, 0 < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = g(t) \\ u(\infty, t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{c^2 \pi t}} \int_0^{\infty} f(v) \left[e^{-\frac{(v-x)^2}{4c^2 t}} - e^{-\frac{(v+x)^2}{4c^2 t}} \right] dv + \frac{1}{\sqrt{c^2 \pi t}} \int_0^t (g(v) e^{-\frac{x^2}{4c^2 (t-v)}}) (t-v)^{-\frac{3}{2}} dv$$

نکته ۳: اگر در مسأله حرارت عبارت دمای حالت پایدار ذکر شده باشد به این معنی است که مقدار $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ مورد نظر مسأله است و در این حالت همواره $u_t = 0$ فرض می شود.

نکته ۴: اگر دو انتهای یک میله در دو دمای مختلف و بدون تغییر $u(0, t) = u_1$ و $u(L, t) = u_2$ قرار گرفته باشد، آنگاه دمای میله پس از گذشت زمان زیاد و رسیدن به تعادل از رابطه $u(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{L}$ بدست می آید و اگر در این وضعیت دمای اولیه میله به صورت $u(x, 0) = f(x)$ باشد، آنگاه دمای میله در هر لحظه دلخواه از رابطه روبرو به دست می آید:

$$u(x, t) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{L} + \sum a_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x dx + \frac{2}{n\pi} [(-1)^n u_2 - u_1]$$

که a_n از رابطه روبرو به دست می آید:

مثال ۳۸: جواب حالت پایدار مسأله $\begin{cases} u_t = 2u_{xx} \\ u(0, t) = 10, u(2, t) = 40, u(x, 0) = 25 \end{cases}$ کدام است؟

(۴) $x^2 + 7x + 10$

(۳) $10x + 10$

(۲) ۲۵

(۱) صفر

پاسخ: گزینه «۳» چون دمای میله در دو طرف آن ثابت است، لذا با توجه به نکات فوق داریم:

$$u(x, t) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{L} \Rightarrow u(x, t) = 10 + (40 - 10) \frac{x}{2} = 10 + 15x$$

جواب دالامبر معادله موج

یک روش دیگر برای حل معادله موج روش دالامبر است. برای معادله موج $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ در صورتی که $u(x, 0) = f(x)$ و $u_t(x, 0) = g(x)$ در فاصله $0 \leq x \leq L$ جواب دالامبر معادله موج به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

البته می توانیم از روش زیر نیز استفاده کنیم:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c} [G^*(x+ct) - G^*(x-ct)]$$

که در این معادله تابع $G(x)$ به صورت زیر است:

$$G(x) = \frac{1}{c} \int g(x) dx$$

نوع گسترش توابع f و g با توجه به شرایط مرزی معادله موج

با توجه به نوع شرایط مرزی دوره تناوب، گسترش توابع f و g فرق می کند نکات زیر به خوبی این مسائل را روشن می کند:

(۱) اگر در $x=0$ یا $x=L$ ، شرایط روی u باشد، باید f و g را نسبت به $x=0$ یا $x=L$ گسترش فرد دهیم.

(۲) اگر در $x=0$ یا $x=L$ ، شرایط روی u_x باشد، باید f و g را نسبت به $x=0$ یا $x=L$ گسترش زوج دهیم.

(۳) در حالتی که هر دوی شرایط مرزی بر حسب u و یا هر دوی آنها بر حسب u_x باشد، دوره تناوب $2L$ در نظر گرفته می شود.

اما اگر شرایط مرزی یکی بر حسب u و دیگری بر حسب u_x داده شود، دوره تناوب برابر $4L$ در نظر گرفته می شود.

(۴) اگر $-\infty < x < +\infty$ باشد، آنگاه توابع f(x) و g(x) نسبت به مبدأ به صورت فرد بسط داده می شود.

جواب دالامبر معادله موج در مسائلی که مقدار u در نقطه ای مشخص سؤال می شود، بسیار مفید است.

