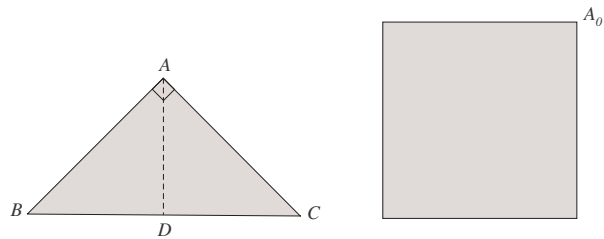


پتانسیل الکتریکی ناشی از یک مربع به ضلع ℓ که به طور یک نواخت با چگالی بار سطحی σ باردار شده در یک گوشه آن، که در شکل با نقطه A_0 نشان داده شده $\phi_{A_0} = 2\sigma\ell \sinh^{-1}(1)$ است.

الف- پتانسیل در نقطه های A و B راس های مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ABC که طول ساق های آن ℓ است، چه قدر است؟

ب- پتانسیل در نقطه D که AD ارتفاع مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ABC است، چه قدر است؟



حل: الف) اگر دو مثلث را به هم بچسبانیم معادل یک مربع است که پتانسیل در گوشه‌ی آن را می‌دانیم. پس

$$\Phi_B = \sigma \ell \sinh^{-1}(1)$$

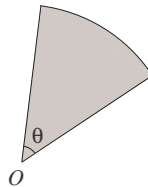
برای آن که پتانسیل در نقطه‌ی A را به دست آوریم کافی است توجه کنیم که پتانسیل در نقطه‌ی A از برهم‌نهی پتانسیل دو مثلث با ساق $\ell/\sqrt{2}$ به دست می‌آید. پس پتانسیل در نقطه‌ی A برابر می‌شود با

$$\Phi_A = 2 \times \sigma \frac{\ell}{\sqrt{2}} \sinh^{-1}(1) = \sigma \ell \sqrt{2} \sinh^{-1}(1)$$

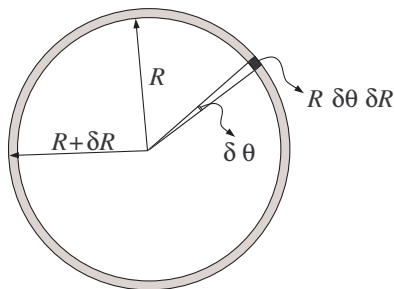
ب) پتانسیل در نقطه‌ی D از برهم‌نهی پتانسیل دو مثلث با ساق $\ell/\sqrt{2}$ به دست می‌آید. پس

$$\Phi_D = 2\sigma \ell \sqrt{2} \sinh^{-1}(1)$$

الف) با استفاده از تحلیل ابعادی و اصل برهم‌نهی پتانسیل الکتریکی ناشی از یک قطاع دایره‌ای به شعاع R و زاویه‌ی θ را در مرکز قطاع، نقطه‌ی O به دست آورید. قطاع به طور یک‌نواخت با چگالی‌ی بار سطحی‌ی σ باردار شده است.



یک ثابت نامعلوم در جواب شما می‌ماند. برای به دست آوردن این ثابت بند ب) را حل کنید.
 ب) با استفاده از نتیجه بند الف) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک حلقه‌ی دایره‌ای به شعاع درونی‌ی R و شعاع بیرونی‌ی $R + \delta R$ و چگالی‌ی بار سطحی‌ی σ را در مرکز حلقه به دست آورید. همین پتانسیل را به طور مستقیم و با تقسیم کردن حلقه به قطعات کوچک به مساحت $R \delta \theta \delta R$ و استفاده از قانون کولن به دست آورید. با مقایسه دو جواب، ثابت نامعلوم در بند الف) را به دست آورید.



حل: الف) کمیت‌های بی‌بعد مساله $\frac{\phi}{\sigma R}$ و θ هستند. با استفاده از تحلیل ابعادی کلی‌ترین جواب ممکن

$$\frac{\Phi}{\sigma R} = F(\theta)$$

است. با استفاده از اصل برهم‌نهی پتانسیل ناشی از دو قطاع هم‌مرکز با شعاع‌های یک‌سان R و زاوای θ_1 و θ_2 در مرکز از طرفی

$$\Phi = \sigma R F(\theta_1 + \theta_2),$$

و از طرف دیگر

$$\Phi = \sigma R [F(\theta_1) + F(\theta_2)],$$

است، پس

$$F(\theta_1 + \theta_2) = F(\theta_1) + F(\theta_2).$$

جواب این معادله

$$F(\theta) = C\theta$$

است. پس پتانسیل الکتریکی ناشی از یک قطاع دایره‌ای

$$\Phi = C\sigma R\theta$$

است.

ب) با استفاده از بند قبل پتانسیل الکتریکی ناشی از یک حلقه‌ی دایره‌ای به شعاع درونی R و شعاع بیرونی $R + \delta R$ و چگالی بار سطحی σ در مرکز حلقه

$$\Phi = 2\pi C\sigma(R + \delta R) - 2\pi C\sigma R = 2\pi C\sigma\delta R$$

است. اگر به طور مستقیم پتانسیل را به دست آوریم، می‌رسیم به

$$\Phi = \frac{Q}{R} = \frac{2\pi R \delta R \sigma}{R} = 2\pi \delta R \sigma$$

که با مقایسه با نتیجه قبلی $C = 1$ می‌شود.

(الف)

$$\vec{a}_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}(\hat{y} + \hat{z}), \vec{a}_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}(\hat{z} + \hat{x}), \vec{a}_3 = \frac{a}{\sqrt{3}}(\hat{x} + \hat{y}). \quad (1)$$

(ب)

$$V = |\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)| = \frac{a^3}{4}. \quad (2)$$

(ج)

$$\vec{b}_1 = \frac{\sqrt{3}\pi \vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{|\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)|} = \frac{\sqrt{3}\pi}{a}(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}). \quad (3)$$

و به همین ترتیب با چرخاندن اندیس‌ها و یا نوشتن تعریف، دو بردار دیگر به دست می‌آیند:

$$\vec{b}_2 = \frac{\sqrt{3}\pi}{a}(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}), \vec{b}_3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{a}(\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}). \quad (4)$$

(د) من این رابطه را سر کلاس نگفتم اما به طور کلی می‌توان نشان داد که:

$$\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = \frac{(\sqrt{3}\pi)^3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}. \quad (5)$$

چه با استفاده از این رابطه و چه با محاسبه‌ی مستقیم پاسخ چنین است:

$$\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{a}\right)^3. \quad (6)$$

(ه) هر نقطه ۱۲ همسایه‌ی اول و ۶ همسایه‌ی دوم دارد و

$$d_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}, d_2 = a. \quad (7)$$

(و) من سر کلاس توضیح داده‌ام که شبکه‌ی وارون برای fcc ، شبکه‌ی bcc است. از اینجا و یا از روی بردارهایی که در

بخش ج حساب شده و مقایسه با بردارهای متقارن برای bcc که سرکلاس گفته‌ام، می‌توانند تشخیص دهند که شبکه bcc است. یک نقطه از این شبکه ۸ همسایه‌ی اول و ۶ همسایه‌ی دوم دارد. نکته‌ی مهم اینجا است، که با توجه به بخش ج، اندازه‌ی مکعب سازنده در شبکه‌ی وارون $k_1 = \frac{4\pi}{a}$ است. به این ترتیب:

$$d_1 = \frac{\sqrt{3}k_1}{2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{a}, \quad d_2 = k_1 = \frac{4\pi}{a}. \quad (8)$$

ز) صفحه‌ی [۱۱۱] متناظر با بردار

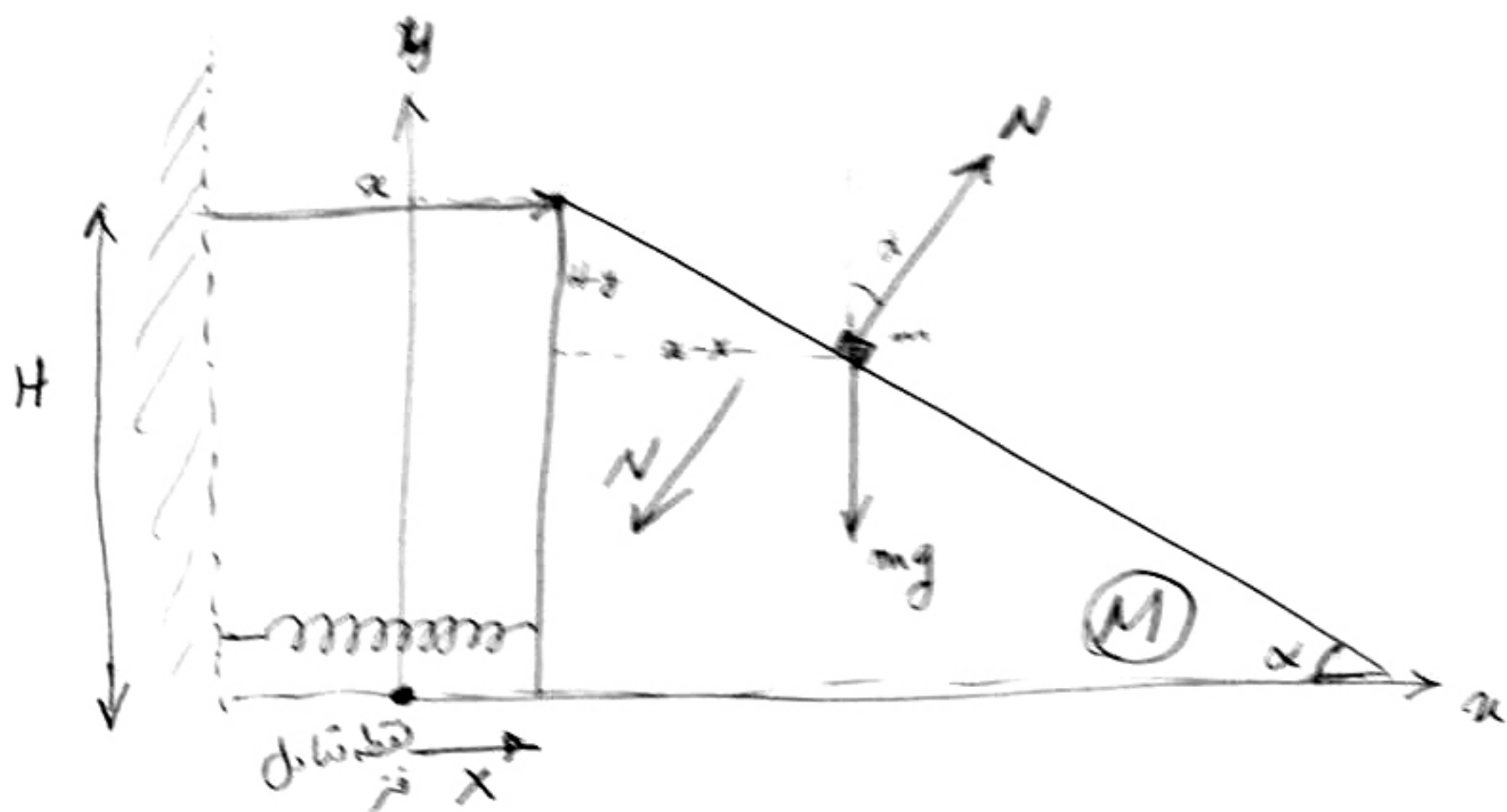
$$\vec{k} = \frac{2\pi}{a}(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \quad (9)$$

از شبکه‌ی وارون است. طبق قرارداد سوال باید از شبکه‌ی وارون مکعبی ساده استفاده کرد. این صفحه مجموعه نقاطی است که در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$\vec{k} \cdot \vec{R} = 2\pi \quad (10)$$

بچه‌ها هم معادله‌ی صفحه را می‌دانند و هم اینکه بردار $\vec{k}$ عمود بر صفحه است. در نهایت داریم:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a}_{1,2,3} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}_{1,2,3}| |\vec{k}|} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (11)$$



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad N \sin \alpha &= m \ddot{x} \\ \textcircled{2} \quad N \cos \alpha - mg &= m \ddot{y} \\ \textcircled{3} \quad -N \sin \alpha - kx &= M \ddot{x} \end{aligned}$$

الف -

$$(H-y) = \frac{y}{\alpha} (x-x)$$

$$\begin{cases} \alpha = x + x' \cos \alpha \\ y = H - x' \sin \alpha \\ x = x \end{cases}$$



ب -

2 -

$$\textcircled{1} \cos \alpha - \textcircled{2} \sin \alpha \Rightarrow mg \sin \alpha = m \ddot{x} \cos \alpha - m \ddot{y} \sin \alpha$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} \Rightarrow -kx = M \ddot{x} + m \ddot{x}$$

ج -

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x} + \dot{x}' \cos \alpha & \ddot{x} &= \ddot{x} + \ddot{x}' \cos \alpha \\ \dot{y} &= -\dot{x}' \sin \alpha & \ddot{y} &= -\ddot{x}' \sin \alpha \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} mg \sin \alpha = m \ddot{x}' + m \ddot{x} \cos \alpha \\ M \ddot{x} + kx + m(\ddot{x} + \ddot{x}' \cos \alpha) = 0 \end{cases}$$

$$u = x' + x \cos \alpha \Rightarrow \ddot{u} = g \sin \alpha = -\frac{d}{du} (-gu \sin \alpha)$$

د -

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{u}^2 - gu \sin \alpha = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{2} (\dot{x}' + \dot{x} \cos \alpha)^2 - g \sin \alpha (x' + x \cos \alpha) = \text{const}$$

با توجه به شرایط اولیه (در t=0) داریم $\dot{x}' = \dot{x} = 0$ و $x' = x = 0$ متغیرهای ثابت می‌شوند

ادب - ۱. از مسدود * مسدود ** قرار می دهیم

$$M\ddot{X} + kX + m\ddot{X} + G\alpha(mgL\alpha - m\ddot{X}G\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{KX}{K} (M + mL^2\alpha) \ddot{X} = -kX - mgL\alpha G\alpha = -\frac{d}{dX} \left(\frac{1}{2}kX^2 + mgXG\alpha \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(M + mL^2\alpha) \dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2 + mgXG\alpha = \text{ثابت} = 0$$

بدرجه ۲ می آید

$$\Rightarrow \ddot{u} = gL\alpha \Rightarrow u = \frac{1}{2}gt^2L\alpha + 0 \leftarrow \text{بدرجه ۲ می آید}$$

$$\Rightarrow (M + mL^2\alpha) \ddot{X} + kX = -mgL\alpha G\alpha$$

$$\omega^2 = \frac{k}{M + mL^2\alpha}$$

$$X = A \cos(\omega t + \phi) - \frac{mgL\alpha G\alpha}{k}$$

$$X(0) = 0, \dot{X}(0) = 0 \Rightarrow X = \frac{mgL\alpha G\alpha}{k} (\cos \omega t - 1)$$

$$u = \frac{1}{2}gt^2L\alpha \Rightarrow x' = u - XG\alpha$$

$$x = X + x'G\alpha \Rightarrow x = XG\alpha + uG\alpha \Rightarrow$$

$$x = \frac{mgL^3\alpha G\alpha}{k} (\cos \omega t - 1) + \frac{1}{2}gt^2L\alpha G\alpha$$

$$y = H - x'G\alpha = H - G\alpha(u - XG\alpha) = H - uG\alpha + XG^2\alpha$$

$$\Rightarrow y = H - \frac{1}{2}gt^2L\alpha G\alpha + \frac{mgL^2\alpha G^2\alpha}{k} (\cos \omega t - 1)$$

دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در خلاء به ترتیب در نقاط A و B به مختصات دکارتی $A: (x_1, 0)$ و $B: (x_2, 0)$ روی محور x از صفحه‌ی x-y در نظر بگیرید.

(آ) مؤلفه‌های $E_x(x, y)$ و $E_y(x, y)$ میدان الکتریکی ناشی از این دو بار را در نقطه‌ی دلخواه $P: (x, y)$ بر حسب x_1 و x_2 بنویسید. (۱ نمره)

(ب) طبق تعریف، یک خط نیرو منحنی است که میدان الکتریکی در هر نقطه بر آن مماس است، یعنی برای عنصر طول $d\vec{r}$ روی یک خط نیرو $d\vec{r} \parallel \vec{E}$ است. (a) با استفاده از این خاصیت و جوابی که در قسمت (آ) به دست آوردید معادله دیفرانسیلی بر حسب متغیرهای u و v که به صورت $u = \frac{x - x_1}{y}$ و $v = \frac{x - x_2}{y}$ تعریف می‌شوند به دست آورید. (b) با انتگرال‌گیری از معادله‌ی دیفرانسیل، معادله‌ی خطوط نیروی ناشی از دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 را در صفحه‌ی x-y به دست آورید. (۲ نمره)

از این به بعد فرض کنید $q_1 > 0$ و $q_2 > 0$. همچنین همه‌ی زاویه‌ها نسبت به جهت مثبت محور x داده شده یا خواسته می‌شود.

