ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه ششم

استاد : دکتر قصوری

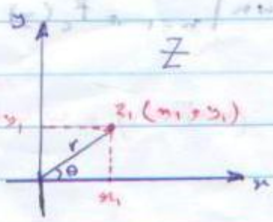
رشته : کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک

دانشگاه : آزاد واحد کاشان

تهیه وتنظیم : ابراهیم شهنازی

سرفصل مطالب جلسه ششم

اعداد مختلط :



محور حقیقی

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

نمایش برداری :

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha Z_1 = (\alpha x_1 , \alpha y_1)$$

$$\boxed{Z_1 = (x_1 , y_1)} = (x_1 , 0) + (0 , y_1) = x_1 \underbrace{(1,0)} + y_1 \underbrace{(0,1)} = \boxed{x_1 + i y_1}$$

نمایش برداری

نمایش دکارتی :

$$\cos\theta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\cos\theta \Rightarrow \boxed{r\cos\theta = x_1}$$

$$\sin\theta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \Rightarrow \boxed{y_1 = r\sin\theta}$$

نمایش مثلثاتی :

$$\boxed{Z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

نمایش مثلثاتی

$$Z_1 = r\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) + \cancel{i}r\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\cancel{i}}\right) = r\left(\frac{2e^{i\theta}}{2}\right)$$

نمایش قطبی :

$$\Rightarrow \boxed{Z_1 = r\,e^{i\theta}}$$

نمایش قطبی

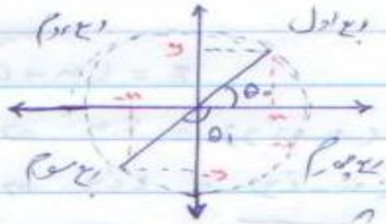
$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \qquad \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow \boxed{\theta = \operatorname{Arctan}\frac{y_1}{x_1}}$$

دوره تناوب $\tan\theta$ برابر $\underline{\pi}$ است ولی در مختلط دارای دوره تناوب $\underline{2\pi}$ می باشیم.

$\tan\theta = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$



اگر زاویه در ربع اول و چهارم باشد: $\theta = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

اگر زاویه در ربع دوم باشد: $\theta = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} + \pi$

اگر زاویه در ربع سوم باشد: $\theta = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} - \pi$

مثال ۱) مطلوبست نمکایش فرم قطبی و مثلثاتی عبارت زیر.

الف) $z = 1 + i$

ب) $z = -1 + i$

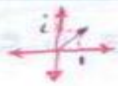
ج) $z = 1 - i$

د) $z = -1 - i$

$z = x + iy \qquad \measuredangle z = \operatorname{Arg} z \qquad |z| = \operatorname{Norm} z = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\theta = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$

الف) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

ربع اول:


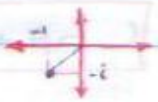
ب) $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

ربع دوم:


ج) $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cancel{\sqrt{2}\,e}$
$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ربع چهارم:


د) $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right)\right)$
$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

ربع سوم:


مزدوج z

$$z^* = \bar{z} = (x - iy) \qquad z = (x + iy)$$

$$z + z^* = (x+iy) + (x-iy) = 2x \Rightarrow \boxed{x = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z})}$$

$$z - \bar{z} = (x+iy) - (x-iy) = 2iy \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \Rightarrow \boxed{|z^*| = |z|}$$

$$\operatorname{Arg} z^* = \operatorname{Arctg} \frac{-y}{x} = -\operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = -\operatorname{Arg} z \Rightarrow \boxed{\operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z}$$

$$z^* = |z| e^{-i \operatorname{Arg} z}$$

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + \cancel{i^2}^{(-1)} y_1 y_2)$$

$$= (x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1))$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r e^{i\theta} \qquad r > 0$$

$$-\pi < \theta \pm 2k\pi \leq \pi \quad , \quad -\pi < \theta < \pi$$

رابطه دموآور:

$$z_1^n = r_1^n e^{in\theta_1} \qquad r_1^n > 0 \qquad -\pi < n\theta_1 \pm 2k\pi \leq \pi$$

$$z_1^n = r_1^n (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)^n = r_1^n (\cos n\theta_1 + i \sin n\theta_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta}$$ رابطه دموآور

مثال ۲) مطلوبست نمایش فرم قطبی و مثلثاتی عبارت زیر.

$$Z=(1-i)^{20}$$

$$=\left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{20}=1024\,e^{-i\,\cancel{\frac{20\pi}{4}}}=1024\,e^{i(-5\pi+2k\pi)}$$

$$=1024\,e^{i\pi}=\boxed{-1024}$$

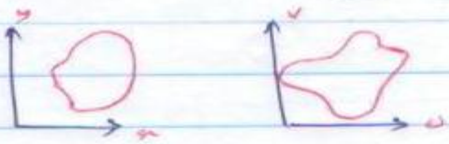
$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\times 0=-1$$