مثال ۳۹: مقدار $u(\frac{1}{4}, 2)$ برای معادله موج زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 ; 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = \sin^3 \pi x ; 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 ; t \geq 0 \end{cases}$$

(۴)

(۳)

(۲) $1 + \frac{\lambda}{3\pi}$

(۱) $\frac{\lambda}{3\pi}$

پاسخ: گزینه «۴» با روش دالامبر به این سؤال جواب می‌دهیم. در این سؤال با توجه به شرایط مرزی که هر دو برای مشتقات u داده شده است، دوره تناوب $T = 2L = 2$ ، یعنی $T = 2 \times 1 = 2$ می‌باشد.

$$u(\frac{1}{4}, 2) = \frac{1}{4} [f^*(\frac{1}{4} + 1 \times 2) + f^*(\frac{1}{4} - 1 \times 2)] + \frac{1}{4} [G^*(\frac{1}{4} + 1 \times 2) - G^*(\frac{1}{4} - 1 \times 2)]$$

نکته مهم: دقت کنید x در بازه $(0, 1)$ تعریف شده اما ما مقادیر توابع f^* و G^* را در $x = \frac{5}{4}$ و $x = -\frac{3}{4}$ می‌خواهیم، برای این که x در بازه $(0, 1)$ قرار گیرد باید با توجه به دوره تناوب تابع و همچنین توجه به گسترش زوج یا فرد توابع f و G این شرایط را به وجود بیاوریم.

با توجه به این که دوره تناوب تابع $T = 2$ می‌باشد، پس $f^*(x \pm 2) = f^*(x)$ ، $G^*(x \pm 2) = G^*(x)$ لذا داریم: $f^*(\frac{1}{4}) = f^*(\frac{1}{4} - 2) = f^*(\frac{1}{4} - 2)$

بنابراین کافی است مقدار $f(\frac{1}{4})$ را حساب کنیم، با توجه به این که $f(x) = u(x, 0) = 1$ داده شده است، پس به ازای تمام x ها، مقدار f برابر عدد ۱ است، پس $f(\frac{1}{4}) = 1$ و در نتیجه $u(\frac{1}{4}, 2) = 1$.

$$\frac{1}{4} [f^*(\frac{1}{4}) + f^*(\frac{1}{4})] + \frac{1}{4} [G^*(\frac{1}{4}) - G^*(\frac{1}{4})]$$

مثال ۴۰: اگر تابع $u(x, t)$ جواب مسأله $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x(1-x), 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, t \geq 0 \end{cases}$ باشد، آنگاه $u(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $-\frac{1}{24}$

(۲) صفر

(۱) $\frac{1}{24}$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: با توجه به اینکه $f(x) = 0$ و $c = 1$ لذا جواب دالامبر معادله موج به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds \Rightarrow u(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} g(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^1 g(s) ds$$

توجه شود تابع $g(x)$ در فاصله $0 \leq x \leq 1$ به صورت $x(1-x)$ تعریف شده است و در این انتگرال به مقدار تابع $g(x)$ در فاصله $[-\frac{1}{2}, 1]$ نیاز داریم. لذا باید با توجه به شرایط مرزی گسترش فرد نسبت به خط $x = 1$ و گسترش زوج نسبت به خط $x = 0$ را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} u(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) &= \frac{1}{2} [\int_{-\frac{1}{2}}^0 g(s) ds + \int_0^1 g(s) ds] \Rightarrow u(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} [2 \int_0^{\frac{1}{2}} g(s) ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(s) ds] \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x) dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 x(1-x) dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$G(x) = \frac{1}{c} \int g(x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [G^*(x+ct) - G^*(x-ct)] \Rightarrow u(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} [G^*(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) - G^*(\frac{1}{4} - \frac{3}{4})]$$

$$= \frac{1}{2} [G^*(1) - G^*(-\frac{1}{4})] = \frac{1}{2} [G^*(1) + G^*(\frac{1}{4})] = \frac{1}{2} [(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{8} - \frac{1}{24})] = \frac{1}{8}$$

با توجه به این که شرایط مرزی در $x=0$ ، روی u_x است، لذا g گسترش زوج نسبت به $x=0$ را دارد و چون $g = G'(x)$ ، لذا $G^*(x)$ گسترش فرد نسبت به $x=0$ را داراست. لذا در محاسبات فوق $G(\frac{1}{4}) = -G(-\frac{1}{4})$ در نظر گرفته شده است.

