فصل پنجم

انتگرال چندگانه

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲

AvaEducation16.blog.ir
AvaEducation16@gmail.com
@AvaEducation16
@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.

- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.

- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.

- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.

- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۴

۲ مروری بر چند انتگرال نامعین ۵

۳ انتگرال روی سطح مستطیلی ۷

۴ انتخاب عنصر دیفرانسیلی ۱۱

۵ مثال‌های تکمیلی ۱۴

۶ انتگرال در مختصات قطبی ۲۰

۷ تغییر متغیر در انتگرال دوگانه ۲۶

۸ محاسبه انتگرال‌های سه‌گانه ۳۱

۱.۸ انتگرال سه‌گانه در مختصات دکارتی ۳۱

۲.۸ انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای ۳۶

۳.۸ انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی ۴۱

۹ تمرین ۴۴

پیشگفتار

این فایل شامل مطالب کلاس ریاضی ۲ دانشگاه است که در ترم‌های گذشته تدریس شده و در سایت teacher16.blog.ir ارائه شده بود. اکنون به جهت استفاده عمومی در دسترس مخاطبان خواهد بود. در انتهای فایل، تمریناتی جهت خود ارزیابی دانشجویان اضافه شده که حل آن‌ها بسیار توصیه می‌گردد. لازم به ذکر است فایل حل تمرینات در زمان مناسب در سایت قرار می‌گیرد. با آرزوی آنکه مطالب ارائه شده برای دانشجویان محترم مفید باشد.

۱ مقدمه

در انتگرال یک متغیره، تعریف تغییرات عنصر دیفرانسیل روی یک بازه بود. اما در انتگرال دوگانه و سه‌گانه، عنصر دیفرانسیل به ترتیب روی یک سطح یا یک حجم انتخاب می‌شود. موضوع مهم در این نوع انتگرال، انتخاب کران مناسب یا تغییر کران‌هاست به طوری که انتگرال ساده‌تر حل شود. در ادامه به مرور برخی روابط انتگرالی تک‌متغیره پرداخته می‌شود. سپس مطالب مربوط به انتگرال دوگانه و سه‌گانه ارائه می‌گردند. همچنین برای حل برخی انتگرال‌ها نیاز به تبدیل دستگاه مختصات به قطبی یا استفاده از تغییر متغیر می‌باشد. اینها از دیگر مباحثی هستند که در این فایل ارائه خواهند شد.

۲ مروری بر چند انتگرال نامعین

در این بخش به دلیل آنکه از انتگرال نامعین استفاده خواهد شد، چند رابطه مهم مربوط به انتگرال مرور می‌شود.

$$\begin{aligned}
\int k\mathrm{d}x =& kx + C \\
\int x^n \mathrm{d}x =& \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad n \neq -1 \\
\int e^{ax}\mathrm{d}x =& \frac{1}{a}e^{ax} + C \\
\int \sin ax \mathrm{d}x =& -\frac{1}{a}\cos ax + C \\
\int \cos ax \mathrm{d}x =& \frac{1}{a}\sin ax + C \\
\int (1+\tan^2 x)\mathrm{d}x =& \tan x + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =& \tan^{-1} x + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} =& \sin^{-1} x + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x} =& \ln|x| + C \\
\int a^x \mathrm{d}x =& \frac{1}{\ln a}a^x + C \\
\int \tan x \mathrm{d}x =& -\ln|\cos x| + C \\
\int u' f'(u)\mathrm{d}x =& f(u) + C
\end{aligned}$$

علاوه بر روابط فوق، از تکنیک‌هایی چون جزء به جزء، توابع کسری، تغییر متغیر، تبدیلات قطبی، تغییر متغیر مثلثاتی و ... برای حل انتگرال‌های مختلف استفاده می‌شود.

مثال ۱ پاسخ انتگرال‌های نامعین زیر را بدست آورید.

الف- $\int (x^3 - \sqrt[5]{x^3})\mathrm{d}x$ ب- $\int (x-1)^7\mathrm{d}x$ ج- $\int \sqrt{3x-2}\mathrm{d}x$ د- $\int (\sin 2x - \frac{x^4}{1+x^5})\mathrm{d}x$

پاسخ:

الف-

$$\int (x^3 - \sqrt[5]{x^3})\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + C$$

ب- با تغییر متغیر $x-1=u, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$

$$\int (x-1)^7\mathrm{d}x = \int u^7\mathrm{d}u = \frac{1}{8}u^8 + C = \frac{1}{8}(x-1)^8 + C$$

ج- با تغییر متغیر $3x-2=u, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}u$

$$\int \sqrt{3x-2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\frac{1}{3}\mathrm{d}u = \frac{1}{3}(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}) + C = \frac{2}{9}(3x-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

د- برای جمله اول مشکلی وجود ندارد اما برای انتگرال از جمله دوم باید از تغییر متغیر $1+x^5=u$ که منجر به $5x^4\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ می‌شود استفاده نمود:

$$\int \sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$

$$\int \frac{x^4}{1+x^5}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{5}\ln u + C_2 = \frac{1}{5}\ln(1+x^5) + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \int (\sin 2x - \frac{x^4}{1+x^5})\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{5}\ln(1+x^5) + C$$

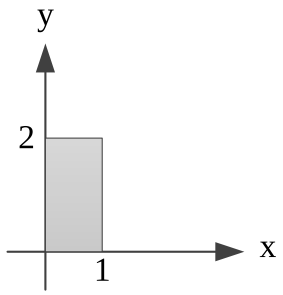
۳ انتگرال روی سطح مستطیلی

سطح مستطیل ساده‌ترین سطح برای انتگرال دوگانه می‌باشد. انتخاب عنصر دیفرانسیلی عموماً منجر به حل ساده یا پیچیده مسئله نمی‌شود. با تعمیم این روش می‌توان انتگرال سه‌گانه با کران مکعب را هم به سادگی حل کرد. در مثال زیر سطح مورد نظر برای یک انتگرال مستطیل است.

مثال ۲ حاصل انتگرال دوگانه زیر را بدست آورید.

$$\int_0^2\int_0^1 (2x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

پاسخ: در این نوع انتگرال‌ها چون بازه از قبل داده شده بر حسب عدد است، تفاوتی بین $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ و $\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ وجود نخواهد داشت. همواره این نوع از بازه‌ها برای انتگرال دو بعدی یک مستطیل و برای انتگرال سه بعدی یک مکعب هستند. به عنوان مثال در این سوال مقادیر متغیرها در بازه‌های $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 2$ تعریف شده‌اند که اگر این ناحیه روی صفحه دو بعدی رسم شود، یک مستطیل را نشان می‌دهد. (شکل زیر)



$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_0^1 (2x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(2x+y)^3\right]_0^1 \mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 \left((2+y)^3 - y^3\right)\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}(2+y)^4 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^2\\
&= \frac{1}{24}\left(4^4 - 2^4 - 2^4 + 0^4\right) = \frac{28}{3}
\end{aligned}$$

مثال ۳ حاصل انتگرال دوگانه زیر را بدست آورید.

$$\int_1^4\int_1^2 (\frac{x}{y}+\frac{y}{x})\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

پاسخ: این سوال نیز مانند حالت قبل است:

$$\begin{aligned}\int_1^4\int_1^2 (\frac{x}{y}+\frac{y}{x})\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_1^4 \left[x\ln y+\frac{y^2}{2x}\right]_1^2 \mathrm{d}x\\ &= \int_1^4 \left((x\ln 2+\frac{2^2}{2x})-(x\ln 1+\frac{1^2}{2x})\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^4 \left(x\ln 2+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln 2+2\ln x-\frac{1}{2}\ln x\right]_1^4\\ &= 10.5\ln 2\end{aligned}$$

مثال ۴ حاصل انتگرال دوگانه زیر را بدست آورید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\cos(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\cos(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin(x+2y)\right]_0^{\pi}\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(\pi+2y)-\sin(0+2y)\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin 2y\mathrm{d}y\\ &= [\cos 2y]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -2\end{aligned}$$

مثال ۵ حاصل انتگرال دوگانه زیر را بدست آورید.

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 \Big[xe^x \ln y \Big]_1^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(xe^x \ln 2 - xe^x \ln 1 \right) \mathrm{d}x \\
&= \ln 2 \int_0^1 xe^x \mathrm{d}x \\
&= \ln 2 \left[(x-1)e^x \right]_0^1 \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

در محاسبه انتگرال $\int xe^x \mathrm{d}x$ از روش جز به جز استفاده شد.