(پ) (a) برای دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که به فاصله‌ی متناهی از یکدیگر قرار دارند خط نیرویی در صفحه‌ی x-y که با زاویه‌ی φ از بار q_1 خارج می‌شود را در نظر بگیرید. روی این خط نیرو و در فاصله‌ی بینهایت از دو بار، نقطه‌ی P را در نظر بگیرید. زاویه‌ی خط AP، θ را به دست آورید. (b) برای خطوط نیروی مختلف محدوده‌ی تغییرات θ چقدر است؟ (c) شیب خط مماس بر خط نیرو در نقطه‌ی P (مذکور در قسمت a) چقدر است؟ (۳ نمره)

(ت) (a) برای دو بار نقطه‌ای q_1 و $-q_2$ که به فاصله‌ی متناهی از یکدیگر قرار دارند خط نیرویی در صفحه‌ی x-y که با زاویه‌ی φ از بار q_1 خارج می‌شود را در نظر بگیرید. این خط نیرو با چه زاویه‌ای به بار $-q_2$ می‌رسد؟ (b) به ازای $q_1 > q_2$ بیشترین زاویه‌ی خط نیرویی که از q_1 بیرون می‌آید و به q_2 ختم می‌شود (یعنی به ازای زوایای بزرگتر از آن خط نیرو به بینهایت می‌رود) چقدر است؟ (c) به ازای $x_1 = -a$ و $x_2 = a$ صفحه‌ی عمود منصف AB را در نظر بگیرید. خط نیرویی که موازی صفحه‌ی عمود منصف از q_1 خارج می‌شود و به

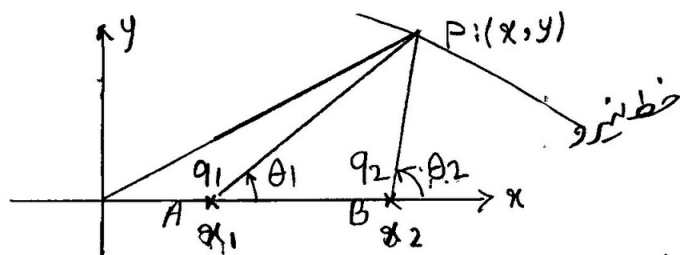
$-q_2$ می‌رسد صفحه را در نقطه‌ای قطع می‌کند. فاصله‌ی این نقطه تا AB چقدر است؟ (d)

شار الکتریکی خالص گذرنده از دایره‌ای به شعاع a واقع در صفحه‌ی عمود منصف AB

(مذکور در قسمت c)) که مرکزش روی خط AB است چقدر است؟ (۴ نمره)

انتگرال‌های زیر ممکن است سودمند باشد:

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} &= -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}} \\ \int \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} &= \frac{x}{b^2\sqrt{x^2 + b^2}} \\ \int \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{x} dx &= \sqrt{b^2 - x^2} - b \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - x^2}}{x}\right) \\ \int \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{x^2} dx &= -\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{b}\right)\end{aligned}$$



(۱)

$$E_x(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{q_2(x-x_2)}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right)$$

$$E_y(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 y}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{q_2 y}{[(x-x_2)^2 + y^2]^{3/2}} \right)$$

(۲) $d\vec{r} \parallel \vec{E}$ در سبب خطوط نیرو در مدار

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \quad \text{مساوی می‌کنیم}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}, \quad \frac{x-x_1}{y} = u, \quad \frac{x-x_2}{y} = v$$

↓

$$x = \frac{u}{u-v} (x_2 - x_1) + x_1, \quad y = \frac{x_2 - x_1}{u-v}$$

↓

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{du - dv}{u dv - v du}$$

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{q_1}{(1+u^2)^{3/2}} + \frac{q_2}{(1+v^2)^{3/2}}}{\frac{q_1 u}{(1+u^2)^{3/2}} + \frac{q_2 v}{(1+v^2)^{3/2}}}$$

همچنین

$$- \frac{du - dv}{u dv - v du} = \frac{q_1 (1+v^2)^{3/2} + q_2 (1+u^2)^{3/2}}{q_1 u (1+v^2)^{3/2} + q_2 v (1+u^2)^{3/2}}$$

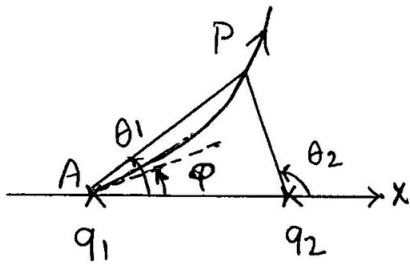
باید برابر

$$\frac{du}{dv} = - \frac{q_2}{q_1} \frac{(1+u^2)^{3/2}}{(1+v^2)^{3/2}} \Rightarrow q_1 \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} + q_2 \frac{dv}{(1+v^2)^{3/2}} = 0$$

$$\frac{q_1 u}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{q_2 v}{\sqrt{1+v^2}} = C$$

با انتگرال کردن:

$$\frac{q_1 (x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} + \frac{q_2 (x-x_2)}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}} = C \Rightarrow \frac{q_1 \sin \theta_1}{r_1} + \frac{q_2 \sin \theta_2}{r_2} = C$$



$$q_1 \cos \theta_1 + q_2 \cos \theta_2 = C \quad (a) \quad \text{پ}$$

اگر P نزدیک A باشد: $\theta_1 = \varphi, \theta_2 = \pi$

اگر P به بی نهایت برود: $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

$$q_1 \cos \varphi - q_2 = q_1 \cos \theta + q_2 \cos \theta \quad \text{در نتیجه}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{q_1}{q_1 + q_2}} \cos \frac{\varphi}{2} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{q_1 \cos \varphi - q_2}{q_1 + q_2}$$

$$(b) \quad \text{مطابق شکل} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \text{در نتیجه} \quad -1 \leq \cos \theta \leq \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}$$

$$\frac{1}{2} \cos^{-1} \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \leq \theta \leq \pi$$

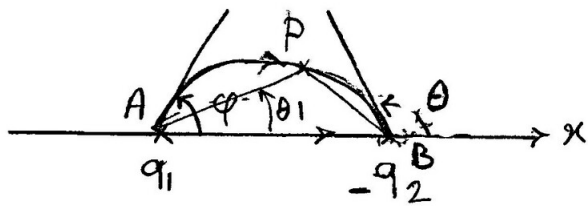
$$(c) \quad \text{با توجه به قیمت ۱۸:} \quad \frac{y_P}{x_P - x_2} = \frac{y_P}{x_P - x_1} = \tan \theta$$

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_P, y_P)} \quad \text{همچنین شیب خط مماس در P بر خط نیز برابر است با}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} \quad \text{با توجه به قیمت ۱۸}$$

$$m = \left(\frac{E_y}{E_x} \right)_{(x_P, y_P)} = \tan \theta$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{q_1}{q_1 + q_2}} \cos \frac{\varphi}{2} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{q_1 \cos \varphi - q_2}{q_1 + q_2} \quad \text{ن}$$



(a) (C)

در حالت کلی $q_1 \cos \theta_1 - q_2 \cos \theta_2 = C$

$$\theta_1 = \varphi$$

اگر P به نزدیک شود A

$$\theta_2 = \pi$$

$$q_1 \cos \varphi + q_2 = q_1 - q_2 \cos \theta \Leftarrow$$

$$\theta_1 = 0$$

اگر P به نزدیک شود B

$$\theta_2 = \theta$$

$$q_1 (1 - \cos \varphi) = q_2 (1 + \cos \theta)$$

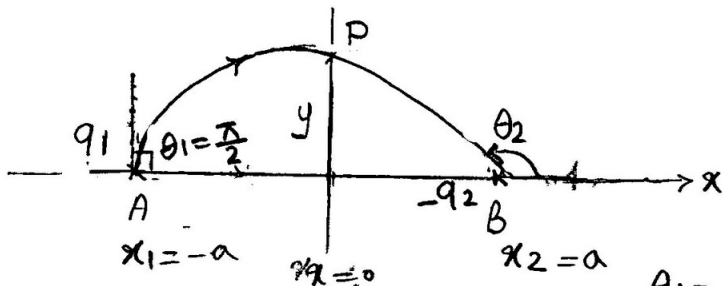
$$2q_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2q_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \sin \frac{\varphi}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\theta}{2} \leq 1$$

(b)

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \Rightarrow \cos \varphi_{\max} = 1 - \frac{2q_2}{q_1} = \frac{q_1 - 2q_2}{q_1}$$



$q_1 \cos \theta_1 - q_2 \cos \theta_2 = C$ (C)

اگر P به نزدیک شود A

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 = \pi$$

و لذا $C = q_2$

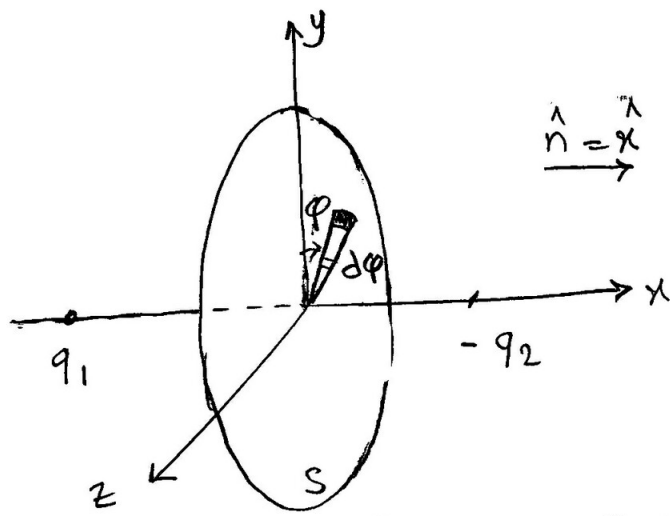
در نتیجه

$$q_1 \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - q_2 \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = q_2$$

$x=0$ به جای

$$\frac{q_1 a}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{q_2 a}{\sqrt{a^2 + y^2}} = q_2$$

$$y = a \sqrt{\left(\frac{q_1}{q_2} + 1\right)^2 - 1}$$



$$\hat{n} = \hat{x}$$

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, da$$

$$= \int_S E_x(x=0, y, z) \, dy \, dz$$

$$dy \, dz = r \, dr \, d\phi$$

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r \, dr \left(\frac{q_1 a}{(r^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{-q_2 a}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$= \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} (q_1 - q_2) a \int_0^a \frac{r \, dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} (q_1 - q_2) a \left(\frac{-1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)_0^a = \frac{1}{2\epsilon_0} (q_1 - q_2) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

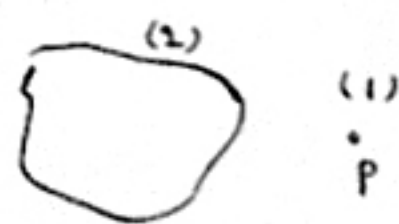
$$a) \quad V_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

$$b) \quad V'_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q'_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

$$c) \quad E = \sum_{i=1}^N \left[q_i \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} - q'_i \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \right] = 0$$

$$d) \quad E = \int \left[\frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] = 0$$

د) قطره P را با شار (۱) و رسانا را با شار (۲) نشان بدهیم



در حالت اول: $q_1 = 0$, $V_1 = V_p$, $V_2 = V$

در حالت دوم: $q'_1 = q$, $V'_1 = 0$, $q'_2 = Q = ?$

$$از رابطه اول: q_1 V'_1 + q_2 V'_2 = q'_1 V_1 + q'_2 V_2 \Rightarrow 0 = q V_p + Q V \Rightarrow \boxed{Q = -q \frac{V_p}{V}}$$

۹) مطابق قسمت (۵) در حالت دوم بار q را در سطح رسانا قرار دهیم و بار الکتریکی رسانا را پیدا کنیم

$$V = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad V_p = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}$$

در حالت دوم که در قطره P بار q قرار دهیم بار الکتریکی رسانا را پیدا کنیم

$$Q = -q \frac{V_p}{V} = -q \frac{R}{D}$$

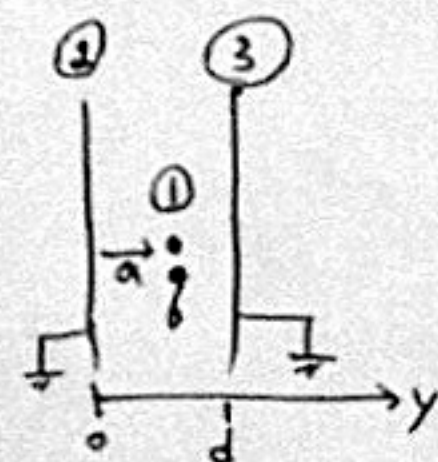
۱) $q_1 = q$, $q_2 = q(y=0)$, $q_3 = q(y=d)$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$

$$q'_1 = 0, \quad V'_2 = V_0, \quad V'_3 = 0$$

$$q_1 V'_1 + q_2 V'_2 + q_3 V'_3 = q'_1 V_1 + q'_2 V_2 + q'_3 V_3$$

$$q_1 V'_1 + q(y=0) V_0 = 0, \quad \text{پس } V'_1 = V_0 \left(1 - \frac{a}{d}\right) \Rightarrow q(y=0) = -q \frac{V'_1}{V_0} = -q \left(1 - \frac{a}{d}\right) \Rightarrow \boxed{q(y=0) = -q \left(1 - \frac{a}{d}\right)}$$

$$\text{در همین ترتیب} \quad \boxed{q(y=d) = -q \frac{a}{d}}$$



ع) اگر بار q در هر لحظه از زمان در مکان x نسبت به مرکز رسانای (۲) باشد داریم:

$$q(y=0) = -q \left(1 - \frac{a}{d}\right)$$

$$q(y=d) = -q \frac{a}{d}$$

$$\lambda = \frac{dq(y=0)}{da} = -\frac{dq(y=d)}{da} = \frac{q}{d}$$

الف) میدان : قانون گاوس : $\epsilon_0 E 4\pi r^2 = Q_{in} = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho \int_0^r (r^2 - \frac{r^3}{R}) dr =$

$$4\pi \rho \left(\frac{1}{3} r^3 - \frac{r^4}{4R} \right) \rightarrow E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right)$$

ب) نیرو :

$$\int dF = \int E \rho \cos \theta dr = \int \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right) \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \cos \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$$

$$= \frac{\rho_0^2}{\epsilon_0} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^R \left(\frac{r^3}{3} - \frac{7}{12} \frac{r^4}{R} + \frac{r^5}{4R^2} \right) dr \right)$$

$$= \frac{\pi \rho_0^2}{\epsilon_0} \left(\frac{r^4}{12} - \frac{7r^5}{60R} + \frac{r^6}{24R^2} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi \rho_0^2}{\epsilon_0} R^4 \left(\frac{1}{12} - \frac{7}{60} + \frac{1}{24} \right)$$

$$\frac{10 - 14 + 5}{120} = \frac{1}{120}$$

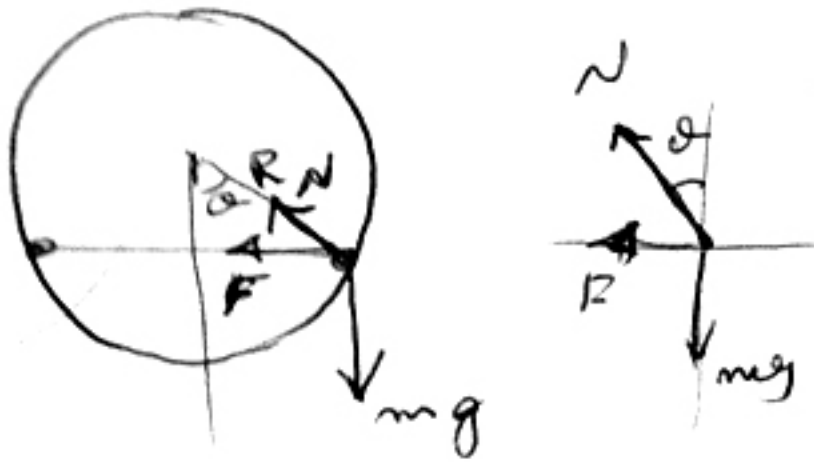
$$= \frac{\pi \rho_0^2 R^4}{120 \epsilon_0}$$

ج) همین کار را برعکس کرده، روی کروی اولیه می‌گذاریم.

$$F = \frac{\pi R^4}{120 \epsilon_0} (\rho_u + \rho_d)^2 = \frac{\pi R^4}{120 \epsilon_0} \rho_u^2 + \frac{\pi R^4}{120 \epsilon_0} \rho_d^2 + 2F_{ud} \rightarrow F_{ud} = \frac{\pi R^4}{120 \epsilon_0} \rho_u \rho_d$$

حل سله ۳ - استیون در - دوره - تاسیس ۹۵

الف -



$$\begin{cases} N \cos \theta - mg = m \ddot{z} \\ -N \sin \theta - F = m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \\ 0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \end{cases}$$

$$|F| = k(2r - a)$$

$$r^2 + z^2 = R^2$$

ب -

$$\begin{cases} r = R \sin \theta \\ z = -R \cos \theta \\ \dot{\theta} = \dot{\theta} \end{cases}$$

۲ - حقیقت تعیین یافته θ, φ .