مثال ۴۱: در معادله موج $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 17, t > 0 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = 6x^2, & 0 \leq x \leq 17 \\ u(0, t) = u(17, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$ آنگاه مقدار $u(5, 19)$ کدام است؟

۳۶۹ (۴)

۳۷۰/۵ (۳)

۳۶۹/۵ (۲)

۳۷۰ (۱)

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این که روش دوم ساده تر است، از این به بعد تمام مسائل دالامبر را از روش دوم پاسخ می دهیم، در این تست $f(x) = x$ و $g(x) = 6x^2$ می باشد:

$$G(x) = \frac{1}{c} \int g(x) dx = \frac{1}{2} \int 6x^2 dx = x^2$$

$$u(5, 19) = \frac{1}{2} [f^*(5+2 \times 19) + f^*(5-2 \times 19)] + \frac{1}{2} [G^*(5+2 \times 19) - G^*(5-2 \times 19)]$$

$$= \frac{1}{2} [f^*(43) + f^*(-33)] + \frac{1}{2} [G^*(43) - G^*(-33)] = \frac{1}{2} [f^*(34+9) + f^*(34-1)] + \frac{1}{2} [G^*(34+9) - G^*(34-1)]$$

$$= \frac{1}{2} [f^*(9) + f^*(-1)] + \frac{1}{2} [G^*(9) - G^*(-1)] = \frac{1}{2} [f(9) - f(1)] + \frac{1}{2} [G(9) + G(1)] = \frac{1}{2} [9 - 1] + \frac{1}{2} [729 + 1] = 4 + 365 = 369$$

توضیح: همان طور که اشاره شد در این تست G^* گسترش زوج تابع G و f^* گسترش فرد تابع f در نظر گرفته شده است و از این خواص در محاسبه مقادیر این توابع استفاده کردیم، همچنین چون دوره تناوب تابع $T = 2 \times 17 = 34$ می باشد، می دانیم $f(x+T) = f(x)$ که از این خاصیت نیز در محاسبات بهره بردیم.

مثال ۴۲: برای مسأله مقدار اولیه - کرانه ای زیر، مقدار $u(\frac{L}{3}, \frac{11L}{4})$ را پیدا کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = x(L-x), & 0 \leq x \leq L, u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t > 0 \end{cases}$$

$$\frac{23L^2}{144} \quad (۴)$$

$$\frac{23L^2}{72} \quad (۳)$$

$$-\frac{23L^2}{72} \quad (۲)$$

$$-\frac{23L^2}{144} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(x) = x(L-x), \quad g(x) = 0$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] = \frac{1}{2} [f(\frac{L}{3} - \frac{11L}{4}) + f(\frac{L}{3} + \frac{11L}{4})] = \frac{1}{2} [f(\frac{-29}{12}L) + f(\frac{37}{12}L)]$$

$$\frac{37L}{12} > L \quad \text{و} \quad \frac{-29L}{12} < 0 \quad \text{در صورتی که} \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{داده شده است.}$$

با توجه به حل دالامبر موج داریم:

از طرفی $u(x, 0)$ فقط در بازه

با توجه به اینکه شرایط مکانی مسأله از نوع دیریکله است لذا باید تابع $f(x) = x(L-x)$ را که فقط در بازه $0 \leq x \leq L$ تعریف شده گسترش فرد بدهیم:

$$f\left(\frac{-29L}{12}\right) = -f\left(\frac{29L}{12}\right) = -f\left(\frac{29L}{12} + \frac{\Delta L}{12}\right) = -f\left(\frac{\Delta L}{12}\right) = \frac{-3\Delta L^2}{144}$$

طول دوره تناوب

$$f\left(\frac{29L}{12}\right) = f\left(\frac{29L}{12} - \frac{\Delta L}{12}\right) = f\left(\frac{-11L}{12}\right) = -f\left(\frac{11L}{12}\right) = \frac{-11L^2}{144} \Rightarrow u\left(\frac{L}{3}, \frac{11L}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{-3\Delta L^2}{144} - \frac{11L^2}{144} \right] = \frac{-23L^2}{144}$$

مضربی از طول دوره تناوب

همچنین داریم:

مثال ۴۳: مکان اولیه یک تار که از هر دو سر نامتناهی است به صورت $u(x, 0) = e^{-x^2}$ داده شده است. اگر قرار باشد حرکت بعدی تار موجی باشد که به سمت راست می‌رود، تار باید با چه سرعتی حرکت را آغاز کند؟

