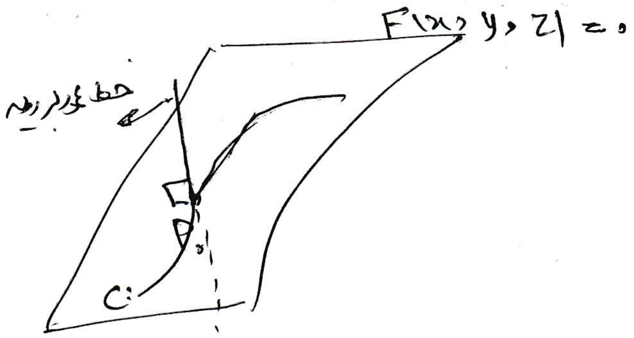
صفحه مماس و خط قائم (بر رویه / بر سطح) :

$$F(x,y,z)=0$$

$$P_0(x_0,y_0,z_0)$$

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$$

$$\begin{cases} x=x_0+F_x(P_0)\,t \\ y=y_0+F_y(P_0)\,t \\ z=z_0+F_z(P_0)\,t \end{cases}$$



منحنی $C: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

$$F(x(t),y(t),z(t))=0$$

$$F_x\cdot\frac{dx}{dt}+F_y\cdot\frac{dy}{dt}+F_z\cdot\frac{dz}{dt}=0$$

ضرب داخلی (F_x,F_y,F_z) در $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$ مساوی صفر است

نبلا بر هم عمودند

صفحه مماس بر نمودار $z=x^2+y^4+e^{xy}$ در نقطه $(1,0,2)$ کدام است؟

$$F=x^2+y^4+e^{xy}-z=0$$

$F_x=$ —— $\xrightarrow{P_0}$ ۲ $\qquad F_x=2x+ye^{xy}\xrightarrow{P_0}F_x=2\times1+0=2$

$F_y=4y^3+xe^{xy}\xrightarrow{P_0}1 \qquad P: 2(x-1)+1(y-0)-1(z-2)=0$

$F_z=-1$

۱۴۲ — A. معادله خط قائم بر رویه $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ در نقطه $(-2,1,3)$ کدام است؟

$$F_x = \frac{x}{2} \xrightarrow{P_0} -1$$

$$F_y = 2y \xrightarrow{P_0} 2$$

$$F_z = \frac{2}{9}z \to \frac{-6}{9} = \frac{-1}{3}$$

$$\boxed{\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{3z+9}{-2}}$$

بردار گرادیان:

$$z = f(x,y)$$

$$\to \nabla f = f_x i + f_y j \longleftarrow$$ عمود بر منحنی تراز تابع

$$w = f(x,y,z)$$

$$\nabla f = f_x i + f_y j + f_z k$$

بردار گرادیان عمود بر سطح در یک نقطه بر رویه ممکن است عمود باشد یا نباشد ولی بر منحنی تراز تابع در آن نقطه حتما عمود است.

مثال: بردار عمود بر منحنی $e^{x^2y}=1$ در نقطه $(-1,0)$ بدست آورید.

$$F(x,y) = e^{x^2y} - 1 = 0$$

$$\nabla f = 2xy\,e^{x^2y}\, i + x^2 e^{x^2y}\, j \xrightarrow{P_0} \dots$$

توجه: امتداد خط مماس C بر فصل مشترک دو سطح $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ برابر است با:

$$V = \nabla f \times \nabla g$$

جهت بردار گرادیان داخل سطح رویه است

از جهت تقعر رویه به سمت تقعر.

صفحه قائم بر منحنی C فصل مشترک دو رویه $z = x^2+y^2$, $xz+y^2-2z=1$

در نقطه $(2,-1,5)$ محور z را در کدام ارتفاع قطع می‌کند

$f = x^2+y^2-z$

$g = xz+y^2-2z-1$

$\nabla f = 2xi + 2yj - k \to \nabla f = 4i - 2j - k$

$\nabla g = zi + 2yj + (x-2)k$

$\nabla g = 5i - 2j$

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2i - 5j + 2k$$

صفحه: $-2(x-2) - 5(y+1) + 2(z-5) = 0$

$\xrightarrow{\text{تلاقی با محور } Z} x = y = 0 \to 4 - 5 + 2z - 10 = 0$

$2z = 11 \to z = 11/2$

مشتق سوئی:

مشتق تابع $z = f(x,y)$ در نقطه $P_0(x_0,y_0)$

در جهت بردار یکه $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x_0+\alpha u_1, y_0+\alpha u_2) - f(x_0,y_0)}{\alpha}$$

برای توابع سه متغیره مطالب مشابه تعمیم می‌شود. شرط لازم برای وجود مشتق سوئی پیوستگی است

اگر

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

و $u(u_1,u_2)$ بردار یکه باشد آنگاه مشتق جهتی تابع f در $(0,0)$ در راستای u کدام است

* شرط لازم: پیوستگی تابع در $(0,0)$

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^5\cos^2\theta\,\sin^3\theta}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}=\lim_{r\to 0} r\times \text{کراندار}=0$$

$$D_{\vec u}f(0,0)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(0+\alpha u_1,\,0+\alpha u_2)-f(0,0)}{\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\dfrac{\alpha^2u_1^2\,\alpha^3u_2^3}{\alpha^4u_1^4+\alpha^4u_2^4}-0}{\alpha}=\frac{u_1^2u_2^3}{u_1^4+u_2^4}$$

فرمول محاسباتی مشتق جهتی:

$$D_{\vec a}f(P_0)=\nabla f(P_0)\cdot\frac{\vec a}{|a|}$$

خواص مشتق جهتی:

$$\begin{cases}\max Df=|\nabla f| \\ \vec a=\nabla f\end{cases}$$

$$\begin{cases}\min Df=-|\nabla f| \\ \vec a=-\nabla f\end{cases}$$

if $D f=0 \iff \vec a\perp\nabla f$

$Df=0 \iff \vec a\perp\vec{\nabla f}$

$$\begin{cases} D_{i} f = f_x \\ D_{j} f = f_y \\ D_{k} f = f_z \end{cases}$$

مثال: مشتق سوئی تابع $f(x,y) = Ln(e^x + e^y)$ را در مبدا در جهت شمال شرقی،

[illegible] را بیابید

$$\vec{a} = i + j \qquad \frac{\vec{a}}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$$

$$f_x = \frac{e^x}{e^x + e^y} \longrightarrow 1/2$$

$$f_y = \frac{e^y}{e^x + e^y} \longrightarrow 1/2$$

$$\nabla f(0,0) = \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} j$$

$$D_{\vec{a}} f(0,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \max D f = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \vec{a} = \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} j \end{cases} \qquad \begin{cases} \min D f = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \vec{a} = -1/2\, i - 1/2\, j \end{cases}$$

اگر $f(x,y,z) = xy + yz + xz$، $\vec{w} = i + j + k$

مطلوب $\vec{v} = 2i - j$ $D_{\vec{v}}(D_{\vec{w}} f)$ را بیابید

$$D_{\vec{w}} f = \nabla f \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = (y+z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (x+z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (y+x)\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$D_{\vec{w}} f = \frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{2}{\sqrt{3}} y + \frac{2}{\sqrt{3}} z$$

$$D_{\vec{v}}(D_{\vec{w}} f) = \nabla(D_{\vec{w}} f) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{15}} - \frac{2}{\sqrt{15}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

اکسترمم‌های توابع دو متغیره:

۳ نقطه (Max نسبی، Min نسبی، نقطه زینی) قابل بررسی است

در توابع دو متغیره ۳ نوع اکسترمم وجود دارد.

نقطه بحرانی: نقطه (a,b) را نقطه بحرانی تابع $f(x,y)$ گوییم هرگاه

یا هر دو مشتق را صفر کنند یا لااقل یکی از آنها موجود نباشد

$$\begin{cases} f_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)=0 \end{cases}$$

یا: $f_x(a,b)$ موجود نباشد یا: $f_y(a,b)$ موجود نباشد

توجه: هر نقطه اکسترمم تابع نقطه بحرانی است ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست

محک آزمون اکسترمم:

اگر (a,b) نقطه بحرانی تابع $f(x,y)$ باشد

$A = f_{xx}(a,b)$

$B = f_{xy}(a,b)$

$C = f_{yy}(a,b)$

1) $D>0$ ، $A>0$: (a,b) مینیمم نسبی

2) $D>0$ ، $A<0$: (a,b) ماکزیمم نسبی

3) $D<0$: (a,b) نقطه زینی

4) $D=0$: آنگاه آزمون جوابگو نیست

مثال: رفتار تابع $f(x,y)=3xy-x^2y-xy^2$ را در نقاط بحرانی بررسی کنید.

$f_x = 3y-2xy-y^2=0$

$f_y = 3x-x^2-2xy=0$

$$\begin{cases} y(3-2x-y)=0 \\ x(3-x-2y)=0 \quad (*) \end{cases}$$

$y=3-2x$

$x(3-x-2(3-2x))=0$

$x(3-x-6+4x)=0$

$x(3x-3)=0$

$\frac{۱۴۷}{A}$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=3-3x \end{cases} \xrightarrow{*} x(3-x)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow (0,0) \\ x=3 \rightarrow (3,0) \end{cases}$$

$$y=3-2x \xrightarrow{*} x(3x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow (0,3) \\ x=1 \rightarrow (1,1) \end{cases}$$

$$A = f_{xx} = -2y \qquad B = f_{xy} = 3-2x-2y$$

$$C = f_{yy} = -2x$$

$$\begin{cases} A(0,0)=0 \\ B(0,0)=3 \\ C(0,0)=0 \end{cases} \rightarrow D=-9<0$$

$(0,0)$ زینی است

کدام گزینه برای تابع $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$ درست است؟

۱) $(0,0)$ زینی و $(1,1)$ ماکس نسبی

۲) $(1,1)$ زینی و $(0,0)$ مین نسبی

۳) $(0,0)$ مین نسبی و $(1,1)$ ماکز نسبی

۴) $(1,1)$ مین نسبی، $(0,0)$ زینی

$$f_x = 4y-4x^3$$

$$A: f_{xx} = -12x^2$$

$$B: f_{xy} = 4$$

$$f_y = 4x-4y^3$$

$$\rightarrow C: f_{yy} = -12y^2$$

$$\begin{cases} A(0,0)=0 \\ B(0,0)=4 \\ C(0,0)=0 \end{cases} \rightarrow D<0$$

$$\begin{cases} A(1,1)=-12 \\ B(1,1)=4 \\ C(1,1)=-12 \end{cases}$$

$$16-(12\times 12)$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta<0 \\ \Delta<0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \max \text{ نسبی}$$

$$D>0$$

$$A>0$$

ضرایب لاگرانژ

در این روش می‌خواهیم max و min تابع f (تابع هدف) تحت

یک معادله $g=0$ (شرط) بدست آوریم، برای این منظور دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

λ: پارامتر لاگرانژ

نقاط جواب این دستگاه کاندیداهای max و min کردن تابع تحت شرط می‌باشد

بیشترین و کمترین مقادیر تابع در این نقاط max و min بودن را مشخص می‌کند

– مقدار ماکزیمم میدان اسکالر $f(x,y,z)=x-2y+2z$ بر روی

$x^2+y^2+z^2=1$ برابر چیست؟

هدف: $f(x,y,z)=x-2y+2z$

شرط: $g: x^2+y^2+z^2-1=0$

$$\begin{cases} i-2j+2k=\lambda(2xi+2yj+2zk) \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1=2x\lambda \\ -2=2y\lambda \\ 2=2z\lambda \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{2x} = -\frac{1}{y} = \frac{1}{z} \longrightarrow 2x=-y=z$$

$$x^2+4x^2+4x^2=1 \rightarrow x=\pm \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \xrightarrow{f} 3 \longrightarrow max$$

مقدار تابع

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \xrightarrow{f} -3$$

مثال: ماکزیمم و min تابع $f(x,y)=x^2y$ را با قید $2x^2+y^2=3$ بیابید.

$$\begin{cases} 2xy=\lambda(4x) \\ x^2=\lambda(2y) \\ 2x^2+y^2=3 \quad * \end{cases}$$

$2xy=\lambda(4x) \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=\pm\sqrt{3} & \text{بدست آوردیم} \\ x\neq 0 \rightarrow 2y=4\lambda \rightarrow \lambda=\frac{y}{2} \end{cases}$

$\rightarrow x^2=y^2$

$x^2=\frac{y}{2}(2y) \rightarrow x^2=y^2$

$\xrightarrow{(*)} x^2=1 \rightarrow \begin{cases} x=1 \begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases} \\ x=-1 \begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases} \end{cases}$

$(1,1)$ ، $(1,-1)$ ، $(-1,1)$ ، $(-1,-1)$.

$(0,\sqrt{3})$ $(0,-\sqrt{3})$

توضیح: روند کلی حل دستگاه، حذف λ از معادله اول و قرار دادن رابطه بین مختصات نقطه در قید می‌باشد

$$\begin{cases} f(0,\sqrt{3})=0 \\ f(0,-\sqrt{3})=0 \\ f(1,1)=1 \rightarrow \max \\ f(1,-1)=-1 \rightarrow \min \\ f(-1,1)=1 \\ f(-1,-1)=-1 \end{cases}$$

ماکزیمم، min مطلق تابع با قید نامعادله (ناحیه بسته):

اگر بخواهیم ماکزیمم و min مطلق تابع f را تحت قید نامعادله $g\geq 0$ بدست آوریم مراحل زیر را انجام می‌دهیم

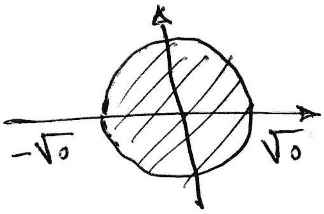
۱) نقاط بحرانی f را که درون ناحیه قرار دارند در نظر می‌گیریم

۲) نقاط جواب دستگاه لاگرانژ را تحت قید معادله $g=0$: در نظر می‌گیریم

۳) در صورتی که ناحیه گوشه داشته باشد؛ نقاط گوشه را در نظر می‌گیریم

۴) مقادیر تابع را در نقاط بدست آمده در ۳ مرحله بالا محاسبه کرده، بیشترین آن max مطلق و کمترین آن min مطلق است.

$\frac{149}{A}$ مثال: max مطلق و min مطلق تابع $f(x,y)=x+y$ را روی ناحیه $x^2+y^2\leq 5$ بدست آورید.



$$(1)\begin{cases} f_x=1 \\ f_y=1 \end{cases} \rightarrow$$ نقطه بحرانی ندارد

$$(2)\begin{cases} 1=\lambda(2x) \\ 1=\lambda(2y) \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \rightarrow x=y \rightarrow 2x^2=5 \rightarrow x=\pm\sqrt{5/2}$$

(3) $\rightarrow$ ندارد

$$(4)\quad f\left(\sqrt{5/2},\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)=2\sqrt{\tfrac{5}{2}}=\sqrt{10}$$

$$f\left(-\sqrt{5/2},-\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)=-10$$

سطوح درجه ۲ فضایی:

هر سطح درجه دوم فضایی سطحی است که معادله آن نسبت به x و y و z از درجه ۲ باشد.

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz$$
$$+fyz+gx+by+jz+k=0$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} ax+by+cz+d=0$$

صفحه از درجه ۱ است

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+by+jz+k=0$$

رویه های زیر را ترسیم کنید:

تذکر: بعد از صفحات ساده‌ترین رویه‌ها استوانه‌ها می‌باشند

فرض کنید C (منحنی) واقع در یک صفحه و خط L غیر واقع در آن صفحه مفروض باشد

استوانه رویه‌ایست که از حرکت خط بر روی C به موازات L حاصل می‌شود

مشخصات کروی $\underline{z} = \rho\cos\phi$ است

$$\rho = a\cos\phi \xrightarrow{\times\rho} \underline{\rho^2 = a\rho\cos\phi}$$

$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2 = az \longrightarrow \underline{\text{کره}}$$

$$\gamma:\ r(t) = e^t\, i + (e^t \sin t)\, j + (e^t \cos t)\, k$$

$$x = e^t \qquad y = e^t \sin t \qquad z = e^t \cos t$$

$$y^2+z^2 = x^2 \longrightarrow \text{مخروط}$$

پارامترهای مقابل معرف کدام نقطه (منحنی) است؟

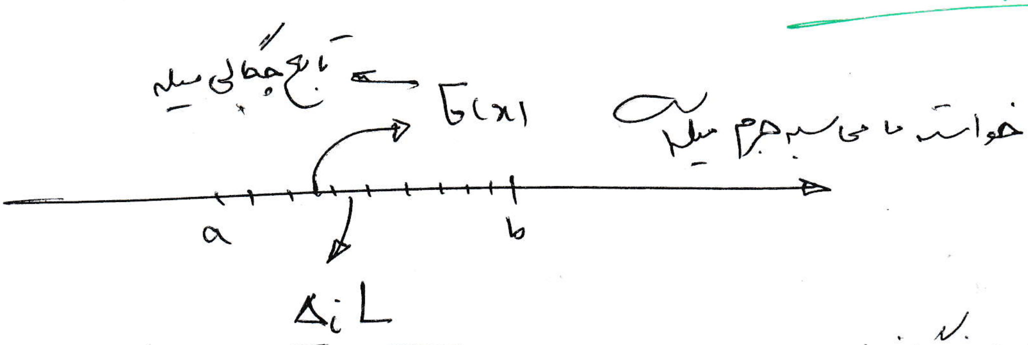
$$\begin{cases} x = 1+2\cosh t \\ y = 3\sinh t \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{x-1}{2} = \cosh t \quad , \quad \frac{y}{3} = \sinh t$$

$$\longrightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\longrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \longrightarrow$$ استوانه هذلولوی

دیفرانسیل انتگرال :



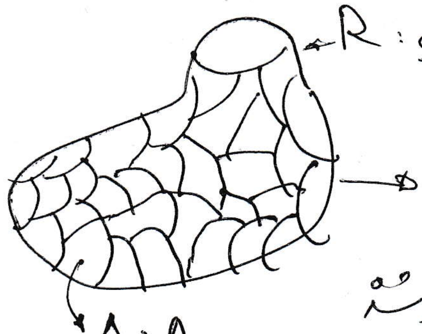
انتگرال معین یگانه :

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i) \cdot \Delta_i L = M \longrightarrow M = \int_a^b \sigma(x)\, dx$$