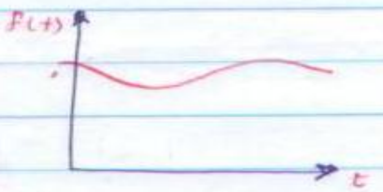
توابع مختلط :

برای نمایش توابع مختلط نیاز به یک فضای ۴ بعدی می‌باشد

در صفحه برای ورودی : x و y

در صفحه برای خروجی : u و v





$$w=f(z)=\sin z$$

$$=\sin(x+iy)$$

$$=\sin x\cos iy+\sin iy\cos x$$

$$\cos iy=\frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2}=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=\cosh y$$

$$\sin iy=\frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i}=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=i\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=i\sinh y$$

$$w=\underbrace{\sin x\cosh y}_{u(x,y)}+\underbrace{i\sinh y\cos x}_{v(x,y)}$$

مثال ۳) مطلوبست محاسبه z به گونه ای که رابطه زیر برقرار باشد.

$$\sin z = i \sinh 1$$

$$\Rightarrow \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x = i \sinh 1$$

برای اینکه از رابطه اصلی به رابطه $i \sinh 1$ برسیم باید:

۱. جزء حقیقی = صفر شود؛ چون اصلاً جزء حقیقی نداریم $\qquad \sin x \cosh y = 0$

۲. جزء موهومی برابر $i \sinh 1$ شود. $\qquad y = 1 \quad \cos x = 1$

$$\sin x \cosh y = 0 \Rightarrow \cosh y \neq 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$\cosh t \Rightarrow$

$$\sinh y \cos x = \sinh 1 \Rightarrow \sinh y (\cos k\pi) = \sinh 1 \Rightarrow \sinh y (-1)^k$$

$\sinh t$

$$\Rightarrow \sinh y = (-1)^k \sinh 1$$

$$\Rightarrow \sinh y = \sinh (-1)^k \Rightarrow y = (-1)^k$$

$$\Rightarrow \boxed{\sinh 1}$$

تمرین ۱) مطلوبست محاسبه مقدار روبرو.

$$w = \cos z$$

$$z = |z| e^{i\theta}$$

$$w = z^n \Rightarrow w = (|z| e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta \pm 2k\pi)}$$

$$w = |w| e^{i\varphi} \qquad -\pi < \varphi = n\theta \pm 2k\pi \leq \pi$$

$$|w| = |z|^n$$

$$w = \sqrt[m]{z} \Rightarrow w^m = z = (|w| e^{i\varphi})^m = |z| e^{i\theta}$$

$$|w|^m = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[m]{|z|}$$

$$-\pi < m\varphi = \theta \pm 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -\pi < \varphi = \frac{\theta \pm 2k\pi}{m} \leq \pi$$

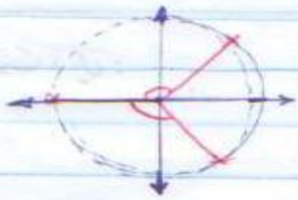
مثال ۴) مطلوبست محا سبه مقدار روبرو.

$$w = \sqrt[3]{-1}$$

$$-1 = e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow |w| = \sqrt[3]{1} = 1 \qquad \varphi = \frac{\pi \pm 2k\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1\,e^{i\pi/3} = \cos\pi/3 + i\sin\pi/3 = 1/2 + i\,\sqrt{3}/2 \\ w_1 = 1\,e^{i\pi} = -1 \\ w_2 = 1\,e^{-i\pi/3} = \cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3) = 1/2 - i\,\sqrt{3}/2 \end{cases}$$



توابع لگاریتمی :

$z = |z| e^{i\theta}$

$$\operatorname{Ln} z = ?$$

$$= \operatorname{Ln} |z| e^{i(\theta \pm 2k\pi)} = \operatorname{Ln}|z| + \operatorname{Ln} e^{i(\theta \pm 2k\pi)}$$

$$= \operatorname{Ln}|z| + i(\theta \pm 2k\pi) \underbrace{\operatorname{Ln} e}_{1}$$

مثال ۵) مطلوبست محا سبه مقدار روبرو.

$$w = z^2 = i^i$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Ln}} \operatorname{Ln} w = \operatorname{Ln} i^i \Rightarrow \operatorname{Ln} w = i \operatorname{Ln} i$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln} w = i \operatorname{Ln} e^{i(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln} w = \underbrace{i \times i}_{i^2 = -1} (\tfrac{\pi}{2} \pm 2k\pi) \underbrace{\operatorname{Ln} e}_{1}$$

$$\operatorname{Ln} w = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \Rightarrow \operatorname{Ln} z^2 = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{Ln}|z| e^{i\theta} = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}|z| + i\theta = -\frac{\pi}{4} \pm k\pi$$

$$\operatorname{Ln}|z| = -\frac{\pi}{4} \pm k\pi \Rightarrow |z| = e^{-\frac{\pi}{4} \pm k\pi}$$

$$\Rightarrow z = e^{-\frac{\pi}{4} \pm k\pi} \qquad \theta = 0$$

توابع لگاریتمی منفی :

$$\ln(-4) = \ln\left(4e^{i(\pi \pm 2k\pi)}\right)$$

$$= \ln 4 + \ln e^{i(\pi \pm 2k\pi)}$$

مشتق گیری :

شرط لازم برای مشتق گیری، پیوستگی می باشد

۱. تابع در آن نقطه دارای مقدار مشخص باشد

۲. حد آن مقدار مشخص باشد.