مثال ۶ حاصل انتگرال دوگانه زیر را بدست آورید.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}} \\
&= \int_0^1 \Big[\sin^{-1} x \Big]_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{2} \Big[\sin^{-1} y \Big]_0^1 \\
&= \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

مثال ۷ حاصل انتگرال سه‌گانه زیر را بدست آورید.

$$\int_0^3\int_{-1}^1\int_{-1}^0 (x^2y^3+z^2y^4)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}\int_0^3\int_{-1}^1\int_{-1}^0 (x^2y^3+z^2y^4)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^3\int_{-1}^1\left[x^2y^3z+\frac{1}{3}z^3y^4\right]_{-1}^0\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_0^3\int_{-1}^1(x^2y^3+\frac{1}{3}y^4)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_0^3\left[\frac{1}{4}x^2y^4+\frac{1}{15}y^5\right]_{-1}^1\mathrm{d}x\\ &= \int_0^3\frac{2}{15}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

مثال ۸ حاصل انتگرال سه‌گانه زیر را بدست آورید.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R \rho^2\sin\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R \rho^2\sin\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^R\sin\phi\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{3}R^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\phi\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{3}R^3\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{3}R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{3}R^3(2\pi)\\ &= \frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned}$$

محاسبه فوق اثبات حجم کره به شعاع R است که در ادامه با جزئیات مطرح خواهد شد.

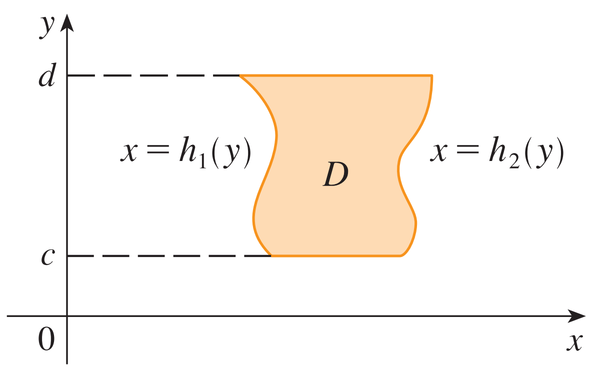
کران به کار رفته در مثال‌های اخیر یک سطح ساده مکعب بود. در حالت کلی با توجه به سطوح انتگرال‌گیری باید عنصر مناسب دیفرانسیلی انتخاب گردد و این موضوع مهم‌ترین بخش حل انتگرال چندگانه است.

۴ انتخاب عنصر دیفرانسیلی

همان طور که بیان شد انتخاب عنصر دیفرانسیلی یکی از مهمترین بخش‌های حل انتگرال دوگانه و سه‌گانه می‌باشد.
برای انتخاب عنصر دیفرانسیلی و بازه باید به این نکته توجه داشت که در مختصات دکارتی عنصر دیفرانسیلی $\mathrm{d}x$ یا $\mathrm{d}y$ است. انتگرال روی سطح دارای عنصر دیفرانسیلی $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ یا $\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ می‌باشد. اینکه کدام زودتر انتخاب شوند و کران مربوط به آن چگونه باشد به یکسان بودن تابع کران پایین و بالا در طول انتگرال‌گیری برای یک عنصر دیفرانسیلی برمی‌گردد.
در حالت کلی سطوح انتگرال‌گیری در مختصات دکارتی حداقل به سه نوع تقسیم می‌شوند که برای هر یک باید عنصر دیفرانسیلی مناسب به کار بسته شود:

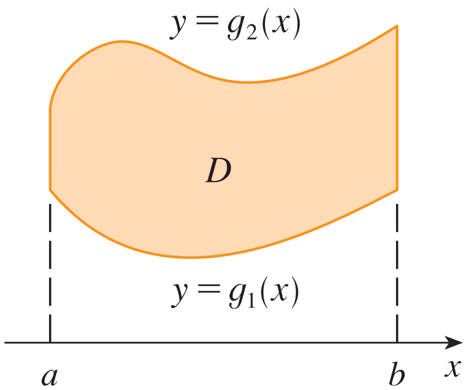
- در نوع اول کران بالا و پایین برای x تابعی از y می‌باشد. در این موارد ساده‌تر آنست که عبارت زیر محاسبه شود:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



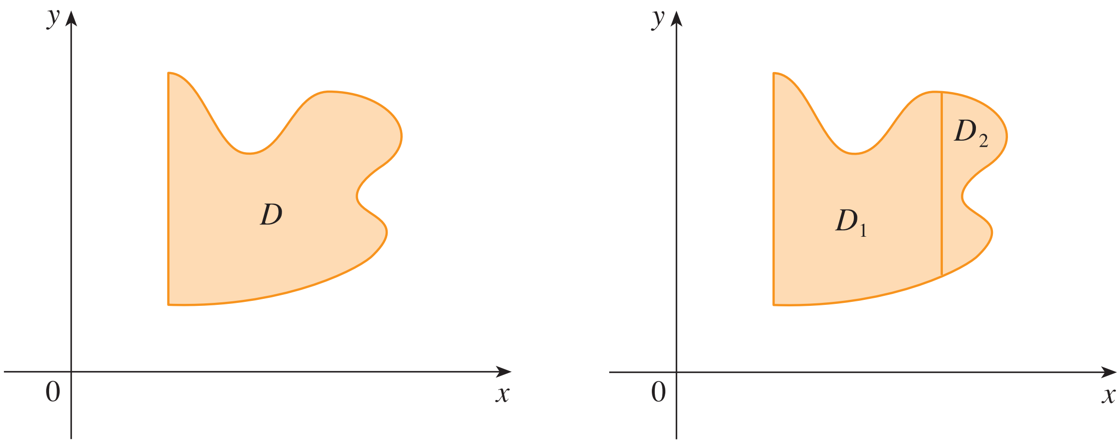
- در نوع دوم کران بالا و پایین برای y تابعی از x می‌باشد. در این موارد ساده‌تر آنست که عبارت زیر محاسبه شود:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

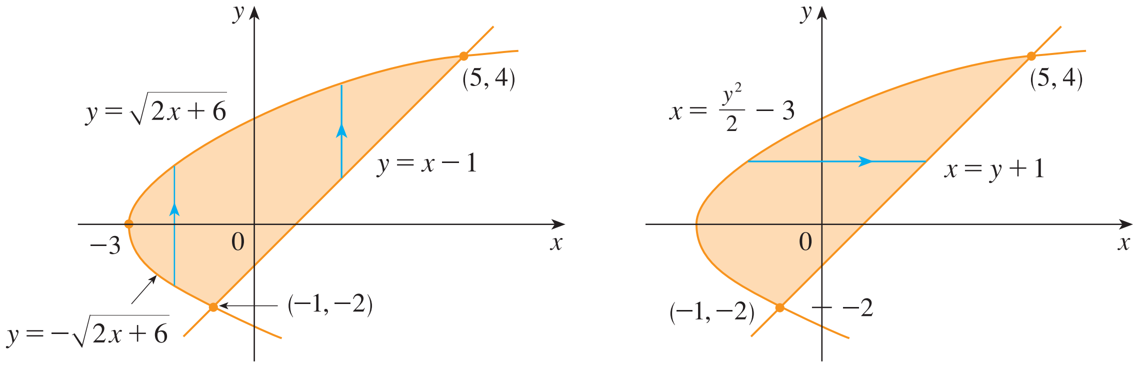


- در نوع سوم کران بالا و پایین هم برای y تابعی از x است و هم برای x تابعی از y. در این موارد باید انتگرال به دو قسمت تبدیل شود:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



مثال ۹ ترتیب انتگرال‌گیری در شکل زیر را برای انتگرال $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$ مشخص کنید.



پاسخ: هر کدام از عناصر دیفرانسیل سطح $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ یا $\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ که انتخاب شوند باید بازه‌های متناسب برای آن تعیین گردند. برای این حالت خاص (برای عکس سمت چپ) چون اگر یک عنصر $\mathrm{d}y$ از کران پایین به بالا حرکت کند دارای دو کران پایین می‌باشد (کران‌های پایین یکسان نیستند) نمی‌توان با یکبار انتگرال‌گیری آن را حل نمود. بلکه باید انتگرال تابع دلخواه را به دو قسمت تبدیل کرد:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A=\int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

اما اگر ابتدا عنصر $\mathrm{d}x$ برای انتگرال‌گیری انتخاب شود، تنها با یک انتگرال قابل محاسبه است.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A=\int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

۵ مثال‌های تکمیلی

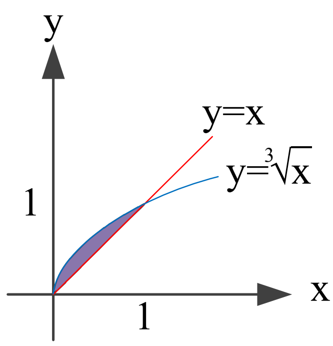
مثال ۱۰ انتگرال‌های زیر را روی نواحی مشخص شده بدست آورید.