انتگرال دوگانه تعمیم یافته انتگرال بالاست

خواسته ما محاسبه جرم صفحه است

انتگرال معین دوگانه :



Δ_i : قطر پارتیشن های افراز شده

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i, y_i) \cdot \Delta_i A$$

$$\longrightarrow L = \iint_R \sigma(x_i, y_i)\, dA$$

$$\int_0^3 \int_0^x (x+2y)\, dy\, dx = \int_0^3 \left(xy + y^2 \Big|_0^x\right) dx$$

$$= \int_0^3 2x^2\, dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^3 = 18$$

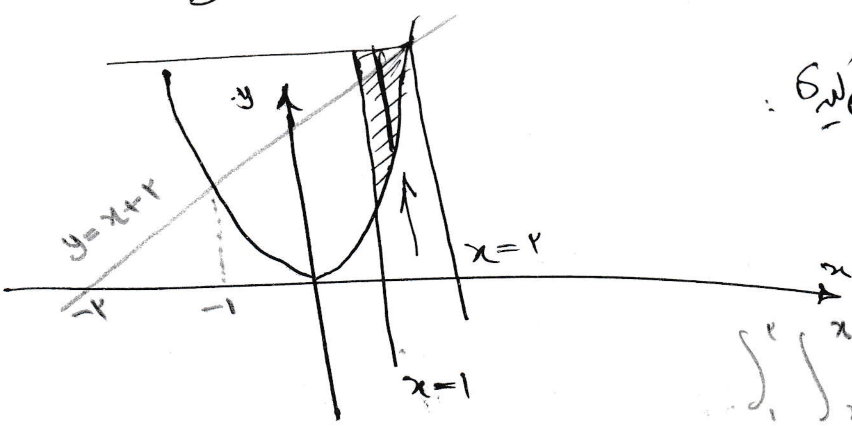
$$\iint_R (3y^2 - x)\, dA \qquad R=[0,2]\times[1,2]$$

$$= \int_0^2 \int_1^2 (3y^2 - x)\, dy\, dx = \text{---}$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\, dy\, dx = \int_0^1 \sinh^{-1} \frac{y}{x} \Big|_{x^2}^{x} dx = \sqrt{2} - 1$$

$$I = \iint_D \frac{dx\, dy}{(x+y)^2} \quad , \quad y = x^2 ,\ y = x+2 ,\ x=1$$

$$x^2 = x+2 \to x^2 - x - 2 = 0 \qquad (x-2)(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$



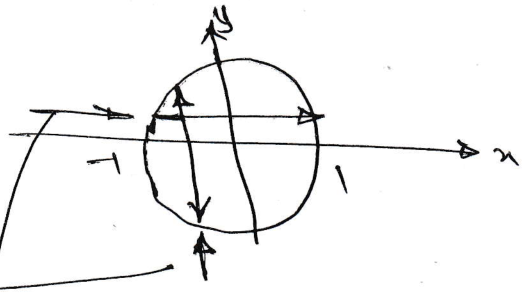
گام ۱: مشخص کردن ناحیه انتگرال‌گیری:

$$x+y = u$$
$$dy = du$$

$$\int_1^2 \int_{x^2}^{x+2} u^{-2}\, du\, dx = \int_1^2 -(x+y)^{-1}\Big|_{x^2}^{x+y} dx$$

$$\int_1^2 \int_{x^2}^{x+2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dy\, dx \; -\int_1^2 \frac{1}{x+y}\Big|_{x^2}^{x+y} = -\int_1^2 \left(\frac{1}{2x+y} - \frac{1}{x+x^2}\right) dx$$

$$I=\iint_{x^2+y^2\leq 1} (\sin x + y^3 + 3)\,dx\,dy$$



$$\rightarrow I=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sin x^3\,dx.dy$$

تابع فرد با کران متقارن ← صفحه ۶۳۴ کتاب

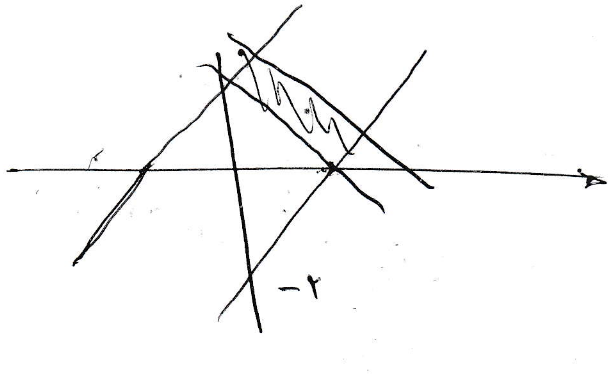
$$I=\iint_A e^{-2x-3y}\,dA \qquad A=\{(x,y);\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-2x-3y}\,dx\,dy=\left(\int_0^\infty e^{-2x}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-3y}\,dy\right)$$

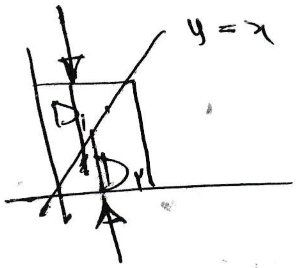
$= \dots$

$y=x+1 \qquad y=x-2 \qquad y=-2x+5 \qquad y=-2x+4$

$$\iint_R (2x^2-xy-y^2)\,dA$$



$\frac{۱۵۴}{۸}$ $F(x, y) = \operatorname{Max}\{x, y\}$

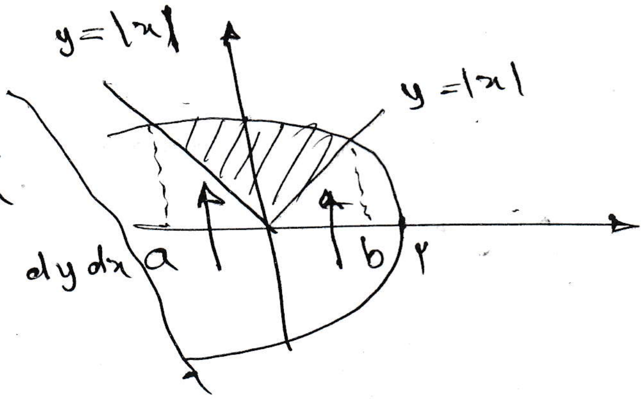


$$I = \iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} \quad + \iint_{D_2}$$

$$I = \int_0^1 \int_x^1 y \; dy\,dx + \int_0^1 \int_0^x x\,dy\,dx$$

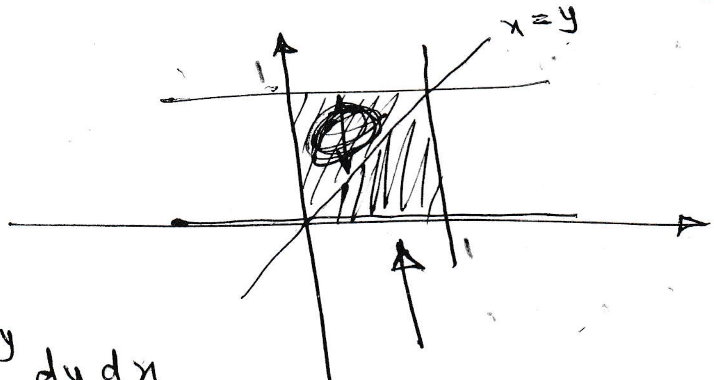
ص ۳۱۸ تمرین ۳

$y = |x|$ $x = 2 - y^2$



$$S = \int_a^0 \int_{-x}^{\sqrt{2-x}} dy\,dx + \int_0^b \int_{x}^{\sqrt{2-x}} dy\,dx$$

$$I = \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\,dy$$



تغییر ترتیب انتگرال

$$I = \int_0^1 \int_0^x x^2 e^{xy}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x e^{xy} \Big|_0^x dx = \int_0^1 (x e^{x^2} - x)\,dx = \int_0^1 (x e^{x^2} - x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$

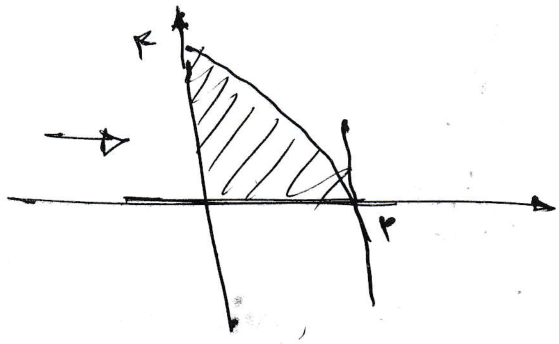
ص ۶۴۵

۱۵۵/A

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{e^{2y}}{4-y}\, x\, dx\, dy$$

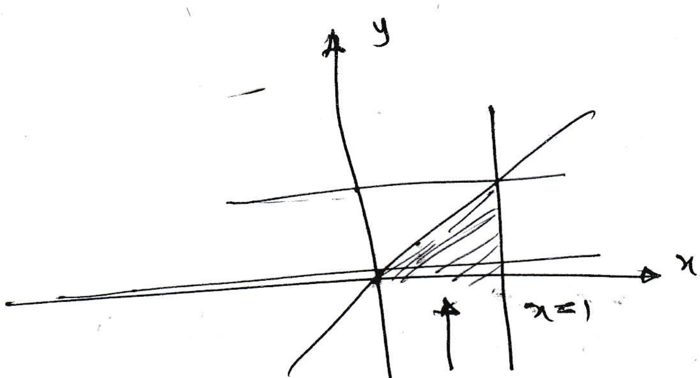
$$= \frac{1}{4} \int_0^4 e^{2y}\, dy = \sim$$



ص ۶۴۲

$$\int_0^1 \int_y^1 \sin \pi x^2\, dx\, dy$$

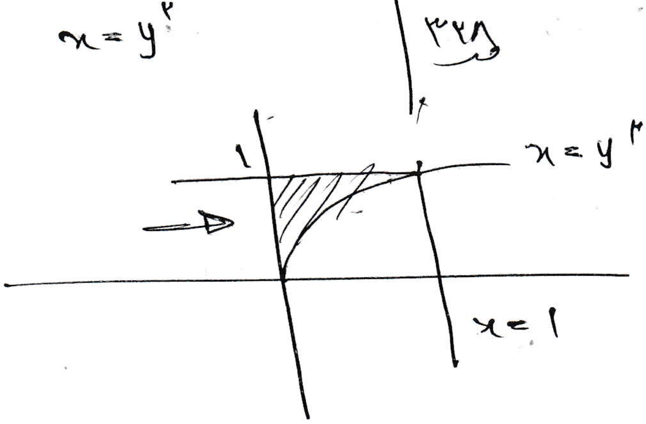
$$= \int_0^1 \int_0^x \sin \pi x^2\, dy\, dx$$



ص ۶۴۸

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx$$

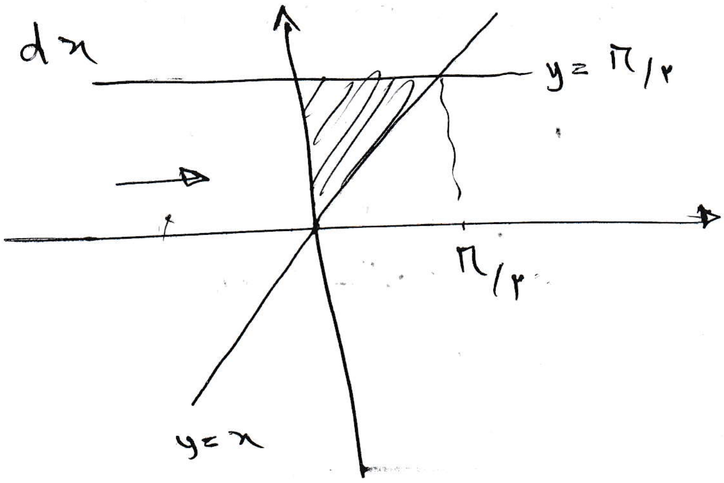
$$= \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3}\, dx\, dy$$



$y = \sqrt{x} \to x = y^2$

۱۵۶
A

$$\int_0^{\pi/۲}\int_x^{\pi/۲} \frac{\sin y}{y}\, dy\, dx$$



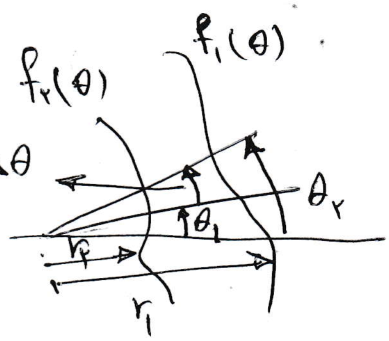
$$= \int_0^{\pi/۲}\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\, dx\, dy$$

$f(r,\theta)$ و $r=f(\theta)$

انتگرال قطبی :

$$\iint_R f(r,\theta)\, dA \qquad dA = r\,dr\,d\theta$$

$$\boxed{A=\tfrac{1}{۲}r^۲\theta}$$



$$A=\tfrac{1}{۲}r^۲\theta$$

$$\tfrac{1}{۲}(r_۱^۲\Delta\theta - r_۲^۲\Delta\theta)$$

$$= \tfrac{1}{۲}\Delta\theta\,(r_۱+r_۲)\underbrace{(r_۱-r_۲)}_{\Delta r} \longrightarrow r\,dr\,d\theta$$

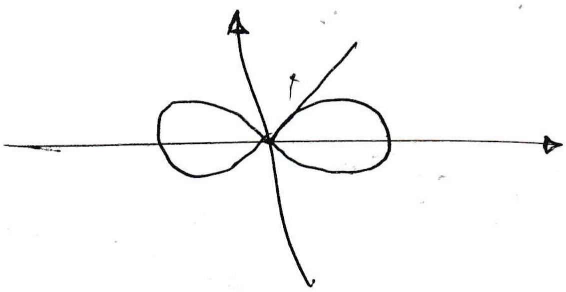
$$\underbrace{\tfrac{1}{۲}(r_۱+r_۲)}_{r}$$

گشتاور ماند نسبت به z

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$

$$r^4 = 2a^2 r^2 \cos 2\theta$$

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} (x^2+y^2)\, dA$$

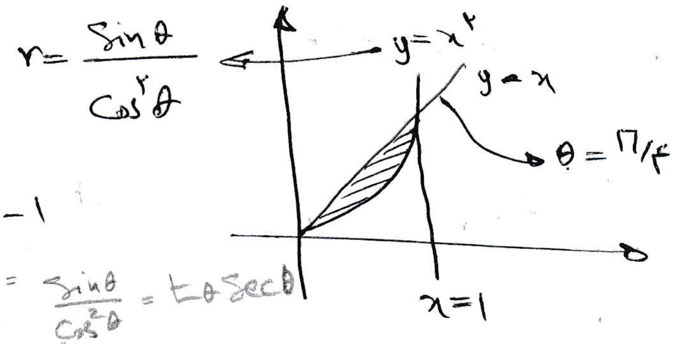


$$\int_0^1\int_{x^2}^{x} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

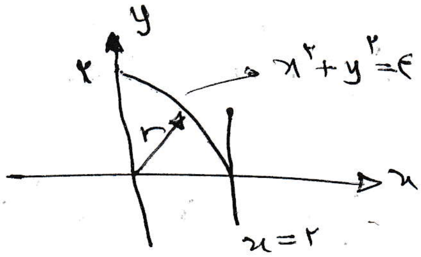
تبدیل به قطبی

$$\xrightarrow{} \int_0^{\pi/4}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} \frac{\cancel{r}}{\cancel{r}}\, dr\, d\theta = \sqrt{2}-1$$

$$r\Big|_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \tan\theta\sec\theta$$



$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

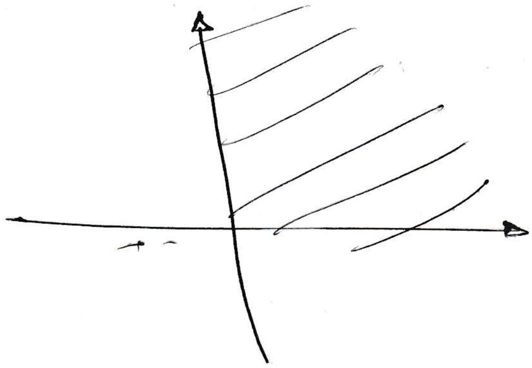


قطبی

$$\xrightarrow{} \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \frac{\sin\theta.\cos\theta}{1}\cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\sin 2\theta\, dr\, d\theta$$

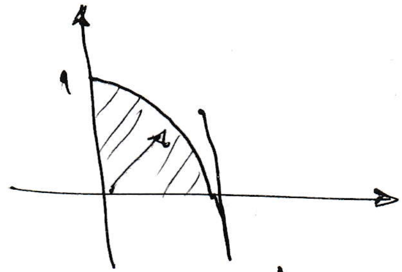
$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$



$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} r e^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{1} r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta$$

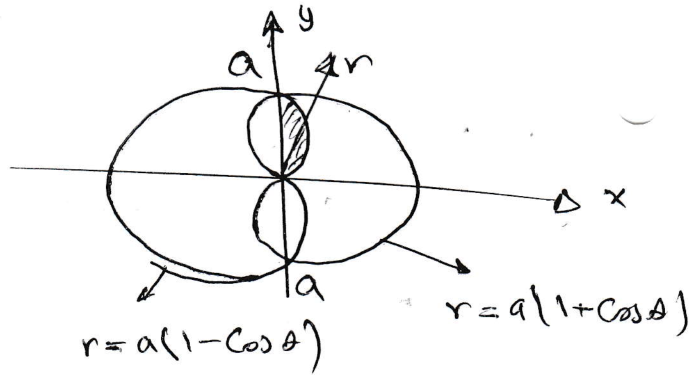


مساحت ناحیه مشترک دلنماهای ;

$r=a(1+\cos\theta)$

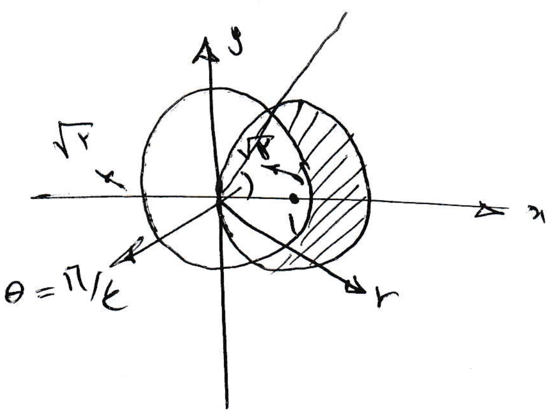
$r=a(1-\cos\theta)$

$$\left(\int_0^{\pi/2}\int_0^{a(1-\cos\theta)} r\,dr\,d\theta\right)\times \underline{4}$$



