بسمه تعالی

تقدسی

پاسخ تشریحی سیگنال سراسری ۹۵

۴۷)
$$Y(\omega)=\int_{\omega-\frac{\pi}{4}}^{\omega+\frac{\pi}{4}} X(\omega)\,d\omega$$

روش اول: با استفاده از فرمول نکته ۳۸ داریم:

$$Y(\omega)=X(\omega)*\underbrace{\left[u\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)-u\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)\right]}_{\Pi\left(\frac{\omega}{\pi/2}\right)}$$

$$\Rightarrow Y(\omega)=X(\omega)\circledast\Pi\left(\frac{\omega}{\pi/2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n]=2\pi\, x[n]\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}=\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{4}n\cdot x[n]}$$

روش دوم: از آنجا که در حدود بالا و پایین انتگرال، ω متغیر داریم،

می‌توانیم از روش مشتق‌گیری استفاده نماییم. داریم:

$$Y'(\omega) = X\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) - X\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)$$

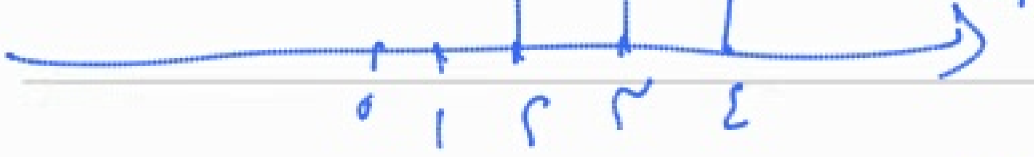
$$\Rightarrow \frac{1}{j} n y(n) = x(n) e^{-j\frac{\pi}{4}n} - x(n) e^{j\frac{\pi}{4}n}$$

$$= x(n) \underbrace{\left(e^{-j\frac{\pi}{4}n} - e^{j\frac{\pi}{4}n}\right)}_{-2j \sin\frac{\pi}{4}n}$$

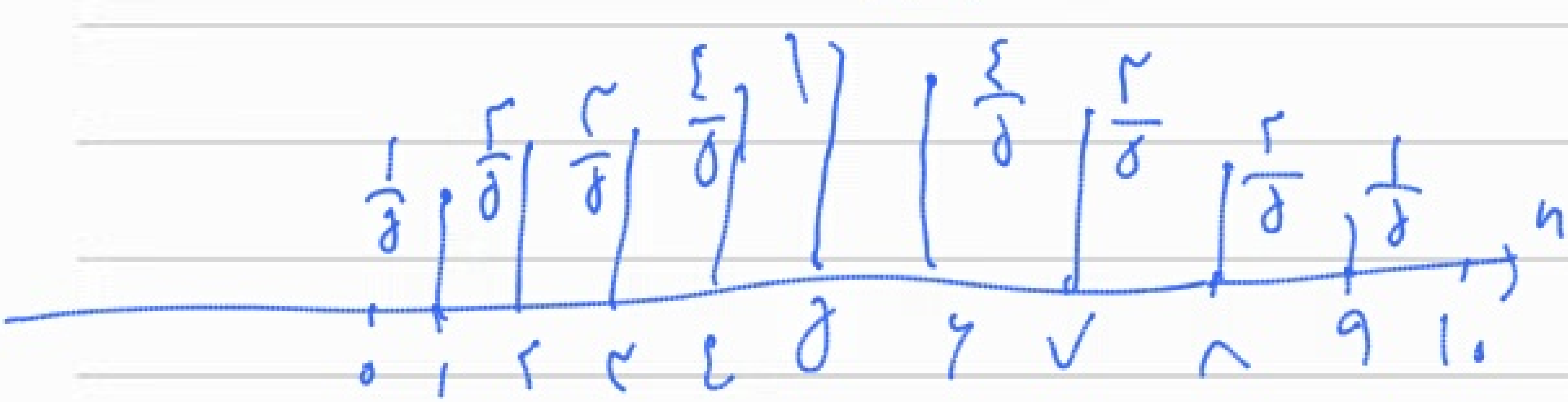
$$\Rightarrow \boxed{y(n) = \frac{2}{n} \sin\frac{\pi}{4}n \cdot x(n)}$$

