درس اول: معادله خط

نکته: هر معادله خط در حالت کلی به صورت $ax+by=c$ می‌باشد و برای سهولت در حل مسائل می‌توان آن را به صورت $y=ax+b$ نوشت که به این شکل معادله خط، شکل استاندارد شده‌ی خط می‌گوییم.

تذکر: برای راحتی در حل مسائل مربوط به خط راست، بهتر است معادله خط به شکل $y=ax+b$ (استاندارد شده) تبدیل شود.

مثال ۱: معادلات خط رو به رو را به صورت استاندارد شده تبدیل نمایید. الف) $2x+y=7$ ب) $4y=3x-5$

حل:

الف) $2x+y=7 \Rightarrow y=-2x+7$

ب) $4y=3x-5 \Rightarrow \frac{4y}{4}=\frac{3x}{4}-\frac{5}{4} \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$

نکته: در معادله خط به شکل استاندارد $y=ax+b$ ، a را شیب (ضریب زاویه) و b را عرض از مبدأ خط می‌نامیم.

مثال ۲: شیب خط و عرض از مبدأ خطوط رو به رو را به دست آورید. الف) $y=-2x+3$ ب) $3x+2y=5$

حل: الف) شیب خط $=-2$ و عرض از مبدأ $=3$

ب) ابتدا خط را استاندارد می‌کنیم. $3x+2y=5 \Rightarrow 2y=-3x+5 \Rightarrow \frac{2y}{2}=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

شیب خط $=-\frac{3}{2}$ و عرض از مبدأ $=\frac{5}{2}$

نکته: در معادله به صورت غیراستاندارد $ax+by=c$ اگر $a=0$ باشد معادله قابل تبدیل به شکل $y=k$ می‌باشد که خطی به موازات محور xها است و اگر $b=0$ باشد معادله قابل تبدیل به شکل $x=h$ است که خطی به موازات محور yها است. در صورتیکه $c=0$ باشد معادله بیانگر خطی است که از مبدأ مختصات عبور می‌نماید و به شکل $y=k'x$ می‌باشد.

مثال ۳: وضعیت هر یک از خطوط زیر را بیان کنید.

الف) $y=-3$ و ب) $y=2x$ و ج) $x=4$

حل: الف) خط به موازات محور xها است. ب) خط از مبدأ مختصات می‌گذرد. ج) خط به موازات محور yها است.

نکته: برای رسم یک خط در حالت کلی $ax+by=c$ کافی است:

دو عدد دلخواه به x داده شود و مقادیر y آنها را به دست آوریم.

روش ساده‌تر: خط را به شکل استاندارد نوشته و سپس دو مقدار دلخواه به x داده و y آنها را به دست می‌آوریم.

Scanned by CamScanner

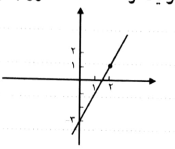
مثال ۴: نمودار هر یک از معادلات خط رو به رو را رسم کنید. الف) $y = 2x - 3$ ، ب) $4x + 2y = 5$

حل:

الف)

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2(0) - 3 \Rightarrow y = -3 \\ x = 2 \Rightarrow y = 2(2) - 3 \Rightarrow y = 4 - 3 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

x	0	2
y	-3	1

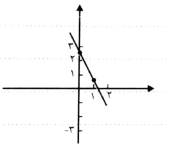


ب) ابتدا خط را به شکل استاندارد شده تبدیل می‌کنیم.

$$4x + 2y = 5 \Rightarrow 2y = -4x + 5 \Rightarrow \frac{2y}{2} = -\frac{4x}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow y = -2x + \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2(0) + \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \\ x = 1 \Rightarrow y = -2(1) + \frac{5}{2} \Rightarrow y = -2 + \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

x	0	1
y	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$



نکته: برای آن که نقطه‌ی $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ روی خط $y = ax + b$ واقع باشد باید با جایگذاری نقطه مذکور در معادله، تساوی حاصل یک تساوی درست باشد.

مثال ۵: کدام‌یک از نقاط زیر روی خطوط ذکر شده قرار دارند و کدام قرار ندارند؟

الف) $y = 3x + 4$ ، نقطه‌ی $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ب) $y = -5x + 1$ ، نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

حل: الف) ابتدا در معادله $y = 3x + 4$ به جای x مقدار (-1) و به جای y مقدار (۳) را جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 = 3(-1) + 4 \Rightarrow 3 = -3 + 4 \Rightarrow 3 \neq 1$$

لذا نقطه‌ی $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 3x + 4$ واقع نیست.