→

$$\begin{cases} -mg \sin \theta - F \cos \theta = m(R \sin \theta) \ddot{\theta} + m(R \cos \theta) (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \\ 0 = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \end{cases}$$

$$\text{معادله در } r \Rightarrow \frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow m r^2 \dot{\theta} = p_\theta = \text{ثابت} \Rightarrow \boxed{m R^2 \sin^2 \theta \dot{\theta} = l_z}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = R \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} = R \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{r} = R \ddot{\theta} \cos \theta - R \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{z} = R \ddot{\theta} \sin \theta + R \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases}, \quad \dot{\theta} = \frac{l_z}{m R^2 \sin^2 \theta}$$

با جداری در معادله اول به دست می آید

$$m R \ddot{\theta} = \frac{l_z^2 \cos \theta}{m R^3 \sin^3 \theta} - mg \sin \theta - k(2R \sin \theta - a) \cos \theta$$

د - یک ثابت حرکت l_z است و دیگری کمیت

$$\frac{1}{2} m R \dot{\theta}^2 + V(\theta) = Q$$

$$V(\theta) = \frac{l_z^2}{2m R^3 \sin^2 \theta} - mg \cos \theta + k R \sin^2 \theta - k a \sin \theta$$

ارائه - حرکت دایره‌ای در زاویه θ استنتاج می‌انند به طوری که

$$\begin{cases} V'(\theta_0) = 0 \\ V(\theta_0) = Q \end{cases} \quad 0 = V'(\theta_0) = -\frac{l_z^2 \cos \theta_0}{m R^3 \sin^3 \theta_0} + mg \sin \theta_0 + k(2R \sin \theta_0 - a) \cos \theta_0$$

از طرفی $l_z = m l_0^2 \omega^2$ و $l_0 = R \sin \theta_0$

$$\Rightarrow \frac{(m l_0^2 \omega^2)^2 \cos \theta_0}{m l_0^3} = mg \sin \theta_0 + k(2l_0 - a) \cos \theta_0$$

$$\Rightarrow m l_0 \omega^2 = mg \sin \theta_0 + k(2l_0 - a) \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{\sqrt{R^2 - l_0^2}} + \frac{k}{m} \left(2 - \frac{a}{l_0}\right)}$$

$$l_z = m l_0^2 \omega_0 = m l_0^2 \sqrt{\frac{g}{\sqrt{R^2 - l_0^2}} + \frac{k}{m} \left(2 - \frac{a}{l_0}\right)}$$

$$Q = \frac{(m l_0^2 \omega_0)^2}{2mR l_0^2} - mg \cos \theta_0 + \frac{k}{R} l_0^2 - ka \frac{l_0}{R}$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{2} m \frac{l_0^2}{R} \left[\frac{g}{\sqrt{R^2 - l_0^2}} + \frac{k}{m} \left(2 - \frac{a}{l_0}\right) \right] - mg \sqrt{1 - \frac{l_0^2}{R^2}} + \frac{k l_0}{R} (l_0 - a)}$$

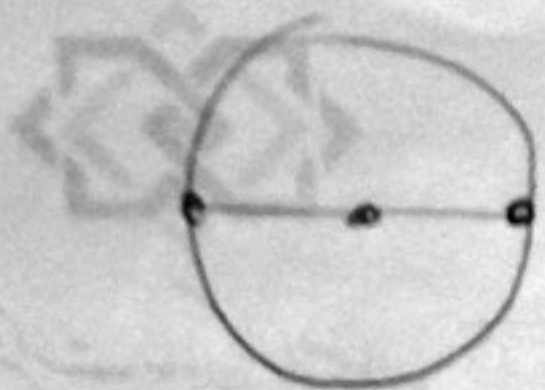
$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{mR} V''(\theta_0)}$$

$$V''(\theta) = \frac{l_z^2}{m R^3} \frac{2 \cos^2 \theta + 1}{\sin^4 \theta} + mg \cos \theta + 2kR \cos 2\theta + ka \sin \theta$$

$$V''(\theta_0) = \frac{(m l_0^2 \omega_0)^2 R}{m l_0^4} (2 \cos^2 \theta_0 + 1) + mg \cos \theta_0 + 2kR (2 \cos^2 \theta_0 + 1) + ka \frac{l_0}{R}$$

$$= \underbrace{(m R \omega_0^2 + 2kR)}_{\text{مجموعه}} \left(3 - 2 \frac{l_0^2}{R^2}\right) + mg \sqrt{1 - \frac{l_0^2}{R^2}} + \frac{ka l_0}{R}$$

$$\Rightarrow \Omega^2 = \left(\omega_0^2 + 2 \frac{k}{m}\right) \left(3 - 2 \frac{l_0^2}{R^2}\right) + \frac{g}{R} \sqrt{1 - \frac{l_0^2}{R^2}} + \frac{k}{m} \left(\frac{a l_0}{R^2}\right)$$



$$L_z = m R v_0$$

در لحظه شروع

معمولاً است در زاویه $\theta = \frac{\pi}{2}$ و در این

2

$$Q = 0 + V\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(m R v_0)^2}{2m R^3} + k(R-a)$$

$$Q = \frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{R} + k(R-a)$$

تغییر بازگشت دیگر از معادله $Q = V(\theta)$ (در حالی که $\theta = 0$) درست می آید

$$\frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{R} + k(R-a) = \frac{L_z^2}{2m R \rho^2} - mg \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} + \frac{k}{R} \rho^2 - \frac{k a \rho}{R}$$

تغییرهای بازگشت یکی در $\rho_1 = R$ و دیگری در ρ_2 است که از حل معادله فوق درست می آید

ز - از معادلات حرکت سمت الف داریم

$$N - mg \cos \theta + F \sin \theta = m \cos \theta \ddot{z} - m \sin \theta (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2)$$

$$\Rightarrow N = mg \cos \theta - k \sin \theta (2R \sin \theta - a) + m R \dot{\theta}^2 + m \rho \dot{\phi}^2 \sin \theta$$

$$= " " + 2(Q - V(\theta)) + \frac{L_z^2 \sin \theta}{m \rho^3}$$

$$= mg \cos \theta - k \sin \theta (2R \sin \theta - a) + \frac{m v_0^2}{R} + 2k(R-a)$$

$$- \frac{2 m^2 R^2 v_0^2}{2m R^3 \sin^2 \theta} + 2mg \cos \theta - 2kR \sin^2 \theta + 2ka \sin \theta + \frac{m^2 R^2 v_0^2 \sin \theta}{m R^3 \sin^3 \theta}$$

$$N = 3mg \cos \theta + 2kR(1 - 2\sin^2 \theta) + ka(3\sin \theta - 2) + \frac{m v_0^2}{R}$$

در شروع $\theta = \frac{\pi}{2}$ و داریم

$$N(\frac{\pi}{2}) = \frac{m v_0^2}{R} - k(2R-a)$$

$$N > 0 \Rightarrow$$

$$v_0^2 > \frac{kR}{m} (2R-a)$$

اگر $a > 2R$ باید بود به شرطی نیست

باید بود که اگر به مقدار a به اندازه $2R$ باشد

این مسئله از دو قسمت مستقل تشکیل شده.

الف) در اتفاقی N مولکول وجود دارد. فرض کنید توزیع اندازه‌ی سرعتِ مولکول‌ها $f(v) = a e^{-a v}$ داده شده است که v اندازه‌ی سرعت است و $a > 0$ یک ثابت معلوم. معنای تابع توزیع این است که احتمال این که اندازه‌ی سرعتِ یک مولکول بین v و $v + dv$ باشد برابر است با $f(v)dv$. پس داریم $\int_{v=0}^{\infty} f(v)dv = 1$. به طور هم‌ارز، می‌توان گفت اگر تعدادِ مولکول‌ها خیلی زیاد باشد، کسری از مولکول‌ها که سرعتشان بین v و $v + dv$ باشد برابر است با $f(v)dv$. تخمینی از سرعتِ سریع‌ترین مولکولِ این ظرف ارائه دهید.

پاسخ: سرعتِ بیشینه v_{max} با این رابطه به دست می‌آید: $\int_{v_{max}}^{\infty} f(v)dv = \frac{1}{N}$ که از این به دست می‌آید $v_{max} = \frac{1}{a} \ln N$

ب) فرض کنید در قسمت $-L < x < L$ از فضای سه بُعدی، N لایه‌ی عایقِ باردار قرار دارد که موازی با صفحه‌ی yz هستند. از ضخامت لایه‌ها می‌توان صرف‌نظر کرد، و در راستای y و z ابعادشان را می‌توان بینهایت فرض کرد. چگالی بارِ واحدِ سطحِ هر صفحه σ است. مختصه‌ی x هر لایه به طور تصادفی (و یکنواخت) در بازه‌ی $[-L, L]$ انتخاب شده است، و مکانِ هر لایه از مکانِ لایه‌های دیگر مستقل است (چون ضخامت ندارند، احتمالِ این که روی هم بیفتند صفر است). این طور مدل‌ها، گاهی برای مطالعه‌ی حرکت ستاره‌ها در کهکشان‌های دیسکی خیلی مسطح استفاده می‌شوند. نقطه‌ی A به مختصات $(x, 0, 0)$ را در نظر می‌گیریم، که $0 < x < L$. میدانِ برآیند در نقطه‌ی A را با $\vec{E}$ نشان می‌دهیم. مقدارِ متوسطِ $\vec{E}$ را بیابید. همچنین مقدارِ متوسطِ چگالی انرژی میدانِ الکتریکی در نقطه‌ی A را به دست آورید. سپس با این فرض که نقطه‌ی A منطبق بر مبدأ باشد این پاسخ‌ها را ساده کنید.

پاسخ: N نیروی مستقل با بزرگی $E_i \equiv \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ داریم که طور تصادفی به سمت چپ یا راست هستند. احتمالِ این که هر کدام به سمتِ راست باشد برابر است با $p = \frac{L+x_i}{2L}$ ، احتمالِ این که هر کدام به سمتِ راست باشد برابر است با $q = 1 - p = \frac{L-x_i}{2L}$. متوسطِ جمعِ این N تا، همانطور که در کلاس دیدیم، می‌شود Np . E_i متوسطِ جمعِ مربعاتِ این‌ها (که چگالی میدان را می‌دهد) برابر است با $E^2 = [Npq + N(p-q)^2]$. اگر نقطه‌ی A منطبق بر مبدأ باشد، در این پاسخ‌ها $p = q = \frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم.



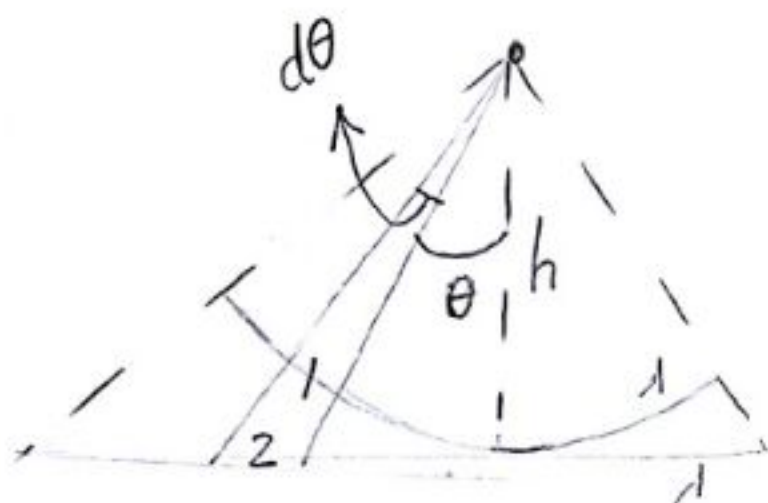
$$E = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} dE \cos \theta = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cos \theta =$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \theta \Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin(\alpha/2)$$

الف)

میدان ناشی از خردبار 1، dE_1

ب)



میدان ناشی از خردبار 2، dE_2

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda h d\theta}{h^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{h} \quad I$$

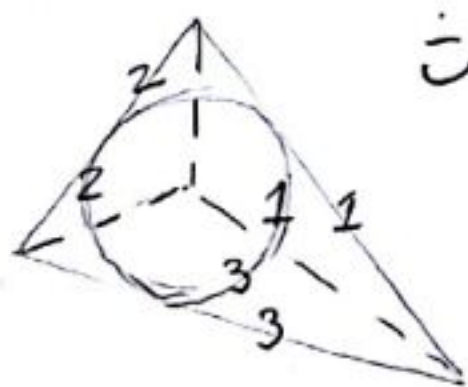
$$dE_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{h^2 + x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \frac{h/\cos^2 \theta d\theta}{h^2(1 + \tan^2 \theta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{h} \quad II$$

$$x = h \tan \theta$$

$$dx = h \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$I, II \Rightarrow dE_1 = dE_2 \Rightarrow E_1 = E_2$$

چون بازه بار استیکال گیری یکسان است.



ج) اگر $S_1 = S_2 = S_3$ نیز نقطه مورد نظر مرکز دایره محاطه می‌باشد (محل برخورد نیسازها) هر کدام از خطوط بار را طبق قسمت قبل می‌توان با حلقه‌ای معادل ساخت و متدش را نیز می‌توانیم اعمال کنیم. اکنون میدان در مرکز یک حلقه بار کامل صفر است.

(د) میدان در هیچ نقطه‌ی دایره‌ی صفر نمی‌شود.

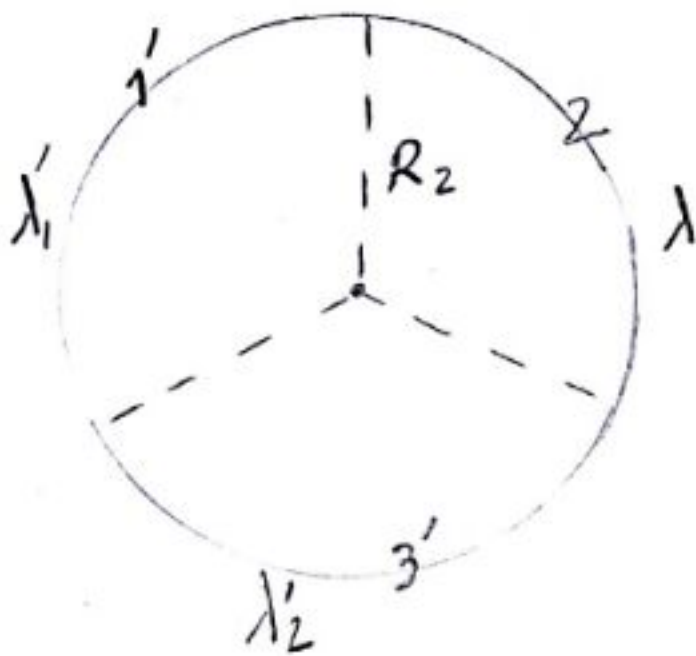


میدان ناشی از خطوط بار با میدان ناشی از حلقه‌ی بار برابر است.
 شدگی یکسان است. چون میدان ناشی از یک حلقه با $\frac{1}{R}$
 متناسب است اگر R را به R' برابر کنیم از تبدیل کنیم.
 طوری که $\frac{1}{R} = \frac{1}{R'}$ میدان تغییر نمی‌کند. پس

به جای حلقه ۱ و ۳ در حلقه‌ی دایره‌ی شعاع آنها شعاع حلقه‌ی ۲ برابر است و نداریم و تشکیل یک دایره

کامل می‌دهیم

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}, \quad \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2}$$



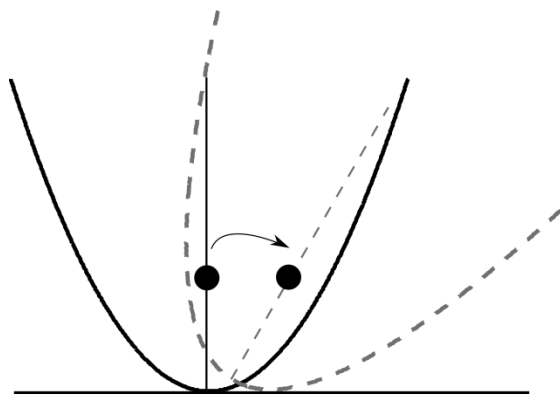
$$\lambda_1' = (\lambda_1' - 1) + 1$$

$$\lambda_2' = (\lambda_2' - 1) + 1$$

اکنون اگر از هر سه توزیع بار یک خطی بگیریم چون روی یک دایره است تغییر در میدان ایجاد نمی‌کند
 به شکل زیر می‌رسیم که واضح است میدان صفر نمی‌گردد.



۲- یک سهمی به معادله‌ی $y = kx^2$ دارای یک نقطه است به نام کانون، که روی محورِ تقارنِ



سهمی به فاصله‌ی $\frac{1}{4k}$ از رأس قرار دارد، یعنی در مختصات $(0, \frac{1}{4k})$. فرض کنید سهمی شروع به غلتش محض روی محور x می‌کند (فرض کنید به سمت راست). با غلتش سهمی، کانونش هم حرکت می‌کند. معادله‌ی مسیری که کانون

سهمی طی می‌کند را بیابید. پاسخ نهایی را به صورت $y = f(x)$ بنویسید.

