

انتگرال معین

تغییر متغیر

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مسئله

حاصل انتگرال معین زیر را تعیین کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2} = ?$$

۲ روش حل مسئله



پاسخ: از تغییر متغیر $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$ استفاده می‌شود. نکته مهم در این مسئله بدست آوردن ديفرانسیل متغیر جدید است که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$du = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)dx = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}dx \quad (1)$$

صورت کسر برابر با متغیر جدید u است. اما مخرج کسر باید به تابعی بر حسب u تبدیل گردد. برای این منظور به رابطه اصلی تغییر متغیر مراجعه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} u &= x + \sqrt{x^2 + 1}, \\ \Rightarrow u - x &= \sqrt{x^2 + 1}, \\ \Rightarrow (u - x)^2 &= x^2 + 1, \\ \Rightarrow u^2 - 2ux - 1 &= 0, \\ \Rightarrow x &= \frac{u^2 - 1}{2u} \end{aligned}$$

عبارت $\sqrt{x^2 + 1}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} &= \sqrt{\left(\frac{u^2 - 1}{2u}\right)^2 + 1} \\ &= \sqrt{\frac{u^4 - 2u^2 + 1}{4u^2} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{u^4 + 2u^2 + 1}{4u^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(u^2 + 1)^2}{4u^2}} \\ &= \frac{u^2 + 1}{2u} \end{aligned}$$

اکنون این عبارت در دیفرانسیل (۱) قرار می‌گیرد.

$$\begin{aligned} du &= \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\ &= \frac{u}{\frac{u^2+1}{2u}} dx \\ &= \frac{2u^2}{u^2 + 1} dx \\ \Rightarrow dx &= \frac{u^2 + 1}{2u^2} du \end{aligned}$$

💡 در انتگرال‌های معین می‌توان کران‌ها را با توجه به متغیر جدید تغییر داد.

در انتگرال اخیر به ازای $x = 0$ مقدار متغیر جدید $u = 1$ و به ازای $x \rightarrow \infty$ مقدار متغیر جدید $u \rightarrow \infty$ است. انتگرال مورد نظر به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2} &= \int_1^\infty \frac{\frac{u^2+1}{2u^2} du}{u^2} \\ &= \int_1^\infty \frac{u^2 + 1}{2u^4} du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^\infty \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{u} - \frac{1}{3u^3} \right]_1^\infty \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

اگر می‌توانی، از دیگران عاقل‌تر باش،
اما هیچگاه به آن‌ها نگو.



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com