ب) ابتدا در معادله $y = -5x + 1$ به جای x مقدار (۱) و به جای y مقدار (۴-) را جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow -4 = -5(1) + 1 \Rightarrow -4 = -5 + 1 \Rightarrow -4 = -4$$

لذا نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ روی خط $y = -5x + 1$ قرار دارد.

نکته: برای تعیین نقطه‌ی برخورد خط $ax + by = c$ با محور xها، y را مساوی صفر و برای تعیین نقطه برخورد خط $ax + by = c$ با محور yها، x را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۶: محل برخورد خط به معادله $2x - 3y = 6$ با محورهای مختصات را به دست آورید.

حل: ابتدا به جای x عدد صفر می‌گذاریم.

$$x = 0 \Rightarrow 2(0) - 3y = 6 \Rightarrow -3y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{-3} = -2$$

نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ محل برخورد خط $2x - 3y = 6$ با محور yها می‌باشد. حال به جای y عدد صفر می‌گذاریم.

$$y = 0 \Rightarrow 2x - 3(0) = 6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ محل برخورد خط $2x - 3y = 6$ با محور xها می‌باشد.

Scanned by CamScanner

درس دوم: شیب خط و عرض از مبداء

نکته: برای به دست آوردن شیب یک خط چند روش وجود دارد که دو روش آن به صورت زیر است:

الف) پیدا کردن شیب خط از روی معادله خط — **ب)** پیدا کردن شیب خط با استفاده از دو نقطه از خط

الف) برای پیدا کردن شیب خط $ax+by=c$ ابتدا آن را به شکل استاندارد شده‌ی $y=mx+h$ تبدیل می‌کنیم و پس از اینکه معادله خط را به صورت استاندارد شده نوشتیم عدد m (ضریب x) همان شیب خط و عدد h (عدد ثابت) عرض از مبدأ خط می‌باشد.

ب) شیب خطی که از دو نقطه‌ی $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ **و** $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ **می‌گذرد را با** m **نمایش داده و آن را از رابطه‌ی** $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ **به دست می‌آوریم.**

مثال ۱: شیب هر یک از خطوط زیر را به دست آورید. الف) $y=3x+5$ ب) $4x-2y=7$

حل الف: از آنجا که خط به صورت استاندارد شده است شیب خط عدد ۳ و عرض از مبدأ عدد ۵ می‌باشد.

حل ب: ابتدا خط را به شکل استاندارد تبدیل و سپس شیب خط را به دست می‌آوریم.

$4x-2y=7 \Rightarrow -2y=-4x+7 \Rightarrow \frac{-2y}{-2}=\frac{-4x}{-2}+\frac{7}{-2} \Rightarrow y=2x-\frac{7}{2}$ که ۲ شیب خط و $\frac{-7}{2}$ عرض از مبدأ خط می‌باشد.

مثال ۲: شیب خطی که از دو نقطه‌ی $\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$ **و** $\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}$ **می‌گذرد را به دست آورید:**

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-7}{1-2}=\frac{-10}{-1}=10$

نکته: دو خط که شیب‌های آنها یکسان باشند با هم موازی هستند.

مثال ۳: وضعیت دو خط زیر را به لحاظ موازی بودن و عدم توازی بررسی کنید. الف) $4x+2y=8$ ، ب) $-8y=16x-1$

حل: ابتدا هر دو خط را به شکل استاندارد شده تبدیل کرده و شیب‌های آنها را به دست می‌آوریم.

الف) $4x+2y=8 \Rightarrow 2y=-4x+8 \Rightarrow \frac{2y}{2}=\frac{-4x}{2}+\frac{8}{2} \Rightarrow y=-2x+4 \Rightarrow$ شیب خط $=-2$

ب) $-8y=16x-1 \Rightarrow \frac{-8y}{-8}=\frac{16x}{-8}-\frac{1}{-8} \Rightarrow y=-2x+\frac{1}{8} \Rightarrow$ شیب خط $=-2$

به دلیل برابری شیب‌های هر دو معادله می‌گوییم دو خط فوق با هم موازی هستند.

نکته: معادله‌ی خطی که از نقطه $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن برابر m باشد به شکل زیر می‌باشد: $y-y_1=m(x-x_1)$

لازم به ذکر است که برای به دست آوردن معادله یک خط راست، به یک نقطه از خط و شیب آن خط نیاز است که در یک مسئله ممکن است شیب خط و یک نقطه از خط مستقیماً و گاهی به صورت غیرمستقیم داده شده باشد.

مثال ۴: معادله خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ **می‌گذرد و شیب آن برابر ۴ باشد.**

حل: روش اول: در این مسئله $x_1=-2$ و $y_1=3$ و $m=4$ می‌باشد.