انتگرال زیر ممکن است مفید باشد:

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \text{ثابت}$$

پاسخ: مسئله را می‌توان از چند راه هم‌ارز حل کرد. یکی‌اش این است که توجه کنیم اگر خطی بر

سهمی مماس شود و نقطه‌ی تماس خط با سهمی در $(\tilde{x}, \tilde{y})$ باشد، معادله‌ی خط را می‌توان به

صورت $y = (2k\tilde{x})x - k\tilde{x}^2$ نوشت. اگر از کانون بر این خط عمود کنیم، طول این عمود

برابر است با $\Delta_x = \frac{\sqrt{1+4k^2\tilde{x}^2}}{4k}$. همچنین، فاصله‌ی پای این عمود تا نقطه‌ی تماس برابر است با

$\Delta_y = \frac{\tilde{x}\sqrt{1+4k^2\tilde{x}^2}}{2}$. حالا کافیه توجه کنیم غلتش محض یعنی طولِ کمانِ روی سهمی برابر

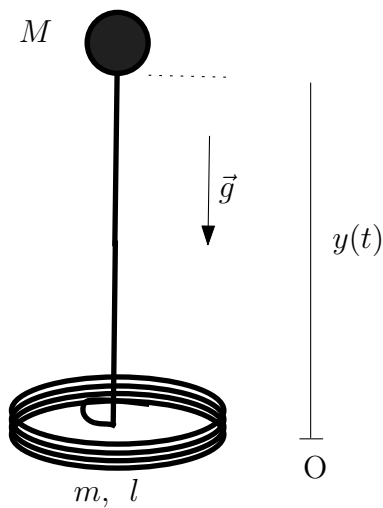
باشد با x نقطه‌ی تماس سهمی با زمین. با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم:

$$s = \int \sqrt{1+(2kx)^2} dx = \frac{\tilde{x}\sqrt{1+4k^2\tilde{x}^2}}{2} + \frac{1}{4k} \ln(2k\tilde{x} + \sqrt{1+4k^2\tilde{x}^2})$$

گام نهایی این است که توجه کنیم برای کانون، داریم: $x = s - \Delta_x$ و $y = \Delta_y$. اگر از این دو

$$y = \frac{\cosh(4kx)}{4k}$$

رابطه $\tilde{x}$ را حذف کنیم، به دست می‌آوریم:



(۳) طنابی به طول l و جرم یکنواخت m به گلوله‌ای به جرم M وصل شده است. در لحظه‌ی $t = 0$ و در حالی که کل طناب روی سطح زمین قرار دارد یعنی $y = 0$ است به گلوله سرعت اولیه‌ی v_0 رو به بالا می‌دهیم. وضعیت این مجموعه در لحظه‌ی دلخواه t در شکل نشان داده شده است.

(آ) سرعت گلوله را بر حسب y تا قبل از جدا شدن طناب از سطح زمین به دست آورید. (۷ نمره)

(ب) کمترین مقدار سرعت اولیه، $v_{0\min}$ ، چقدر باشد تا تمام طناب بتواند از سطح زمین جدا شود. (۱ نمره)

(پ) به ازای ارتفاع اوج گلوله را به دست آورید. (۲ نمره)

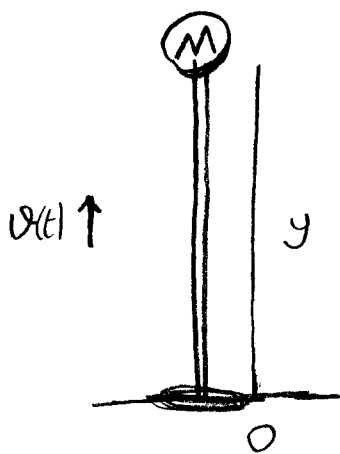
راهنمایی:

سمت چپ معادله‌ی دیفرانسیلی به شکل

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)$$

را با ضرب معادله در $g(x)$ مناسبی می‌توان به صورت مشتق کامل درآورد.

لگه: t



(۲) بدار مستقیم با جرم متغیر داریم

$$F_{\text{ext}} = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u}) \frac{dm}{dt}$$

که $\vec{u}$ سرعت جرم کم یا زیاد شده نسبت به جرم صحیح ساکن است و m جرم سیستم در لگه t است.

$\vec{u} = \vec{0}$ و $m(t) = M + \frac{m}{l} y$

جرم dm از پایین در حالی که ساکن است به قسمت آویزان صلب اضافه می‌شود

$$(M + \frac{m}{l} y) \frac{dv}{dt} + v \frac{d}{dt} (M + \frac{m}{l} y) = -(M + \frac{m}{l} y) g$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dy}{dt} = v$$

$$(M + \frac{m}{l} y) v \frac{dv}{dy} + \frac{m}{l} v^2 = -(M + \frac{m}{l} y) g$$

$$\frac{d v^2}{dy} + \frac{\frac{2m}{l}}{M + \frac{m}{l} y} v^2 = -2g$$

با ضرب کردن در $(M + \frac{m}{l} y)^2$

$$\frac{d}{dy} \left((M + \frac{m}{l} y)^2 v^2 \right) = -2g (M + \frac{m}{l} y)^2$$

$$\int_{(y=0, v=v_0)}^{(y, v)} d \left[(M + \frac{m}{l} y)^2 v^2 \right] = -2g \int_{y=0}^y (M + \frac{m}{l} y)^2 dy$$

$$(y=0, v=v_0)$$

$$(M + \frac{m}{\ell} y)^2 v^2 - M^2 v_0^2 = -\frac{2}{3} \frac{\ell}{m} g \left((M + \frac{m}{\ell} y)^3 - M^3 \right)$$

↓

$$v = \sqrt{v_0^2 \frac{1}{(1 + \frac{m}{M} \frac{y}{\ell})^2} - \frac{2\ell g}{3} \frac{M}{m} \left(1 + \frac{m}{M} \frac{y}{\ell} - \frac{1}{(1 + \frac{m}{M} \frac{y}{\ell})^2} \right)}$$

ب) کمترین v بدین است که طول به نقطه اوج $v=0$ برسد و کل طول از در زمین بلند شده باشد یعنی $y=l$:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2\ell g}{3} \frac{M}{m} \left[\left(1 + \frac{m}{M} \right)^3 - 1 \right]}$$

پ) ارتفاع اوج به اندازه $v_{\min} > v$ برابر است با $l+h$ که $h = \frac{v_f^2}{2g}$ و v_f سرعت نهایی طول در لحظه جدا شدن از زمین است، یعنی

$$v_f = \sqrt{v_0^2 \frac{1}{(1 + \frac{m}{M})^2} - \frac{2\ell g}{3} \frac{M}{m} \left(1 + \frac{m}{M} - \frac{1}{(1 + \frac{m}{M})^2} \right)}$$

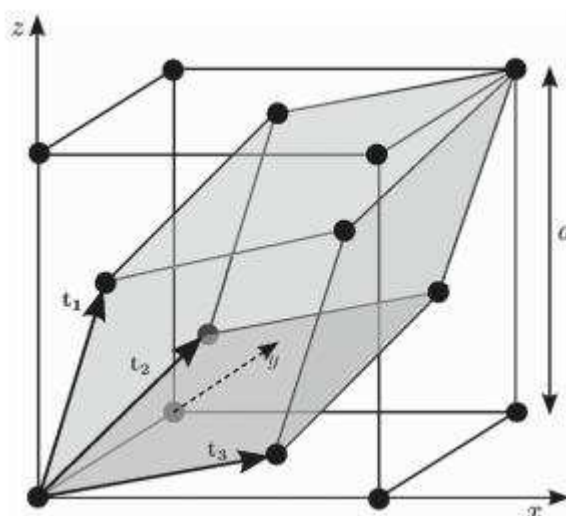
(۴) دو بخش آ و ب) از هم مستقل اند.

آ) فرض کنید یک کریستال با شبکه‌ی مکعبی ساده به عنوان زیرلایه در دست داریم. با لایه‌نشانی، لایه‌ای از همان ماده را بر روی صفحه‌ی $[100]$ آن می‌نشانیم. اگر زاویه‌ی بین صفحات $[100]$ از لایه و زیرلایه 63.43° باشد، اندیس‌های میلر صفحه‌ی $[100]$ از لایه را در دستگاه زیرلایه به دست آورید. یادآوری:

• یک صفحه در کریستال موجودی فیزیکی است، حال آن که اندیس‌های میلر برای نمایش و بیان ریاضی آن صفحه استفاده می‌شود. در نتیجه برای یک صفحه در شبکه‌ی fcc می‌توان اندیس‌های میلر متناظر با شبکه‌ی مکعبی ساده را به کار برد، یا اندیس‌های میلری متناظر با خود شبکه‌ی fcc. اما هر دو نمایش، بیان موقعیت آن صفحه است.

ب) صفحه‌ای از شبکه‌ی fcc که اندیس‌های میلرش با در نظر گرفتن بردارهای شبکه‌ی مکعبی ساده $[321]$ است، با در نظر گرفتن بردارهای اولیه‌ی شبکه‌ی fcc چه اندیس‌هایی خواهد داشت؟ در شکل زیر بردارهای اولیه‌ی شبکه‌ی fcc یعنی t_1 ، t_2 و t_3 نشان داده شده است.

(۵ نمره)



۳) بردار یک شبکه مکعبی ساده صفحه $[100]$ صفحه اریست که محور x دارد $x=d$ (طول شبکه) قطع می کند و با

محور y و z موازی است.

الکترون لایه و زیر لایه را در نظر بگیرید.

مختصات محل برخورد صفحات $[100]$ لایه

نسبت به دستگاه مختصات x, y, z زیر لایه

$$x_1 = \frac{d}{\cos \theta}, y_1 = \frac{d}{\sin \theta}, z_1 = \infty$$

$$\theta = 63.43^\circ \text{ است}$$

بردار به سمت آرایش اندکی تغییر مختصات محل تقاطع را برعکس می کنیم

$$[hkl] \sim \left(\frac{\cos \theta}{d}, \frac{\sin \theta}{d}, \frac{1}{\infty} \right)$$

$$[hkl] \sim \sin \theta \text{ و } \cos \theta$$

$$[hkl] = [120]$$

ب) معادله نزدیک ترین صفحه $[321]$ نسبت به مبدأ مختصات و نسبت به

$$3x + 2y + z = a \text{ است}$$

محورها شبکه مکعبی ساده باید ببینیم این صفحه دورها t_1, t_2, t_3 را در چه نقاطی قطع می کند

$$\vec{t}_1 = \frac{a}{2}(1, 1, 0) \text{ و } \vec{t}_2 = \frac{a}{2}(1, 0, 1) \text{ و } \vec{t}_3 = \frac{a}{2}(0, 1, 1)$$

حل تقاطع صفحه با امتداد $\vec{t}_1$ نقطه را است به مختصات (۰ ۱ ۱) $\beta_1 \vec{t}_1 = \beta_1 \frac{a}{2}$

یعنی $\frac{\beta_1}{2} a (3(0) + 2(1) + 1(1)) = a \Rightarrow \beta_1 = \frac{2}{3}$

اگر حل تقاطع با امتداد $\vec{t}_2$ و $\vec{t}_3$ به ترتیب $\beta_2 \vec{t}_2$ و $\beta_3 \vec{t}_3$ باشد است

$\beta_2 = \frac{1}{2}$ و $\beta_3 = \frac{2}{5}$ بنابراین نقاط برخورد

صفحه با محور f_{cc} ، $(\frac{2}{3} \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{2}{5} \frac{a}{\sqrt{2}})$ است. بنابراین

$$[hkl] = [3 \ 4 \ 5]$$

مسئله‌ی ۱) ذره‌ای به جرم m با سرعت اولیه‌ی صفر رها می‌شود و تحت تاثیر نیروی وزن خود سقوط می‌کند. نیروی مقاومت هوا که تابعی از سرعت است از دو بخش خطی نسبت به سرعت، $-bv$ ، و مجذوری نسبت به سرعت، $-\delta v^2$ ، تشکیل شده است، که b و δ دو پارامتر ثابت و v سرعت ذره است. بخش مجذوری‌ی سرعت نیروی کوچکی است که می‌خواهیم آن را اختلالی بررسی کنیم. قانون نیوتن برای حرکت این ذره عبارت است از

$$m\dot{v} = mg - bv - \delta v^2,$$

الف- سرعت حد ذره را v_f بنامید. v_f را به دست آورید.

ب- با تغییر متغیر

$$u := v - v_f$$

و مقیاس کردن زمان با پارامتر مناسب، معادله‌ی حرکت ذره را به صورت زیر در آورید.

$$\frac{du}{d\tau} = -u - \varepsilon u^2.$$

رابطه‌ی زمان مقیاس شده، τ ، را با زمان، t ، و همچنین پارامتر ε را بر حسب ثابت‌های مساله به دست آورید.

ج- حالا معادله‌ی

$$\frac{du}{d\tau} = -u - \varepsilon u^2.$$

را اختلالی تا مرتبه‌ی سوم ε حل کنید. حدسی برای حل تا مرتبه‌ی دلخواه n بنزید.
راه‌نمایی- جواب معادله‌ی

$$y' + y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}, \alpha, \beta \neq 1$$

به صورت

$$y(x) = A_0 e^{-x} + A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{\beta x}$$

است که ثابت‌های A_1 و A_2 با جای‌گذاری این جواب در معادله و برابر قرار دادن ضرایب تابع‌های نمایی یک‌سان به دست می‌آید. ثابت A_0 هم با استفاده از شرط اولیه به دست می‌آید.

د- جوابی که در بند قبل به دست آورده‌اید را به صورت یک سری بنویسید و بدون آن‌که نگران هم‌گرایی سری باشید آن را جمع ببندید و جواب غیر اختلالی‌ی $u(\tau)$ را به دست آورید.

الف-

$$mg - bv_f - \delta v_f^2 = 0,$$

$$v_f = \frac{1}{2\delta} \left[-b \pm \sqrt{b^2 + 4mg\delta} \right]$$

از دو جواب بالا آنکه در حد $\delta \rightarrow 0$ وجود دارد قابل قبول است.

$$v_f = \frac{1}{2\delta} \left[-b + \sqrt{b^2 + 4mg\delta} \right]$$

ب- با تغییر متغیر

$$u := v - v_f$$

معادله‌ی حرکت ذره را به صورت زیر در آورید.

$$\ddot{u} = -\left(\frac{b}{m} + \frac{2\delta a}{m}\right)u - \frac{\delta}{m}u^2.$$

تغییر متغیر

$$u := v - v_f$$

با مقیاس کردن زمان معادله‌ی حرکت ذره را به صورت زیر در آورید.

$$\frac{du}{d\tau} = -u - \varepsilon u^2.$$

که

$$\tau := \left(\frac{b}{m} + \frac{2\delta a}{m}\right)t,$$

$$\varepsilon := \frac{\delta}{m\left(\frac{b}{m} + \frac{2\delta a}{m}\right)}$$

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} u^{(0)} &= -u^{(0)}, & u^{(0)} &= u_0 e^{-\tau} \\ \frac{d}{d\tau} u^{(1)} &= -u^{(1)} - [u^{(0)}]^2, & u^{(1)} &= u_0^2 e^{-\tau} (e^{-\tau} - 1) \\ \frac{d}{d\tau} u^{(2)} &= -u^{(2)} - 2u^{(0)}u^{(1)}, & u^{(2)} &= u_0^3 e^{-\tau} (e^{-\tau} - 1)^2 \\ \frac{d}{d\tau} u^{(3)} &= -u^{(3)} - 2u^{(0)}u^{(2)} - [u^{(1)}]^2, & u^{(2)} &= u_0^4 e^{-\tau} (e^{-\tau} - 1)^3 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\tau} u^{(n)} = u_0^{n+1} e^{-\tau} (e^{-\tau} - 1)^n$$

$$u_0 = -v_f \, \mathfrak{K}$$

$$\begin{aligned} u &= u_0 \, \mathrm{e}^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_0^n (\mathrm{e}^{-\tau} - 1)^n \\ &= \frac{-v_f \, \mathrm{e}^{-\tau}}{1 - \varepsilon (\mathrm{e}^{-\tau} - 1)} \end{aligned}$$

$$v = v_f + u \, \mathfrak{J}$$

این مسئله از دو قسمت مستقل تشکیل شده.

الف) در اتفاقی N مولکول وجود دارد. فرض کنید توزیع اندازه‌ی سرعتِ مولکول‌ها $f(v) = a e^{-a v}$ داده شده است که v اندازه‌ی سرعت است و $a > 0$ یک ثابت معلوم. معنای تابع توزیع این است که احتمال این که اندازه‌ی سرعتِ یک مولکول بین v و $v + dv$ باشد برابر است با $f(v)dv$. پس داریم $\int_{v=0}^{\infty} f(v)dv = 1$. به طور هم‌ارز، می‌توان گفت اگر تعدادِ مولکول‌ها خیلی زیاد باشد، کسری از مولکول‌ها که سرعتشان بین v و $v + dv$ باشد برابر است با $f(v)dv$. تخمینی از سرعتِ سریع‌ترین مولکولِ این ظرف ارائه دهید.

پاسخ: سرعتِ بیشینه v_{max} با این رابطه به دست می‌آید: $\int_{v_{max}}^{\infty} f(v)dv = \frac{1}{N}$ که از این

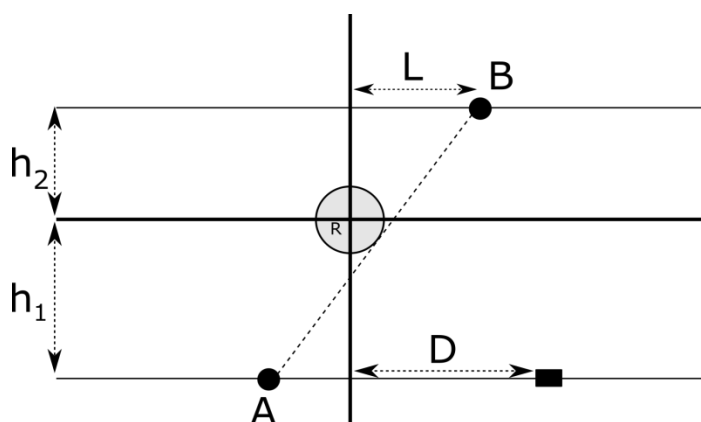
به دست می‌آید $v_{max} = \frac{1}{a} \ln N$

ب) فرض کنید در قسمت $-L < x < L$ از فضای سه بُعدی، N لایه‌ی عایقِ باردار قرار دارد که موازی با صفحه‌ی yz هستند. از ضخامت لایه‌ها می‌توان صرف‌نظر کرد، و در راستای y و z ابعادشان را می‌توان بینهایت فرض کرد. چگالی بارِ واحدِ سطحِ هر صفحه σ است. مختصه‌ی x هر لایه به طور تصادفی (و یکنواخت) در بازه‌ی $[-L, L]$ انتخاب شده است، و مکانِ هر لایه از مکانِ لایه‌های دیگر مستقل است (چون ضخامت ندارند، احتمالِ این که روی هم بیفتند صفر است). این طور مدل‌ها، گاهی برای مطالعه‌ی حرکت ستاره‌ها در کهکشان‌های دیسکی خیلی مسطح استفاده می‌شوند. نقطه‌ی A به مختصات $(x_0, 0, 0)$ را در نظر می‌گیریم، که $0 < x_0 < L$. میدانِ برآیند در نقطه‌ی A را با $\vec{E}$ نشان می‌دهیم. مقدارِ متوسطِ $\vec{E}$ را بیابید. همچنین مقدارِ متوسطِ چگالی انرژی میدانِ الکتریکی در نقطه‌ی A را به دست آورید. سپس با این فرض که نقطه‌ی A منطبق بر مبدأ باشد این پاسخ‌ها را ساده کنید.