مساحت محدود به نمودار $r=2\cos\theta$ و خارج دایره $r=\sqrt{2}$ را بدست آورید

$$2\int_0^{\pi/4}\int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$



$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\, dy\, dx$$

ژاکوبین :

$$\begin{cases} x = h(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases}$$

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{R_1} f(h(u,v), g(u,v))\, |j|\, du\, dv$$

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

چون دترمینان ترانسپوز
هم همین جواب را می‌دهد

به فرم زیر هم نوشته می‌شود

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy$$

$D:\ x=0\ ,\ y=0\ ,\ x+y=1$

$$\begin{cases} x-y = u \\ x+y = v \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(u+v)$$

$$y = \frac{1}{2}(\cancel{u-v}) \quad v-u$$

$$j = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1/2$$

اگر توانستیم ژاکوبین u و v را بیابیم
و عکس آن را استفاده می‌کنیم

بعنوان مثال باید ژاکوبین u و v را داشتیم مسئله ۲ بشود که معکوس آن $\frac{1}{2}$ است

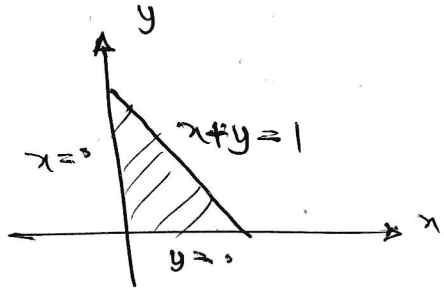
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1) = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

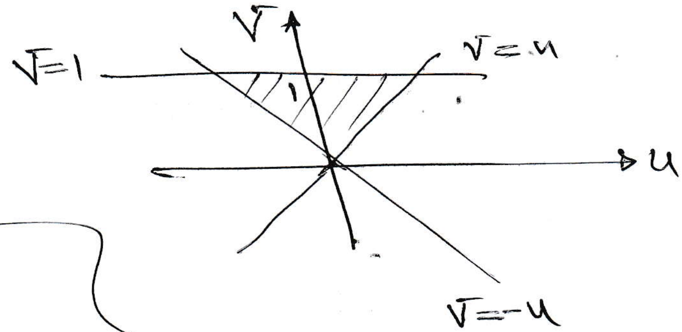
$$\boxed{j = 1/2}$$

$\frac{\text{۱۲۰}}{A}$

$$\iint e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy$$



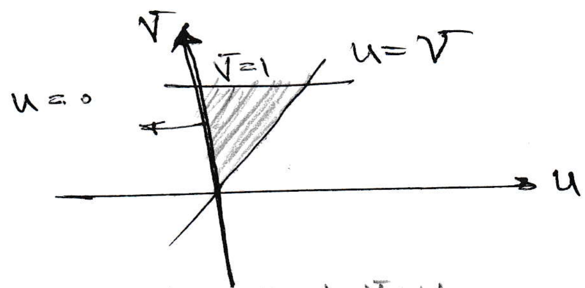
$$=\int_0^1\int_{-v}^{v}\frac{1}{2}e^{u/v}\,du\,dv$$



$$\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\,dy\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} y=u \\ x+y=v \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=v-u \\ y=u \end{array}\right.$$

$$j=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1 \to \underline{|j|=1}$$



$$=\int_0^1\int_0^{v} e^{u/v}\,du\,dv$$

$y=1-x \to u=1-v+u$

$\to \boxed{v=1}$

if $\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array} \to j=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$

$\cos\theta \to \frac{\partial x}{\partial r}$, $-r\sin\theta \to \partial x/\partial\theta$, $\sin\theta \to \frac{\partial y}{\partial r}$, $r\cos\theta \to \frac{\partial y}{\partial\theta}$

$$\left\{\begin{array}{l} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{array}\right.$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

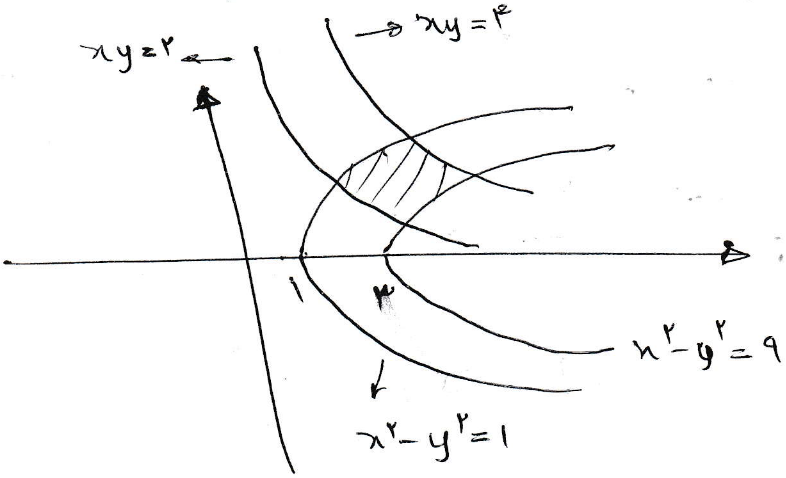
$$j=abr$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dy\, dx$$

$$\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$D: \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2-y^2=9 \\ xy=2 \\ xy=4 \end{cases}$$

ص ۷۴۲ تمرین ۲



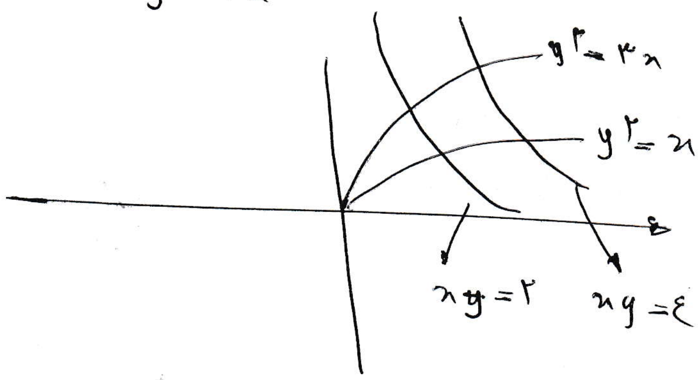
$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\, dA$$

$D:$ $xy=2$

$xy=4$

$y^2=x$

$y^2=3x$



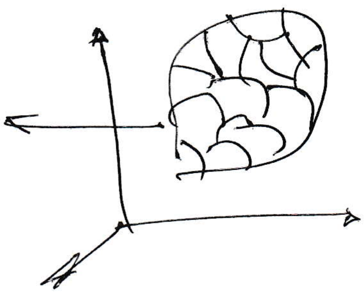
$$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$$

$$\begin{cases} x+y=u \\ y-2x=v \end{cases}$$

$=$

هر پاسخ درست ۱۲

انتگرال سه گانه :



$f(x,y,z)$

تابع چگالی

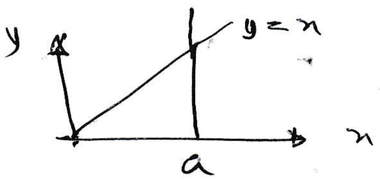
$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\underbrace{\Delta_i V}_{\text{قطر حجم}} = L$$

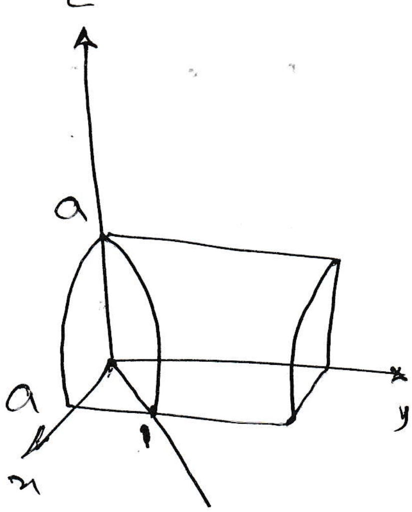
$\|\Delta\| \to 0$

$$\iiint_D f(x_i,y_i,z_i)\,\underbrace{dV}_{dz\,dy\,dx}$$

- حجم جسم محصور : $x^2+z^2=a^2$, $x=0$, $y=0$, $x=y, z=0$

$$\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz \qquad \boxed{\int_0^a\int_0^x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx}$$





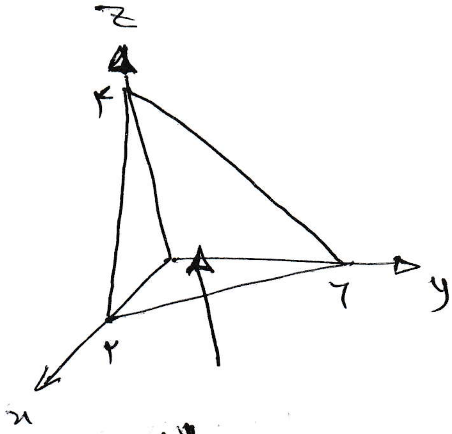
ص ۶۰۱ مثال ۹

۳) حجم محدود به ۲ استوانه ؟ $x^2+y^2=0$ ، $x^2+z^2=4$

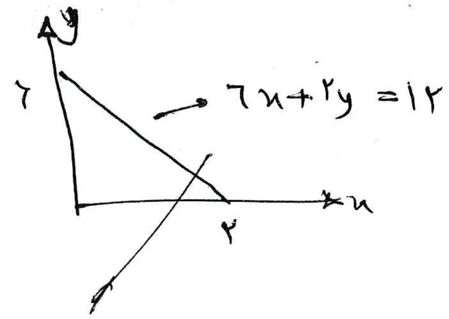
$x\geq 0$ و $z\geq 0$ ، $y\geq 0$ چقدر است ؟

ص ۶۳۸

۳) حجم ناحیه محدود به صفحه $6x+2y+4z=12$ ، صفحات مختصات



$$\int_0^2\int_0^{6-3x}\int_0^{\frac{1}{4}(12-6x-2y)} dz\,dy\,dx$$

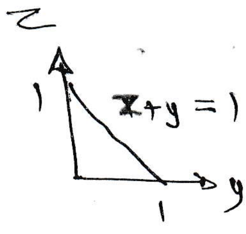


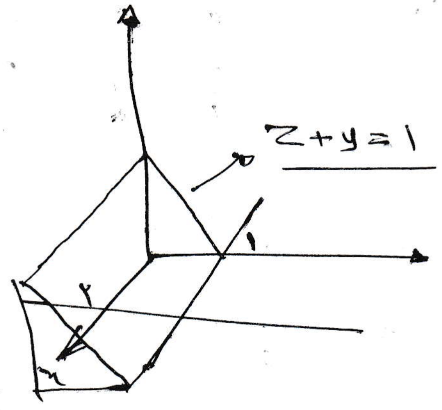
$y=\frac{1}{2}(12-6x)$

$y=6-3x$

ص ۶۹۶

$$\int_0^2\int_0^1\int_0^{1-y} dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dx\,dy\,dz$$



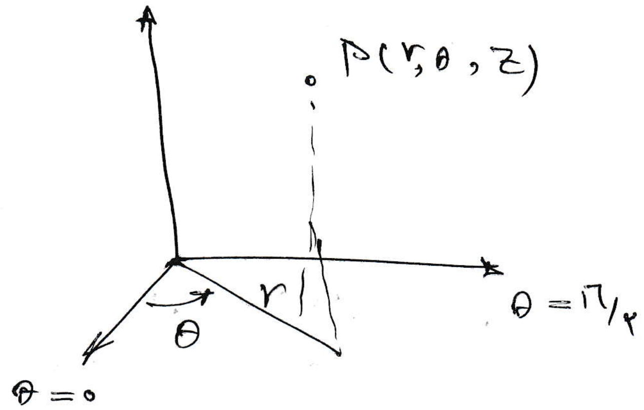


انتگرال سه گانه در مختصات استوانه‌ای:

$Z=Z_0$ → صفحه‌ای موازی xy به ارتفاع Z_0

$r=r_0$ → استوانه‌ای به مرکز مبداء و شعاع r_0

$\theta=\theta_0$ → صفحه‌ای شامل محور Z با زاویه θ_0



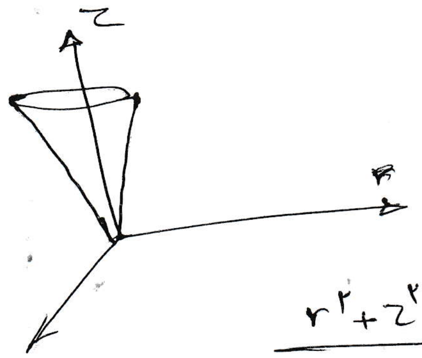
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ Z = Z_0 \end{cases}$$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$Z \in \mathbb{R}$

$r \ge 0$

$Z = r$:

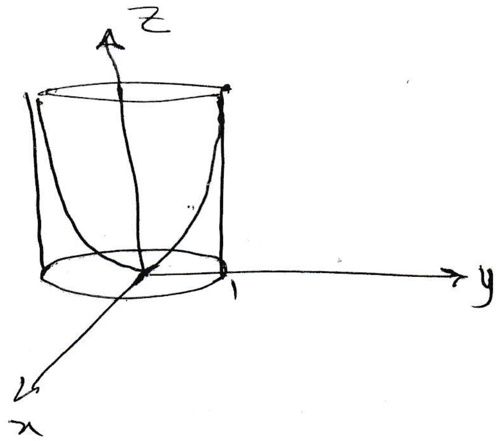


$r^2+z^2=1 \xrightarrow{\text{1 کره به شعاع}}$

در استوانه‌ای

حجم محصور به: $x^2+y^2=1$, $Z=x^2+y^2$, $Z=0$ را بیابید

$$\int_0^{x^2+y^2} dz \to \int_0^{r^2} r\,dz$$

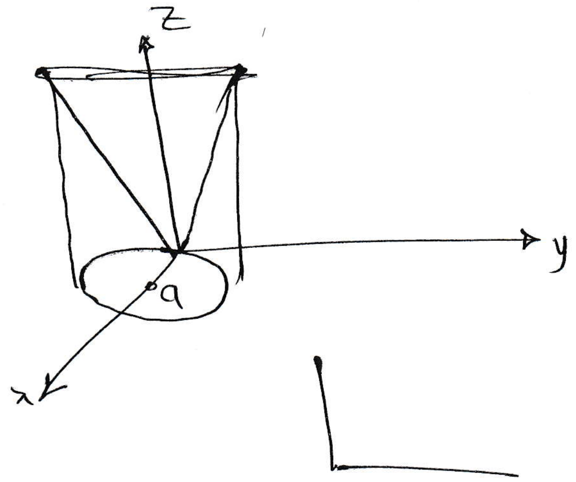


$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

حجم محصور بین : $Z = 0$, $Z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2-2ax=0$

$\downarrow$

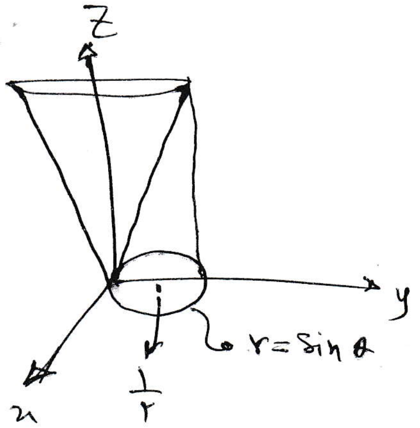
$r = 2a\cos\theta$



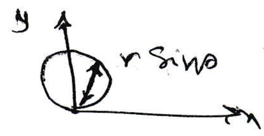
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\theta$$

حجم محصور بین :

$$\begin{cases} Z = r \\ r = \sin\theta \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$



$$2\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin\theta}\int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\theta\right)$$



حجم محصور به دو رویه $Z = x^2+y^2$, $2Z = x^2+y^2+1$ چقدر است ؟

وقتی Z را حذف می‌کنیم تصویر فصل مشترک در صفحه xy ظاهر می‌شود

$x^2+y^2=1 \leftarrow$ تصویر فصل مشترک دو رویه در صفحه xy

$$2x^2+2y^2 = x^2+y^2+1 \rightarrow x^2+y^2=1$$

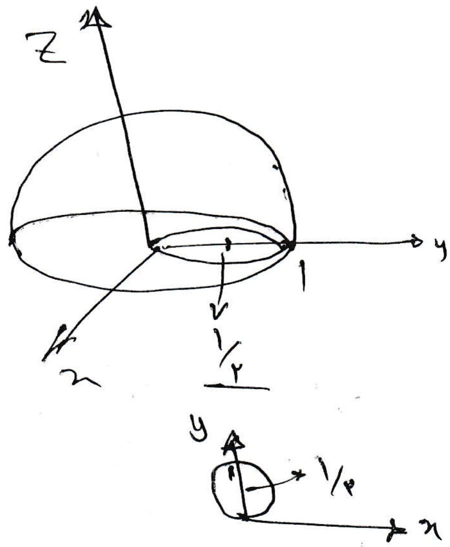
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\frac{1}{2}(r^2+1)} r\,dz\,dr\,d\theta$$

صفحه ۶۱۵ شماره ۴

$x^2+y^2+z^2=1 \quad z\geq 0$

$x^2+y^2=y \rightarrow x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

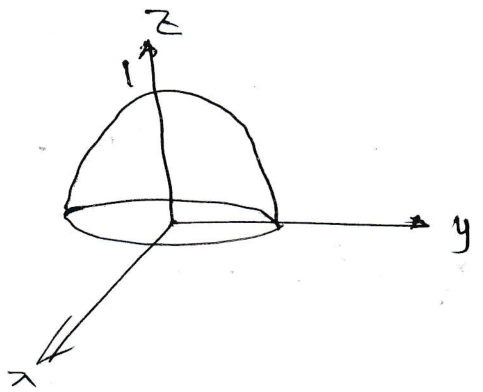
با صفحه xy



$$2\left(\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta\right)$$

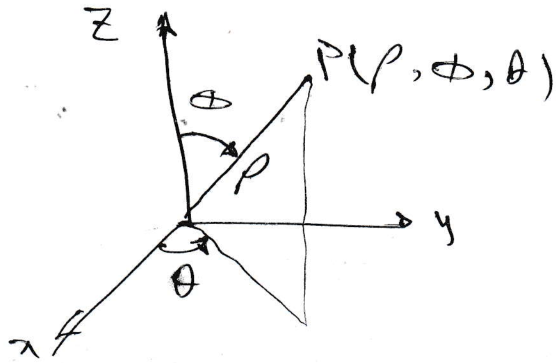
صفحه ۶۰۵ شماره ۴

$Z=1-x^2-y^2 \quad , Z=0$ حجم محصور بین صفحه



$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

مختصات کروی :