الف- $\int_0^1 \int_x^{\sqrt[3]{x}} \sqrt{1-y^4}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

پاسخ: در این نوع انتگرال‌ها بازه از قبل داده شده است، اما محاسبه انتگرال پیچیده است. یکی از تکنیک‌ها برای حل انتگرال تغییر ترتیب انتگرال‌گیری از $\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ به $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ یا بالعکس است. واضح است که در صورت تغییر ترتیب، کران‌های انتگرال نیز باید اصلاح گردد. به عنوان نمونه در این سوال y در بازه $x \leq y \leq \sqrt[3]{x}$ قرار دارد، یعنی $x \leq y$ و $y \leq \sqrt[3]{x}$ می‌باشد. رابطه اخیر را می‌توان با رساندن دو طرف به توان سوم نوشت

$$x \geq y^3$$

بنابراین بازه جدید برای x به صورت $y^3 \leq x \leq y$ خواهد بود. همچنین در این مثال y در بازه $0 \leq y \leq 1$ است. ترسیم این ناحیه به یافتن کران‌های جدید کمک می‌کند. (شکل زیر)



$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^{\sqrt[3]{x}} \sqrt{1-y^4}\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_{y^3}^{y} \sqrt{1-y^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[x\sqrt{1-y^4}\right]_{y^3}^{y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(y\sqrt{1-y^4} - y^3\sqrt{1-y^4}\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y\sqrt{1-y^4}\mathrm{d}y - \int_0^1 y^3\sqrt{1-y^4}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

انتگرال اول با تغییر متغیر $u=y^2$ به صورت زیر خواهد بود:

$$u=y^2,\quad \mathrm{d}u=2y\mathrm{d}y \quad\Rightarrow\quad \int_0^1 y\sqrt{1-y^4}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{8}$$

رابطه فوق انتگرال یک-چهارم دایره به شعاع واحد است که مساحت آن $\frac{\pi}{4}$ است و به دلیل ضریب $\frac{1}{2}$ مقدار آن $\frac{\pi}{8}$ شده است.

برای انتگرال دوم داریم:

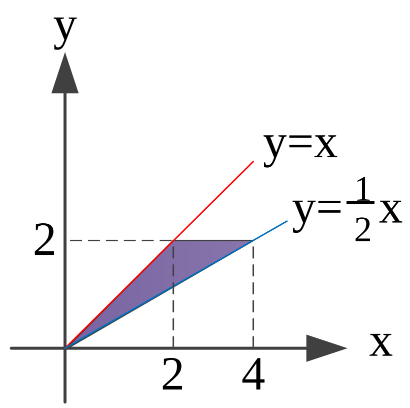
$$\int_0^1 y^3(1-y^4)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{-4}\times\frac{2}{3}(1-y^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

در نتیجه انتگرال صورت مسئله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\int_0^1\int_x^{\sqrt[3]{x}}\sqrt{1-y^4}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6}$$

ب- $\displaystyle\int_0^2\int_y^{2y} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

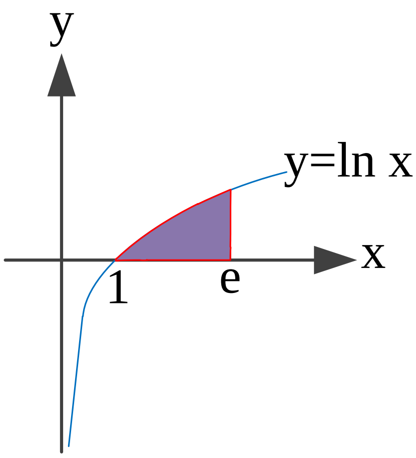
پاسخ: اگرچه این مثال به سادگی با انتگرال‌گیری حل می‌شود، اما با رسم نمودار در صفحه می‌توان محدوده انتگرال‌گیری را تعیین نمود تا در صورت نیاز ترتیب آن را عوض کرد. در این سوال بازه انتگرال‌گیری برای x به صورت $2y\le x\le y$ است.



$$\begin{aligned}\int_0^2\int_y^{2y} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}y\right]_y^{2y}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^2 3y^3\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{8}\left[y^4\right]_0^2\\&=6\end{aligned}$$

ج- $\iint_D x^3 \mathrm{d}A$ که در آن $D = \{(x,y)|1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq \ln x\}$

پاسخ: در این سوال چون ترتیب انتگرال‌گیری داده نشده است، باید ترتیبی را انتخاب کرد که اولاً محاسبه انتگرال ساده‌تر باشد و ثانیاً تنها با تعیین یک کران بتوان عمل انتگرال‌گیری را انجام داد. با رسم ناحیه داده شده خواهیم داشت:



با توجه به شکل می‌توان بازه دیگری نیز برای همین ناحیه تعیین کرد:

$$y \leq \ln x \quad \Rightarrow \quad x \geq e^y$$

همچنین بیشترین مقدار x برابر با e است و بدین ترتیب بازه جدید به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

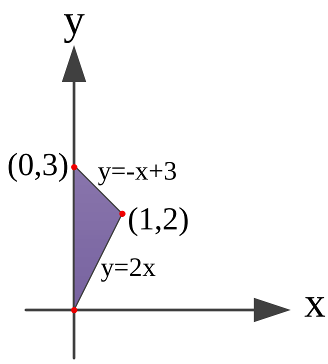
$$e^y \leq x \leq e, \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\begin{aligned}
\iint_D x^3 \mathrm{d}A &= \int_1^e \int_0^{\ln x} x^3 \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_{e^y}^e x^3 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4}\right]_{e^y}^e \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(e^4 - e^{4y}\right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4} \left[e^4 y - \frac{1}{4} e^{4y}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4} \left(e^4 - \frac{1}{4} e^4 + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3e^4 + 1}{16}
\end{aligned}$$

نکته: اگر ترتیب انتگرال را عوض نمی‌کردیم در همان ابتدا عبارت $\int x^3 \ln x \mathrm{d}x$ ظاهر می‌شد که انتگرال گرفتن از آن دشوار است.

د- $\iint_D 2xy\mathrm{d}A$ که در آن D ناحیه داخل یک مثلث به رئوس $(0,0)$، $(1,2)$ و $(0,3)$ است.

پاسخ: ابتدا باید ناحیه مذکور رسم شود:



در شکل خط عبوری از نقاط داده شده نیز ارائه شده است. در نتیجه این ناحیه به صورت زیر قابل نمایش است:

$$2x \le y \le -x+3, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$\begin{aligned}
\iint_D 2xy\mathrm{d}A &= \int_0^1 \int_{2x}^{-x+3} 2xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[xy^2\right]_{2x}^{-x+3} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x(-x+3)^2 - x(2x)^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(-3x^3 - 6x^2 + 9x\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

ه- $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

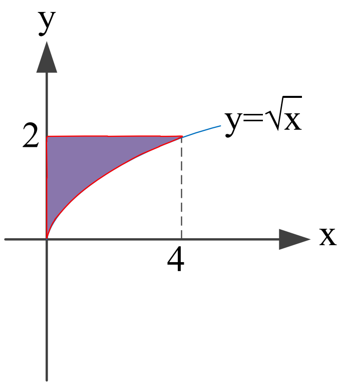
پاسخ: چون انتگرال گرفتن از $\frac{1}{y^3+1}$ نسبت به y پیچیده است، باید ترتیب انتگرال‌گیری عوض شود و در نتیجه باید کران انتگرال نیز تغییر کند.

$$\sqrt{x} \le y \le 2, \quad \Rightarrow \quad x \le y^2$$

برای y هم بازه زیر برقرار است:

$$0 \le y \le 2$$

این تغییر کران با رسم شکل، ساده‌تر تعیین می‌شود.



$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{1}{y^3+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \frac{y^2}{y^3+1}\mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{1}{3}\ln(y^3+1)\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(\ln(2^3+1)-\ln(0^3+1)\right) \\ &= \frac{1}{3}\ln 9\end{aligned}$$

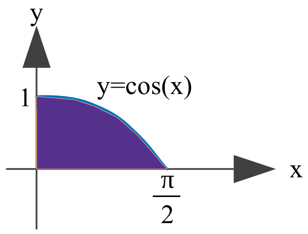
و- $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} \cos^2(\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

پاسخ: حل انتگرال در همین صورت کنونی پیچیده است. پس می‌توان ترتیب عنصر دیفرانسیلی را تغییر داد. با توجه به کران‌ها:

$$0 \le x \le \cos^{-1} y,\ 0 \le y \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le y \le \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

در شکل زیر، ناحیه مورد انتگرال نمایش داده شده است.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} \cos^2(\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} \cos^2(\sin x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^2(\sin x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$



از تغییر متغیر $u = \sin x$ استفاده می‌شود. در نتیجه $\mathrm{d}u = \cos x \mathrm{d}x$. همچنین کران جدید به صورت زیر است.