پاسخ: N نیروی مستقل با بزرگی $E_0 \equiv \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ داریم که طور تصادفی به سمت چپ یا راست هستند. احتمالِ این که هر کدام به سمتِ راست باشد برابر است با $p = \frac{L+x_0}{2L}$ ، احتمالِ این که هر کدام به سمتِ راست باشد برابر است با $q = 1 - p = \frac{L-x_0}{2L}$. متوسطِ جمعِ این N تا، همانطور که در کلاس دیدیم، می‌شود $E_0 N(p - q)$. متوسطِ جمعِ مربعاتِ این‌ها (که چگالی میدان را می‌دهد) برابر است با $E_0^2 [Npq + N^2(p - q)^2]$. اگر ساده کنیم، این تبدیل میشود به $E_0^2 [N + N(N - 1) \frac{x_0^2}{L^2}]$

اگر نقطه‌ی A منطبق بر مبدأ باشد، در این پاسخ‌ها $p = q = \frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم.

۳) شکل زیر دو مسیر موازی (مثلاً دو پیاده رو) را نشان می‌دهد که یکی با $y = h_2$ داده شده و دیگری با $y = -h_1$. میان این دو مسیر، یک مانع دایره‌ای قرار دارد (مثلاً می‌تواند یک درخت باشد) به شعاع R که مرکزش را مبدأ مختصات می‌گیریم (نمای شکل، طبعاً از بالاست). در پیاده روی پایینی، شخصی (که او را با A نشان می‌دهیم) در حال راه رفتن به سمت راست است. A در لحظه‌ای که آن را $t=0$ می‌گیریم، ناگهان متوجه می‌شود که در پیاده‌روی بالایی، شخص B در حال حرکت به سمت چپ است.



بنا به عللی، A نمی‌خواهد که B ، او را ببیند. فرض می‌کنیم می‌شود با تقریب خوبی دو شخص را نقطه فرض کرد، به این معنا که اگر خطّ واصل دو شخص با درخت تقاطع داشته باشد یا بر آن مماس باشد، آن‌گاه درخت مانع دیده شدن A خواهد شد، و در غیر این حالات، A حتماً دیده می‌شود. به عبارت دیگر، در هر لحظه، قطعه‌ای از پیاده‌روی پایینی وجود دارد که اگر A در آن قطعه باشد، دیده نخواهد شد. در ادامه با عبارت "ناحیه‌ی کور" به این قطعه اشاره می‌کنیم. در $t=0$ ، خطّ واصل A و B ، بر درخت مماس است (همان طور که در شکل نشان داده شده)، که یعنی A در انتهای سمت راست ناحیه‌ی کور قرار دارد. در این لحظه، مکان B در $x_2 = +L$ است. سرعت B ثابت و جهتش به سمت چپ است. اندازه‌ی سرعت B را با v_2 نشان می‌دهیم. در نقطه‌ی $(D, -h_1)$ ، درب مغازه‌ای قرار دارد. هدف A این است که در سریع‌ترین حالت ممکن، بدون دیده شدن، به درب برسد.

الف) در زمان t ، طول ناحیه‌ی کور را بر حسب t و ثوابت مسئله بیابید.

$$1 - \frac{\frac{h_2}{L_0 - v_2 t} + \frac{R}{\sqrt{(L_0 - v_2 t)^2 + h_2^2 - R^2}}}{\frac{h_2}{L_0 - v_2 t} + \frac{R}{\sqrt{(L_0 - v_2 t)^2 + h_2^2 - R^2}}} - \frac{1 + \frac{h_2}{L_0 - v_2 t} + \frac{R}{\sqrt{(L_0 - v_2 t)^2 + h_2^2 - R^2}}}{\frac{h_2}{L_0 - v_2 t} + \frac{R}{\sqrt{(L_0 - v_2 t)^2 + h_2^2 - R^2}}}$$

برای سادگی محاسبات، از اینجا به بعد فرض می‌کنیم h_1 و h_2 هم‌مرتبه هستند و R خیلی از آنها کوچک‌تر است. محاسبات را تا مرتبه‌ی اول $\frac{R}{h_2}$ انجام می‌دهیم.

ب) فرض می‌کنیم A می‌تواند سرعتش را به دلخواه تنظیم کند (طبعاً با شتاب محدود). در زودترین حالت، A در چه زمانی می‌تواند خود را بدون دیده شدن به درب مغازه برساند؟

$$T_{\text{زود}} = \left(\frac{L_0}{v_2} + \frac{h_2 D}{h_1 v_2} \right) - \frac{R}{v_2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{D}{h_1} \right)^2}$$

پ) فرض کنیم A مطابق قسمت قبل عمل کرد و در سریع‌ترین حالت خود را به درب مغازه رساند. برای باز کردن درب مغازه و وارد شدن، A حداکثر چه قدر فرصت دارد؟

$$= \frac{R}{v_2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{D}{h_1} \right)^2} \text{ فرصت}$$

حالا فرض کنیم مسئله این قید را هم دارد که سرعت A ثابت است. برای سادگی محاسبات فرض می‌کنیم $h_1 = h_2 = H$ است، و همچنین $L = kH$ و $D = qH$ ، که k و q هر دو ثوابتی مثبت از مرتبه‌ی ۱ هستند و q از k بزرگ‌تر است. پس L, D, H همه هم‌مرتبه اند و محاسبات را تا مرتبه‌ی اول $\frac{R}{H}$ انجام می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم که در $t=0$ ، A در وسط ناحیه‌ی کور قرار دارد (دقت کنید این با قسمت‌های قبل فرق دارد).

ت) حداقل سرعتی که A باید داشته باشد برای این که بدون دیده شدن خودش را به درب مغازه برساند چه قدر است؟

$$v_{min} = v_2 \left(1 - \frac{R}{H} \sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} \right)$$

ث) حداکثر سرعتی که A می‌تواند داشته باشد برای این‌که بدون دیده شدن خودش را به دربِ مغازه برساند چه قدر است؟

$$v_{max} = v_2 \left(1 + \frac{R}{H} \sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} \right)$$

۴) یک کره‌ی توپُر نارسانا به شعاع R و به مرکزِ مبدأ مختصات در نظر بگیرید. فرض کنید تمام نقاطی را که در معادله‌ی $x^2 + y^2 < b^2$ صدق می‌کنند از کره خارج کنیم (مثل این است که چاهی به شعاع b در کره حفر کنیم و از مرکز بگذریم و به سمتِ دیگر برسیم). بار الکتریکی با چگالی حجمی مثبتِ ρ در حجم ماده‌ی نارسانا توزیع شده است. در همه‌ی قسمت‌های مسئله، فرض کنید $\frac{b}{R}$ خیلی کوچک است، به طوری که می‌توان از توانِ سوم و بالاتر آن صرف‌نظر کرد.

الف) میدان الکتریکی را روی محورِ z بر حسبِ فاصله از مبدأ، برای نقاطِ $-\frac{R}{\epsilon_0} \leq z \leq \frac{R}{\epsilon_0}$ حساب کنید.

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left[z + \frac{b^2}{R^2} \left(\frac{z R^4}{3(R^2 - z^2)^2} + \frac{z R^2}{2(R^2 - z^2)} \right) \right]$$

میتوان میدان را حاصلِ بر هم نهش سه توزیع دید: یکی کره‌ی بدون چاه، یکی استوانه‌ای که هم مقطع چاه است، و یکی هم مربوط به دو عرقچین بالا و پایین استوانه. توزیع اول چگالی ρ دارد و توزیع‌های دوم و سوم منفی این مقدار. در عبارتی که برای میدان نوشتیم، جمله‌ی اول مربوط به کره است، جمله‌ی دوم مربوط به دو عرقچین بالا و پایین، و جمله‌ی آخر مربوط به یک استوانه.

ب) پتانسیلِ مبدأ را صفر فرض کنید و پتانسیل الکتریکی را روی محورِ z بر حسبِ فاصله از مبدأ، برای نقاطِ $-\frac{R}{\epsilon_0} \leq z \leq \frac{R}{\epsilon_0}$ حساب کنید.

$$V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{z^2}{2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{b}{R} \right)^2 \left[\frac{R^2}{6} \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{R^2 - z^2} \right) + \frac{R^2}{4} \ln \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \right]$$

هم میشود مستقیم این را به دست آورد هم با انتگرال گیری از میدان.

یک بار نقطه‌ای $-q$ به جرم m را که می‌تواند آزادانه روی محورِ z حرکت کند، از نقطه‌ی $(0, 0, z_0)$ از حالت سکون رها می‌کنیم. فرض کنید $-\frac{R}{\epsilon_0} \leq z_0 \leq \frac{R}{\epsilon_0}$ است.

پ) سرعتِ بارِ نقطه‌ای را بر حسبِ z بیابید.

$$v(z) = \sqrt{\frac{q \rho (z^2 - z_0^2)}{m \epsilon_0}} \left[1 + \left(\frac{b}{R} \right)^2 \frac{R^4}{6(R^2 - z_0^2)(R^2 - z^2)} + \left(\frac{b}{R} \right)^2 \frac{R^2}{4(z_0^2 - z^2)} \ln \left(\frac{R^2 - z^2}{R^2 - z_0^2} \right) \right]$$

هم با بقای انرژی و هم با انتگرال گیری از نیرو میتوان این را به دست آورد.

ت) سرعتِ بارِ نقطه‌ای را هنگام عبور از مبدأ بیابید.

$$v(\cdot) = z_0 \sqrt{\frac{q \rho}{m \epsilon_0}} \left[1 + \left(\frac{b}{R}\right)^2 \frac{R^2}{\epsilon(R^2 - z_0^2)} - \left(\frac{b}{R}\right)^2 \frac{R^2}{4z_0^2} \ln \left(1 - \frac{z_0^2}{R^2}\right) \right]$$

حالا فرض کنید z_0 خیلی کوچک است.

ث) بسامدِ نوساناتِ کوچکِ بارِ نقطه‌ای حول مبدأ را بیابید.

با بسط دادن پتانسیل تا z^2 برای z های خیلی کوچک، به دست میاید:

$$\omega = \sqrt{\frac{q \rho}{m \epsilon_0}} \left[1 + \frac{5}{24} \left(\frac{b}{R}\right)^2 \right]$$

مسئله‌ی ۱) ذره‌ای به جرم m تحت پتانسیل $U(x) = \frac{kx^{2n}}{2n}$ قرار دارد به طوری که $k > 0$ و n عددی صحیح است. حرکت ذره دوره‌ای با دوره‌ی T است. متوسط زمانی هر کمیت مثل $A(t)$ در یک دوره‌ی T عبارت است از

$$\bar{A} := \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

الف- تابع $G(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$G(t) := m\dot{x}\dot{x}.$$

متوسط زمانی $G(t)$ در یک دوره یعنی $\bar{G}$ چه قدر است؟

ب- با محاسبه‌ی $\frac{dG}{dt}$ ، نسبت متوسط زمانی انرژی جنبشی، $\bar{K}$ و متوسط زمانی انرژی پتانسیل، $\bar{U}$ ، یعنی

$$\frac{\bar{K}}{\bar{U}}$$

را به دست آورید.

ج- در این بند فرض کنید $n = 1$ و مساله یک نوسانگر هم‌آهنگ ساده است. فرض کنید پارامترهای نوسانگر یعنی جرم و ضریب سختی آن تغییر کند نسبت به زمان داشته باشند، مثلاً

$$m(t) = m_0(1 + \epsilon t), \quad \epsilon \ll 1/T,$$

در این صورت حرکت تقریباً دوره‌ای با دوره‌ی $T = (2\pi)/\omega_0$ می‌ماند. این تغییر آن قدر کند است که در یک دوره تغییر جرم و ضریب سختی بسیار ناچیز است یعنی

$$\frac{\dot{m}}{m} \ll \frac{1}{T}, \quad \frac{\dot{k}}{k} \ll \frac{1}{T}.$$

انرژی نوسانگر دیگر پایسته نیست. با چشم‌پوشی از توان بیش از یک مشتق مرتبه اول پارامترها، متوسط زمانی تابعی از E ، k ، و m مثل $Em^\alpha k^\beta$ ثابت است. این تابع را به دست آورید.

د- در این بند قید $n = 1$ را کنار بگذارید و فرض کنید جرم m ثابت است ولی k تغییرات کندی نسبت به زمان دارد. انرژی نوسانگر دیگر پایسته نیست ولی با چشم‌پوشی از توان بیش از یک مشتق مرتبه اول k ، متوسط زمانی تابعی از E ، و k مثل Ek^β ثابت است. β را به دست آورید.

حل- الف)

$$G = m\dot{x}x = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} \right)$$

$$\bar{G} = \frac{1}{T} \int_0^T G(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} \right) = \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} \right) \Big|_0^T = 0$$

ب-

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= m\dot{x}^2 + m\dot{x}\ddot{x} = m\dot{x}^2 + xF(x) \\ &= 2K - 2nU(x) \end{aligned}$$

$$0 = \frac{d\bar{G}}{dt} = 2\bar{K} - 2n\bar{U}(x)$$

$$\frac{\bar{K}}{\bar{U}} = n$$

ج-

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{1}{2}\dot{m}\dot{x}^2 + m\dot{x}\ddot{x} + \dot{k}x^2 + \frac{\dot{k}x^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(-\dot{m}\dot{x}^2 + \dot{k}x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \dot{E}m^\alpha k^\beta + \alpha E\dot{m}m^{\alpha-1}k^\beta + \beta E\dot{m}^\alpha k k^{\beta-1} \\ &= \frac{1}{2}(-\dot{m}\dot{x}^2 + \dot{k}x^2)m^\alpha k^\beta + \frac{\alpha}{2}(m\dot{x}^2 + kx^2)\dot{m}m^{\alpha-1}k^\beta + \frac{\beta}{2}(m\dot{x}^2 + kx^2)m^\alpha \dot{k}k^{\beta-1} \\ &= \frac{\dot{m}}{2}[\dot{x}^2 m^\alpha k^\beta (\alpha-1) + \alpha m^{\alpha-1} k^{\beta+1} x^2] + \frac{\dot{k}}{2}[x^2 m^\alpha k^\beta (\beta+1) + \beta m^{\alpha+1} k^{\beta-1} \dot{x}^2] \end{aligned}$$

$$0 = \bar{J} = \frac{\dot{m}}{2}(2\alpha-1)m^{\alpha-1}k^{\beta+1}x_0^2 + \frac{\dot{k}}{2}(2\beta+1)x_0^2 m^\alpha k^\beta$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 1/2, \quad \beta = -1/2, \quad J = E\sqrt{m/k}$$

د-

$$\begin{aligned} E &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^{2n}}{2n} \\ &= m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\dot{k}x^{2n}}{2n} + kx^{2n-1}\dot{x} \end{aligned}$$

$$m\ddot{x} = -kx^{2n-1}$$

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \dot{E}k^\beta + \beta E\dot{k}k^{\beta-1} \\ &= \frac{\dot{k}}{2} \left[\beta m \dot{x}^2 k^{\beta-1} + \frac{(\beta+1)}{2n} k^\beta x^{2n} \right] \end{aligned}$$

$$\bar{T} = n\bar{U} \text{ با استفاده از}$$

$$\begin{aligned} \bar{\dot{J}} &= \dot{k} [\beta n \bar{U} k^{\beta-1} + (\beta+1) k^\beta \bar{U}] \\ &= \dot{k} k^{\beta-1} \bar{U} [\beta(n+1) + 1] \end{aligned}$$

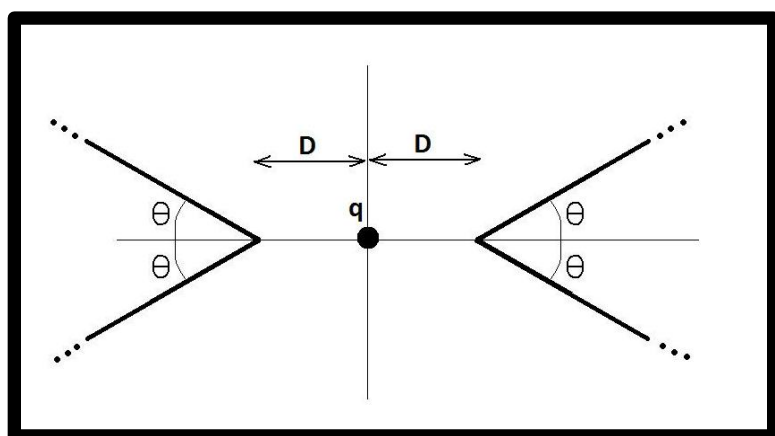
$$\Rightarrow \qquad J = E\, k^{-1/(n+1)}$$

مسئله ی ۲)

الف) بار الکتریکی با چگالی خطی λ روی ناحیه ی $x < 0$ روی محور x توزیع شده است. بردار میدان الکتریکی را در نقطه ی (a, b) بیابید. a مقداری مثبت است.

