بسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

آزمون میان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱ — رشته‌های فنی و مهندسی

تاریخ امتحان: ۱۳۹۶/۸/۲۲ — گروه‌های ۱ و ۱۳ — زمان : ۱۰۰ دقیقه

---

۱. مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه را که به‌ازای $z \in \mathbb{C}$ در نامعادله‌ی

$$\operatorname{Im}\left(\frac{۱}{\bar{z}} + i\right) \geq ۰$$

صدق می‌کنند را بیابید. (۱ نمره)

---

۲. اگر $x_۱ = ۲$ و به‌ازای هر $n \geq ۲$ داشته باشیم:

$$x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{۲}{x_n}\right)$$

ابتدا ثابت کنید که دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگراست و سپس مقدار حد آن‌را بیابید. (۰/۷۵ نمره)

---

۳. با استفاده از تعریف حد (استلزام منطقی) ثابت کنید: (۰/۷۵ نمره)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{۱ + e^{-x}} = ۱$$

---

۴. گیریم $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پوشا و پیوسته باشد که $۰ < a < b < ۱$ و $f(a) > \dfrac{a+b}{۲a}$. نشان دهید که $c_۱$ و $c_۲$ متمایزی در بازه‌ی (a, b) وجود دارند که $f(c_۱) = c_۲ f(c_۲)$. (۰/۷۵ نمره)

---

۵. الف) فرض کنید تابع معکوس‌پذیر f در نقطه‌ی a و تابع $f^{-۱}$ نیز در نقطه‌ی $b = f(a)$ دو بار مشتق‌پذیر باشند. با بیان دلیل $(f^{-۱})''(b)$ را برحسب $f'(a)$ و $f''(a)$ بیابید. (۰/۷۵ نمره)

ب) با استفاده از فرمول محاسبه شده در بند الف)، برای تابع $f(x) = x^۳ + x^۲ + ۳x + ۱$ مقدار $(f^{-۱})''(۱)$ را محاسبه کنید. (۰/۲۵ نمره)

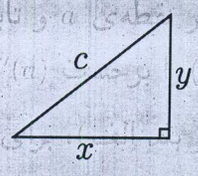
---

۶. با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین (لاگرانژ) برای هر $x > ۰$ حقیقی مثبت ثابت کنید: (۱ نمره)

$$\frac{x}{\sqrt{۱ + x^۲}} < \sinh^{-۱}(x) < x$$

---

۷. ثابت کنید در بین مثلث‌های قائم‌الزاویه که طول وتر شان عدد ثابت $c > ۰$ است، مثلثی بیشترین مساحت را داراست که متساوی‌الساقین باشد. (۰/۷۵ نمره)



موفق باشید.

استاد درس: دکتر بخشنده

پاسخ نامه میان ترم ریاضی عمومی ۱ — نیمسال اول ۹۷-۹۶

(۱) قرار می دهیم $z=x+yi$:

$$\frac{1}{z}+i=\frac{1}{x-yi}+i=\frac{x+yi}{x^2+y^2}+i=\frac{x}{x^2+y^2}+\left(\frac{y}{x^2+y^2}+1\right)i$$

بنابراین

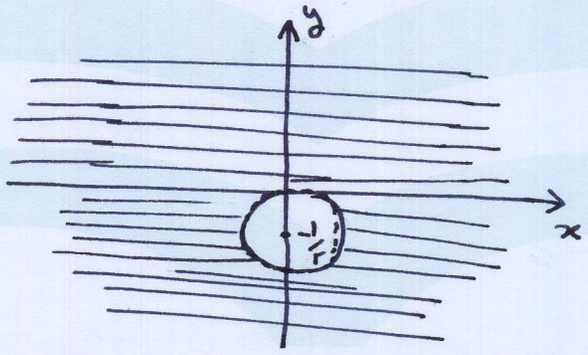
$$Im\left(\frac{1}{z}+i\right)=\frac{y}{x^2+y^2}+1\geq 0$$

است و داریم :

$$\frac{y}{x^2+y^2}\geq -1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+y\geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\geq \frac{1}{4}$$

نقاط روی و بیرون دایره به مرکز $(0,-\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$



---

(۲) ابتدا به کمک استقرای ریاضی نشان می دهیم به ازای هر $n\geq 1$ داریم $x_n\geq\sqrt{2}$ ولذا دنباله‌ی $\{x_n\}$ از پایین کراندار است :

گام اول : به وضوح $x_1=2\geq\sqrt{2}$.

گام دوم : فرض کنیم $x_n\geq\sqrt{2}$ باشد.

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
دانشکده علوم پایه

گام سوم: نشان می‌دهیم $x_{n+1} \geq \sqrt{2}$. می‌دانیم $(x_n - \sqrt{2})^2 \geq 0$ و از آن داریم:

$$x_n^2 - 2\sqrt{2}x_n + 2 \geq 0 \Rightarrow x_n^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}x_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2+2}{x_n}\right) \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = x_{n+1} \geq \sqrt{2}$$

حال نشان می‌دهیم دنباله‌ی $\{x_n\}$ نزولی است. چون برای $n \geq 1$ داریم $x_n \geq \sqrt{2}$ پس $\frac{2}{x_n^2} \leq 1$.

بنابراین

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

در نتیجه برای هر $n \geq 1$ داریم:

$$x_{n+1} \leq x_n$$

چون دنباله‌ی $\{x_n\}$ نزولی و از پایین کراندار است بنابراین این دنباله همگرا است. قرار می‌دهیم: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right) \Rightarrow 2L^2 = L^2 + 2$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{2}$$

---

(۳) طبق تعریف حد $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \; ; \; x > N \Rightarrow \left|\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right| = \left|\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1-e^{-x}}{e^{-x}} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad e^{x} > 1+\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad x > \ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

کافیست $N=\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$ انتخاب کنیم تا حکم برقرار باشد.

---

(۴) چون f تابعی پیوسته است و $\frac{a+b}{2}\in\mathbb{R}$ طبق قضیه‌ی مقدار میانی $c_1\in(a,b)$ وجود دارد که $f(c_1)=\frac{a+b}{2}$. تابع $g:[a,c_1]\longrightarrow\mathbb{R}$ با تعریف $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{a+b}f(x)$ را در نظر می‌گیریم که روی $[a,c_1]$ پیوسته است و

$$g(a)=\frac{1}{a}-\frac{2}{a+b}f(a)<0 \qquad \left(\text{زیرا } f(a)>\frac{a+b}{2a}\right)$$

---

(۵) الف) به ازای هر x در دامنه‌ی f داریم: $(f\circ f^{-1})(x)=x$.

با مشتقگیری از طرفین رابطه‌ی (۱) داریم:

$$f'(x)\cdot(f^{-1})'(f(x))=1 \qquad (1)$$

تلفن: ۴-۳۲۳۲۰۷۱ - ۰۱۱۱
دورنگار: ۳۲۲۰۵۷۰ - ۰۱۱۱