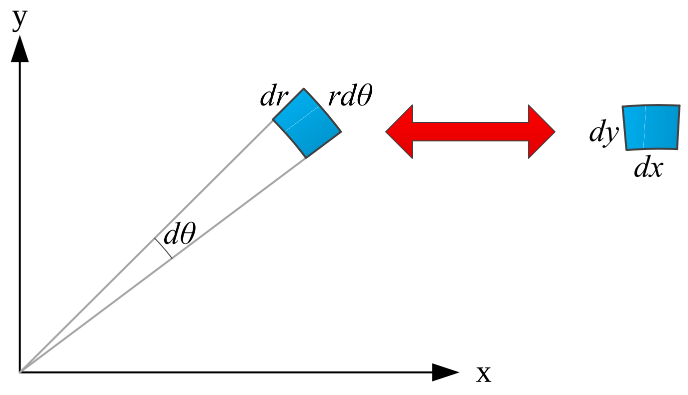
$$x = 0, \quad \Rightarrow \quad u = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad u = 1$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^2(\sin x) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \cos^2 u \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1 + \cos 2u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left[u + \frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin 2
\end{aligned}$$

۶ انتگرال در مختصات قطبی

عنصر دیفرانسیل در مختصات دکارتی $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ یا $\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ است. اما در مختصات قطبی با توجه به شکل زیر، این عنصر دیفرانسیل $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ است.



$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

در نتیجه شکل انتگرال به صورت زیر خواهد بود:

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A f(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

عموما برای تغییر x و y از تغییر متغیر $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ استفاده می‌شود. البته گاهی تغییر متغیر به فرم دیگر است که در ادامه بحث خواهد شد.

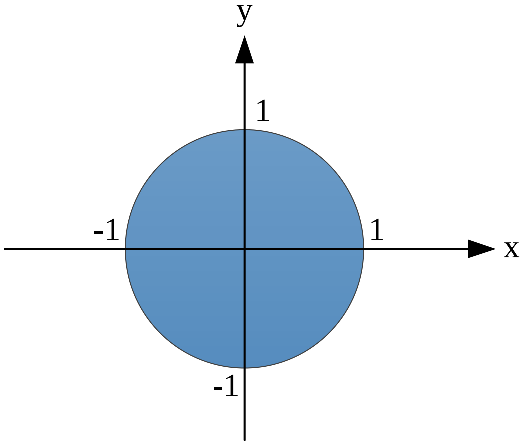
مثال ۱۱ حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

الف- $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}A$ که در آن R ناحیه $x^2+y^2 \leq 1$ است.

پاسخ: ناحیه مورد انتگرال داخل یک دایره است. در مواردی که ناحیه یا تابع مورد انتگرال دایروی باشد می‌توان از انتگرال در مختصات قطبی استفاده نمود.

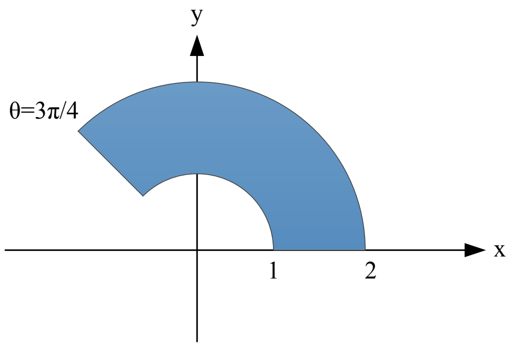
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

شکل ناحیه مورد انتگرال به صورت زیر است. همان طور که مشخص است مقدار شعاع در این ناحیه از صفر تا 1 تغییر می‌کند. همچنین زاویه θ از صفر تا 2π تغییر می‌کند.



$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^1\right)\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-e^{-1})\mathrm{d}\theta$$
$$= \left[\frac{1}{2}(1-e^{-1})\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}(1-e^{-1})(2\pi)$$
$$= \pi(1-e^{-1})$$

ب- $\iint_D \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}A$ که در آن D بخشی از یک قطاع دایره و به شکل زیر می‌باشد.



پاسخ: با استفاده از انتگرال در مختصات قطبی و تغییر متغیرهای

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

و با توجه به اینکه مقدار شعاع ناحیه انتگرال‌گیری از 1 تا 2 و زاویه θ از صفر تا $\frac{3\pi}{4}$ تغییر می‌کند، انتگرال به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}A &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 \frac{2r\cos\theta}{\sqrt{r^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 2r\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta\left(\Big[r^2\Big]_1^2\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} 3\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[3\sin\theta\Big]_0^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

ج- $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ که در آن D ناحیه درون دایره $x^2+y^2=2x$ است.

پاسخ: ابتدا ناحیه داده شده را برای رسم کردن به فرم استاندارد ساده می‌کنیم:

$$x^2+y^2=2x, \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2x\pm 1=0, \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2+y^2=1$$

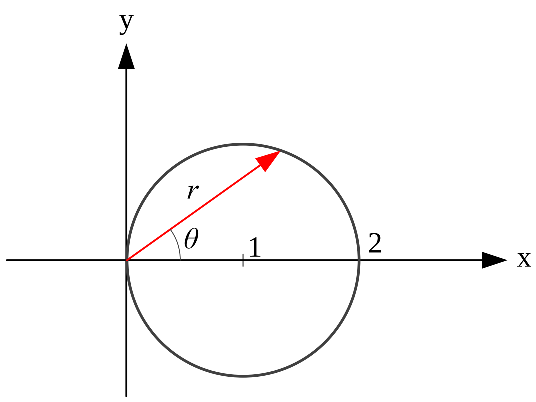
با استفاده از انتگرال در مختصات قطبی و تغییر متغیرهای

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta$$

نمایش دایره فوق در مختصات قطبی به صورت زیر است:

$$x^2+y^2=2x \quad \Rightarrow \quad r^2=2r\cos\theta, \quad \Rightarrow \quad r=2\cos\theta$$

با رسم شکل این دایره مشاهده می‌شود مقدار شعاع (با مقایسه با مبدا مختصات) از صفر تا $2\cos\theta$ تغییر می‌کند. همچنین زاویه θ با توجه به شکل از $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ متغیر است.



$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} \frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{4-r^2}}\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\Big[-\frac{1}{2}(2)(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{2\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\sqrt{4-(2\cos\theta)^2}\right)\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2-2|\sin\theta|\right)\mathrm{d}\theta\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2-2|\sin\theta|\right)\mathrm{d}\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\
&= 4\Big[\theta+\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= 4(\frac{\pi}{2}-1)\\
&= 2\pi-4
\end{aligned}
$$

د- $\iint_D \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x+y)^2}\mathrm{d}A$ که در آن D ناحیه درون منحنی $x^2+y^2=x+y$ است.

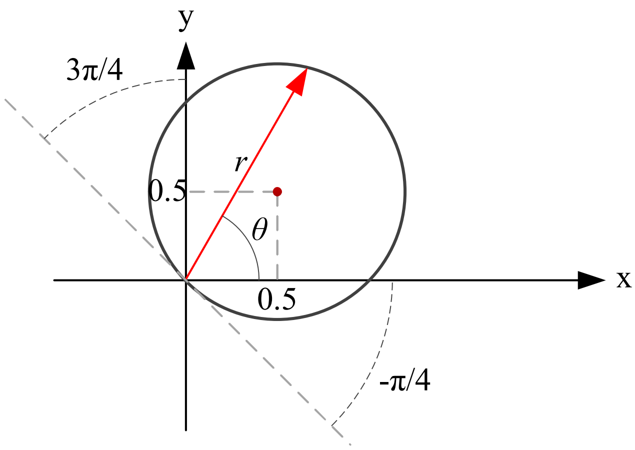
پاسخ: ابتدا ناحیه داده شده را برای رسم کردن به فرم استاندارد ساده می‌کنیم:

$$x^2+y^2=x+y, \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-x-y\pm\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}=0, \quad \Rightarrow \quad (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$$

با استفاده از انتگرال در مختصات قطبی و تغییر متغیرهای $x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta$ نمایش دایره فوق در مختصات قطبی به صورت زیر است:

$$x^2+y^2=x+y \quad \Rightarrow \quad r^2=r\cos\theta+r\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad r=\cos\theta+\sin\theta$$

با رسم شکل این دایره مشاهده می‌شود مقدار شعاع از صفر تا $\cos\theta+\sin\theta$ تغییر می‌کند. همچنین زاویه θ با توجه به شکل از $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{3\pi}{4}$ متغیر است.



$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x+y)^2}\mathrm{d}A &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} \frac{r^3(r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta)}{(r\cos\theta+r\sin\theta)^2} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} \frac{r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{\cos\theta+\sin\theta} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos\theta+\sin\theta)^3}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\left[\sin\theta-\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{3}(\sin\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4})-\frac{1}{3}(\sin(-\frac{\pi}{4})-\cos(-\frac{\pi}{4})) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

۷ تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

اگر x و y تابعی از u و v باشند، آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_{D'} f\Big(x(u,v), y(u,v)\Big)|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

که در آن

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

دترمینان ماتریس ژاکوبین نامیده می‌شود و باید ناصفر باشد. این دترمینان ماتریس به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

نکته: گاهی u و v به عنوان تابع در نظر گرفته می‌شوند و x و y متغیر هستند. در این صورت یا می‌توان x و y را بر حسب u و v بدست آورد یا آنکه از رابطه

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

استفاده کرد. در واقع همواره رابطه زیر برقرار است:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

مثال ۱۲ حاصل انتگرال‌های زیر را با تغییر متغیر مناسب بدست آورید.