$\rho = \rho_0$ ← کره به شعاع ρ_0

$\phi = \phi_0$ ← مخروط

$\theta = \theta_0$ ← نیم صفحه‌ای که شامل محور z است

زاویه θ_0

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \qquad J = \rho^2 \sin\phi$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\rho \geq 0$

$0 \leq \phi \leq \pi$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \longrightarrow abc\,\rho^2 \sin\phi$$

ص ۶۴۸ شماره ۵۰

~~$\rho = 1$~~ $\qquad \rho = a \qquad \phi = \pi/3$

~~$\phi = \pi/3$~~

~~$\theta = 1$~~

ص ۶۱۶

ص ۶۰۹ مثال ۷

را حساب کنید

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\; dx\,dy\,dz$$ تعداد

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho\, \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$y^2 + z^2 = a^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

۷۲۸/۸ ۷ تیر ص۹۰

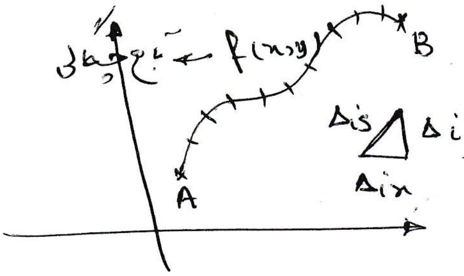
$$\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz$$

$$D: \{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$$

$$\longrightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3}\rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

ص ۱۸۱

انتگرال خط:



$y = g(x)$

طول i امین قطعه $\Delta_i S$

$$\Delta_i s^2 = \Delta_i x^2 + \Delta_i y^2$$

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot \Delta_i S = L \quad \longrightarrow \Delta_i s = \sqrt{\Delta_i x^2 + \Delta_i y^2}$$

$$\int_C f\,ds \longrightarrow$$ انتگرال خط نوع اول

$$dS = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(x, g(x))\sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

انتگرال خط نوع اول

$$\Delta_i s = \sqrt{\Delta_i x^2\Big(1 + \underbrace{\frac{\Delta_i y^2}{\Delta_i x^2}}_{y'^2}\Big)}$$

if $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\; dt$$

ص ۵۹۵

$$\int_C y^2\, ds \qquad C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \text{مارپیچ}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\; dt = \underline{\pi\sqrt{2}}$$

ص ۵۹۶

$$\oint_C (2 + x^2 y)\, ds \qquad C: x^2 + y^2 = 1 \,,\; y \geq 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\; dt$$

ص ۶۱۳

$$\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2}\; dx \qquad \gamma: \begin{cases} x = e^\theta \cos\theta \\ y = e^\theta \sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\begin{cases} x' = e^\theta \cos\theta - e^\theta \sin\theta \\ y' = e^\theta \sin\theta + e^\theta \cos\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_0^1 e^\theta \cdot e^\theta \sqrt{2}\; d\theta$$

$P(x,y) \qquad Q(x,y)$

انتگرال نوع دوم :

$$W_{\text{کار}} = \int_{AB} P\,dx + Q\,dy$$ ⟶ نشان دهنده کار انجام شده توسط نیروی F روی مسیر AB

$$F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$$

$$R = x\,i + y\,j \qquad dR = i\,dx + j\,dy$$

$$\int_{AB} F \cdot dR \longrightarrow \int_{x_A}^{x_B} \Big(P(x, g(x)) + Q(x, g(x))\,g'(x)\Big)\,dx$$

حالت پارامتری :

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big(P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\Big)\,dt$$

حالت ۳ بعدی :

$$F = P\,i + Q\,j + R\,k$$

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

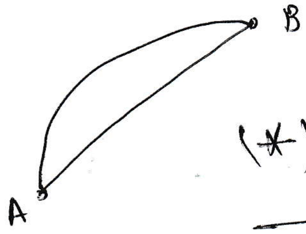
نحوه محاسبه :

۱) تا ۱۲۶ اگر $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ حالت دو بعدی ،

حالت ۳ بعدی ،

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

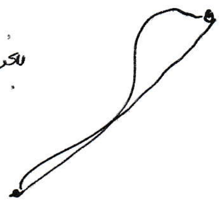
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$



$$(*)\quad R(t) = (1-t)A + tB \qquad 0<t<1$$

$B(-1,4,2)$

معادل قبل



$A(2,1,3)$

$$(1-t)(2i+j+3k) + t(-i+4j+2k)$$

$$\to x(t) = (2-2t-t)\,i$$

$$y(t) = (1-t+4t)\,j$$

$$z(t) = \cdots$$

قضیه گرین که فقط در صفحه کاربرد دارد و مسیرهم بسته باشد:

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

قضیه گرین در مورد نواحی منتظم کاربرد دارد

$$R_{\text{مساحت}} = \frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx = \int x\,dy = \int -y\,dx$$

$$V(x,y) = V_1(x,y)\,i + V_2(x,y)\,j$$

$$\int \underbrace{(V\cdot n)}_{\text{شار برون سو}}\,ds$$

$\vec{n}$ بردار یکه عمود بر سطح به سمت خارج

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

$$\int (V\cdot n)\,ds = \iint \operatorname{div} V\, dA$$

$$\int \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2} \qquad C:\ x^2+y^2=a^2$$

از قضیه گرین نمی‌شود استفاده کرد چون (۰,۰) در ناحیه محدود نقطه تعریف نشده است

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

باید پارامتری کنیم

$$\int_0^{2\pi}\Big[(\cos\theta+\sin\theta)(-\sin\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)\cos\theta\Big]\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} -\,d\theta = -2\pi$$

C: پاره خط واصل از $A(0,1)$, $B(1,2)$

$$\int (x^2-y)\,dx+(y^2+x)\,dy$$

$-1+1$

استفاده از فرمول (*) : $(1-t)\,j+t\,(i+2j)$ $\qquad 0<t<1$

$j-tj+ti+2tj$

$ti+(1-t+2t)j$

$$\begin{cases} x=t \\ y=1+t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1+t \end{cases} \qquad 0<t<1$$

$$\int_0^1 \Big[(t^2-1-t)+\big((1+t)^2+t\big)\Big]\,dt$$

به ازای کدام مقادیر a و b انتگرال

$$\int_A^B (2az\,x+y^2)\,dx+y(bx+az)\,dy+(ax^2+y^2)\,dz$$

مستقل از مسیر است؟

P	Q	R
x	y	z

$2y=yb \to b=2$ $\quad ay=2y \to \boxed{a=2}$

$2ax=2ax$

$a=2$

$b=2$

$$\oint_C x^2y^3\,dx+dy+\cancel{z\,dz} \qquad C:\ z=0,\ x^2+y^2=R^2$$

$$\iint -3x^2y^2$$

$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ توجه شود که در استفاده از قضیه گرین عاملی باعث نامساوی شدن شد. می‌توانیم آن عامل را جدا کنیم که انتگرال صفر می‌شود و فقط انتگرال ساده‌تری را محاسبه می‌کنیم

انتگرال سطح:

$$\iint h(x,y,z)\,dS$$

if $z=f(x,y) \Rightarrow$

$$=\iint_R h(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

مساحت رویه: $\displaystyle\iint_R \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\;dx\,dy$

فرض کنید که رویه هموار است ، $G(x,y,z)=0$

$$\vec{n}=\frac{\vec{\nabla} G}{|\vec{\nabla} G|}$$

$\vec{n}$: بردار نرمال یکه رویه

$$\iint_S (F\cdot n)\,dS$$

انتگرال شار

انتگرال شار را بصورت حاصل بدست آ:

$$\iint_S (\vec{F}\cdot \vec{n})\, d\vec{S} = \iint_R \frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{|n\cdot k|}\, dx\, dy$$

ص ۵۴۰ شماره ۸

$\frac{۱۳\pi}{۳}$

$\pi r^۲ h$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad \Big/ \quad F = Pi + Qj + Zk$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \longrightarrow \text{grad } F$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \longrightarrow \text{div } F$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \longrightarrow \text{Curl } F$$

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^۲}$$ لاپلاسین

$$f(x,y,z) = ۲x^۲y - xz^۳$$

$$\nabla^۲ f = ۴y - ۶xz$$

$$F = ۳x^۲y\, i + ۷xz\, j + ۴zy\, k$$

~~لاپلاسین~~ کرل F در نقطه (۱،۲،۳)

$$\operatorname{Curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y & 7xz & 4yz \end{vmatrix} = (4z - 7x)\, i - (0 - 0)\, j + (7z - 3x^2)\, k$$

$$\operatorname{div} \operatorname{Curl} F = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla \times F}) = 0$$

چون دو سطر دترمینان با هم برابر می‌شود

$\vec{n}$: بردار یکه عمود بر سطح

قضیه واگرایی (دیورژانس) :

$\vec{F}(x, y, z)$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

$$\oiint (F \cdot n)\, dS = \iiint_V \nabla \cdot F\, dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

$$= \iint_S (P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy)$$

نکته: اگر در هر نقطه از رویه بسته S بردار $\vec{F}(x, y, z)$ بر سطح عمود باشد آنگاه

$$\iiint_V (\nabla \times F)\, dV = 0$$

$$\iint_S n \cdot (\nabla \times F)\, dS = 0$$

ا استوکس :

اگر توابع P ، Q ، R و مشتقات جزئی اول آنها بر سطح رویه منتظم S که به وسیله منحنی بسته C محصور شده و پیوسته باشند و
$R: xi + yj + zk$ ، n بردار یکانی قائم خارج از S باشد آنگاه

$$\int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_c F\cdot dR$$

$$= \iint_S (\nabla \times F)\cdot n\,dS$$

توابع حقیقی برداری ← سوابق کار

~~[illegible]~~ گام

$Z = f(x, y)$

تحت شرط :

$g(x, y) = 0$

$U = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & U_{xx} & U_{xy} \\ g_y & U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix}$$

if $J < 0 \rightarrow$ min مینیمم

if $J > 0 \rightarrow$ max ماکزیمم

$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$

به جای تابع U می توانیم از این روش هم استفاده کنیم

$\cancel{f = x + y}$

$\cancel{g = x^2 + y^2 - 5 = 0}$

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = ?$$

$$n^2 < (n+i)^2 < 4n^2 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{1}{4n^2} < \sum \frac{1}{(n+i)^2} < \frac{1}{n^2}$$

$$n \to \infty \qquad\qquad n \to \infty$$

$$\to \underline{\sum \frac{1}{(n+i)^2} = 0}$$

$$n \to \infty$$

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \ldots}}}$$

$$A = \sqrt{2A} \to A^2 = 2A$$

$$\to A = 2$$

$y = x^{\frac{1}{x}}$

$x \to \infty$

$\ln y = \frac{1}{x} \ln x \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$. $y = e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1$ $\quad x \to \infty$

$\ln \lim y = 0 \longrightarrow \lim y = e^{0} = 1$

اگر جمله عمومی سری بصورت $(-1)^{i}(a_i + a_{i+1})$ یا $a_i - a_{i+1}$ باشد تلسکوپی

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} (a_i + a_{i+1}) = \cancel{a} - a_1 + (-1)^{n} a_{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - a_{i+1}) = a_1 - \lim a_n$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i} (a_i + a_{i+1}) = a_1$$

اگر اختلاف اندیس ها بیشتر از یکی و مثلاً ۲ یا ۳ باشد

دو جمله اول + دو جمله آخر

سه جمله اول + سه جمله آخر

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+2}) = a_1 + a_2 - (a_{n+1} + a_{n+2})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$a_n = \ln\frac{n}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n+2}$$

$\lim_{n\to\infty} n^p a_n =$ موجود و مثبت $\longrightarrow$ if $p>1 \longrightarrow$ همگرا

if $0<p\leq 1 \longrightarrow$ واگرا

مجموع سری گر تعداد متناهی از جملات را بنویسیم خطای حاصل از قدر مطلق جمله بعدی کمتر است .

IN

انتگرال دوگانه :

$$\iint_R f(x,y)\, dA$$

- انتگرال های مکرر
- تعویض متغیر
- در مختصات قطبی
- روی بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

انتگرال های مکرر

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx \longrightarrow$$ ناحیه قائم ساده

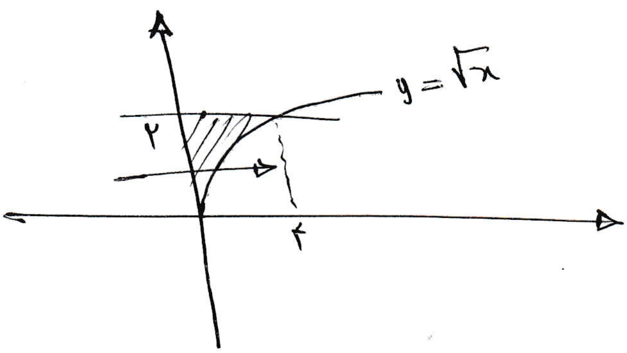
$$\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy \longrightarrow$$ ناحیه افقی ساده

مقدار انتگرال دوگانه زیر چقدر است؟

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} \cos(y^3)\, dy\, dx$$

۱) $\frac{\sin 8}{6}$ ۲) $\frac{\sin 8}{3}$ ۳) $\frac{\sin 8}{2}$ ۴) ۱٫۳۳۳۳

راه حل: تغییر ناحیه انتگرال گیری



$$\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ \sqrt{x} \le y \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le y^2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \qquad \int_0^2 \int_0^{y^2} \cos y^3\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 y^2 \cos y^3\, dy = \frac{1}{3} \sin y^3 \Big|_0^2 = \frac{\sin 8}{3}$$

مقدار I چقدر است؟

$$I = \int_1^5 \int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

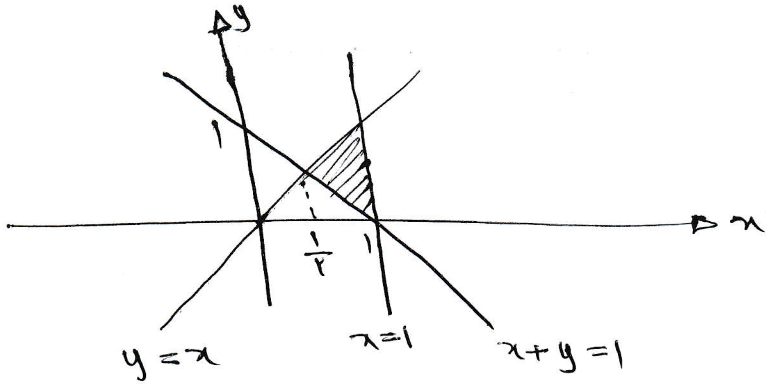
۱) $\frac{1}{4}\pi \ln 5$ ۲) $\frac{1}{2}\pi \ln 5$ ۳) $\frac{1}{5}\pi \ln 4$ ۴) $\frac{1}{5}\pi \ln 2$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$I = \int_1^5 \frac{1}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x}\Big|_0^x dx = \int_1^5 \frac{1}{x}\,\frac{\pi}{4}\, dx = \frac{\pi}{4}\ln x \Big|_1^5 = \frac{\pi}{4}\ln 5$$

مقدار انتگرال زیر که در آن ناحیه D بصورت زیر تعریف شده را بیابید

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x+y} \qquad D:\{(x,y)\mid y<x<1,\ x+y>1\}$$



ناحیه قائم ساده
$$\begin{cases} \frac{1}{۲}\leq x\leq 1 \\ 1-x\leq y\leq x \end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{۲}}^{1}\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x+y}\,dy\,dx=\int_{1/۲}^{1}\operatorname{Ln}(x+y)\Big|_{1-x}^{x}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{۲}}^{1}\operatorname{Ln}۲x\,dx \longrightarrow ۲x=u$$

$$=\frac{1}{۲}\int \operatorname{Ln}u\,du=\frac{1}{۲}(u\operatorname{Ln}u-u)\Big|_{1}^{۲}=\frac{1}{۲}(۲\operatorname{Ln}۲-1)$$

---

if $f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$

ناحیه R مستطیل باشد $R\ \begin{cases} a\leq x\leq b \\ c\leq y\leq d\end{cases} \xrightarrow{\text{then}} \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

$$=\int_a^b g(x)\,dx\times\int_c^d h(y)\,dy$$

روش تغییر متغیر: $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \xrightarrow[\text{مختصات}]{\text{ژاکوبی تغییر}} \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} =$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_{uv}} f\big(x(u,v),\, y(u,v)\big)\,|J|\,du\,dv$$

نکته مهم: اول تابع جدید را در قدر مطلق $|J|$ ضرب کنیم تا بعضی از متغیرها حذف و رابطه ساده تری برای انتگرال‌گیری بدست آید ← آنگاه تبدیل به u, v می‌کنیم

$\iint_R \frac{1}{y}\,dx\,dy$ که در آن R ناحیه محدود به منحنی‌های $y^3 = x^2$, $y^3 = 4x^2$

خطوط $y = 2x$, $y = x$ کدام است؟

$$\begin{cases} u = \dfrac{y^3}{x^2} \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad R_{u,v} = \begin{cases} 1 \leq u \leq 4 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases} \qquad \frac{-2y^3}{x^4} + \frac{3y^3}{x^4} = \frac{y^3}{x^4}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{-2y^3}{x^3} & 3y^2/x^2 \\ \dfrac{-y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = y^3/x^4$$

$$f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{y}\times\frac{x^4}{y^3} = \frac{x^4}{y^4} = \frac{1}{v^4}$$