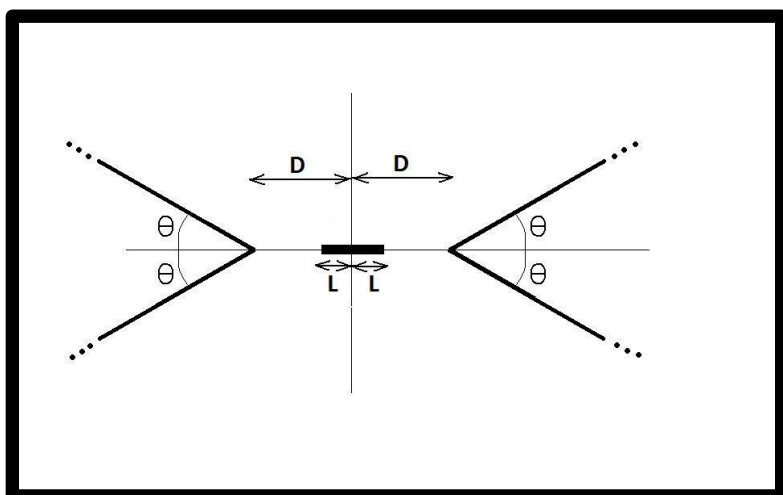
$$E_x = k \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad E_y = k \frac{\lambda}{b} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

ب) چهار بار خطی نیمه بی نهایت مطابق شکل قرار دارند. زاویه ی میله ها با محور افقی θ است. چگالی بار



خطی میله ها λ است. بار الکتریکی نقطه ای q به جرم m در مبدأ به حالت تعادل قرار دارد و فاصله اش از انتهای میله ها D است. بسامد نوسانات کوچک بار روی محور افقی حول نقطه ی تعادل را بیابید.

$$\omega = \sqrt{\frac{4 k \lambda q}{m D^2}}$$



پ) قسمت قبل را برای حالتی تکرار کنید که به جای بار نقطه ای، یک میله ی نارسانا با طول $2L$ و چگالی بار خطی λ' روی محور افقی به مرکز مبدأ مختصات قرار داشته باشد.

$$\omega = \sqrt{\frac{4 k \lambda \lambda' L}{m (D^2 - L^2)}}$$

این مسئله از دو بخش مجزا تشکیل شده که ربطی به هم ندارند.

الف) در این مسئله مدل خیلی ساده شده‌ای از نشستن گرد و غبار روی دیوار را بررسی می‌کنیم. برای ساده‌گی، فرض می‌کنیم ذرات غبار با آهنگ ثابت r روی یک سطح یک بُعدی فرود می‌آیند، به ترتیبی که توضیح داده خواهد شد. سطح را گسسته و نامتناهی در نظر می‌گیریم

(مانند شکل)، که در آن خانه‌هایی به فواصل مساوی

وجود دارد که ذرات می‌توانند روی آن‌ها بنشینند.

یعنی ذره‌ها نمی‌توانند در حد فاصل این خانه‌ها یا

در خانه‌های پُر بنشینند. در $t = 0$ همه‌ی خانه‌ها

خالی اند. یک خانه‌ی دلخواه را در لحظه‌ی

دلخواهی در نظر بگیرید. اگر خانه خالی باشد، در

مدّت زمان کوتاه Δt ، با احتمال $r\Delta t$ یک ذره روی

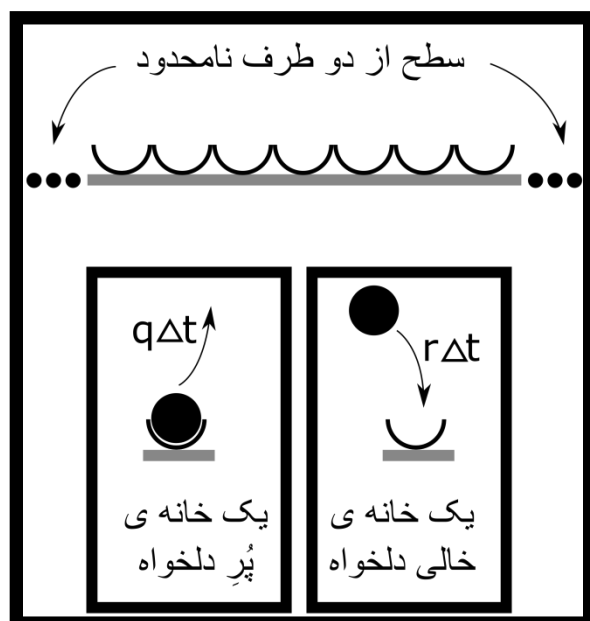
این خانه فرود می‌آید و آن را پُر می‌کند. اگر خانه پُر

باشد، در مدّت زمان کوتاه Δt ، با احتمال $q\Delta t$ ذره‌ای که در خانه قرار دارد بیرون می‌رود

(مثلاً در اثر باد). کسری از خانه‌ها که در زمان t پر هستند را با $\rho(t)$ نشان می‌دهیم. متوسط

$\rho(t)$ را بر حسب زمان بیابید. (پاسخ باید فقط به زمان و ثوابت بیان شده در صورت مسئله

بستگی داشته باشد).



$$\dot{\rho} = (1 - \rho)r - q\rho \Rightarrow \rho = \frac{r}{r+q} (1 - e^{-(r+q)t})$$

ب) در حین تایپ این مسئله، یک مورچه در کنار دیوار روی زمین در چند متری نگارنده در حال حرکت است، و کمی آن طرف تر، یک عنکبوت قرار دارد که گویا مورچه از حضورش آگاه نیست. مورچه از لانه اش دور است، و احتمالاً دیده‌اید که وقتی مورچه‌ها از مسیر معمولشان فاصله‌ی زیادی می‌گیرند، ردّ فرومونی که از خود به جا گذاشته‌اند را گم می‌کنند در مسیریابی حالت گنجی می‌گیرند. فرض کنید حرکت مورچه‌ی گنج را بتوانیم به صورت حرکت تصادفی مدل کنیم. فرض می‌کنیم مورچه روی محور x حرکت تصادفی می‌کند، به این ترتیب که ابتدا در $x=0$ است، و در هر گام زمانی، با احتمال p در جهت مثبت محور x به اندازه‌ی ۱ واحد جلو می‌رود، و با احتمال $q=1-p$ در جهت منفی محور x به اندازه ۱ واحد حرکت می‌کند. حالا نقطه‌ی A واقع در $x=+L$ را در نظر می‌گیریم (که $L > 0$ عددی طبیعی است) که عنکبوت آن‌جا ساکن است. فرض کنیم عنکبوت، هم گرسنه است، هم مورچه جزو رژیم غذایی اش هست، و هم این‌که اگر مورچه از A عبور کند حتماً خورده خواهد شد. احتمال این را حساب کنید که مورچه توسط عنکبوت خورده نشود. می‌توانید به این نکات هم توجه کنید:

- توجه: پاسخ باید به شکل بسته باشد، و پاسخی به صورت سری یا ضرب ساده‌نشده‌ی تعدادی محدود یا نامحدود از جملات ناپذیرفتنیست.

- راهنمایی: پاسخ، علاوه بر p ، فقط به فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی شروع بستگی دارد.

- راهنمایی: یک رهیافت ممکن، این است که یک رابطه‌ی بازگشتی برای احتمال خورده شدن بنویسید، آن‌را حل کنید، و سپس از روی آن، احتمال خورده شدن را بیابید.

-راهنمایی شدید: ممکن است در رهیافتِ فوق، ایده‌ای مانندِ آنچه سرِ کلاس به طورِ مختصر در موردِ معادله‌ی چَپمن-کُلْمُگُرف گفتیم، مفید باشد.

$$P(khorde nashodan) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{p}{q}\right)^L & p < \frac{1}{2} \\ 0 & p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

در این مسئله می‌خواهیم با روش‌های فیزیکی که در کلاس آموختیم، مدل خیلی ساده‌شده‌ای از یکی از مهم‌ترین پدیده‌های زیستی (شاید مهم‌ترینشان) را بررسی کنیم. اولین گام در تولید مثل اکثر گونه‌های جانوری این است که سلول‌های جنسی، که در حال حرکت در محیطی هستند (که برای بعضی گونه‌ها این محیط بیرون بدن است و برای بعضی درون بدن است)، باید در آن محیط با هم برخورد کنند. تا کمتر از سه دهه‌ی پیش، تصور غالب این بود که این حرکت و رسیدن سلول‌ها به هم، به طور تصادفی انجام می‌شود. این فرض در مورد کم‌وبیش همه‌ی گونه‌های رده‌ی پستانداران وجود داشت. فرض این بود که سلول جنسی ماده منفعل و بی‌حرکت است، و سلول‌های جنسی نر به طور تصادفی حرکت می‌کنند تا برخوردی بین‌شان صورت گیرد. یافته‌های نه‌چندان اخیر، غلط بودن این دید را نشان داده است. معلوم شده است که سلول جنسی ماده با ترشح پروژسترون (که توسط سلول‌های کومولوس دیواره‌ی سلول جنسی ماده انجام می‌شود)، سیگنال‌های شیمیایی می‌فرستد که با آن، می‌تواند روی حرکت سلول‌های جنسی نر اثر بگذارد (با تحریک یون‌های Ca^{2+} در کانال‌های یونی CatSper). طبق این دید جدید، سلول ماده نقشی فعال در فرایند تولید مثل دارد.

در این مسئله، مدل خیلی ساده‌شده‌ای از حرکت سلول‌های جنسی نر را در نظر می‌گیریم.

(الف) ابتدا مدل خیلی ساده‌شده‌ای از دید جدید (که در آن سلول ماده فعال است) در نظر می‌گیریم. مسئله‌ی حرکت تصادفی یک‌بعدی را، همان‌طور که در کلاس دیدیم، در نظر بگیرید. سلول نر ابتدا $x = x_0 > 0$ است، و در هر گام زمانی، با احتمال p در جهت مثبت محور x به اندازه‌ی ۱ واحد جلو می‌رود، و با احتمال $q=1-p$ در جهت منفی محور x به اندازه‌ی ۱ واحد حرکت می‌کند. این عدم تقارن در حرکت، به خاطر سیگنال‌های دریافتی از سلول ماده بروز می‌-

کند. سلول ماده در $x = L$ ثابت است. اگر سلول نر به $x = L$ برسد، موفق به تولید مثل می-شود (x و L اعدادی مثبت و طبیعی هستند و $L > x$ است). اگر سلول نر به $x = 0$ برسد، بدون تولید مثل می-میرد. احتمال موفقیت سلول را بیابید. (یادآوری مفهومی: احتمال موفقیت را این طور تعریف می-کنیم که اگر این فرایند تعداد دفعات زیادی تکرار شود، احتمال موفقیت سلول نر برابر است با کسری از این دفعات که سلول نر قبل از این که از $x = 0$ عبور کند، از $x = L$ عبور کند). (راهنمایی ریاضی پایان سؤال، ممکن است مفید باشد)

$$\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^L}$$

ب) دقت کنید چه سلول اول به $x = L$ برسد و چه به $x = 0$ ، عمرش در همان لحظه به پایان می-رسد (که خب در حالت اول این مصادف می-شود با آغاز یک زندگی جدید، در حالت دوم با هیچ). فرض کنید برای سلول نر، عمر تعریف کنیم، به این ترتیب که اگر ذره در گام T ام به نقطه‌ی $x = 0$ یا به نقطه‌ی $x = L$ برسد، حرکتش پایان می-یابد و عمرش T است. نشان دهید متوسط عمر ذره در این معادله صدق میکند: $T(x) = 1 + a T(x + 1) + b T(x - 1)$ ، که در آن a و b ثوابتی هستند که باید تعیین کنید. (یادآوری مفهومی: منظور از متوسط عمر، همان طور که در کلاس دیدیم، این است که تعداد دفعات زیادی فرایند بالا تکرار شود و از مقادیر T های این دفعات، متوسط گرفته شود). با حل این معادله (که برایش می-توانید از راهنمایی پایان مسئله کمک بگیرید)، متوسط عمر سلول نر را بیابید.

$$\frac{L}{p-q} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^L} - \frac{x}{p-q}$$

(مسئله ادامه دارد، در صفحه‌ی بعد)

حالا می‌خواهیم مدل خیلی ساده‌شده‌ای از دیدِ قدیمی را در نظر بگیریم.

سلولِ نر را به عنوانِ یک ذره را در نظر می‌گیریم که حرکتِ تصادفی در سه بُعد انجام می‌دهد. برای ساده‌گی فرض می‌کنیم حرکتش این طور است که در زمانِ کوتاهِ δ ، جابه‌جایی‌ای به اندازه- Δ دارد که جهتِ آن یکی از این حالت‌ها است: یا در جهتِ مثبتِ محورِ x ، یا در جهتِ منفیِ محورِ x ، یا در جهتِ مثبتِ محورِ y ، یا در جهتِ منفیِ محورِ y ، یا در جهتِ مثبتِ محورِ z ، و یا در جهتِ منفیِ محورِ z . همان‌طور که در کلاس دیدیم، فرض می‌کنیم در حدّ $\Delta \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ داریم $D \rightarrow \frac{\Delta^2}{\delta}$ ، که D ثابتی معلوم است. فرض می‌کنیم که حرکت، کاملاً تصادفی و همسانگرد است، یعنی همه‌ی جهت‌های مذکور هم احتمال هستند. این فرضِ "کاملاً تصادفی بودن"، متناظر با دیدِ قدیمی است (که گفتیم غلط از آب در آمد، که البته اصلاً معلوم هم نیست از اوّل چرا فرضِ دیفالت باید آن می‌بوده).

دو ناحیه‌ی بسته‌ی مجزّا در فضا در نظر می‌گیریم و آن‌ها را با Ω_1, Ω_2 نشان می‌دهیم. اگر ذره به هر نقطه‌ای از Ω_1 برسد، حرکتش پایان می‌یابد و تولیدمثل با موفقیت انجام می‌شود. اگر قبل از آن که به نقطه‌ای از Ω_1 برسد، به نقطه‌ای از Ω_2 برسد، می‌میرد و حرکتش پایان می‌پذیرد. در نقاطِ خارج از این دو ناحیه، حرکت به شکلی است که در بالا بیان شد (یعنی حرکتِ تصادفی کاملاً همسانگرد).

احتمالِ موفّقیتِ سلّول را وقتی در مکانِ $\vec{r}$ است با $S(\vec{r})$ نشان می‌دهیم. یعنی $S(\vec{r})$ احتمالِ این است که اگر سلّول را در نقطه‌ی $\vec{r}$ رها کنیم، سلّول بالاخره با موفّقیت به کار خود پایان دهد. به طورِ هم‌ارز می‌توان گفت که اگر تعدادِ دفعاتِ بسیار زیادی سلّول را از نقطه‌ی $\vec{r}$ رها کنیم، $S(\vec{r})$ کسری از این دفعات است که سلّول با موفّقیت به کارش پایان می‌دهد. به عبارتِ دیگر، $S(\vec{r})$ کسری از این دفعات است که در آن‌ها، سلّول قبل از اینکه از ناحیه‌ی Ω_2 عبور کند، به ناحیه‌ی Ω_1 برسد.

پ) معادله‌ی دیفرانسیلی (در مختصاتِ دکارتی) بیابید که $S(\vec{r})$ در آن صدق می‌کند، و اگر حل شود $S(\vec{r})$ به طورِ یکتا تعیین می‌شود (پس دقّت کنید که شرایطِ مرزی این معادله را هم باید بنویسید).

$$\nabla^2 S = 0, \quad S(\Omega_1) = 1, \quad S(\Omega_2) = 0$$

فرض کنید به مرکزِ مبدأِ مختصات، کره‌ای به شعاعِ R_1 داریم و کره‌ای بزرگ‌تر، هم‌مرکز با آن، به شعاعِ $R_2 > R_1$ قرار دارد. همچنین فرض کنید سلّول در ابتدا در فاصله‌ی r از مبدأ قرار دارد، که r کمتر از R_2 و بیشتر از R_1 است. فرض کنید اگر سلّول به فاصله‌ی R_1 از مبدأ برسد، حرکتش پایان می‌یابد و تولیدمثل انجام می‌شود. اگر قبل از آن به فاصله‌ی R_2 از مبدأ برسد، می‌میرد و حرکتش پایان می‌پذیرد.