الف- $\iint_R (x^2 + \frac{y^2}{4})^3 \mathrm{d}A$ که در آن R ناحیه داخل بیضی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ است.

پاسخ: ناحیه بیضی داده‌شده را با تغییر متغیر می‌توان به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل کرد:

$$\frac{x}{2} = r\cos\theta, \quad \frac{y}{4} = r\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad x = 2r\cos\theta, \quad y = 4r\sin\theta$$

برای اینکه تغییر متغیر از متغیرهای x و y به r و θ اتفاق بیفتد، دترمینان ماتریس ژاکوبین باید تعیین شود:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ 4\sin\theta & 4r\cos\theta \end{vmatrix} = 8r$$

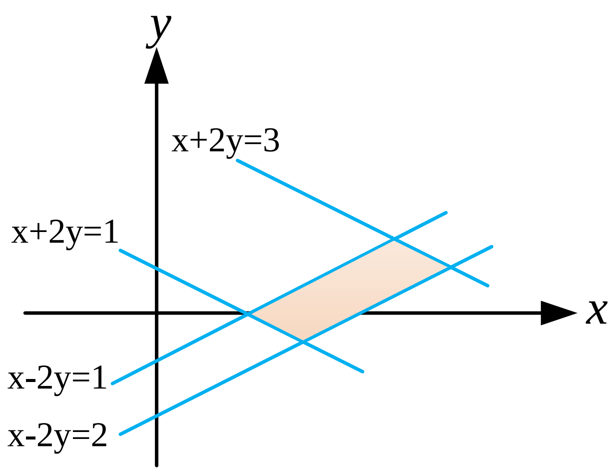
$$\begin{aligned}\iint_R (x^2+\frac{y^2}{4})^3 \mathrm{d}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r^2)^3 8r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 512r^7\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\left[64r^8\right]_0^1\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi} 64\mathrm{d}\theta\\ &= 128\pi\end{aligned}$$

ب- $\iint_D (\frac{x-2y}{x+2y})^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ که در آن D ناحیه محصور به خطوط $x-2y=1$، $x-2y=2$، $x+2y=1$ و $x+2y=3$ می‌باشد.

پاسخ: u و v را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = x-2y, \quad v = x+2y$$

ناحیه داده شده به صورت شکل زیر است:



در این مسئله چون u و v به عنوان تابع و x و y به عنوان متغیر ظاهر گشته‌اند باید از معکوس دترمینان ماتریس ژاکوبین استفاده شود. به خاطر داشته باشیم $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ و $\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4, \quad \Rightarrow \quad |J|=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\iint_D (\frac{x-2y}{x+2y})^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^3 \int_1^2 (\frac{u}{v})^2 \frac{1}{4} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{4}\int_1^3 \int_1^2 \frac{u^2}{v^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{4}\int_1^3 \frac{1}{v^2}\left(\left[\frac{1}{3}u^3\right]_1^2\right)\mathrm{d}v \\ &= \frac{7}{12}\int_1^3 v^{-2}\mathrm{d}v \\ &= \frac{7}{12}\left[-v^{-1}\right]_1^3 \\ &= \frac{7}{12}(1-\frac{1}{3}) \\ &= \frac{7}{18}\end{aligned}$$

ج- $\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2y}$ که در آن D ناحیه محصور به خطوط $y=x$، $y=2x$، $x+y=2$ و $2x+y=2$ می‌باشد.

پاسخ: باید متغیرهای جدید را طوری در نظر گرفت که تا حد امکان بازه انتگرال‌گیری دارای کران‌های ثابت باشد. مثلا در اینجا $u=\frac{y}{x}$ در نظر گرفته می‌شود. با توجه دو خط اول که ناحیه D را محصور نموده‌اند خواهیم داشت

$$1 \le u \le 2$$

اما دو خط دوم طوری نیستند که بتوان کران ثابت ایجاد نمود. در نتیجه مجبوریم از ویژگی‌های مسئله استفاده کنیم. این روش در تمام مسائل یکسان نیست، اما از همین ایده استفاده می‌شود. با تقسیم کردن بر x در دو خط دوم رابطه زیر بدست می‌آید:

$$1+\frac{y}{x}=\frac{2}{x}, \quad 2+\frac{y}{x}=\frac{2}{x}$$

پس می‌توان متغیر جدید را $v=\frac{1}{x}$ تعریف نمود. کران v به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2}(1+u) \le v \le \frac{1}{2}(2+u)$$

به طور خلاصه متغیرهای جدید به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$u=\frac{y}{x}, \quad v=\frac{1}{x}$$

در این مثال چون u و v به عنوان تابع و x و y به عنوان متغیر ظاهر گشته‌اند باید از معکوس دترمینان ماتریس ژاکوبین استفاده شود.

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\\ -\frac{1}{x^2} & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{x^3},\quad \Rightarrow\quad |J|=x^3$$

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2y}&=\int_1^2\int_{\frac{1}{2}(1+u)}^{\frac{1}{2}(2+u)}\frac{1}{x^2y}x^3\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\&=\int_1^2\int_{\frac{1}{2}(1+u)}^{\frac{1}{2}(2+u)}\frac{x}{y}\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\&=\int_1^2\int_{\frac{1}{2}(1+u)}^{\frac{1}{2}(2+u)}\frac{1}{u}\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\&=\int_1^2\frac{1}{u}\Big(\frac{1}{2}(2+u)-\frac{1}{2}(1+u)\Big)\mathrm{d}u\\&=\int_1^2\frac{1}{2u}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\Big[\ln u\Big]_1^2\\&=\frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

د- $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ که در آن D ناحیه درون یک بیضی با رابطه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ می‌باشد.

پاسخ: یک بیضی با تغییر متغیر تبدیل به یک دایره می‌شود. کافیست $\frac{x}{a}=r\cos\theta$ و $\frac{y}{a}=r\sin\theta$ انتخاب شود. با جایگذاری این دو متغیر در رابطه بیضی خواهیم داشت $r^2=1$. در نتیجه مقدار شعاع بین 0 و 1 خواهد بود. همچنین مقدار زاویه بین 0 و 2π قرار دارد. چون از تغییر متغیر استفاده شده است باید از دترمینان ماتریس ژاکوبین برای تعیین عنصر دیفرانسیلی استفاده گردد.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ br\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr$$

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{ab}{2}r^2\right]_0^1 \mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{ab}{2}\mathrm{d}\theta\\ &= \pi ab\end{aligned}$$

ه- $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ که در آن D ناحیه درورن یک بیضی با رابطه $(x+2y)^2+4(x-3y)^2=1$ می‌باشد.

پاسخ: این بیضی دارای نمایش استاندارد نیست. با استفاده از تغییر متغیر می‌توان آن را به نمایش استاندارد در آورد.

$$u=x+2y,\quad v=x-3y,\quad \Rightarrow\quad u^2+4v^2=1,\quad \Rightarrow\quad u^2+\frac{v^2}{(\frac{1}{2})^2}=1$$

مساحت بیضی فوق که روی ناحیه دیگری به نام D' تعریف می‌شود طبق مثال قبل برابر است با $\pi ab=\frac{\pi}{2}$. اما برای تعیین انتگرال داده شده باید ژاکوبین هم محاسبه گردد:

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-5,\quad \Rightarrow\quad |J|=\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D'}\frac{1}{5}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{5}\iint_{D'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{5}(\frac{\pi}{2})\\ &= \frac{\pi}{10}\end{aligned}$$

۸ محاسبه انتگرال‌های سه‌گانه

انتگرال‌های سه‌گانه در حالت کلی مانند انتگرال‌های دوگانه محاسبه می‌شوند. کران‌ها مشخص می‌شوند و عمل‌انتگرال‌گیری با توجه به ترتیب متغیرها انجام می‌گیرد. نکته مهم در این انتگرال‌ها تعیین ناحیه انتگرال‌گیری یا کران‌هاست که عمدتاً با رسم ناحیه‌ها انجام می‌گیرد.