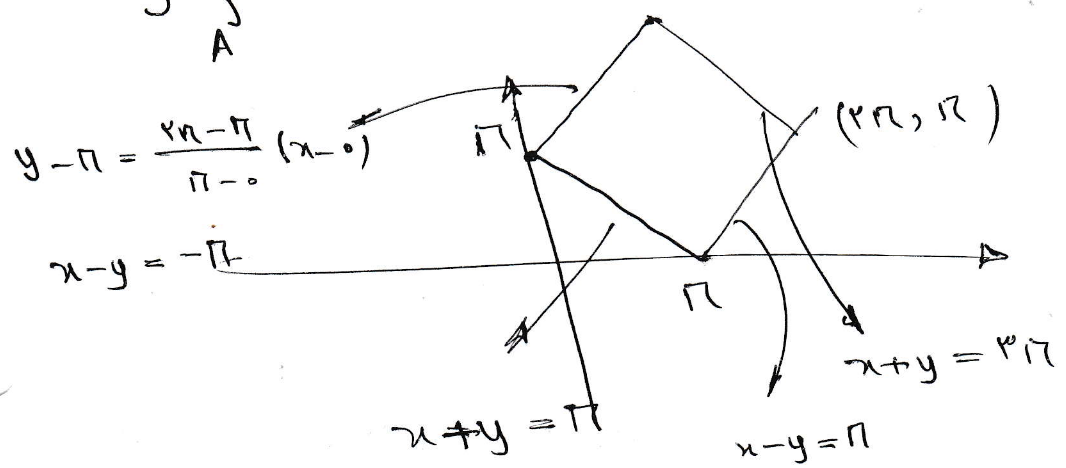
$$\iint_R \frac{1}{y}\,dx\,dy = \int_1^4\int_1^2 \frac{1}{v^4}\,dv\,du = \int_1^4 du \times \int_1^2 \frac{1}{v^4}\,dv$$

$$= 3\times\left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{v^3}\right)\Big|_1^2 = -\left(\frac{1}{8}-1\right) = \frac{7}{8}$$

اگر A درون یک چهارضلعی با رئوس $(0,\pi)$ ، $(\pi,2\pi)$ ، $(2\pi,\pi)$ ، $(\pi,0)$

جلسه ۱۳

$$\iint_A (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dx\,dy = ?$$



$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \quad R_{uv} = \begin{cases} -\pi \leq u \leq \pi \\ \pi \leq v \leq 3\pi \end{cases}$$

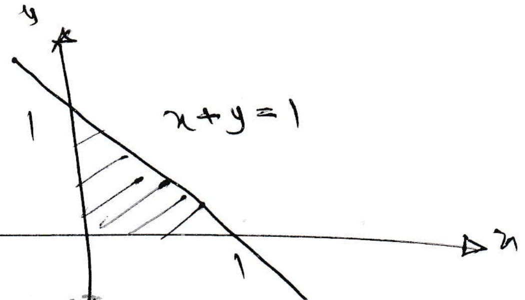
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad J = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\pi}^{3\pi} u^2\sin^2 v\,dv\,du = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} u^2\,du \times \int_{\pi}^{3\pi}\sin^2 v\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{1}{3}u^3\right)\Big|_0^{\pi}\right)\times\left(\frac{1}{2}v - \frac{1}{4}\sin 2v\right)\Big|_{\pi}^{3\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi^3\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi^4}{3}$$

اگر ناحیه D محصور بین $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ مقدار انتگرال را محاسبه کنید

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy$$

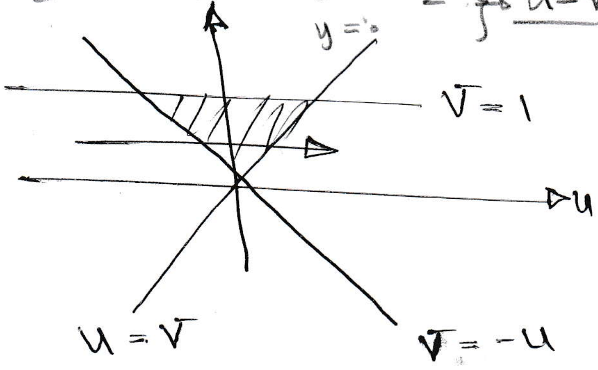


$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$$

$2x = u+v \to x = \frac{u+v}{2}$

$x=0 \to u=-v$

$u = \frac{u+v}{2} - y \to y = u - \frac{u+v}{2} = \frac{2u-u-v}{2} \to y = \frac{u-v}{2}$, $y=0$ $\Big\} \to u=v$



$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\iint_{R_{u,v}} e^{u/v}\,\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v} e^{u/v}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v e^{u/v}\Big|_{-v}^{v}\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 (e-e^{-1})\,v\,dv$$

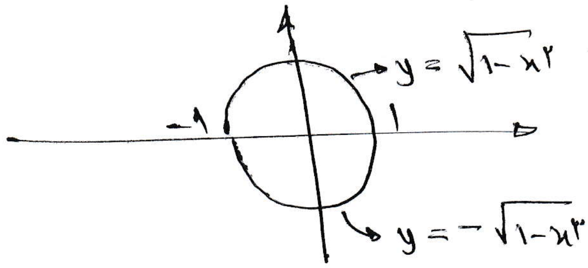
$$= \frac{e-e^{-1}}{4}$$

مختصات قطبی:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

مثال

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$$ کدام است ؟



$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos r^2\,dr\,d\theta$$

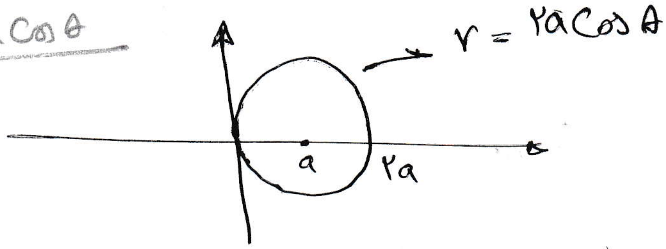
$$=\int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 r\cos r^2\,dr = 2\pi\left(\tfrac{1}{2}\sin r^2\right)\Big|_0^1 = \pi\sin 1$$

هرگاه D داخل دایره $x^2+y^2=2ax$ باشد.

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$r^2=2ar\cos\theta$

$\rightarrow r=2a\cos\theta$



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4}(16a^4\cos^4\theta)\,d\theta$$

$$=8a^4\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = 8a^4\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi a^4}{2}$$

انتگرال نواحی بیضوی:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(ar\cos\theta,\ br\sin\theta)\ abr\,dr\,d\theta$$

معبرتی:
$$\begin{cases} x=au \\ y=bv \end{cases}$$

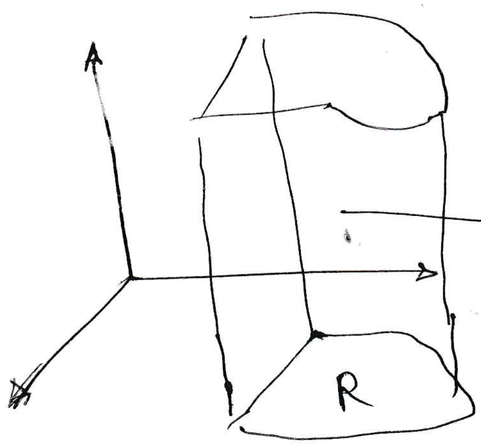
$$I=\iint_D (x^2+4y^2)\,dA \qquad D:\ \frac{x^2}{4}+y^2=1$$

$$x=2r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

$$\to I=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta)(2r)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 8r^3\,dr\,d\theta=16\pi\left(\frac{1}{4}\right)=4\pi$$

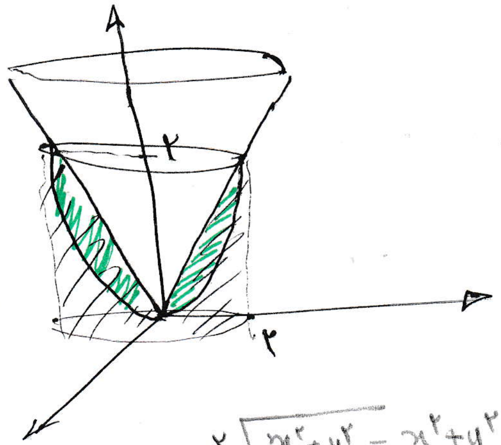
تعبیر هندسی انتگرال دوگانه:



$$Z=f(x,y)$$

$$V=\iint_R f(x,y)\,dA$$
حجم

حجم محدود به رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $2z=x^2+y^2$ کدام است



$$V=\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA-\frac{1}{2}\iint_R (x^2+y^2)\,dA$$

$2\sqrt{x^2+y^2}=x^2+y^2$

$4(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^2$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2\,dr\,d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^3\,dr\,d\theta$$

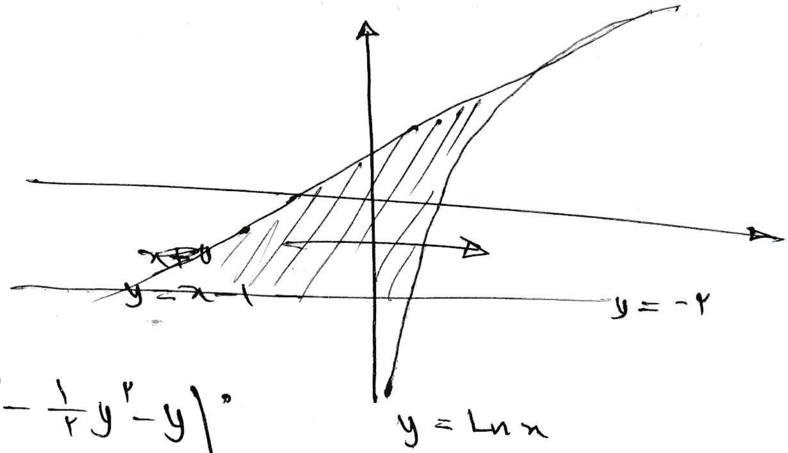
$$=\frac{16\pi}{3}-4\pi=\frac{4\pi}{3}$$

- مساحت محدود به منحنی‌های $y=x-1$, $y=\ln x$

$y=-2$ کدام است ؟

$$S_R=\iint_R dA$$

افقی ساده $$=\int_{-2}^{0}\int_{y+1}^{e^y} dx\,dy$$



$$=\int_{-2}^{0}(e^y-y-1)\,dy=e^y-\frac{1}{2}y^2-y\Big|_{-2}^{0}$$

$$=1-e^{-2}$$

مساحت محصور به منحنیهای $xy=8$, $xy^3=5$, $xy^3=15$, $xy=4$ کدام است

$$\iint_R 1\,dA = S_R$$

$$u = xy^3,\quad v = xy \qquad R_{uv}\begin{cases} 5 \leq u \leq 15 \\ 4 \leq v \leq 8 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y^3 & 3xy^2 \\ y & x \end{vmatrix} = \underline{-2u}$$

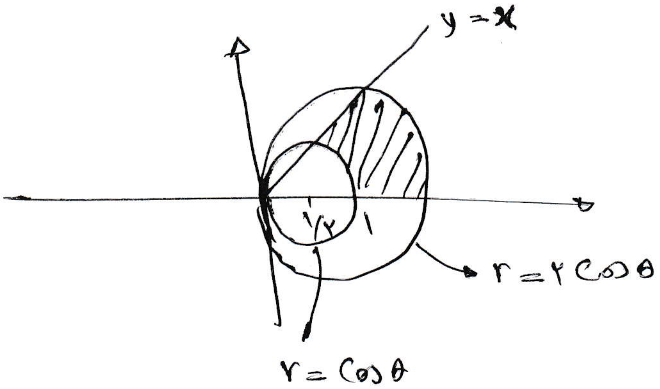
$$xy^3 - 3xy^3 = -2xy^3 = \underline{-2u}$$

$$\iint_{R_{u,v}} \frac{1}{2u}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_5^{15}\frac{1}{u}\,du \times \int_4^9 dv$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 \times 4 = 2\ln 3$$

مساحت محصور بین دو دایره $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$ را بدست آورید
و خط $y=x$ ~~[illegible]~~ و محور x ها

$$r^2 = 2r\cos\theta \to r = 2\cos\theta$$
$$r^2 = r\cos\theta \to r = \cos\theta$$



$$\int_0^{\pi/4}\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\left(4\cos^2\theta - \cos^2\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{3}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

فرمولهای محاسبه جرم و مرکز جرم اجسام دوبعدی (در صفحه)

جرم $M = \iint_R \rho(x,y)\, dA$ جسم

چگالی : $\rho(x,y)$

مرکز جرم
$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\rho(x,y)\, dA}{M}$$
$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\rho(x,y)\, dA}{M}$$

توجه: اگر $\rho(x,y) = \rho$ (چگالی ثابت باشد) یا جسم همگن باشد

$$M = \rho S_R$$

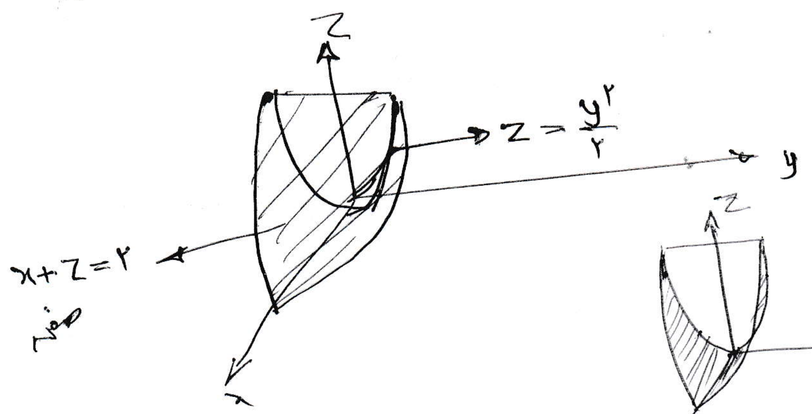
مرکز ثقل
$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\, dA}{S_R}$$
$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\, dA}{S_A}$$

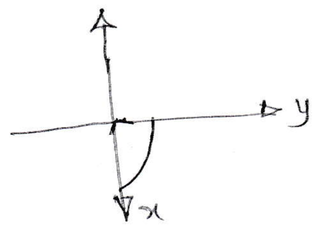
انتگرال سه گانه:

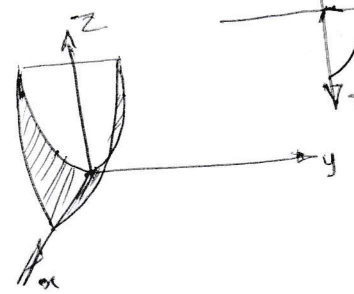
۱. انتگرالهای مکرر
۲. تغییر متغیر
۳. استوانه‌ای ✓
۴. کروی ✓
۵. بعضی کاربردها

۱۹۰/A

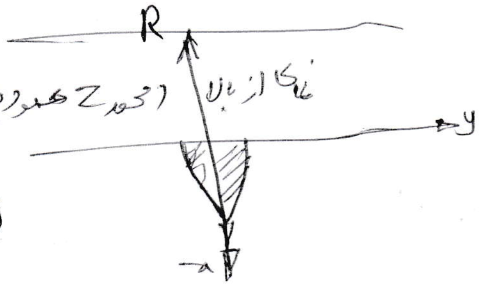
— حجم ناحیه داده شده را حساب کنید







$$V=\iint_R\int_0^{2-z}dx\,dA=\iint_R 2-z\,dA$$



$$=\int_{-2}^{2}\int_{y^2/2}^{2}(2-z)\,dz\,dy$$

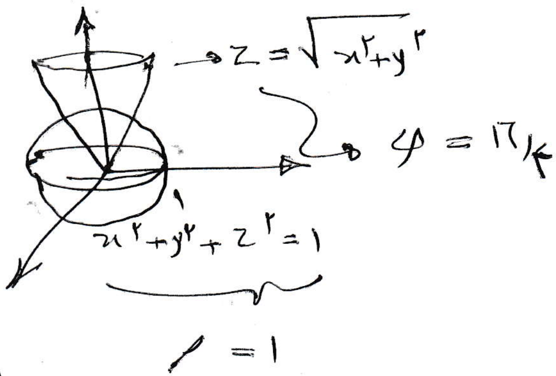
$$ax+by+cz=d$$
$$a'x+b'y+c'z=d'$$

$$\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مقدار انتگرال $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ که D در آن ناحیه بالای مخروط

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود شده توسط کره $x^2+y^2+z^2=1$ است برابر کدام است؟

$$z=\alpha\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{در مختصات کروی}} \varphi=\cot^{-1}\alpha$$



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \rho\,\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\pi/4}\sin\varphi\, d\varphi \times \int_0^1 \rho^3\, d\rho$$

$$=2\pi\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{1}{4} = \pi/2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$0\leq\rho\leq 1$

$0\leq\theta\leq 2\pi$

$0\leq\varphi\leq \pi/4$

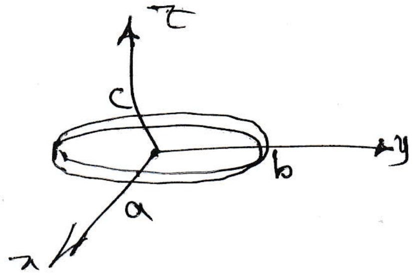
حجم ناحیه D در ناحیه قبل را بدست آورید —

$$V_D=\iiint_D dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$=2\pi\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

انتگرال ۳ گانه روی بیضیگون کامل :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$\iiint\limits_{D\ \text{بیضیگون کامل}} f(x,y,z)\,dV=$$

$$\cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} f(a\rho\sin\varphi, b\rho}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} f(a\rho\sin\varphi\cos\theta,\ b\rho\sin\varphi\sin\theta,\ c\rho\cos\varphi)\ abc\rho^2\sin\varphi\ d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$\iiint\limits_D x\,dV$$

D ، $\frac{1}{8}$ بیضوی در $\frac{1}{8}$ اول بیضی

دار، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$$\iiint\limits_D x\,dV=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1}(a\rho\sin\varphi\cos\theta)(abc\rho^2\sin\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=a^2bc\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\times\int_0^{\pi/2}\cancel{\cos\varphi}\sin^2\varphi\,d\varphi\times\int_0^1\rho^3\,d\rho$$

$$=a^2bc\times1\times\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\pi a^2bc$$

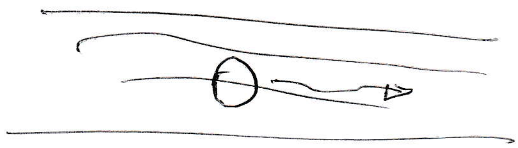
$$\cancel{\frac{4}{3}\pi r^3}\quad\frac{\cancel{4}}{3}\pi abc\times\frac{1}{\cancel{8}}\quad\frac{1}{6}\pi abc$$