۳. حد آن برابر مقدار آن تابع باشد

شرط پیوستگی تابع :

۱. تابع در نقطه z_0 دارای مقدار مشخص باشد

۲. حد تابع در نقطه z_0 وجود داشته باشد.

۳. حد تابع در نقطه z_0 برابر با تابع در نقطه z_0 باشد.

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

مثال ۵)

$$\sin \frac{1}{z}$$

شرط اول وجود ندارد

$z = 0$ بنابراین در $z=0$ پیوسته نمی باشد

مثال ۶)

$$f(z)=\begin{cases}1 & z=0\\ \sin\frac{1}{z} & z\neq 0\end{cases}$$

پیوستگی در نقطه صفر بررسی شود.

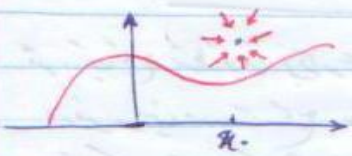
① $z_0=1$ ② $\lim_{z\to 0} f(z)=\infty$ $\boxed{\times}$

مثال ۷)

$$f(z)=\begin{cases}1 & z=0\\ z^2+2z+4 & z\neq 0\end{cases}$$

پیوستگی در نقطه صفر بررسی شود.

شرط اول: $z_0=1$ ☑ / شرط دوم: $\lim_{z\to 0} f(z)=4$ ☑ / شرط سوم: $4\neq 1$ $\boxed{\times}$



$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$$

$$w=f(z)=u+iv=f(z)$$
$$=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$z+\Delta z=x+\Delta x+i(y+\Delta y)$$

$$f(z+\Delta z)=u(x+\Delta x,\,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,\,y+\Delta y)$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x+\Delta x,\,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,\,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

با توجه به پیوستگی تابع مشتق پذیری ها:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\,\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i\,\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y}$$

$$= -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

اگر در یک تابع شرط کوشی برقرار باشد شرط لازم برای مشتق پذیری را دارد.
در غیر این صورت تابع مشتق پذیر نمی باشد.
به تابعی که شرایط کوشی - ریمان در آن صدق می کند تابع تحلیلی گویند.

شرط کوشی – ریمان :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\,\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{i\,\partial u}{\partial y}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$ شرایط کوشی ریمان

$$w = u + iv$$

مثال ۸) آیا تابع ذیل تحلیلی می باشد؟

$$w = z^2$$

$$\Rightarrow (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + i\,\underbrace{2xy}_{v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$ شرط اول کوشی-ریمان برقرار است.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y = \frac{-\partial u}{\partial y} = -(-2y) = 2y$$ شرط دوم کوشی برقرار است.

بنابراین $f(z) = z^2$ تابع تحلیلی می باشد.

تمرین ۲) آیا توابع ذیل تحلیلی می باشند؟

الف) $w = z^3$

ب) $w = |z|^2 z = (x^2+y^2)(x+iy)$

مثال ۹) در صورتی که تابع $f(z)=u+iv$ باشد و این تابع مشتق پذیر بوده و بخش حقیقی آن $u(x,y) = x^3y+2xy^2$ مطلوبست محاسبه $F'(Z)$.

چون تابع مشتق پذیر است در نتیجه مطمئنا تحلیلی نیز می باشد

در نتیجه :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow 3x^2y+2y^2-i(x^3+4xy)$$

در صورتی که معادله لاپلاس در بخش موهومی یا حقیقی تابعی صدق کند می تواند آن تابع تحلیلی باشد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

اگر تابعی تحلیلی باشد بخش حقیقی آن در معادله لاپلاس صدق می کند.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\[2ex]-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\end{cases}\Rightarrow\left\{\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial^2 y}=0\right.$$

اگر تابعی تحلیلی باشد بخش موهومی آن در معادله لاپلاس صدق می کند.

مثال ۱۰) a , b **را به گونه ای تعیین نمایید که تابع مقابل هارمونیک باشد (در معادله لاپلاس صدق کند).**

$$u(x,y) = \sin ax \; sh\, by$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ [illegible] برقرار است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a \cos ax \; ch\, by\right) = -a^2 \sin ax \; sh\, by$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(b \sin ax \; \sinh by\right) = b^2 \sin ax \; sh\, by$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-a^2 + b^2) \sin a \; sh\, by = 0$$

$$\Rightarrow -a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = \pm b$$ شرط هارمونیک بودن

تمرین ۳) آیا تابع زیر تحلیلی است؟

$$w = e^z$$