(۱) $-2xce^{-x^2}$ (۲) $-ce^{-x^2}$ (۳) $+2xce^{-x^2}$ (۴) $-2e^{-x^2}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر قرار باشد موج به سمت راست حرکت کند باید سرعت اولیه آن (یعنی عبارت $u_t(x, 0) = g(x)$) طوری باشد که $u(x, t)$ شامل جملات $x + ct$ نباشد. پس با توجه به جواب دالامبر معادله‌ی موج، باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}G(x+ct) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^{-(x+ct)^2} + \frac{1}{2c}G(x+ct) = 0$$

$$\Rightarrow G(x+ct) = -ce^{-(x+ct)^2} \xrightarrow{x+ct=z} G(z) = -ce^{-z^2}$$

$$g(z) = 2zce^{-z^2} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر } z \text{ به } x} g(x) = 2xce^{-x^2}$$

اما می‌دانیم $G(z) = \int g(z)dz$ و لذا $g(z) = G'(z)$ بنابراین داریم:

شکل واقعی معادلات موج و گرما

معادلات موج و گرمای یک بعدی با توجه به تأثیرات عوامل داخلی و خارجی بر روی سیستم فیزیکی مسأله تغییراتی دارند. در واقع فرم کلی‌تر آن‌ها به شکل زیر است:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + F(x, t, u, u_0) \\ u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x, t, u, u_t) \end{cases}$$

برای مثال در معادله‌ی موج، فرم کلی ممکن است به شکل زیر نوشته شود:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \underbrace{f(x, t)}_{\text{نیروی خارجی}} - \underbrace{\alpha u_t}_{\text{نیروی عکس‌العمل}} - \underbrace{\beta u}_{\text{نیروی جابه‌جایی}}$$

و به عنوان مثالی برای معادله‌ی گرما، فرم کلی ممکن است به شکل زیر نوشته شود:

$$u_t = c^2 u_{xx} - h(u - u_0)$$

که h عددی ثابت و u_0 درجه حرارت ثابت در محیط اطراف میله است.

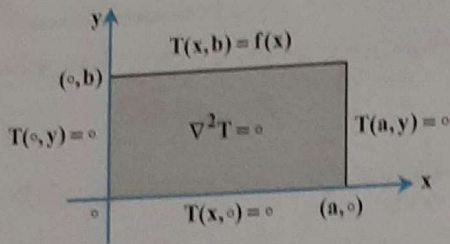
معادله لاپلاس

هر معادله به فرم کلی زیر به معادله‌ی لاپلاس معروف است:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{یا} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

به هر تابع u که در معادله فوق صدق کند، یک تابع هارمونیک می‌گویند. این معادله معمولاً مستقل از زمان است و بنابراین شرایط اولیه در آن وجود ندارد و فقط شرایط مکانی (شرایط مرزی) به همراه معادله در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این که مقادیر تابع روی مرز در ناحیه‌ای داده می‌شود، سؤال ما در این قسمت یک مسأله را به روش ضربی حل می‌کنیم و همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، برای پاسخگویی به سؤالات آزمون کارشناسی ارشد، از جدول کتاب که در صفحات بعدی آورده شده است، استفاده خواهیم کرد.

مسئله مقدار مرزی زیر را در داخل یک مستطیل به طول a و عرض b حل کنید.



$$\begin{cases} \nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0 ; 0 < x < a, 0 < y < b \\ T(0, y) = T(a, y) = 0 ; 0 \leq y \leq b \\ T(x, 0) = 0, T(x, b) = f(x), 0 \leq x < a \end{cases}$$

پاسخ: جواب کلی را به شکل $T(x, y) = X(x)Y(y)$ در نظر می‌گیریم و با مشتق‌گیری و جایگزینی آن در معادله داریم:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = +\lambda$$

با توجه به این که دو کسر باید ثابت باشند، داریم:

با لحاظ کردن شرایط مرزی داریم:

$$\begin{cases} T(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ T(a, y) = X(a)Y(y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0 \end{cases}$$

بنابراین دستگاه معادله زیر را داریم:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

با توجه به این که فقط $\lambda = \omega^2 > 0$ می‌تواند جواب غیر صفر تولید کند، پس داریم:

$$X(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

$$X(0) = A = 0, \quad X(a) = B \sin(\omega a) = 0 \Rightarrow \omega a = n\pi \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \lambda_n = \omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0 \Rightarrow Y_n(y) = C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

با λ_n به دست آمده، معادله دوم به شکل مقابل حل می‌شود:

با توجه به شرط $Y(0) = 0$ ، واضح است $C_n = 0$ است و لذا $Y_n(y) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$ ، پس جواب کلی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$T_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = B_n D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