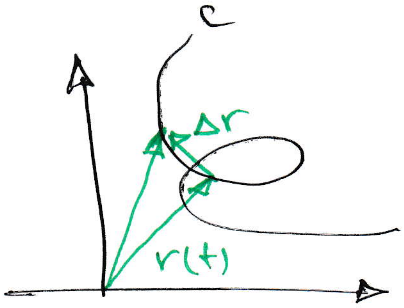
آنالیز برداری :

کار

(فشار) ضربه ← دیورژانس

(کرل) چرخه (استوکس)





کار نیروی متغیر (میدان برداری)

متوسط $\Delta w = \vec{F} \cdot \Delta r$

آنی $dw = \vec{F} \cdot dr$

$$w = \int_c dw = \int_c \vec{F} \cdot dr$$

$c: \ \vec{r}(t) = x(t)\, i + y(t)\, j$ توجه:

$$a \leqslant t \leqslant b$$

$$\vec{F} = Pi + Qj$$

$$d\vec{r} = dx\, i + dy\, j$$

کار دو بعدی: $w = \int_c \vec{F} \cdot dr = \int_c P\,dx + Q\,dy$

کار سه بعدی: $w = \int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

محاسبه کار در حالت دو بعدی

$$W = \int_C p\,dx + Q\,dy$$

c باز است

- F پایستار نیست ← انتگرال برحسب متغیر t تبدیل می‌شود
- F پایستار است ←
  - جملات شامل y در P حذف و از ما بقی انتگرال گیری می‌کنیم
  - OR
  - جملات شامل x در Q حذف و از ما بقی انتگرال گیری می‌کنیم

$$\exists u = u(x, y)$$

$$du = p\,dx + Q\,dy$$

$$W = \int_C du = u \Big|_{\text{ابتدا}}^{\text{انتها}}$$

(مستقل از مسیر است)

c بسته است

- F پایستار ← صفر
- F ناپایستار $\oint_C p\,dx + Q\,dy$

$$\oint_C p\,dx + Q\,dy$$

P, Q پیوسته باشند

قضیه گرین

$$= \iint_R (Q_x - P_y)\,dA$$

$\frac{198}{A}$

اگر c قطعه خط واصل از نقطه $(1,0)$ به نقطه $(2,1)$ باشد آنگاه مقدار

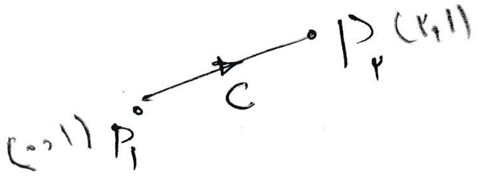
$$\int_c (x^2-y)\,dx+(x-y^2)\,dy$$

کدام است؟

عبارت

$$\begin{cases} P_y=-1 \\ Q_x=1 \end{cases}$$

پایستار نیست



$tP_2+(1-t)P_1 \quad 0\leqslant t\leqslant 1$

$t(2,1)+(1-t)(1,0)$

$$\begin{cases} x=2t+1-t \\ y=t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=t+1 \\ y=t \end{cases} \qquad 0\leqslant t\leqslant 1$$

$$\int_0^1 \left((t+1)^2-t\right)dt+\left(t+1-t^2\right)dt$$

$$=\int_0^1 \left(t^2+t+1+t+1-t^2\right)dt = t^2+2t\,\Big|_0^1 = 3$$

اگر c قسمتی از منحنی $y=(1+x)^2$ باشد که نقطه $(-1,0)$ را به نقطه $(0,1)$ وصل می‌کند مقدار

$$\int_c (1+2xy)\,dx+x^2\,dy$$

چقدر است؟

$$\begin{cases} P_y=2x \\ Q_x=2x \end{cases} \longrightarrow \text{پایستار}$$

عبارت است

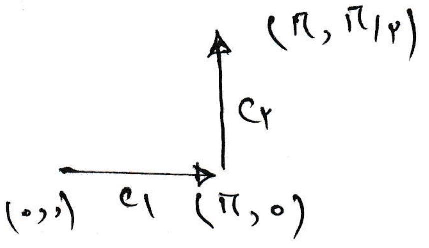
$$u=x+x^2y\,\Big|_{(-1,0)}^{(0,1)} = 0-(-1)=1$$

$$\int_c e^{-x}(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$$

که در آن c دو پاره خط متوالی (0,0) تا (π,0) و (π,0) تا (π,π/2) است کدام است؟

جواب:

$$\begin{cases} P_y = -e^{-x}\sin y \\ Q_x = e^{-x}\sin y \end{cases}$$



$$c_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$c_2 : \begin{cases} x = \pi \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

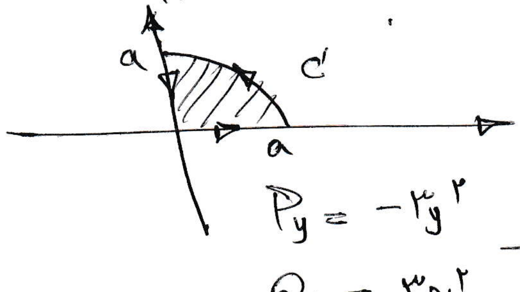
$$\Rightarrow \int_{c_1} + \int_{c_2} = \int_0^{\pi} e^{-t}\,dt + \int_0^{\pi/2} -e^{-\pi}\sin t\,dt$$

$$= -e^{-t}\Big|_0^{\pi} - e^{-\pi}(-\cos t)\Big|_0^{\pi/2} = -e^{-\pi} + 1 - e^{-\pi} = 1 - 2e^{-\pi}$$

سوال مقدار انتگرال $\oint_c (x-y^3)\,dx + (y^3+x^3)\,dy$ که در آن c مرز

ربع چهارم قرص $x \geq 0, y \geq 0$ ، $x^2+y^2 \leq a^2$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد.

برابر کدام مقدار است؟



$P_y = -3y^2$
$Q_x = 3x^2$ ناپیوسته ⟵

$$\text{گرین} = 3\iint_R (x^2+y^2)\,dA \overset{\text{قطبی}}{=} 3\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} r^3\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{\pi/2} d\theta \times \int_0^a r^3 dr = \frac{3}{2}\pi \times \frac{1}{4}a^4$$

از محاسبه کار در سه بعدی

$$W = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

C باز:

- F ناپایستار ← متغیرها تبدیل به متغیر t می‌شوند
- F پایستار شد ← جملات شامل y یا z در P حذف
  جملات شامل z در Q حذف
  و از باقی انتگرال می‌گیریم
  $u = u(x,y,z)\Big|_{\text{ابتدا}}^{\text{انتها}}$ ← مستقل از مسیر

C بسته:

$$W = \oint \vec{F} \cdot dr$$

(Curl گردش)

- F پایستار ← حاصل صفر است
- F ناپایستار:
  - C روی سطح بسته باشد ← صفر
  - C روی سطح باز باشد ← قضیه استوکس

~~مثال: فرض کنید $\vec{F}=(z^3+2xy)\vec{i}+x^2\vec{j}+3xz^2\vec{k}$ اگر~~ 89

فرض کنید c خط مستقیم از نقطه $(1,0,0)$ تا نقطه $(1,1,0)$ باشد

مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_c (3x-6yz)\,dx+(2y+3xz)\,dy+(1-4xyz^2)\,dz$$

مسیر c

$P_y=-6z \neq Q_x=3z \longrightarrow$ نا پایستار

$$c: t(0,1,1)+(1-t)(0,0,1)$$

$$c:\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=1 \end{cases} \qquad 0\leq t\leq 1$$

$$\int_0^1 2t\,dt = t^2\Big|_0^1 = 1$$

انتگرال خط

$$\int_c f\cdot ds=\begin{cases} \text{دو بعدی} & \int_c f(x,y)\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\,V(t)\,dt \\ \text{سه بعدی} & \int_c f(x,y,z)\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,V(t)\,dt \end{cases}$$

$$c:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \qquad a\leq t\leq b$$

$\frac{ds}{dt}=V(t)$ همان تندی سرعت (اندازه سرعت)

تندی (اندازه سرعت)

توجه: ~~تعریف~~ فرمول کار معادل انتگرال خط است

$$w=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot ds=\int_c \vec{F}\cdot\frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\cdot ds=\int_c \vec{F}\cdot\frac{\vec{V}(t)}{V(t)}\,ds$$

$$= \int_c \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$$

بردار یکه مماسی

$$ds = \sqrt{x'^{2} + y'^{2}} \, dt$$

$$\int_c \frac{ds}{x-y}$$

که در آن C پاره‌خط $(۰,-۳)$ تا $(۶,۰)$ است محاسبه کنید

$$C = t(۶,۰) + (1-t)(۰,-۳)$$

$$\begin{cases} x = ۶t \\ y = ۳t - ۳ \end{cases} \qquad ۰ \leq t \leq ۱$$

$$\int_۰^۱ \frac{\sqrt{۳۶+۹} \, dt}{۳t+۳} = \cdots$$

حاصل انتگرال $\int_c y e^{-x} ds$ که در آن C منحنی

$$\begin{cases} x = \ln(t^{۲}+1) \\ y = ۲\tan^{-1} t - t \end{cases}$$

$$۰ \leq t \leq \sqrt{۳}$$

$$-x = \ln(t^{۲}+1)^{-1}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{t^{۲}+1}$$

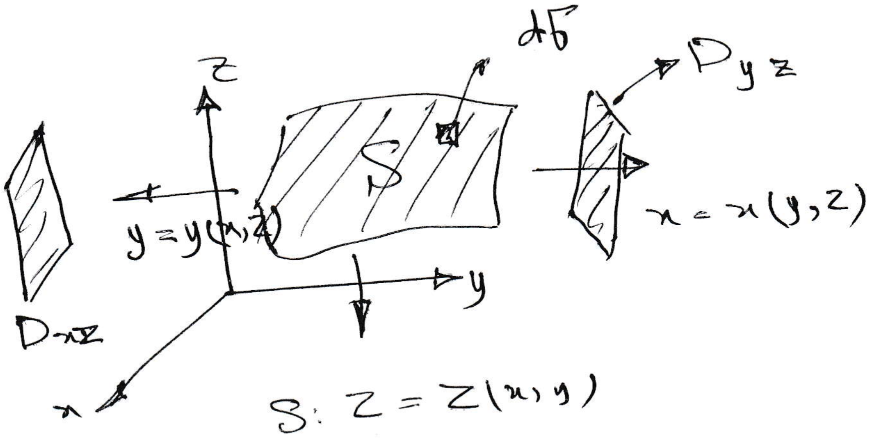
$$x' = \cdots \qquad y' = \cdots$$

$$\sqrt{x'^{۲} + y'^{۲}} \, dt = ds \longrightarrow ds = dt$$

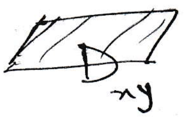
$$\int_۰^{\sqrt{۳}} \frac{۲\tan^{-1} t - t}{t^{۲}+1} \, dt = \cdots$$

$\frac{200}{A}$

انتگرال سطح (رویه)



$S: z = z(x,y)$



$$\iint_S f(x,y,z)\,\overbrace{d\sigma}^{ds} = \begin{cases} \xrightarrow{S:\ z=z(x,y)} \displaystyle\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}\,dA \\ \xrightarrow{S:\ y=y(x,z)} \displaystyle\iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{y_x'^2+y_z'^2+1}\,dA \\ \xrightarrow{S:\ x=x(y,z)} \displaystyle\iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{x_y'^2+x_z'^2+1}\,dA \end{cases}$$

S سطح $\xrightarrow{\text{مساحت}}$ $S_S = \iint_S d\sigma$

- استوانه $x^2+y^2=2x$ از قسمت بالایی مخروط $z^2=x^2+y^2$ بخشی از یک سطح را جدا می‌کند

مقدار انتگرال سطح زیر برابر است با:

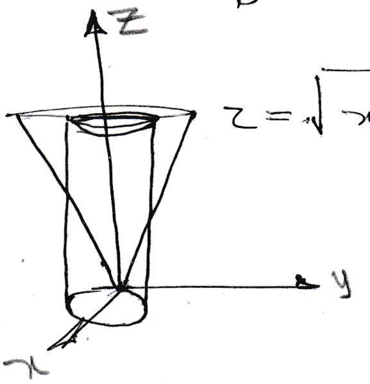
$$2z\,z_x = 2x \qquad z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$I = \iint_S \left(x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1\right) d\sigma$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$r^2 = 2r\cos\theta$$

$$r = 2\cos\theta$$



$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$I = \iint_{D_{xy}} \left(x^4 - y^4 + y^2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)x^2 + 1\right) \overbrace{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}}^{\sqrt{2}}\, dA$$

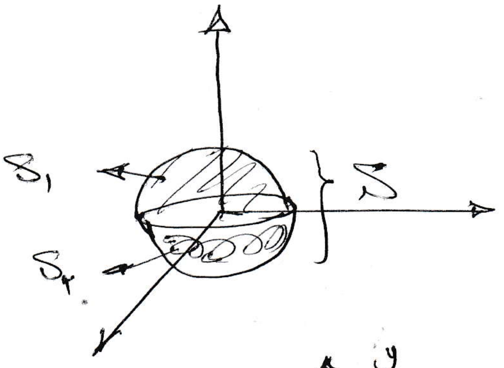
$$\cancel{x^4} - \cancel{y^4} + \cancel{x^2y^2} + \cancel{y^4} - \cancel{x^4} - \cancel{x^2y^2} + 1$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} \underbrace{\iint_{D_{xy}} dA}_{\text{مساحت دایره}} = \underline{\sqrt{2}\,\pi}$$

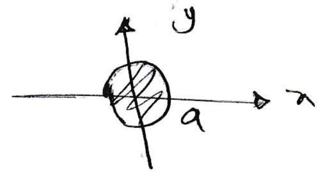
$\frac{۲۰۲}{A}$ مقدار انتگرال زیر که در آن S کره : $x^2+y^2+z^2=a^2$ است کدام است؟ $\frac{\text{عمران}}{۸۹}$

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dS$$



$$f(x,y,z) = x^2+y^2$$

$$S_1 : z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$



$$\iint_S (x^2+y^2)\,d\sigma = 2\iint_{S_1} (x^2+y^2)\,d\sigma$$

$z^2 = a^2-x^2-y^2$

$2zz_x = -2x$

$z_x = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$= 2\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dA$$

$\begin{cases} u = \sqrt{a^2-r^2} \\ du = \frac{-r}{\sqrt{a^2-r^2}} \end{cases}$

$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}+1}$

$\sqrt{\frac{x^2+y^2+a^2-x^2-y^2}{a^2-x^2-y^2}}$

$\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}$

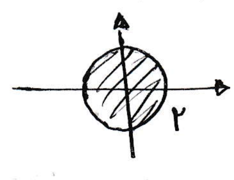
$$= 2a\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\,d\theta$$

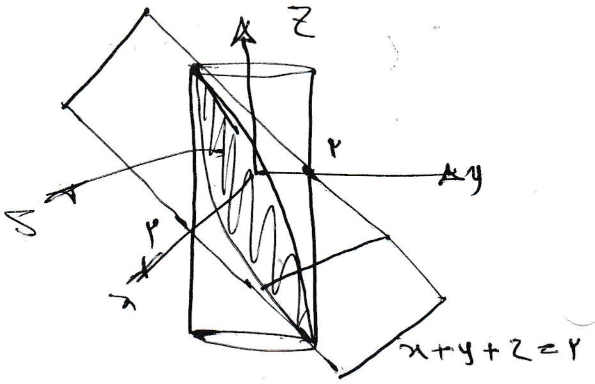
$$= 4a\pi\int_0^a (a^2-u^2)\,du = 4\pi a\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right) = \frac{8}{3}\pi a^4$$

$\frac{MBA}{۸۹}$. مساحت قسمتی از صفحه $x+y+z=2$ که درون (داخل) استوانه $x^2+y^2=4$ قرار دارد کدام است؟

$S: x+y+z=2$

D_{xy}





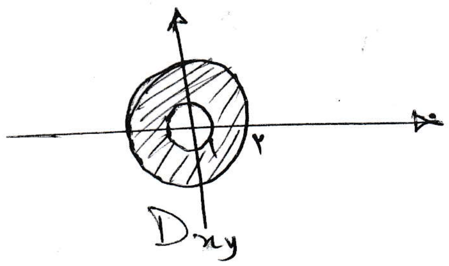
$S: z = 2-x-y$

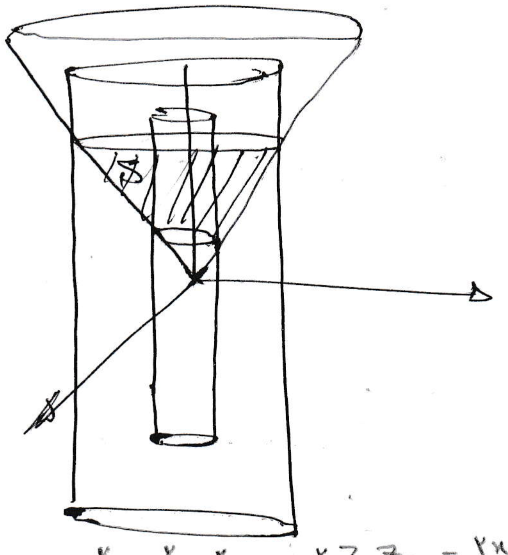
$$S_S = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+1+1}\,dA$$

$$= \sqrt{3}\,S_{D_{xy}} = 4\pi\sqrt{3}$$

مکانیک: مساحت قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که بین استوانه‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ قرار دارد کدام است؟

$S: z=\sqrt{x^2+y^2}$





$\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}$

$$S_S=\iint_S d\sigma=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\,dA$$

$z^2=x^2+y^2 \to 2zz_x=2x$

$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

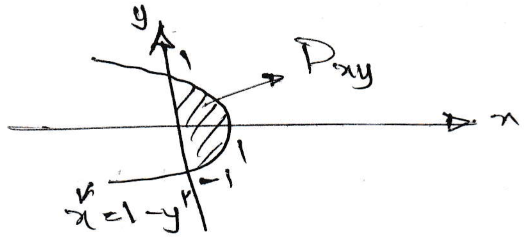
$z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$=\sqrt{2}(4\pi-\pi)=3\pi\sqrt{2}$$