۱.۸ انتگرال سه‌گانه در مختصات دکارتی

عنصر دیفرانسیل حجم به صورت زیر تعریف می‌شود:

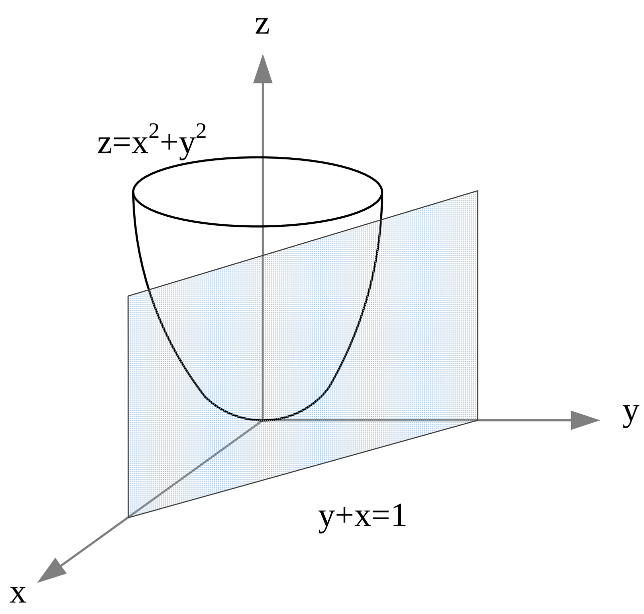
$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

البته دیگر جایگشت‌ها هم می‌تواند در نظر گرفته شوند مانند $\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

مثال ۱۳ حجم ناحیه محصور به سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ و صفحه $y + x = 1$ در ناحیه اول مختصات را بدست آورید.

پاسخ: اگر ناحیه تعریف شده رسم شود، کران‌ها مشخص خواهند شد. اگرچه از روی توضیحات مسئله نیز می‌توان کران‌ها را یافت:

$$0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x^2 + y^2$$

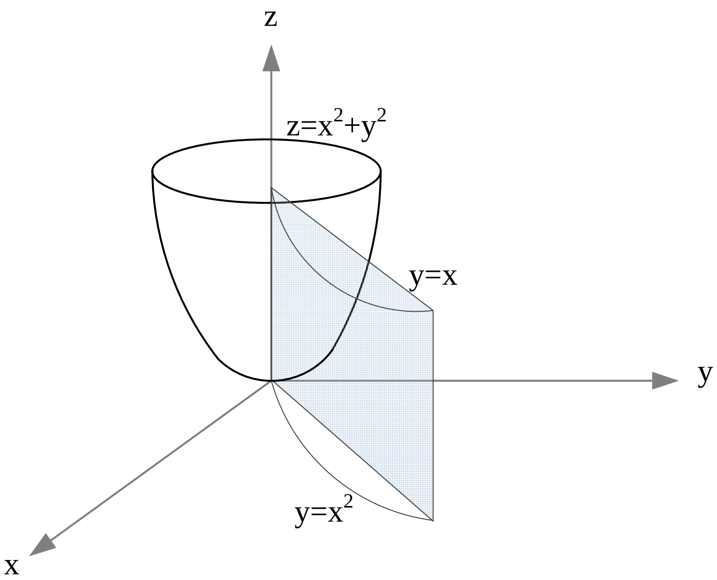


$$
\begin{aligned}
V &= \iiint \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\Big[z \Big]_0^{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\Big[x^2y + \frac{1}{3}y^3) \Big]_0^{1-x} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(1-x)^4 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

مثال ۱۴ حجم ناحیه محصور به سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ و صفحه $y = x$ و $y = x^2$ به ازای $z \geq 0$ را بدست آورید.

پاسخ: اگر ناحیه تعریف شده رسم شود، کران‌ها مشخص خواهند شد. اگرچه از روی توضیحات مسئله نیز می‌توان کران‌ها را یافت:

$$
x^2 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq x^2 + y^2
$$

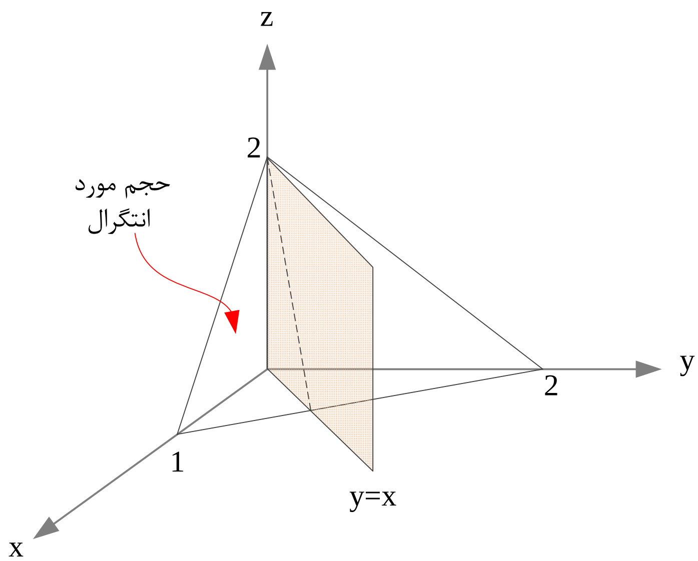


$$
\begin{aligned}
V &= \iiint \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left(\Big[z \Big]_0^{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\Big[x^2y + \frac{1}{3}y^3) \Big]_{x^2}^{x} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6)\mathrm{d}x \\
&= \Big[\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7 \Big]_0^1 \\
&= \frac{3}{35}
\end{aligned}
$$

مثال ۱۵ حجم ناحیه محصور به $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$ و $y=x$ و $y=0$ و $z=0$ را بدست آورید.

پاسخ: یک نکته لازم به ذکر است که رابطه $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ معادله یک صفحه است که در نقاط $x=a,\ y=b,\ z=c$ با محورهای مختصات تقاطع دارد. اگر ناحیه تعریف شده رسم شود، کران‌ها مشخص خواهند شد. اگرچه از روی توضیحات مسئله نیز می‌توان کران‌ها را یافت:

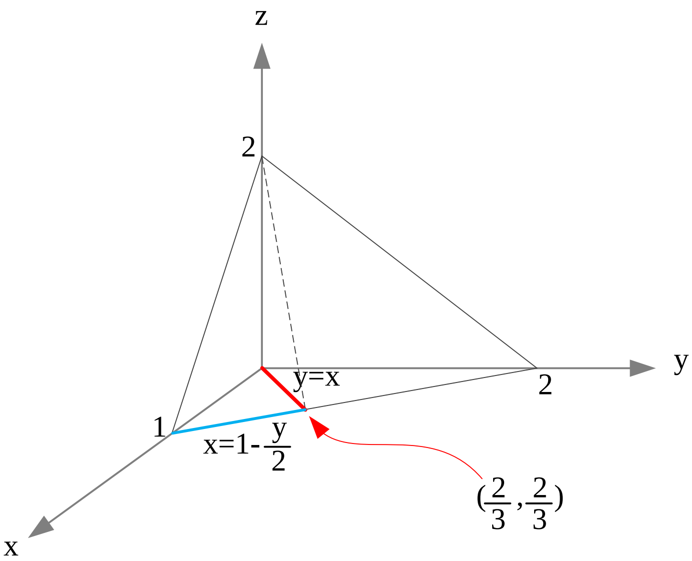
$$0\le y\le \frac{2}{3},\quad y\le x\le 1-\frac{y}{2},\quad 0\le z\le 2-y-2x$$



کران‌های فوق بدین صورت بدست آمدند. ابتدا از روی شکل مشخص است که z از پایین محدود به صفر و از بالا محدود به سقف صفحه $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$ است. با نگاه داشتن z در یک سمت و انتقال بقیه جملات به طرف دیگر رابطه زیر بدست می‌آید:

$$z=2-y-2x$$

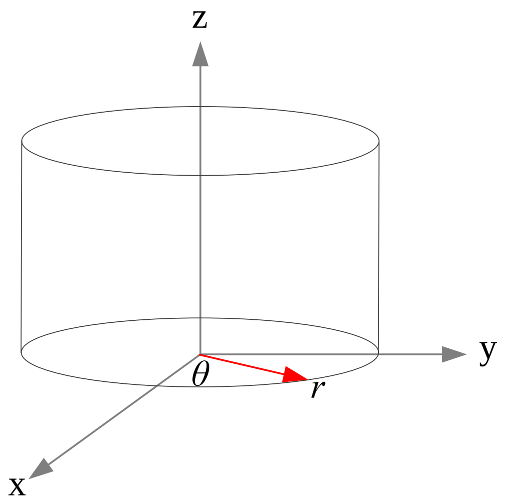
برای کران x تصویر حجم داده‌شده روی صفحه xy به صورت یک مثلث است که یکی از اضلاع آن $x=y$ و ضلع دیگر آن از برخورد صفحه $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$ با صفحه xy حاصل شده است. چون در این صفحه $z=0$ است، با جایگذاری این مقدار خواهیم داشت $x+\frac{y}{2}=1$.