با فرض $E_n = B_n D_n$ داریم:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

با اعمال شرط اولیه $T(x, b) = f(x)$ داریم:

$$E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

به راحتی معلوم است f دارای سری فوریه نیم‌دامنه سینوسی است و بنابراین داریم:

و بنابراین E_n برابر مقدار زیر است:

$$E_n = \frac{1}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

معادله‌ی ناهمگن لاپلاس را معادله‌ی پواسون می‌نامند در واقع معادله‌ی پواسون به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 u = f$$

در حل این نوع معادلات در واقع با حل یک معادله ناهمگن لاپلاس روبه‌رو خواهیم بود.

معادله لاپلاس در مختصات قطبی

(۱) معادله لاپلاس در مختصات قطبی به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

مثال ۴۵: هرگاه پتانسیل موجود در روی بدنه دو استوانه طویل و هم‌محور به شعاعهای قاعده ۱ و e به ترتیب 110° و 220° ولت باشد و معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$ باشد، آنگاه پتانسیل موجود بین دو استوانه برابر کدام است؟

$$\frac{110}{e+1}(r+1+\text{Lnr}) \quad (۴)$$

$$\frac{110}{e-1}(r+e-2) \quad (۳)$$

$$\frac{1}{1-e} \left(\frac{110}{r} - 220e + 110 \right) \quad (۲)$$

$$110(1+\text{Lnr}) \quad (۱)$$

✓ پاسخ: گزینه «۱» روش اول: توجه شود به ازای $r=1$ باید پتانسیل برابر 110° و به ازای $r=e$ باید پتانسیل برابر 220° گردد که این شرایط را فقط گزینه‌های (۱) و (۳) دارا هستند، از طرفی در حل معادله چون جواب به θ بستگی ندارد، پس $u_{\theta\theta} = 0$ و لذا معادله زیر را داریم:

در معادله صدق می‌کند $\Rightarrow \frac{110}{r^2} = -\frac{1}{r} \left[\frac{110}{r} \right] \Rightarrow u_{rr} = -\frac{1}{r} u_r$ تابع گزینه ۱ را چک می‌کنیم

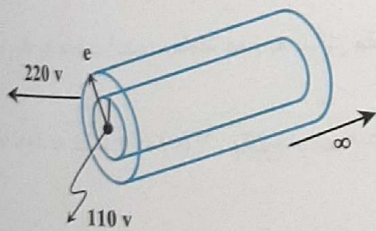
روش دوم: با توجه به شرایط مسئله واضح است؛ پتانسیل به θ بستگی ندارد، لذا در معادله لاپلاس داریم:

$$u = f(r) \rightarrow u_{\theta\theta} = 0$$

$$\Rightarrow u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0 \Rightarrow u_{rr} = -\frac{1}{r} u_r \Rightarrow u_r = T \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{1}{r} T \Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow T = \frac{k}{r} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{k}{r} \Rightarrow u(r) = k \text{Lnr} + c$$

$$\begin{cases} u(1, \theta) = 110^\circ \\ u(e, \theta) = 220^\circ \end{cases} \Rightarrow u(r) = 110(1 + \text{Lnr})$$



مثال ۴۶: مسأله مقدار مرزی (یا کرانه‌ای) دیریکله در ناحیه بین دو دایره هم‌مرکز، به مرکز O و به شعاعهای $a < b$ و با شرایط مرزی ثابت داده شده است. در این صورت جواب مسأله $T(r, \theta)$ کدام است؟

$$\begin{cases} \nabla^2 T = T_{rr} + \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r^2} T_{\theta\theta} = 0, & a < r < b \\ T(a, \theta) = A, & T(b, \theta) = B, & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\frac{A-B}{a-b} r + \frac{Ba-Ab}{a-b} \quad (۱)$$

$$\frac{ab(A-B)}{b-a} \frac{1}{r} + \frac{bB-aA}{b-a} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} A + (r-a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\theta), & a \leq r \leq \frac{a+b}{2} \\ B + (b-r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\theta, & \frac{a+b}{2} < r \leq b \end{cases} \quad (۴)$$

$$\frac{A-B}{\text{Lna}-\text{Lnb}} \text{Lnr} + \frac{B\text{Lna}-A\text{Lnb}}{\text{Lna}-\text{Lnb}} \quad (۳)$$