MBA
۸۹

حاصل $\iint_S x\,dS$ که در آن S قسمتی از سطح رویه به معادله $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود به فضای استوانه $0\le x\le 1-y^2$ چند برابر $\frac{\sqrt{2}}{15}$ است؟

$x=1-y^2$



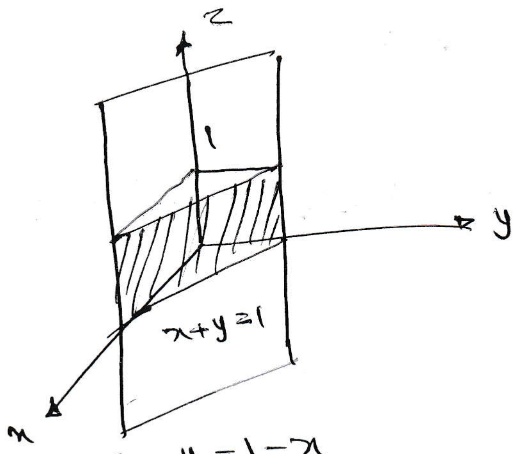
$$\iint_S x\,dS=\iint_{D_{xy}}x\sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x\,dA$$

$$=\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\int_0^{1-y^2}x\,dx\,dy=\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-y^2)^2\,dy=\sqrt{2}\int_0^1(1+y^4-2y^2)\,dy$$

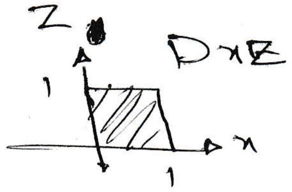
$$=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{15+3-10}{15}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{15}$$

$\frac{۲،۴}{A}$

$\iint_S (x+y+z)\,d\sigma$ که در آن S ~~[illegible]~~ سطحی ای شامل قسمتی از صفحه $x+y=1$ واقع در ۱/۸ اول است با $1 \geq z \geq 0$ برابر است با:



S: $y = 1 - x$



$$\iint_S (x+y+z)\,d\sigma = \iint_{D_{xz}} (1+z)\sqrt{1+0+1}\;dA$$

$$z + \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1\int_0^1 (1+z)\,dz\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

دیورژانس یک میدان برداری:

ضربه میدان برداری $\longrightarrow$ شار

چرخش میدان برداری $\longrightarrow$ کرل

دوبعدی: $\vec{F} = Pi + Qj \longrightarrow \operatorname{div} F = \nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y$

سه‌بعدی: $\vec{F} = Pi + Qj + Rk \longrightarrow \operatorname{div} F = \nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$

خواص دیورژانس:

1) $\operatorname{div}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \operatorname{div} F_1 + \operatorname{div} F_2$

2) $\operatorname{div}(f\vec{F}) = \nabla \cdot (f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \cdot \operatorname{div} \vec{F}$

تابع اسکالر

3) $\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$

لاپلاسین f

کدام $\operatorname{div}(|\vec{r}|^2 \cdot \vec{r})$ delta $\vec{r} = xi + yj + zk$ اگر $\frac{MBA}{۸۹}$ $\frac{۲۰۰۵}{A}$

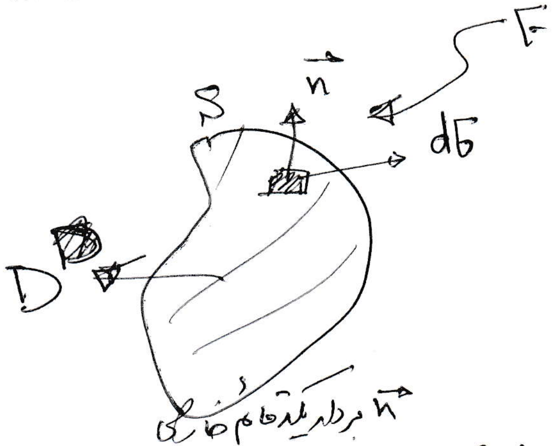
تابع اسکالر   میدان برداری

$$\operatorname{div}(|\vec{r}|^2 \cdot \vec{r}) = \nabla |\vec{r}|^2 \cdot \vec{r} + |\vec{r}|^2 \cdot \operatorname{div} \vec{r}$$

$$= (2xi + 2yj + 2zk) \cdot (xi + yj + zk) + (x^2 + y^2 + z^2)(3)$$

$$= 5|\vec{r}|^2$$

راه درست تر اینست که اول ضرب داخلی پرانتز را انجام داده آنگاه از حاصل div بگیریم



قضیه دیورژانس:

$\vec{F} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$: شار میدان $\vec{F}$ روی قسمتی از سطح S

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \overset{\text{قضیه}}{\underset{\text{دیورژانس}}{=}} \iiint_D \operatorname{div} F \, dV$$

شار میدان F روی سطح بسته S

$$\iint_S \vec{F} \cdot n \, d\sigma = \iint_S (P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy)$$

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV$$

۲۰٦
A

ریاضی

مقدار انتگرال زیر که در آن S رویه هموار و بسته با بردار قائم یکه خارجی $\vec{n}$ و محدود به ناحیه‌ای به حجم ۳ واحد مکعب و $\vec{F}=(3x+e^{3y})i+(e^{4z}-4y)j+(5z+e^{5y})k$ برابر چیست؟

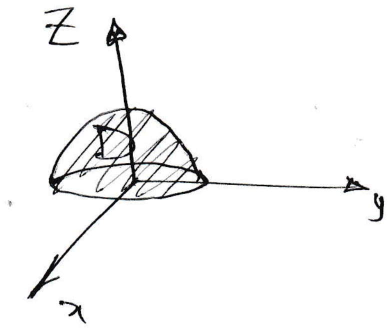
$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}F\,dV$$

$$=\iiint_D (3-4+5)\,dV=4\iiint_D dV=4V_D=12$$

مکانیک

فرض کنید D ناحیه داخل نیم‌کره فوقانی به شعاع ۲ ($x^2+y^2+z^2\leqslant 4\,,\ z\geqslant 0$) و S سطح بسته محصور کننده ناحیه D باشد اگر $\vec{F}=x^3i+y^3j+z^3k$ دراین صورت مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ کدام است؟

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_D (3x^2+3y^2+3z^2)\,dV$$



$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\rho^4\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=6\pi\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi * \int_0^{2}\rho^4\,d\rho=6\pi\times 1\times\frac{32}{5}=\frac{192\pi}{5}$$

$$-\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}=1$$

حاصل انتگرال کدام است که در آن S سطح نیم‌کره به معادله $Z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ و صفحه $Z=0$ می‌باشد کدام است؟

$$\oiint_S \underbrace{(x+y^2z)}_{R}\,dxdy+\underbrace{(xz^2+y)}_{P}\,dydz+\underbrace{(x^2y-1)}_{Q}\,dxdz$$

$P_x+Q_y+R_z$

$$\iiint_D (z^2+x^2+y^2)\,dV=\dots=\frac{64\pi}{5}$$

فرض کنید D ناحیه توپر محصور به استوانه $x^2+z^2=1$ و صفحات $y=1$ و $y=-1$ باشد و رویه S مرز ناحیه D باشد. همچنین فرض کنید

$$\vec{F}=(x+\cos yz)i+(2y-\sin xz)j+(x^2+1)e^{y^2}k$$

اگر $\vec{n}$ بردار یکه قائم بر S و خارج ناحیه D باشد مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.n\,d\sigma$ کدام است؟

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iiint_D 3\,dV=\underbrace{2\pi}_{V_D}\times 3=6\pi$$

کرل تابع میدان برداری:

کرل (تاو)

سه بعدی: $\vec{F}=Pi+Qj+Rk \to Curl\,\vec{F}=\vec{\nabla}\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

در حالت دو بعدی چرخش همواره در جهت k است

دو بعدی: $\vec{F}=Pi+Qj \to Curl\,F=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$

خواص کرل:

$$\text{Curl}(\vec{F_1}+\vec{F_2}) = \text{Curl}\,\vec{F_1} + \text{Curl}\,\vec{F_2}$$

$$\text{Curl}(f\vec{F}) = \nabla\times(fF) = \nabla f\times F + f\cdot\nabla\times F$$

$$= \nabla f\times\vec{F} + f\cdot\text{Curl}\,F$$

$$\text{Curl}(\underbrace{\nabla f}_{\text{گرادیان}}) = \nabla\times(\nabla f) = 0$$

$$\text{div}(\text{Curl}\,F) = \nabla\cdot(\nabla\times F) = 0$$

$$\text{Curl}(\text{Curl}\,F) = \nabla\times(\nabla\times F) = \nabla(\text{div}\,F) - \nabla^2 f$$

$$\text{Curl}\,\vec{F} = 0 \longrightarrow \vec{F}\ \text{غیر دورانی است}$$

اگر $\vec{F} = (y^2+z^2)i + (z^2+x^2)j + (x^2+y^2)k$ آنگاه $\frac{1}{2}\text{Curl}\,F$ در نقطه $(1,0,-1)$ کدام است؟

$$\text{Curl}\,F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

$$= (2y-2z)i - (2x-2z)j + (2x-2y)k$$

$$\frac{1}{2}\text{Curl}\,F = (y-z)i + (z-x)j + (x-y)k$$

$$\longrightarrow \boxed{i-2j+k}$$

قضیه استوکس:

MBA
۹۱

تست فرض مسئله: $f(x,y)=x^۲+y^۲$ ، شرط $x^۲y=۱۶$ کدام است؟

تابع $f(x,y)=x^۲+y^۲$

شرط $g(x,y)=x^۲y-16=0$

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

$$\begin{cases} ۲x=\lambda(۲xy) \xrightarrow{x\neq 0} ۲=۲y\lambda \to \lambda=\frac{1}{y} \\ ۲y=x^۲\lambda \to \lambda=\frac{۲y}{x^۲} \\ x^۲y=۱۶ \end{cases}$$

$$\frac{۲y}{x^۲}=\frac{1}{y}$$

$$۲y^۲=x^۲$$

$$۲y^۳=۱۶ \to y=۲ \to x=\pm ۲\sqrt{۲}$$

$x^۲=۸$

$(۲\sqrt{۲},۲) \to f=۱۲$

$(-۲\sqrt{۲},۲) \to f=۱۲$

$\to \min$ گزینه ۱

$\frac{210}{8}$ کامپیوتر ۱۲ ، $I = \int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$ عمران ۹۱ - تعداد اشکال

چک شود

منحنی c : $\left(\frac{x}{3}\right)^{2/3} + (y/2)^{2/3} = 1$ در ربع اول از نقطه $A(3,0)$ تا نقطه $B(0,2)$ است.

$$P_y = \frac{-x^2-y^2-2y(x-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

جواب:

پایستار ←

$$Q_x = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\cancel{u(x,y) = \frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)\Big|_{(3,0)}^{(0,2)} = \frac{1}{2}Ln4 - \frac{1}{2}Ln9}$$

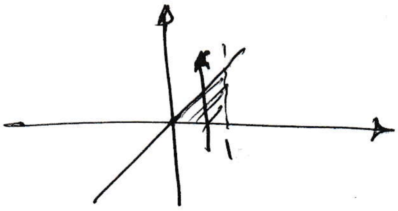
$$\cancel{= Ln2 - Ln3 = Ln(2/3)}$$

$$u(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)\Big|_{(3,0)}^{(0,2)}$$

$$= \pi/2 + Ln(2/3)$$

۹۱

ریاضی ۹۱ — مقدار $\int_0^1\int_y^1 x^{-3/2}\cos\left(\frac{\pi y}{2x}\right)dx\,dy$ کدام است؟



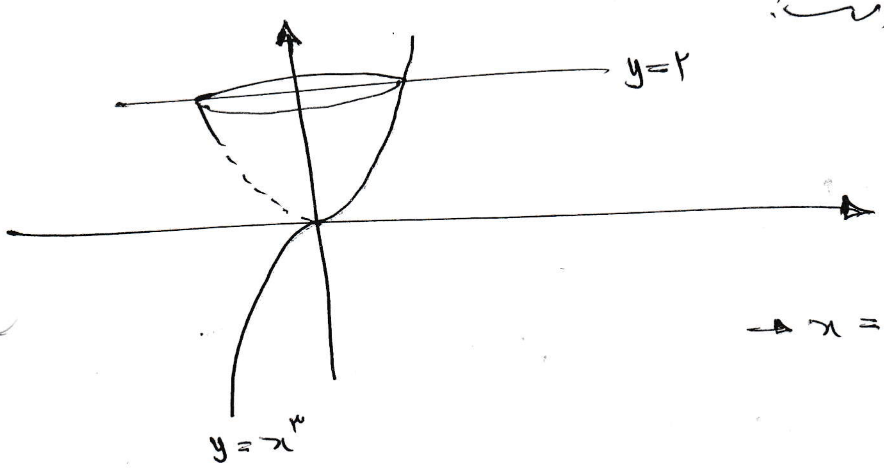
$$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le x \end{cases}$$

$$\int_0^1\int_0^x x^{-3/2}\cos\left(\frac{\pi y}{2x}\right)dy\,dx=\int_0^1 x^{-3/2}\left(\frac{2x}{\pi}\right)\sin\frac{\pi y}{2x}\Big|_0^x dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\pi}\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_0^1=\frac{4}{\pi}$$

MBA ۹۱ — منحنی به معادله $y=x^3$ و $y\le 2$ را حول محور yها دوران می‌دهیم. اندازه سطح رویه حاصل چند برابر $\pi/27$ است؟

چک شود



$$\to x=\sqrt[3]{y}\ \to\ x'=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

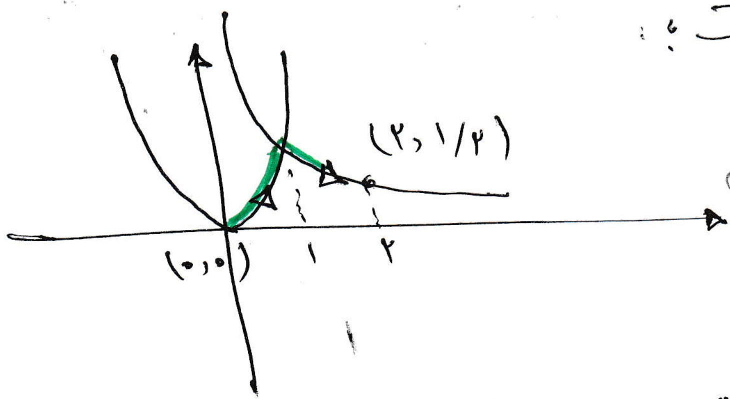
$$A_S=2\pi\int_0^2\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{9y^{4/3}}}_{(1+x'^2)}}\,dy=2\pi\int_0^2\frac{\sqrt{y^{4/3}+\frac{1}{9}}}{y^{2/3}}dy$$

$\frac{212}{8}$ اگر $F=(y-x)i+(y+x)j$ باشد، مقدار $\int_c \vec F\cdot d\vec r$ — MBA ۹۱

بر روی منحنی $y=x^2$ از $x=0$ تا $x=1$ و سپس بر روی منحنی $y=\frac{1}{x}$ از

$x=1$ تا $x=2$ برابر است با:

$x^2=\frac{1}{x}\to x^3=1\to \underline{x=1}$



$\begin{cases}P_y=1\\ Q_x=1\end{cases}\to$ پایستار

$$\int_c (y-x)dx+(y+x)dy = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+xy\Big|_{(0,0)}^{(2,1/2)}$$

$$=-2+\frac{1}{8}+1=-\frac{7}{8}$$

~~کنکور ۹۱ — نزدیکترین نقطه رویه $Z=xy+1$ تا مبدا مختصات کدام است؟~~

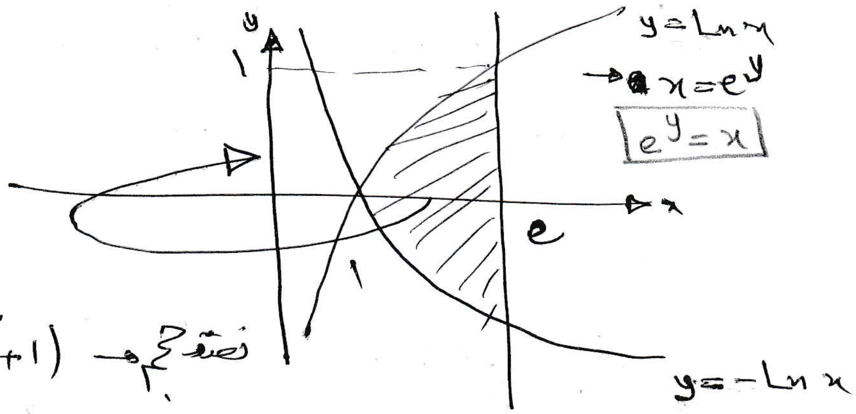
صنایع ۹۱ — سطح محصور توسط دو منحنی $y=\pm\ln x$، خط $x=e$ را حول

محور yها دوران می‌دهیم، حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^1 (e^2-e^{2y})\,dy$$

$$=\pi\left(e^2y-\frac{1}{2}e^{2y}\right)\Big|_0^1$$

$$=\pi\left(e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}(e^2+1)\to \text{نصف حجم}$$



$\to \quad \underline{V=\pi(e^2+1)}$

$y=\ln x^{-1}$

$e^y=\frac{1}{x}\to x=\frac{1}{e^y}$

MBA ۹۱ — ماکزیمم انحنا در نقاط منحنی به معادله $y = \ln x$ کدام است

$$k(x) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{(x^2+1)^{3/2}}{x^3}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

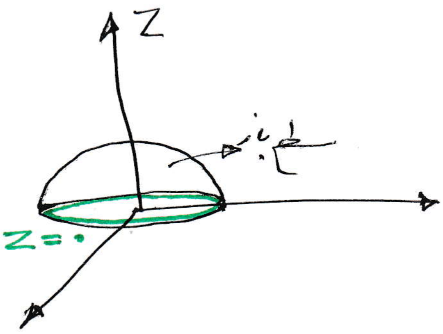
$$k'(x) = 0 \quad \text{------}$$

عمران ۹۱ — شار گذرنده برون سوی میدان

$$\vec{F} = \left(e^{y^2+z^2}, e^{z^2+x^2}, e^{x^2+y^2}\right)$$

از سطح بالای نیم کره $x^2+y^2+z^2=1$ برابر است با

$$\text{شار}: \iint_S \vec{F}\cdot n\, d\sigma$$



$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

$$= \underbrace{\oiint_{S\cup(Z=0)} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma}_{\text{قضیه دیورژانس}} - \iint_{S_1: Z=0} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

$$\iiint_D \cancel{\operatorname{div} F}\, dV - \iint_{S_1: Z=0} \vec{F}\cdot \underset{-k}{\vec{n}}\, d\sigma$$