$$
\begin{aligned}
V &= \iiint \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \int_y^{1-\frac{y}{2}} \int_0^{2-y-2x} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \int_y^{1-\frac{y}{2}} (2-y-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \Big[2x - yx - x^2\Big]_y^{1-\frac{y}{2}} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \Big(2\big((1-\frac{y}{2})-y\big) - y\big((1-\frac{y}{2})-y\big) - (1-\frac{y}{2})^2 + y^2\Big)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \Big(2 - 4y + \frac{5}{2}y^2 - (1-\frac{y}{2})^2\Big)\mathrm{d}y \\
&= \Big[2y - 2y^2 + \frac{5}{6}y^3 + \frac{2}{3}(1-\frac{y}{2})^3\Big]_0^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

۲.۸ انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای

اگر از تغییر متغیر $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta, z = z$ استفاده شود، با توجه به شکل زیر خواهیم داشت:



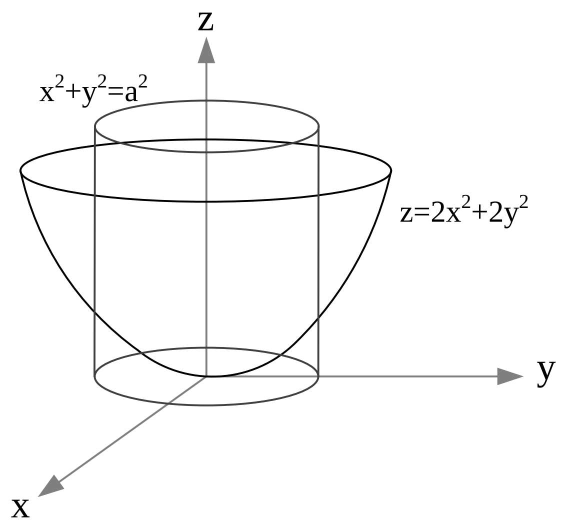
$$\iiint f(x, y, z)\mathrm{d}V = \iiint f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

مثال ۱۶ حجم محصور بالای صفحه xy و بین سهمی‌گون $z = 2x^2 + 2y^2$ و استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ را تعیین کنید.

پاسخ: با تغییر متغیر استوانه‌ای خواهیم داشت:

$$0 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2, \quad \Rightarrow \quad 0 \leq z \leq 2r^2$$

زاویه θ از صفر تا 2π شعاع ناحیه بین صفر و a تغییر خواهد کرد.



$$\begin{aligned} V &= \iiint \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{2r^2} \mathrm{d}z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} 2r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^4\mathrm{d}\theta \\ &= \pi a^4 \end{aligned}$$

مثال ۱۷ حجم بخشی از نمودار $z = 1 - 2x^2 - y^2$ که بالای صفحه xy قرار دارد را بدست آورید.

پاسخ: باید انتگرال سه‌گانه زیر برای تعیین حجم حل شود:

$$V = \iiint \mathrm{d}V = \iiint \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint_D (1 - 2x^2 - y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

در رابطه فوق، D یک بیضی است که از تقاطع نمودار با صفحه xy ایجاد می‌شود. این نمودار با رابطه $2x^2 + y^2 = 1$ نشان داده می‌شود. برای حل این انتگرال باید از روش قطبی کردن در متغیرها با اندکی تغییر استفاده نمود. مثلاً $x = \frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$.

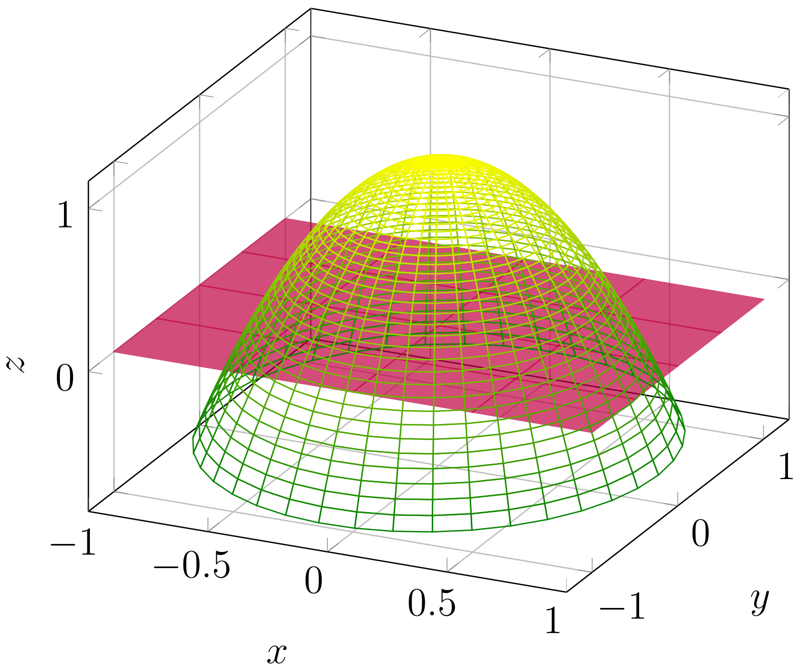
هنگامی که تغییر متغیر در انتگرال دوگانه وجود داشته باشد، باید دترمینان ماتریس ژاکوبین حساب شود.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}, \quad \Rightarrow \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

انتگرال دوگانه با تغییر متغیر به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}\iint_D (1-2x^2-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\frac{r}{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^3)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

این حجم در شکل زیر نمایش داده شده است. حجم مورد نظر بالای صفحه $z=0$ و زیر سهمی‌گون می‌باشد.



مثال ۱۸ حجم یک مخروط با رابطه $z=\sqrt{2x^2+3y^2}$ که زیر صفحه $z=4$ قرار دارد را بدست آورید.

پاسخ: باید انتگرال سه‌گانه زیر برای تعیین حجم حل شود:

$$V=\iiint \mathrm{d}V=\iiint \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

در رابطه فوق، D یک بیضی است که از تقاطع نمودار با صفحه $z=4$ ایجاد می‌شود. این نمودار با رابطه $\sqrt{2x^2+3y^2}=4$ نشان داده می‌شود. برای حل این انتگرال باید از روش قطبی کردن در متغیرها با اندکی تغییر استفاده نمود. مثلاً $x=\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta$ و $y=\frac{1}{\sqrt{3}}r\sin\theta$.

هنگامی که تغییر متغیر در انتگرال دوگانه وجود داشته باشد، باید دترمینان ماتریس ژاکوبین حساب شود.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)},\quad\Rightarrow\quad J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{3}}r\cos\theta\end{vmatrix}=\frac{r}{\sqrt{6}}$$

باید توجه داشت که در مختصات قطبی با قرار دادن x و y به صورت قطبی در رابطه بیضی، مقدار کران شعاع به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sqrt{2x^2+3y^2}=4,\quad\Rightarrow\quad 2x^2+3y^2=16,\quad\Rightarrow\quad 2(\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta)^2+3(\frac{1}{\sqrt{3}}r\sin\theta)^2=16$$

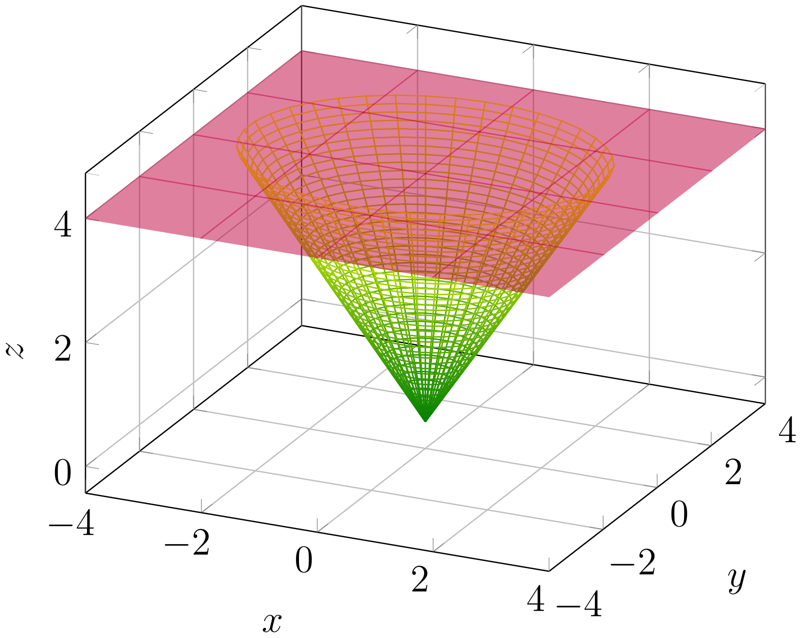
با ساده نمودن عبارت فوق برای شعاع خواهیم داشت:

$$\Rightarrow\quad r^2=16,\quad\Rightarrow\quad r=4$$

انتگرال دوگانه با تغییر متغیر به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}V&=\iiint \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_{\sqrt{2x^2+3y^2}}^4\frac{r}{\sqrt{6}}\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\int_0^4(4r-r^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\left(\left[2r^2-\frac{1}{3}r^3\right]_0^4\right)\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{32}{3}(2\pi)=\frac{64\pi}{3\sqrt{6}}\end{aligned}$$

در شکل زیر حجم مخروط زیر صفحه $z = 4$ نمایش داده شده است.