(۲۸

$h(n)$



$x(n)$



مشخص است که اگر $h(n)$ را قرینه کرده و Δ واحد
به سمت راست انتقال دهیم، اکثر هم کانولوشن را خواهیم
داشت. داریم:

$$y_{max} = y[n] = \frac{4}{5} + 1 + \frac{4}{5} = \frac{13}{5}$$

(۲۹

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] = \begin{cases} 1 , & \text{زوج } n \\ 0 , & \text{فرد } n \end{cases} \xrightarrow{N=2,\ \omega_0=\pi} a_k = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2} e^{jk\pi n} \xrightarrow{H(\omega)} y[n] = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2} H(k\pi) e^{jk\pi n}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2} \underbrace{H(0)}_{1} + \frac{1}{2} \underbrace{H(\pi)}_{-1} e^{j\pi n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} 0 , & \text{زوج } n \\ 1 , & \text{فرد } n \end{cases} = x[n-1]$$

۷۰)

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-x[n-1]$$

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\ ,\quad |z|>\frac{1}{2}\ \Rightarrow H(\omega)=\frac{1-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

با استفاده از فرمول نکته ۸ داریم:

$$x[n]=\begin{cases}3\ , & n \text{ زوج}\\ 2\ , & n \text{ فرد}\end{cases}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}e^{j\pi n}$$

$$\xRightarrow{H(\omega)}\ y[n]=\frac{5}{2}\underbrace{H(0)}_{0}+\frac{1}{2}\underbrace{H(\pi)}_{4}e^{j\pi n}=2(-1)^n=2e^{j\pi n}$$

که طبق نکته ۱۷ توان آن برابر $P=4$ می‌باشد.

* توجه کنید که اگر به جای $(-1)^n$ ، $\cos \pi n$ قرار دهیم

نمی‌توان از فرمول توان $A\cos$ که برابر $\frac{A^2}{2}$ است استفاده

کرد زیرا طبق توضیح پاورقی نکته ۱۷ (صفحه ۲۹) این

حالت استثناء می‌باشد.

۷۱)

N زوج ، $x(n) \xleftrightarrow{FS} a_k$ ، $z(n) = x(2n)$

روش اول (با استفاده از جمله دوم): طبق نکته ۲۱۱ ، از آنجایی

a_k با دوره تناوب $\frac{N}{2}$ متناوب است ، سیگنال $x(n)$ صرفاً

فقط در نقاط مضرب $\alpha = 2$ مقدار دارد. پس $x(n)$ در نقاط n

فرد برابر صفر است. یعنی $x(2n+1) = 0$.

روش دوم (با استفاده از جمله اول):

$$a_k = a_{k+\frac{N}{2}} \longrightarrow x(n) = x(n)\,\underbrace{e^{-j\frac{N}{2}\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}_{(-1)^n}$$

$$\Longrightarrow x(n)\left(1-(-1)^n\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x(n) = ? \ , & n \text{ زوج} \\ x(n) = 0 \ , & n \text{ فرد} \end{cases}$$

(۷۲

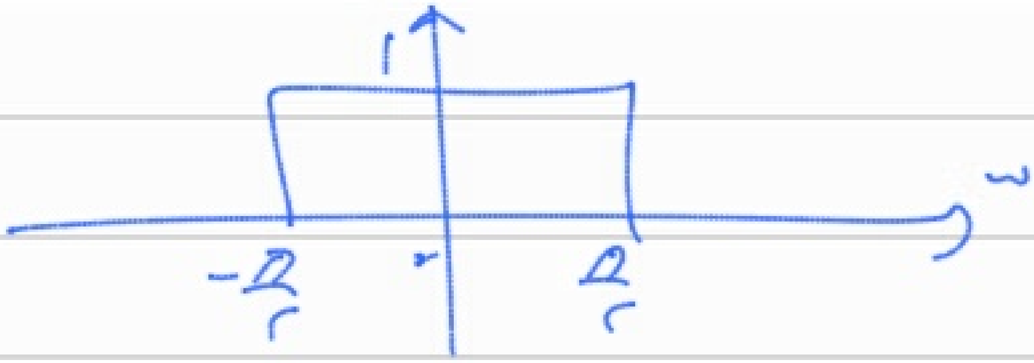
$T=4\ ,\ x(t) \Longrightarrow x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}t}$