$\operatorname{div} F = 0$

$\frac{۲۱۴}{A}$

$$= \iint_{x^2+y^2=1} e^{x^2+y^2}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r e^{r^2}\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2} e^{r^2}\right)\Big|_0^1 = \pi(e-1)$$

تکنیک ۹۱ — تبدیل انتگرال

$\int_0^1 \int_\beta^{\beta+1} \frac{1}{x}\, dx\, d\beta$ کدام است؟

$$\int_0^1 (\ln(\beta+1) - \ln\beta)\, d\beta = (\beta+1)\ln(\beta+1) - \cancel{\beta} - \beta\ln\beta + \cancel{\beta}\Big|_0^1$$

$$= 2\ln 2 - \underbrace{0\times\infty}_{0} \qquad \lim_{\beta\to 0} \beta\ln\beta = \lim \frac{\ln\beta}{\frac{1}{\beta}} = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{-1}{\beta^2}} = 0$$

$$= 2\ln 2$$

$$\iiint_D \frac{x^2+2y^2}{x^2+4y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$$

تبدیل انتگرال — پویش ۹۱، عمران ۹۰

که D ناحیه $x^2+y^2+z^2 \le 1$ کدام است؟

حل: $$I = \iiint_D \frac{x^2+2y^2}{x^2+4y^2+z^2}\, dV = \iiint_D \frac{z^2+2y^2}{x^2+4y^2+z^2}\, dV$$

$$2I = \iiint_D dV \Rightarrow \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\boxed{I = \frac{2}{3}\pi}$$

$\frac{۲۱۵}{A}$ سطح قسمتی از رویه $z=x^۲-y^۲$ که در داخل استوانه $x^۲+y^۲=۶$ قرار می‌گیرد کدام است

$$S_S=\iint_S d\sigma=\iint_{x^۲+y^۲=۶}\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}\;dA$$

$$=\int_0^{۲\pi}\int_0^{\sqrt{۶}} r\sqrt{۴r^۲+۱}\;dr\,d\theta=۲\pi\int_0^{\sqrt{۶}} r\sqrt{۴r^۲+۱}\;dr$$

$۴r^۲+۱=u$

$$=۲\pi\int_۱^{۲۵} u^{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۸}du\right)=\frac{\pi}{۴}\left(\frac{۲}{۳}u^{۳/۲}\right)_۱^{۲۵}$$

$$=\frac{\pi}{۶}(۱۲۴)=\frac{۶۲\pi}{۳}$$

$\frac{MBA}{۹۱}$ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=x^۳e^{-x^۲}$ و محور x ها و دو خط به معادله $x=۱$, $x=-۱$ کدام است؟

$$S=۲\int_0^۱ x^۳e^{-x^۲}dx$$

$x^۲=u$

$۲x\,dx=du$

$xe^{-x^۲}dx=dv$

$-\frac{۱}{۲}e^{-x^۲}=v$

$$=۲\left[\left(-\frac{۱}{۲}x^۲e^{-x^۲}\right)_0^۱+\int_0^۱ xe^{-x^۲}dx\right]$$

$$=۲\left(-\frac{۱}{۲}e^{-۱}-\frac{۱}{۲}e^{-x^۲}\right)_0^۱$$

$$=\frac{e-۲}{e}$$

حاصل انتگرال زیر چقدر است؟

$$\underbrace{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin kx \, dx \, dy}_{\text{تعریف لاپلاس}}$$

$$L(\sin kx)\Big|_{s=y}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{k}{y^2+k^2} dy = \tan^{-1}\frac{y}{k}\Big|_0^{+\infty} = \pi/2$$

سری:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

همگرا / واگرا

دنباله مجموع جزئی:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

اگر دنباله $\{S_n\}$ به عدد S همگرا باشد می‌گوییم سری همگرا است در غیر این صورت سری واگرا است

مجموع تسلسکوپی (تلسکوپی):

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n+1})$$

$$= a_1 - a_{n+1}$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+2}) = (a_1 + a_2) - (a_{n+1} + a_{n+2})$$

$n, n-1$

$1, 2$

$$\vdots$$

مثال عدم همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ را بدست آورید.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$n \to \infty \longrightarrow S_n \to 1$$

نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ واگراست.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1+i) - \ln(i)$$

$$\to S_n = -\sum_{i=1}^{n} \left[\ln i - \ln(i+1)\right] = -\left(\ln 1 - \ln(1+n)\right) = \ln(1+n)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_n = \ln(1+n) \\ n \to \infty \end{array}\right\} \longrightarrow S_n \to \infty$$

مجموع جملات سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ کدام است؟

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1/2}{2i-1} - \frac{1/2}{2i+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \right)$$

از لحاظ اندیس یک عدد با هم فاصله دارند

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \longrightarrow S_n = \frac{1}{2}$$

عمران ۸۹ — مجموع سری

مجموع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$ برابر است با:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+4)}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+4}\right)=$$

$$\frac{1}{n(n+4)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)$$

چهارتا از جملات بالا، چهارتا از جملات پایین

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}=\frac{n+4-n}{n(n+4)}=\frac{4}{n(n+4)}$$

$$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$n\to\infty$$

$$\to S_n\to\frac{1}{4}\left(\frac{25}{12}\right)=\frac{25}{48}$$

مجموع سری را به یکی از انواع ۳ روش می‌توان حل کرد

- سری تلسکوپی
- سری‌های هندسی
- بسط تیلور تابع

سری هندسی:

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r} & -1<r<1\\ \text{در غیر این صورت واگرا به } \infty\end{cases}$$

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^n=\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

توجه: شرط لازم برای همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ این است که: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ولی کافی نیست

سری همساز: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست. با برهان

که

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \to$ همگرا باشد $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Longrightarrow$ $\sum a_n$ همگراست

نتیجه نمی‌شود

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow$ $\sum a_n$ واگراست

نتیجه می‌شود

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ واگراست. $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0\right)$

سری‌های نامنفی:

سری a_n را نامنفی گوییم هرگاه: $a_n \geq 0$

سری نامنفی همگراست اگر دنباله مجموع جزئی آن کران‌دار باشد.

دنباله کران‌دار و صعودی در سری‌های نامنفی همگراست

آزمون مقایسه:

فرض: $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری نامنفی باشند، $a_n \leq b_n$

$\exists N : n \geq N : a_n \leq b_n$

همگرایی بزرگتر همگرایی کوچکتر را نتیجه می‌دهد

واگرایی کوچکتر واگرایی بزرگتر را نتیجه می‌دهد

آزمون مقایسه حدی:

اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری نامنفی باشند، $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

$0 < L < \infty \to$ همگرایی و واگرایی هر کدام دیگری را نتیجه می‌دهد

$L = 0 \to$ همگرایی b_n همگرایی a_n را نتیجه می‌دهد

$L = \infty \to$ واگرایی $\sum b_n$ واگرایی $\sum a_n$ را نتیجه می‌دهد

سری p:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} p>1 & \text{همگرا} \\ p\leq 1 & \text{واگرا} \end{cases}$$

توجه: آزمون مقایسه حدی هم نوع آزمون هم ارزی است چون هنگامی که $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ، a_n هم ارز b_n ها خواهد بود

آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}}$ همگراست یا واگرا؟

$$\frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}} \simeq \frac{n}{\sqrt{n^3}} \simeq \frac{1}{n^{1/2}} \xrightarrow{\text{واگراست}}$$

آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}}$ همگراست؟

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^6+2}} \simeq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \longrightarrow \text{همگرا}$$

آزمون انتگرال:

اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[1,+\infty)$ ، پیوسته، مثبت و ابتدا نزولی باشد همگرایی مورد زیر را داریم:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx : \text{همگراست} \iff \sum_{n=1}^{\infty} f(n) : \text{همگراست}$$

اثبات سری p:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p\leq 0$ واگراست)

$\rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^p} \quad [1,+\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} p\neq 1: & \left.\frac{1}{1-p} x^{1-p}\right|_1^{+\infty} \longrightarrow \begin{cases} \text{if } p>1 & \text{همگراست} \\ \text{if } 0<p<1 \to \infty & \text{واگراست} \end{cases} \\ p=1: & \left.\ln x\right|_1^{+\infty} = \infty \longrightarrow \text{واگرا} \end{cases}$$

توجه: با آزمون انتگرال می‌توان نتیجه گرفت

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases} p>1 \rightarrow \text{همگراست} \\ p\leq 1 \rightarrow \text{واگراست}\end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p} \longrightarrow$$ به ازای هر p واگراست

توجه: اگر $\sum|a_n|$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum a_n$ همگراست (می‌گوئیم سری بطور مطلق همگراست)

اگر $\sum a_n$ همگرا باشد ولی $\sum|a_n|$ واگرا باشد می‌گوئیم سری بطور مشروط واگراست

سری تناوب: $\sum(-1)^n a_n$

اگر a_n ها به سمت صفر بروند و نزولی باشند ← سری تناوب حتماً همگراست

مثال: $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ همگراست (بطور مشروط همگراست) $\sum\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ همگراست ولی $\sum\frac{1}{n}$ همگرا نیست

آزمون نسبت: فرض کنید سری $\sum a_n$ یک سری با جملات غیر صفر باشد

$$\text{if } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \begin{cases} 0\leq L<1 \rightarrow \text{سری بطور مطلق همگراست} \\ 1<L\leq\infty \quad \text{سری واگراست} \\ L=1 \rightarrow \text{آزمون بی‌نتیجه است}\end{cases}$$

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ همگراست:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

۳- آزمون ریشه: فرض کنید سری $\sum a_n$ مفروض باشد اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$

$\rightarrow$
- $0\leqslant L<1$ سری به طور مطلق همگراست
- $1<L\leqslant\infty$ واگراست
- $L=1$ آزمون بی‌نتیجه است

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{n}{3^n}\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3}=\frac{1}{3}<1$$

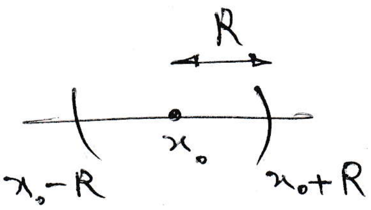
همگراست

سری توانی:

حول نقطه x_0 (تیلور) $\quad\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots$

حول نقطه صفر (مک لورن) $\quad\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$

شعاع همگرایی:



- if $x_0-R<x<x_0+R\longrightarrow$ سری همگراست
- if $x>x_0+R$ یا $x<x_0-R$ سری واگراست
- if $x=x_0\pm R\longrightarrow$ باید بررسی شود

به: $(x_0-R\ ,\ x_0+R)$ یا $[x_0-R\ ,\ x_0+R]$ بازه همگرایی گویند

محاسبه R:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\Rightarrow\begin{cases}R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| & \rightarrow \text{(عکس آزمون نسبت)}\\ \text{یا} & \\ R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} & \rightarrow \text{(عکس آزمون ریشه)}\end{cases}$$

نکته مهم: مشتق گیری و انتگرال گیری از سری توانی شعاع همگرایی را تغییر نمی دهد

نکته مهم: شعاع همگرایی سری تابعی $\sum U_n(x)$

$U_n(x)$ عبارتی است که هم ضریب a_n را دارد و هم x^n دارد

$$\sum U_n(x) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| < 1 \\ \text{یا} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} < 1 \end{cases}$$

محدوده همگرایی

اصطلاحا که محدوده همگرایی را به ازای فاصله‌ای که برای x بدست می آید مشخص می کند

بسط تیلور تابع: اگر تابع $f(x)$ در نقطه x_0 از هر مرتبه‌ای مشتق داشته باشد داریم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

اگر $x_0=0$ ← بسط مک لورن:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

توجه: روابط سری که در بخش حد گفته شد همان سری مک لورن توابع می باشد

بسط مک لورن تابع: $f(x)=\ln(1+x)$ را بدست آورید

سری هندسی: $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \dfrac{1}{1+x} \quad -1<x<1$

سری هندسی با جمله اول 1 و قدر نسبت $(-x)$

انتگرال گیری می کنیم

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln(1+x) \quad -1<x<1$$

امکانیک ضریب x^3 در بسط مک‌لورن جواب مسأله مقدار اولیه

$$y'' + y'\sin x + e^x y = 0 \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

کدام است؟

$$\frac{f'''(0)}{3!} = ? \quad \Big| \xrightarrow{x=0} y''(0) + 1 = 0 \qquad \underline{y''(0) = -1}$$

مشتق معادله: $y''' + y''\sin x + y'\cos x + e^x y + e^x y' = 0$

$$\xrightarrow{x=0} y'''(0) + 1 + 1 + 1 = 0 \qquad \underline{y'''(0) = -3}$$

ضریب x^3: $\dfrac{y'''(0)}{3!} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2}$

مکانیک: بازه همگرایی

۸۹

همگرا شود

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m!)^2}{(2m)!} x^{2m}}_{\underline{U_m(x)}}$$ کدام است؟

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\frac{(m!)^2}{(2m)!}}\,|x|^2 < 1$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(m/e)^2}{\left(\frac{2m}{e}\right)^2}|x|^2 < 1 \longrightarrow \frac{1}{4}|x|^2 < 1 \rightarrow |x|^2 < 4$$

$\rightarrow -2 < x < 2$

$\boxed{\text{گزینه‌ها هم } [-2,2] \text{ هست هم } \underline{(-2,2)}}$

به‌ازای خود ۲ و ۲- واگرا خواهد شد چون $\lim_{n\to\infty} \sum a_n$

صفر نخواهد شد

آزاد : ۸۲ دنباله $\{a_n\}$ را به صورت $a_0=1$, $(n^2+2)a_{n+1}-(n^2+1)p\,a_n=0$

در نظر میگیریم. مجموعه مقادیر p که به ازای آنها $\sum a_n$ همگرای مطلق است کدام است

فرمول بازگشتی

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$

فرمول بازگشتی : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n^2+1)p}{n^2+2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2}|p|<1 \longrightarrow |p|<1 \longrightarrow -1<p<1$$

[illegible] جمله عمومی بسط مکلورن تابع $f(x)=\mathrm{Ln}\sqrt{(1-x^2)^x}$ کدام است؟

Attension : $f(x)=\frac{x}{2}\mathrm{Ln}(1-x^2)$

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$$\boxed{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots=-\mathrm{Ln}(1-x)}$$

$$-\mathrm{Ln}(1-x^2)=x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\cdots$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{x}{2}\mathrm{Ln}(1-x^2)=-\left(\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{4}+\frac{x^7}{6}+\cdots\right)}$$

$\rightarrow -\dfrac{x^{2n+1}}{2n} \longleftrightarrow$ چیزی که در گزینه قرار داشت

صنایع — صنایع ۸۷ — کدام سری واگرا است

اگر $a>1$ عدد ثابت باشد شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a+(-1)^n\right)^n x^n$ کدام است؟

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a+(-1)^n|^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a+(-1)^n}\quad\begin{cases}\dfrac{1}{a+1}\\[2ex]\dfrac{1}{a-1}\end{cases}$$

حد ندارد

$$R=\min\left\{\frac{1}{a+1},\frac{1}{a-1}\right\}=\frac{1}{a+1}\longrightarrow$$ شعاع همگرایی

مجموع سری $1-3x^2+5x^4-7x^6+\cdots$ ، $|x|<1$ کدام است؟

اگر $x=0$ قرار دهیم مجموع سری 1 خواهد بود و می‌توانیم خیلی از گزینه‌ها را حذف کنیم

انتگرال $$x-x^3+x^5-x^7+\cdots=\frac{x}{1+x^2}$$ سری هندسی با جمله اول x و قدر نسبت $-x^2$

مشتق $$1-3x^2+5x^4-7x^6+\cdots=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\boxed{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}$$

جواب گزینه‌ها

حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ برابر چیست؟

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots$$

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\frac{n+1}{n!}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}}_{e-1} + \underbrace{\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{1}{n!}}_{e-۲} = ۲e-۳$$

اگر $|x|<1$ ، $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^۲ x^n$ آنگاه $f(x)$ برابر است با

با $x=0$ می‌توانیم در گزینه بگذاریم و جواب پیدا نمی‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^۲ + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

مشتق

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + ۲x + \cdots + n x^{n-1} = \frac{+1}{(1-x)^۲}$$

$\times x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^۲}$$

مشتق

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^۲ x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^۳}$$

$\times x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^۲ x^n = \frac{x+x^۲}{(1-x)^۳} \longrightarrow \text{جواب گزینه‌ها}$$

تابع $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ به صورت سری توانی برحسب $-2<x<4$

معرفی $(x-1)$ نوشته شده است جمله دهم این سری کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots \\ \dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots \end{cases} \qquad |x|<1$$

$$f(x)=\frac{1}{x-1+3}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x-1}{3}+\frac{(x-1)^2}{3^2}-\cdots\right)$$

A

$$\longrightarrow \frac{1}{3}\left(-\frac{(x-1)^9}{3^9}\right)=-\frac{(x-1)^9}{3^{10}}$$: جواب مطلوب در گزینه‌ها

$$-3<x-1<3$$

$$-2<x<4 \longleftarrow -1<\frac{x-1}{3}<1$$

تکنیک: ضریب x^{10} در بسط مک‌لورن ... کدام است؟

$$f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{1-x}{1-x^3}$$

$$=(1-x)\frac{1}{1-x^3}=(1-x)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)$$

$$-x\times x^9=-x^{10}\longrightarrow -1$$

اگر شعاع همگرایی $\sum a_n x^n$ برابر R باشد شعاع همگرایی $\sum \frac{n!}{n^n} a_n^2 x^n$ کدام است؟

A_n

$$R' = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n} a_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n/e}{n}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^2} = eR^2$$

عمران ۹۱

تعداد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$ برابر است با:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

$$\frac{\frac{1}{2^n}}{n} = \frac{1}{n2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

$$\int \to -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$x = 1/2$$

$$-\ln\frac{1}{2} = \sum \frac{1}{n2^n} = \ln 2 \longrightarrow$$ جواب گزینه‌ها