۳.۸ انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی

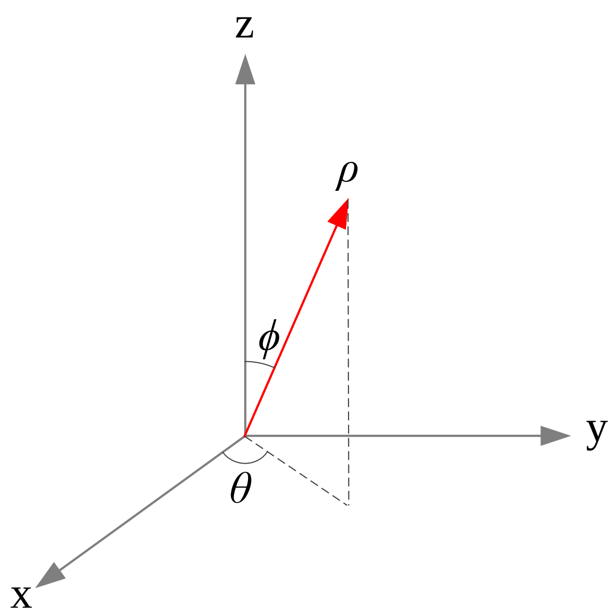
در مختصات کروی نقاط با یک شعاع و دو زاویه نمایش داده می‌شوند. در نتیجه نقاط x، y و z به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\phi$$

هر نقطه دلخواه در مختصات دکارتی به صورت شکل زیر به مختصات کروی نگاشته می‌شود:



با استفاده از ماتریس دترمینان ژاکوبین خواهیم داشت:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\phi$$

بنابراین انتگرال به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\iiint f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

این رابطه نشان می‌دهد عنصر دیفرانسیلی حجم به صورت $\rho^2 \sin\phi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$ است.

مثال ۱۹ حجم یک کره به شعاع R را بدست آورید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{3}R^3 \sin\phi \, d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{3}R^3 \int_0^{2\pi} \left(\Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi} \right) d\theta \\ &= \frac{2}{3}R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

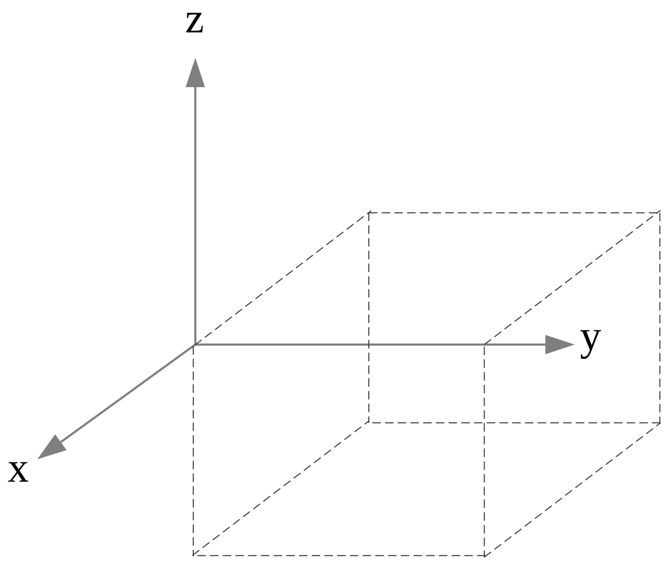
مثال ۲۰ حاصل $\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ را هنگامی که D حجم بین دو کره به شعاع 1 و 4 و مرکز مبدا باشد، بدست آورید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{4} \frac{1}{\rho^3}\rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{4} \frac{d\rho}{\rho} \sin\phi \, d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \ln 4 \sin\phi \, d\phi d\theta \\ &= \ln 4 \int_0^{2\pi} \left(\Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi} \right) d\theta \\ &= 2\ln 4 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 4\pi \ln 4 \end{aligned}$$

مثال ۲۱ حاصل $\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ بدست آورید.

پاسخ کران‌های این انتگرال در شکل زیر نمایش داده شده است. از این رو می‌توان بازه‌های مربوط به دو زاویه مختصات کروی را تعیین نمود.



$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\rho^2}}{\rho}\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\rho e^{-\rho^2}\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\Big[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big]_{0}^{\infty}\right)\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\Big[-\cos\phi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

۹ تمرین

۱. حاصل انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

الف- $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

ب- $\int_0^1 \int_0^{\pi} \sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

ج- $\int_{-8}^{8} \int_1^{32} (\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y})\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

د- $\int_1^2 \int_0^{\infty} e^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

ه- $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 e^{y^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

و- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} e^{\sin\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

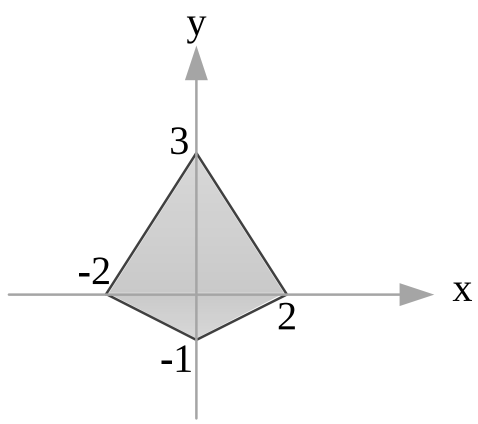
۲. حاصل انتگرال‌های زیر را روی نواحی مشخص شده بدست آورید.

الف- $\iint_D y^2\mathrm{d}A$ که در آن D مثلثی است با رئوس $(0,2)$، $(1,1)$ و $(3,2)$.

ب- $\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}A$ که در آن D ناحیه محصور بین نمودارهای $x^2+y=0$، $x=y$ و $x=\pi$ است.

ج- $\iint_D x\mathrm{d}A$ که در آن D ناحیه محصور بین نمودارهای $y=2-x^2$ و $x=y$ است.

د- $\iint_D (x^2-xy)\mathrm{d}A$ که در آن D ناحیه مشخص‌شده زیر است.

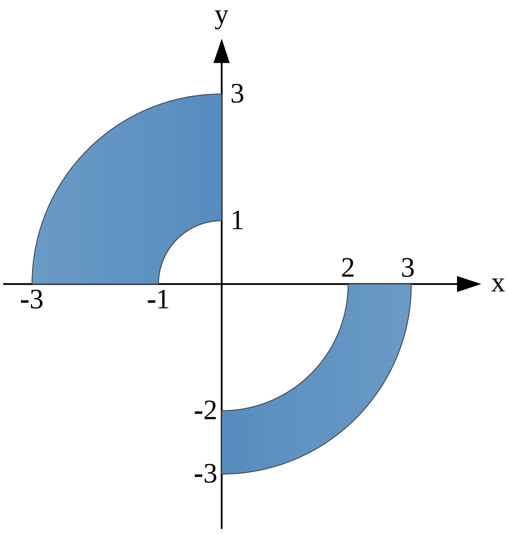


۳. حاصل انتگرال‌های زیر را به روش قطبی بدست آورید.

الف- $\iint_R \cos(x^2+y^2)\mathrm{d}A$ که در آن R قسمت پایین محور x و داخل دایره $x^2+y^2=2$ است.

ب- $\iint_R \tan^{-1}(\frac{y}{x})\mathrm{d}A$ که در آن $R=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 3,\ 0\le y\le x\}$ است.

ج- $\iint_R (x-2y)\mathrm{d}A$ که در آن R به صورت شکل زیر است.



۴. حاصل انتگرال‌های زیر را به روش تغییر متغیر بدست آورید.

الف- $\iint_R xy^3 \mathrm{d}A$ که در آن R ناحیه بین منحنی‌های $xy = 1$، $xy = 2$، $xy^2 = 1$ و $xy^2 = 2$ است.

ب- $\iint_R (x+2y)e^{x^2-4y^2} \mathrm{d}A$ که در آن R ناحیه بین منحنی‌های $x - 2y = 0$، $x - 2y = 1$، $x + 2y = 0$ و $x + 2y = 1$ است.

۵. حاصل انتگرال‌های سه‌گانه زیر را بدست آورید.

الف- $\iiint_E (x^2z^3 - y^3) \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ که در آن $E = \{(x,y,z) | 0 \leq y \leq 2, |x| \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

ب- $\iiint_E y\mathrm{d}V$ که در آن E در ناحیه اول دستگاه مختصات $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$ و زیر سهمی $z = 1 - x^2 - 4y^2$ است.

ج- $\iiint_E z\mathrm{d}V$ که در آن E بین دو کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ در ناحیه $x < 0,\ y < 0,\ z > 0$ قرار گرفته است.

پاداش‌های بزرگ از طریق انتخاب‌های
کوچک و هوشمندانه پدید می‌آیند.

دارن هاردی