ت) دقّت کنید برای سادگی فرض کرده‌ایم مسئله تقارن کروی دارد. بنابراین، $S(\vec{r})$ فقط به فاصله از مبدأ بستگی دارد. با این فرض، معادله‌ی دیفرانسیلی را که در بخش قبل یافته بودید، بازنویسی کنید. با حلّ این معادله و اعمالِ شرایطِ مرزی، احتمالِ موفّقیتِ سلّول را بیابید.

$$\frac{d^2}{dr^2} S(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} S(r) = 0 \Rightarrow S(r) = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

(ث) معادله‌ی دیفرانسیلی بیابید که متوسطِ عمرِ سلول در آن صدق کند. شرایطِ مرزی را هم بنویسید (یعنی برای $r = R_1$ و در $r = R_2$ متوسطِ عمر را بنویسید). معادله را با توجه به تقارنِ کروی، ساده کنید. سپس آن را حل کنید و متوسطِ عمرِ سلول را بیابید.

$$\nabla^2 T = -\frac{\dot{q}}{D} \Rightarrow \frac{d^2}{dr^2} T(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} T(r) = 0, \quad T(R_1) = T(R_2) = 0$$

$$\Rightarrow T(r) = -\frac{r^2}{D} - \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2)}{Dr} + \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{D}$$

راهنمایی ریاضی ۱

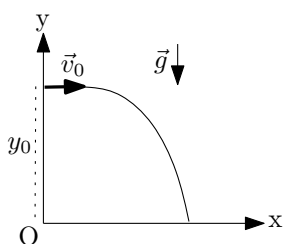
برای حل معادله‌ای به شکل $\psi(n) = a \psi(n-1) + b \psi(n+1)$ که در آن n عدد صحیح است و a و b ثابت اند، پاسخی به شکل $\psi(n) = r^n$ در معادله‌ی بالا جاگذاری کنید و دو پاسخ ممکن برای r بیابید، که آن‌ها را با r_1, r_2 نشان می‌دهیم. سپس پاسخ کلی را به صورت $\psi(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ بنویسید و C_1, C_2 را از روی شرایط مرزی تعیین کنید. اگر احیاناً r_1, r_2 مساوی بودند، شکلِ پاسخ را $\psi(n) = C_1 n r_1^n + C_2 r_2^n$ می‌گیریم.

برای حل معادله‌ای به شکل $\psi(n) = a \psi(n-1) + b \psi(n+1) + c$ ابتدا پاسخی به شکل $\psi(n) = K_1 n + K_2$ در این معادله جاگذاری می‌کنیم و K_1, K_2 را با برابر گذاشتنِ توان‌های مختلفِ n در دو طرفِ معادله (بدونِ توجه به شرایطِ مرزی)، می‌یابیم. به $\psi(n)$ "پاسخِ خصوص" می‌گویند. قدم بعدی این است: c را صفر می‌گیریم و مانندِ پاراگرافِ قبل عمل می‌کنیم، و پاسخ به دست آمده (که دو ثابتِ مجهول هم دارد) را با $\psi_h(n)$ نشان می‌دهیم (آن‌را

"پاسخ همگن" می نامند). پاسخ نهایی را به صورت $\psi(n) = \psi_h(n) + \psi_g(n)$ می نویسیم. این پاسخ دو ثابت مجهول دارد که با توجه به شرایط مرزی باید تعیین شوند.

راهنمایی ریاضی ۲

برای حل معادله ای به شکل $\frac{df(x)}{dx} + p(x)f(x) = q(x)$ یک راه این است که تابع $\mu(x) = \exp\left[\int p(x)dx\right]$ را در دو طرف ضرب کنیم و دقت می کنیم که سمت چپ برابر می شود با $\frac{d}{dx}[\mu(x)f(x)]$.



پرتابه‌ای به جرم m مطابق شکل در لحظه‌ی

$t = 0$ از ارتفاع y_0 نسبت به سطح زمین با سرعت

اولیه‌ی v_0 موازی سطح زمین پرتاب می‌شود. پرتابه

همواره در یک صفحه‌ی قائم مانند x - y حرکت می‌کند.

علاوه بر نیروی وزن، نیروی مقاومت هوا به صورت $-mbv(t)\vec{v}(t)$ در تمام مسیر به پرتابه اعمال

می‌شود که $\vec{v}(t)$ بردار سرعت لحظه‌ای و $v(t)$ اندازه‌ی آن است. b پارامتر ثابتی است. کمیت‌های

بدون بعد $X = \frac{g}{v_0^2}x$ ، $Y = \frac{g}{v_0^2}y$ ، $T = \frac{g}{v_0}t$ و $B = \frac{v_0^2}{g}b$ را در نظر بگیرید.

(آ) قانون دوم نیوتن را برای حرکت پرتابه، بر حسب کمیت‌های بدون بعد تعریف شده و در

مختصات دکارتی بنویسید. (۱ نمره)

(ب) با در نظر گرفتن B به عنوان پارامتر اختلال و نیز

$$X(T) = X^{(0)}(T) + BX^{(1)}(T) + B^2X^{(2)}(T) + \dots$$

$$Y(T) = Y^{(0)}(T) + BY^{(1)}(T) + B^2Y^{(2)}(T) + \dots$$

معادلاتی که از حل آن‌ها $X^{(0)}(T)$ ، $X^{(1)}(T)$ ، $X^{(2)}(T)$ ، $Y^{(0)}(T)$ ، $Y^{(1)}(T)$ و $Y^{(2)}(T)$ به

دست می‌آید، بنویسید. (۲ نمره)

(پ) $X(T)$ و $Y(T)$ را تا مرتبه‌ی اول B به دست آورید. (۴ نمره)

(ت) زمان رسیدن پرتابه به سطح زمین و فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد به زمین تا مبدأ مختصات (برد

پرتابه) را تا مرتبه‌ی اول b به دست آورید. (۳ نمره)

انتگرال‌های زیر ممکن است سودمند باشد:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int (x^2 + a^2)^{3/2} dx = \frac{x}{4}(x^2 + a^2)^{3/2} + \frac{3a^2x}{8}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) dx = x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\int x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right) \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{x}{4}\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} - m b v \vec{v} \quad \hookrightarrow \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -g \hat{j} - b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \frac{d\vec{r}}{dt}$$

با تقسیم طرفین
معادله فوق به g

$$\Rightarrow \frac{d^2 \left(\frac{g}{v_0^2} \vec{r} \right)}{d \left(\frac{g}{v_0} t \right)^2} = -\hat{j} - \frac{b v_0^2}{g} \left| \frac{d \left(\frac{g}{v_0^2} \vec{r} \right)}{d \left(\frac{g}{v_0} t \right)} \right| \frac{d \left(\frac{g}{v_0^2} \vec{r} \right)}{d \left(\frac{g}{v_0} t \right)}$$

$$\frac{d^2 \vec{R}}{d\tau^2} = -\hat{j} - B R^\circ \vec{R}^\circ$$

$$\ddot{X} = -B \sqrt{X'^2 + Y'^2} X'$$

$$\ddot{Y} = -1 - B \sqrt{X'^2 + Y'^2} Y'$$

ب) با جایگزینی $X(\tau)$ و $Y(\tau)$ نامرتبی B^2 و برابر قرار دادن مدبر
نکته در دو طرف معادله به معادلات زیر می‌رسیم

$$\ddot{X}^{(0)} = 0$$

$$\dot{X}^{(1)} = -X^{(0)} \sqrt{X'^2{}^{(0)} + Y'^2{}^{(0)}}$$

$$\ddot{X}^{(2)} = \frac{-2 X'^2{}^{(0)} X^{(1)} - X'^{(1)} Y'^2{}^{(0)} - X'^{(0)} Y'^{(0)} Y^{(1)}}{\sqrt{X'^2{}^{(0)} + Y'^2{}^{(0)}}}$$

$$\ddot{Y}^{(0)} = -1$$

$$\dot{Y}^{(1)} = -Y^{(0)} \sqrt{X'^2{}^{(0)} + Y'^2{}^{(0)}}$$

$$\ddot{Y}^{(2)} = \frac{-X'^{(0)} X^{(1)} Y'^{(0)} - X'^{(1)} Y'^{(1)} - 2 Y'^{(0)} Y^{(1)}}{\sqrt{X'^2{}^{(0)} + Y'^2{}^{(0)}}}$$

$$X(0) = 0, \quad Y(0) = Y_0, \quad X'(0) = 1, \quad Y'(0) = 0 \quad \text{شرایط اولیه}$$

$$X''(0) = 0 \Rightarrow X^{(0)}(T) = T$$

$$Y''(0) = -1 \Rightarrow Y^{(0)}(T) = -\frac{1}{2} T^2 + Y_0$$

$$X^{(1)} = -X^{(0)} \sqrt{X'^2 + Y'^2} = -\sqrt{1+T^2}$$

$$X^{(1)} = -\int_0^T \sqrt{1+T^2} dT = -\left(\frac{T}{2} \sqrt{1+T^2} + \frac{1}{2} \ln(T + \sqrt{1+T^2}) \right)$$

$$X^{(1)}(T) = -\frac{1}{2} \frac{1}{3} (1+T^2)^{3/2} - \frac{1}{2} \left[T \ln(T + \sqrt{1+T^2}) - \sqrt{1+T^2} \right] - \frac{1}{3}$$

$$Y^{(1)} = -Y^{(0)} \sqrt{X'^2 + Y'^2} = T \sqrt{1+T^2}$$

$$Y^{(1)} = \frac{1}{3} (1+T^2)^{3/2} - \frac{1}{3}$$

$$Y^{(1)} = \frac{1}{12} T (1+T^2)^{3/2} + \frac{1}{8} T \sqrt{1+T^2} + \frac{1}{8} \ln(T + \sqrt{1+T^2}) - \frac{T}{3}$$

$$Y(T) \approx Y^{(0)}(T) + B Y^{(1)}(T) \quad (C)$$

زمان رسیدن به قاع زمین را $Y(T_0) = 0$ است که به صورت افتادی باید

$$T_0 = T^{(0)} + B T^{(1)} + \dots$$

به صورت

$$T^{(0)} = \sqrt{2Y_0} \quad \text{با فرض}$$

$$-\frac{1}{2} T_0^2 + Y_0 + B Y^{(1)}(T_0) + \dots = 0$$

$$T^{(1)} = -\frac{1}{3} + \frac{5}{24} \sqrt{1+2\gamma_0} + \frac{1}{6} \gamma_0 \sqrt{1+2\gamma_0} + \frac{1}{8\sqrt{2\gamma_0}} \ln(\sqrt{2\gamma_0} + \sqrt{1+2\gamma_0})$$

بنابراین تا مرتبه اول b زمان رسیدن به زمین برابر است با

$$t \approx \sqrt{\frac{2y_0}{g}} + \frac{b v_0^3}{g^2} \left[-\frac{1}{3} + \frac{5}{24} \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2}} + \frac{1}{6} \frac{gy_0}{v_0^2} \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2}} + \frac{1}{8\sqrt{2gy_0/v_0^2}} \ln \left(\sqrt{\frac{2gy_0}{v_0^2}} + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2}} \right) \right]$$

بردبراسته $R = X(T_0)$ است که تا مرتبه اول b خواهد بود

$$R \approx v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}} + b \frac{v_0^4}{g^2} \left[-\frac{2}{3} + \frac{13}{24} \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2}} - \frac{1}{6} \frac{gy_0}{v_0^2} \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2}} + \frac{1}{8\sqrt{2gy_0/v_0^2}} \left(1 - 8 \frac{gy_0}{v_0^2} \right) \ln \left(\sqrt{\frac{2gy_0}{v_0^2}} + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2}} \right) \right]$$

حل مسئله ۷ از سوال نهمی

الف -

(۲)

$$r > R \quad \rho = \frac{a}{r^4} \quad -Q = 4\pi \int_R^\infty \rho(r) r^2 dr$$

$$-Q = 4\pi a \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = 4\pi a \left(-\frac{1}{r}\right)_R^\infty = \frac{4\pi a}{R} \Rightarrow a = -\frac{RQ}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \rho(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^3} & r < R \\ -\frac{RQ}{4\pi r^4} & r > R \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{قانون گاوس} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[Q - \frac{QR}{4\pi} \int_R^r \frac{dr}{r^2} \right] \quad (۳)$$

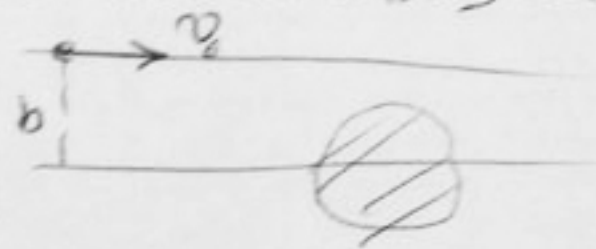
$$= \frac{Q}{\epsilon_0} \left[1 - R \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \right] = \frac{QR}{\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{QR}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad r > R$$

$$E(r) = -\frac{dV}{dr} \quad ; \quad V(\infty) \rightarrow 0 \Rightarrow V(r) = \frac{QR}{8\pi \epsilon_0 r^2} \quad r > R$$

ج - چون نیرو پادیهیستارد مرکز است شتابان را در ای و انرژی ثابت حرکت است

$$l = mr^2 \dot{\theta} = \text{ثابت} = mbv_0$$



$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{qQR}{8\pi \epsilon_0 r^2} = E = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{ثابت}$$

$$\dot{\theta} = \frac{bv_0}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{b^2 v_0^2}{r^2} + \frac{qQR}{8\pi \epsilon_0 r^2}}_{V_e(r)} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (۴)$$

$$V_e(r) = \left(\frac{mb^2 v_0^2}{2} + \frac{qQR}{8\pi \epsilon_0} \right) \frac{1}{r^2} \quad \begin{cases} r=r_0 \Rightarrow V_e(r_0) = \frac{1}{2} m v_0^2 \\ \dot{r}=0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2} m b^2 v_0^2 + \frac{qQR}{8\pi \epsilon_0} \right) \frac{1}{r_0^2} = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \boxed{r_0^2 = \left(b^2 + \frac{qQR}{4\pi \epsilon_0 m v_0^2} \right)}$$

$$\Rightarrow V_e(r) = \frac{m v_0^2 r_0^2}{2r^2}$$

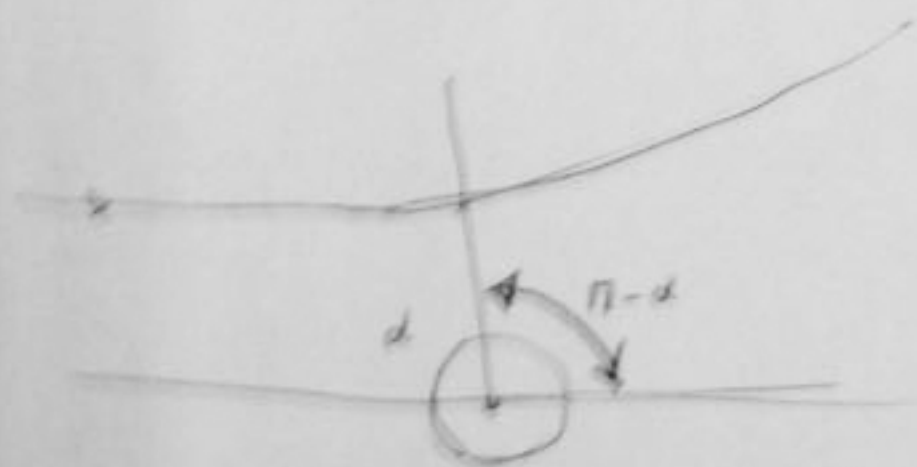
$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{b v_0}{r^2} \quad \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E - V_e(r)$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E - V_e(r)) = \frac{2}{m} \left[\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{b^2}{r^2} \right] = v_0^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm v_0 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}} \quad , \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta/dt}{dr/dt} = \pm \frac{b v_0}{r^2 \sqrt{v_0^2 (1 - \frac{b^2}{r^2})}}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{b}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}}$$

$$\int d\theta = \pm b \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}}$$



و - چنان نزدیک شدن از دور
فاصله b را در $\theta = 0$ تا π
 $\pi - \alpha$ تغییر می کند در این بازه
فضای کم شدن r و هم دار در کم می شود
پس علامت + ملاک است

$$\int_{\pi}^{\pi - \alpha} d\theta = b \int_{\infty}^{r_0} \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}}$$

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow du = -\frac{dr}{r^2} \Rightarrow -\alpha = -b \int_{\infty}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2/u_0^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{b} = u_0 \int_0^1 \frac{d(\frac{u}{u_0})}{\sqrt{1 - (\frac{u}{u_0})^2}} \quad \frac{u}{u_0} = \sin \theta \Rightarrow \frac{\alpha}{u_0 b} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{u_0 b} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi b}{2 r_0}}$$

$$\text{زاویه انحراف} = \pi - 2\alpha = \pi \left(1 - \frac{b}{r_0} \right) = \pi \left(1 - \left(\frac{qQR}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 b^2} \right)^{1/2} \right)$$



$$\begin{aligned} x &= l \cos \theta & \dot{x} &= -l \dot{\theta} \sin \theta \\ y &= l \sin \theta & \dot{y} &= l \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = -l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$$\ddot{y} = l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -2F \cos \theta - k_1(2x - 2a) \\ m \ddot{y} = -2F \sin \theta - k_2(2y - 2b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m l (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = 2F \cos \theta + 2k_1(x - a) \\ m l (-\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 2F \sin \theta + 2k_2(y - b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow m l \ddot{\theta} = 2k_1 \sin \theta (l \cos \theta - l \cos \theta_0) - 2k_2 \cos \theta (l \sin \theta - l \sin \theta_0)$$

فرض کنیم چوب را ساده کوچک \$\alpha\$ نوسان کرده باشد به طوری که \$\theta = \theta_0 + \alpha\$

$$\begin{cases} \cos \theta - \cos \theta_0 = \cos(\theta_0 + \alpha) - \cos \theta_0 = \cos \theta_0 - \alpha \sin \theta_0 - \cos \theta_0 = -\alpha \sin \theta_0 \\ \sin \theta - \sin \theta_0 = \sin(\theta_0 + \alpha) - \sin \theta_0 = \sin \theta_0 + \alpha \cos \theta_0 - \sin \theta_0 = \alpha \cos \theta_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m l \ddot{\alpha} = 2k_1 l (-\alpha \sin^2 \theta_0) - 2k_2 l (\alpha \cos^2 \theta_0)$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{2k_1 \sin^2 \theta_0 + 2k_2 \cos^2 \theta_0}{m} \alpha = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{2k_1 \sin^2 \theta_0 + 2k_2 \cos^2 \theta_0}{m}}$$

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

مردنوسانی :

$$x - a = -\alpha (l \sin \theta_0) = (-\alpha b) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y - b = \alpha (l \cos \theta_0) = (\alpha a) \cos(\omega t + \varphi)$$

از روابط *

$$\frac{\text{دامنه نوسان } x}{\text{دامنه نوسان } y} = -\frac{b}{a}$$

نسبت دامنه

حل مسئله گامیال ۹۵

الف - ۱

$$\begin{cases} a = l \cos \theta_0 \\ b = l \sin \theta_0 \end{cases}$$

ع کوزه درش

\$\omega\$ ۲

نسبت دامنه ها ۱ ۲

فرم

\$\times \sin \theta\$

\$\times (-\cos \theta)\$

(۴) در صدای انتنای هر چهار ذره به صورت حرکت می کنند (باتوجه به شرایط اولیه)

$$\begin{array}{llll} x_A = a \cos \Omega t & x_B = -b \sin \Omega t & x_C = -x_A & x_D = -x_B \\ y_A = a \sin \Omega t & y_B = b \cos \Omega t & y_C = -y_A & y_D = -y_B \end{array}$$

در صورت فقدان مد دورانی دانهائی، مد نوسانی مطابق فرض الف است.