$\omega_0=\frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H\left(k\tfrac{\pi}{2}\right) e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

طبق تأکیدات مکرر اساتید $H(k\frac{\pi}{2})$ را حساب می‌کنیم.

$$h(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\pi t} \longrightarrow H(\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$



مشخص است که $H(k\frac{\pi}{2})$ فقط به ازای $k=0,\pm 1$ مقدار دارد و برابر $\underline{1}$ است. داریم:

$$y(t)=a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{2}t}+a_0+a_1e^{j\frac{\pi}{2}t}$$

با توجه به فرم خروجی فوق همگی گزینه‌ها، خروجی برابر $\frac{2}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{2}t)$

یا $-\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)$ می‌باشد که با ؟ دقیق a_{-1} یا

a_1 می‌توان به گزینه صحیح رسید. اما در اینجا می‌توان از

تست ۲ سری ۵ صفحه ۱۲۱ جلد دوم نیز کمک گرفت. با توجه به اینکه ورودی

سیگنالی زوج و پاسخ ضربه سیگنالی فرد می‌باشد، خروجی سیگنالی

فرد خواهد بود. یعنی پاسخ برابر $-\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)$ می‌باشد.

---

۷۴)

از آنجا که c_k تابعی زوج است، $x(t)$ نیز زوج خواهد

بود (نکته ۴۷). پس مشتق آن فرد خواهد بود. بقیه گزینه‌ها

هم با استفاده از نکات ۴۷ و ۴۸ رد می‌شوند.

۷۴)

$$x(t) = \cos(100\pi t)\left[u(t) - u(t-2)\right]$$

$$h(t) = x(2-t)$$

بهترین روش در اینجا روش فرمولی است. داریم:

$$y(t)\Big|_{t=3} = x(t) * h(t)\Big|_{t=3} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(3-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,x(\tau-1)\,d\tau = \int_{1}^{2} \cos^2 100\pi\tau\,d\tau$$

$$= \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,d\tau + \underbrace{\int_{1}^{2} \frac{1}{2}\cos 200\pi\tau\,d\tau}_{0} = 2$$

(۷ د

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 2\omega e^{j\frac{\pi}{2}} \; j & , 0<\omega<2\pi \\ -2\omega e^{-j\frac{\pi}{2}} \; -j & , -2\pi<\omega<0 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases} = 2j\omega \Pi\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = 2\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)' = 3\left(\frac{2\pi\cos 2\pi t - \pi\sin 2\pi t}{\pi^2 t^2}\right)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{2}{\pi t^2}\left(2\cos 2\pi t - \sin 2\pi t\right)$$

(۷ ه

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$y(t) = X(t-2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j(t-2)\tau} d\tau$$

مشخص است که سیستم TV، غیرعلی، خطی و حافظه‌دار است.

(۷۷

$T=4\ ,\ x(t) \longrightarrow x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}t}$

$\omega_0=\frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

لذا $H\left(k\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sin k\pi}{k\pi}=\begin{cases}2 & ,k=0\\ 0 & ,k\neq 0\end{cases}$ و با $\frac{\pi}{\pi}$ داریم:

$$y(t)=a_0H(0)=2a_0=\frac{2}{4}\int_{-2}^{2}x(t)\,dt=\frac{11}{12}$$

سطح زیر نمودار که در این تست نیز نیازی به a_k نبود.

(۷۸

$$y[n]=\begin{cases}Re\{x[n-1]\} & ,\ \text{زوج } n\\ Re\{x[n-1]+x[n-2]\} & ,\ \text{فرد } n\end{cases}$$

مشخص است که سیستم غیرخطی (به دلیل وجود Re) و TV است.