در صورت وجود مد دورانی تنها برای بازوی به طول a داریم



$$2F_0 \cos \theta = m a \Omega^2 \Rightarrow 2F_0 \frac{a}{\ell} = m a \Omega^2 \Rightarrow F_0 = \frac{1}{2} m \ell \Omega^2$$

برای بازوی به طول b هم همین را داریم.

وقتی ~~مد دورانی~~ نوسانی به این حرکت اضافه کرد بازدها مطابق فرض الف (همان دوران) نوسان هم می کنند. (در واقع نیروی F که در بخش الف گفته شد به F_0 دوران اضافه می شود.)

در حالت کلی باتوجه به شرایط اولیه حرکت مسئله داریم

$$\begin{aligned} x_A &= V_x t + (a + \delta \sin \omega t) \cos \Omega t \\ y_A &= V_y t + (a \sin \omega t + \delta \sin \omega t) \sin \Omega t \\ x_B &= V_x t - (b \sin \omega t - \frac{a}{b} \sin \omega t) \sin \Omega t \\ y_B &= V_y t + (b - \frac{a}{b} \delta \sin \omega t) \cos \Omega t \\ x_C &= V_x t - (a + \delta \sin \omega t) \cos \Omega t \\ y_C &= V_y t - (a \sin \omega t + \delta \sin \omega t) \sin \Omega t \\ x_D &= V_x t + (b \sin \omega t - \frac{a}{b} \sin \omega t) \sin \Omega t \\ y_D &= V_y t - (b - \frac{a}{b} \delta \sin \omega t) \cos \Omega t \end{aligned}$$

$$v_{Ax} = V_x + \delta \omega \cos \omega t \cos \Omega t + (-) \sin \Omega t$$

$$v_{Ay} = V_y + a \Omega \cos \Omega t + \dots$$

$$v_{Cx} = V_x - \delta \omega \cos \omega t \cos \Omega t + (-) \sin \Omega t$$

$$v_{Cy} = V_y - a \Omega \cos \Omega t + \dots$$

نقطه چین و در $t=0$ صفر است

چون ثابت V_x ، V_y ، δ و Ω

مالیاتی تعیین شده اند.

$$V_{Ax}(0) = V_x + \delta\omega = 0$$

$$V_{Ax}(0) = V_x - \delta\omega = 0$$

$$V_{Ay}(0) = V_y + a\Omega = 0$$

$$V_{Ay}(0) = V_y - a\Omega = 0$$

-2-

(1)

$$\Rightarrow V_x = \frac{v_0}{2}, \quad \delta = -\frac{v_0}{2\omega}, \quad V_y = 0, \quad \Omega = 0$$

$$x_A = \frac{v_0}{2}t + a - \frac{v_0}{2\omega} \sin\omega t$$

$$\dot{x}_A = 0$$

$$x_B = \frac{v_0}{2}t$$

$$\dot{x}_B = b + \frac{a v_0}{2b\omega} \sin\omega t$$

$$x_C = \frac{v_0}{2}t - a + \frac{v_0}{2\omega} \sin\omega t$$

$$\dot{x}_C = 0$$

$$x_D = \frac{v_0}{2}t$$

$$\dot{x}_D = -b - \frac{a v_0}{2b\omega} \sin\omega t$$

$$V_B(0) = \frac{v_0}{2}(\hat{x} + \frac{a}{b}\hat{y})$$

$$V_D(0) = \frac{v_0}{2}(\hat{x} - \frac{a}{b}\hat{y})$$

$$V_{Bx} = V_x - b\Omega \cos\Omega t$$

$$V_{By} = V_y - \frac{a}{b}\delta\omega \cos\omega t \cos\Omega t + \dots \sin\Omega t$$

$$V_{Dx} = V_x + b\Omega \cos\Omega t$$

$$V_{Dy} = V_y + \frac{a}{b}\delta\omega \cos\omega t \cos\Omega t + \dots \sin\Omega t$$

->

(2)

$$V_{Bx}(0) = V_x - b\Omega = 0, \quad V_{By}(0) = V_y - \frac{a}{b}\delta\omega = 0$$

$$V_{Dx}(0) = V_x + b\Omega = 0, \quad V_{Dy}(0) = V_y + \frac{a}{b}\delta\omega = 0$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{v_0}{2}, \quad \Omega = \frac{v_0}{2b}$$

$$V_y = 0, \quad \delta = 0$$

$$x_A = \frac{v_0}{2}t + a \cos(\frac{v_0}{2b}t)$$

$$\dot{x}_A = a \sin(\frac{v_0}{2b}t)$$

$$V_A(0) = \frac{v_0}{2}(\hat{x} + \frac{a}{b}\hat{y})$$

$$x_B = \frac{v_0}{2}t - b \sin(\frac{v_0}{2b}t)$$

$$\dot{x}_B = b \cos(\frac{v_0}{2b}t)$$

$$V_B(0) = \frac{v_0}{2}(\hat{x} - \frac{a}{b}\hat{y})$$

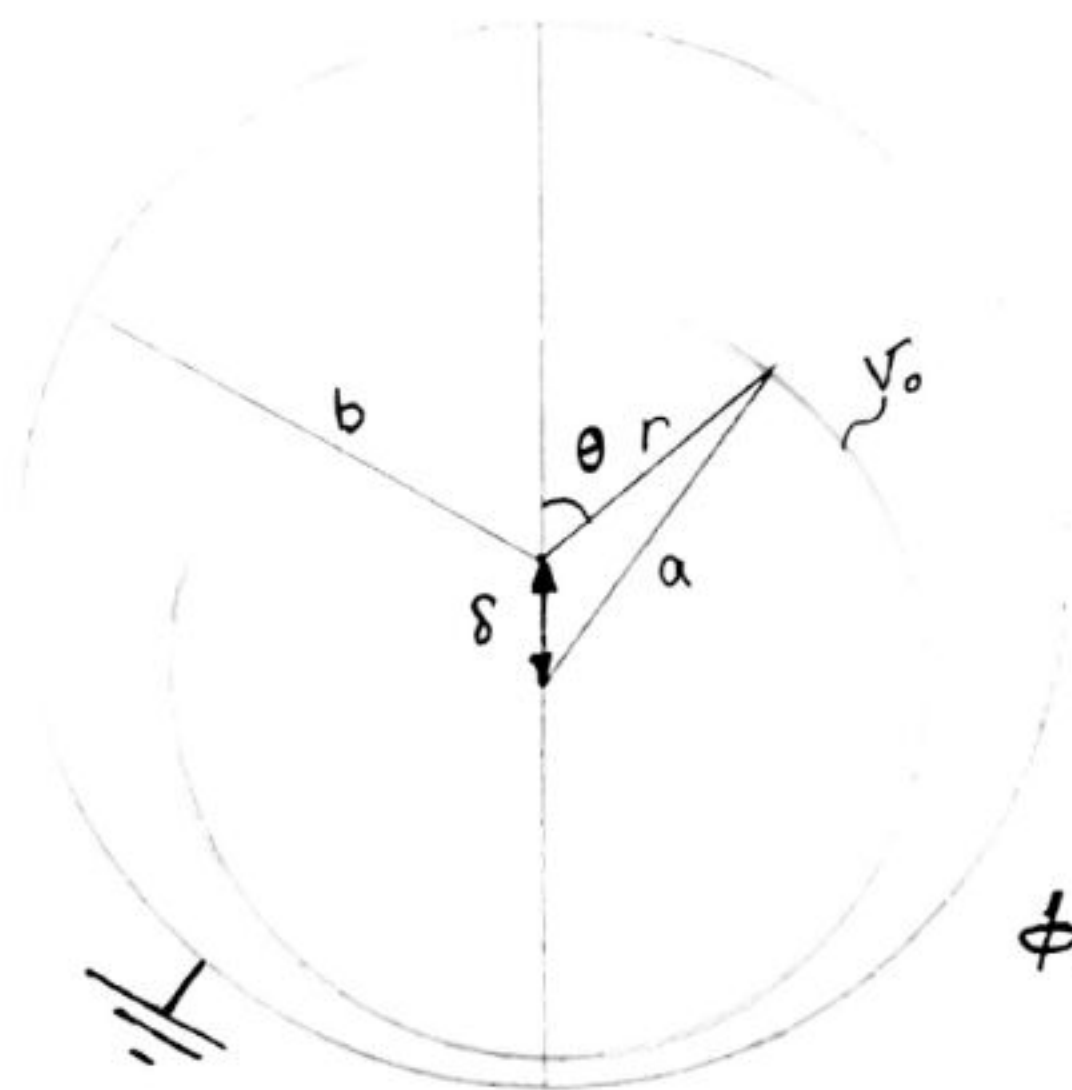
$$x_C = \frac{v_0}{2}t - a \cos(\frac{v_0}{2b}t)$$

$$\dot{x}_C = -a \sin(\frac{v_0}{2b}t)$$

$$x_D = \frac{v_0}{2}t + b \sin(\frac{v_0}{2b}t)$$

$$\dot{x}_D = -b \cos(\frac{v_0}{2b}t)$$

$$\phi = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos(n\theta)$$



قوسین کسینوس : $r^2 + \delta^2 + 2r\delta \cos \theta = a^2$

$$\rightarrow r = -\delta \cos \theta + \sqrt{a^2 - \delta^2 \sin^2 \theta}$$

$$\text{تا مرتبه 2} = a - \delta \cos \theta - \frac{\delta^2 \sin^2 \theta}{2a}$$

$$\phi(b) = 0 \rightarrow A_0 \ln b + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n b^n + B_n b^{-n}) \cos(n\theta) = 0$$

$$\rightarrow A_0 \ln b + B_0 = 0 \rightarrow B_0 = -A_0 \ln b$$

$$A_n b^n + B_n b^{-n} = 0 \rightarrow B_n = -b^{2n} A_n$$

$$\phi = A_0 (\ln r - \ln b) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(r^n - \frac{b^{2n}}{r^n} \right) \cos(n\theta)$$

روی استوانه کوچک : $\ln r = \ln \left(a - \delta \cos \theta - \frac{\delta^2 \sin^2 \theta}{2a} \right) = \ln a - \frac{\delta \cos \theta}{a} - \frac{\delta^2 \sin^2 \theta}{2a^2} - \frac{\delta^2 \cos^2 \theta}{2a^2}$

$$= \ln a - \frac{\delta \cos \theta}{a} - \frac{\delta^2}{2a^2}$$

روی استوانه کوچک : $\phi = (A_0^{(0)} + A_0^{(1)} + A_0^{(2)}) \left(\ln \left(\frac{a}{b} \right) - \frac{\delta \cos \theta}{a} - \frac{\delta^2}{2a^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(1)} + A_n^{(2)}) \left(r^n - \frac{b^{2n}}{r^n} \right) \cos(n\theta)$

$$= A_0^{(0)} \ln \left(\frac{a}{b} \right) + \left(-A_0^{(0)} \frac{\delta \cos \theta}{a} + A_0^{(1)} \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right) + \left(-A_0^{(0)} \frac{\delta^2}{2a^2} - A_0^{(1)} \frac{\delta \cos \theta}{a} + A_0^{(2)} \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(1)} + A_n^{(2)}) \left(a^n - \frac{b^{2n}}{a^n} - n a^{n-1} \delta \cos \theta - \frac{n b^{2n}}{a^{n+1}} \delta \cos \theta \right) \cos(n\theta) =$$

$$A_0^{(0)} \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \left[-\frac{A_0^{(0)} \delta \cos \theta}{a} + A_0^{(1)} \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \left(a - \frac{b^{2n}}{a^n}\right) \cos n\theta \right] +$$

$$\left[-\frac{A_0^{(0)} \delta^2}{2a^2} - \frac{A_0^{(1)} \delta \cos \theta}{a} + A_0^{(2)} \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{(2)} \left(a - \frac{b^{2n}}{a^n}\right) - A_n^{(1)} \left(a + \frac{b^{2n}}{a^{n+1}}\right) n \delta \cos \theta \right) \cos n\theta \right]$$

$$= V_0$$

$$\Rightarrow A_0^{(0)} = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

صفه قرار دادن جمله مرتبه اول

$$: A_0^{(1)} \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \left(A_1^{(1)} \left(a - \frac{b^2}{a}\right) - \frac{A_0^{(0)} \delta}{a} \right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)} \left(a - \frac{b^{2n}}{a^n}\right) \cos n\theta = 0$$

از استقلال خطی ترمیم $\cos n\theta \rightarrow A_0^{(1)} = 0, A_2^{(1)} = A_3^{(1)} = A_4^{(1)} = \dots = 0$

$$A_1^{(1)} = \frac{\delta A_0^{(0)}}{a^2 - b^2} = \frac{V_0 \delta}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) (b^2 - a^2)}$$

صفه قرار دادن جمله مرتبه 2

$$: -\frac{A_0^{(0)} \delta^2}{2a^2} + A_0^{(2)} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - A_1^{(1)} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \delta \cos^2 \theta + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(2)} \left(a - \frac{b^{2n}}{a^n}\right) \cos n\theta = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{A_0^{(0)} \delta^2}{2a^2} + A_0^{(2)} \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \delta A_1^{(1)} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{1}{2} - \frac{A_1^{(1)} \delta \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}{2} \cos(2\theta)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \left(a - \frac{b^{2n}}{a^n}\right) \cos(n\theta) = 0$$

از استقلال خطی ترمیم $\cos(n\theta) : \left(\delta A_1^{(1)} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{1}{2} + \frac{A_0^{(0)} \delta^2}{2a^2} \right) \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = A_0^{(2)}$

$$\Rightarrow A_0^{(2)} = \left(\frac{V_0}{2a^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)} - \frac{V_0}{2a^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \right) \delta^2 = \frac{V_0}{2a^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \left(1 - \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right) = \frac{-V_0}{(b^2 - a^2) \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$A_1^{(2)} = A_3^{(2)} = A_4^{(2)} = \dots = 0$$

$$\bullet \left(A_2^{(2)} \left(a^2 - \frac{b^4}{a^2} \right) - \frac{A_1^{(1)} \delta}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \right) \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow A_2^{(2)} \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{a^4} = \frac{A_1^{(1)} \delta}{2} \frac{a^2 + b^2}{a^2} \Rightarrow A_2^{(2)} = \frac{\delta A_1^{(1)}}{2(a^2 - b^2)} = D$$

$$A_2^{(2)} = \frac{-V_0 \delta^2}{2(b^2 - a^2)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{V_0 \delta}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)(b^2 - a^2)} \left(r - \frac{b^2}{r} \right) \cos \theta$$

$$+ \left(\frac{-V_0}{(b^2 - a^2) \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{V_0}{2(b^2 - a^2)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(r^2 - \frac{b^4}{r^2} \right) \cos(2\theta) \right) \delta^2$$

$$E(\theta, r) = \left(\frac{V_0}{r \ln\left(\frac{a}{b}\right)} + \frac{V_0 \delta}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \cos \theta + \left(\frac{-V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)(b^2 - a^2) r} - \frac{2V_0}{2(b^2 - a^2)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(r + \frac{b^4}{r^3} \right) \cos(2\theta) \right) \delta^2 \right)$$

$$\Rightarrow \sigma = -\epsilon_0 E = D \quad Q/l = -\epsilon_0 \int_0^{2\pi} E b d\theta = -\epsilon_0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} + \frac{V_0 b \delta}{(b^2 - a^2) \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cos \theta + \left[\frac{-V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)(b^2 - a^2)} - \frac{2bV_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)(b^2 - a^2)^2} \right] \delta^2 \cos(2\theta) \right) d\theta$$

$$\cos(2\theta) \int_0^{2\pi} \delta^2 d\theta = \frac{-V_0 \epsilon_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} 2\pi + \frac{V_0 \delta^2 2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)(b^2 - a^2)} - \frac{2\pi V_0 \epsilon_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \left(1 - \frac{\delta^2}{(b^2 - a^2) \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \right)$$

$$\Rightarrow C/l = \frac{Q/l}{V_0} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(1 - \frac{\delta^2}{(b^2 - a^2) \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \right)$$