پس: $y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-3=4(x+2) \Rightarrow y-3=4x+8 \Rightarrow y=4x+8+3 \Rightarrow y=4x+11$

روش دوم: از آنجا که نقطه‌ی $\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$، نقطه‌ای روی خط $y=mx+h$ می‌باشد لذا مختصات آن در خط مذکور صدق می‌کند از طرفی بنا به صورت مسئله $m=4$ بوده و با جایگذاری $x=-2$ و $y=3$ و $m=4$ در معادله $y=mx+h$ خواهیم داشت:

$y=mx+h \Rightarrow 3=4(-2)+h \Rightarrow 3=-8+h \Rightarrow 3+8=h \Rightarrow \boxed{h=11}$

یا جایگذاری $h=11$ و $m=4$ در معادله $y=mx+h$ معادله $y=4x+11$ به دست می‌آید.

Scanned by CamScanner

نکته پایانی: دو خط $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ را بر هم عمود می‌گوییم هرگاه $mm' = -1$ به عبارتی دیگر دو خط وقتی بر هم عمود هستند که شیب‌های آنها عکس و قرینه‌ی یکدیگر باشند.

مثال ۵: معادله خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد و بر خط $2y + x + 3 = 0$ عمود باشد.

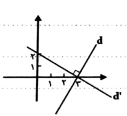
حل: ابتدا خط $2y + x + 3 = 0$ را به صورت استاندارد شده $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ تبدیل می‌کنیم:

شیب خط مذکور $-\frac{1}{2}$ می‌باشد پس شیب خطی که بر خط $2y + x + 3 = 0$ عمود است عکس و قرینه‌ی $-\frac{1}{2}$ یعنی ۲ است. از طرفی معادله از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

با قراردادن $x = 2$ و $y = 3$ و $m = 2$ در $y = mx + h$ خواهیم داشت: $3 = (2)(2) + h \Rightarrow 3 - 4 = h \Rightarrow h = -1$

حال با جایگذاری $h = -1$ و $m = 2$ در معادله $y = mx + h$، معادله خط عمود به صورت رو به رو است: $y = 2x - 1$

مثال ۶: مطابق شکل معادله خط d را بنویسید.



حل: همانطور که دیده می‌شود خط d' از دو نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند پس شیب آن: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{2}{3}$

چون d بر d' عمود است شیب خط d برابر $\frac{3}{2}$ است. از طرفی خط d از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد. پس اکنون معادله خطی که از $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن $\frac{3}{2}$ است را به دست می‌آوریم.

ابتدا $x = 3$ و $y = 0$ و $m = \frac{3}{2}$ را در معادله $y = mx + h$ جایگذاری می‌کنیم و h را می‌یابیم بنابراین: $0 = (\frac{3}{2})(3) + h \Rightarrow h = \frac{-9}{2}$

مجدداً با جایگذاری $h = \frac{-9}{2}$ و $m = \frac{3}{2}$ در $y = mx + h$ معادله‌ی خط d به صورت رو به رو به دست می‌آید: $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

بیشتر بدانیم: برای تعیین مثبت یا منفی بودن شیب خط از روی نمودار کافی است روی نمودار از چپ به راست حرکت نماییم. در صورتیکه نمودار به سمت پایین متمایل شود شیب منفی و اگر نمودار به سمت بالا متمایل شود، شیب مثبت است. (البته برای تعیین مثبت یا منفی بودن شیب می‌توان از زاویه ای که خط با مثبت محور xها می‌سازد استفاده کنیم اگر زاویه حاده(تند) بودشیب خط مثبت و اگر زاویه باز (منفرجه) بود شیب خط منفی است)

Scanned by CamScanner

درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی

نکته: برای حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به دو روش عمل می‌کنیم.

الف) روش حذفی　　ب) روش جایگذاری

لازم به ذکر است که منظور از حل دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ پیدا کردن x و y می‌باشد که به طور همزمان در معادلات فوق صدق می‌کنند از طرف دیگر مختصات (y و x) همان محل برخورد دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ می‌باشد.

مثال الف) **دستگاه دو معادله دو مجهول زیر را به روش حذفی حل کنید.**

$$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$$

حل مثال الف: در ابتدا می‌خواهیم x را حذف نماییم. برای این منظور کافی است ابتدا ضرایب x را در دو معادله برابر و قرینه نماییم.

$$\begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x+10y=-2 \\ 6x+9y=21 \end{cases} \Rightarrow 19y=19 \rightarrow y=1$$

با جایگذاری $y=1$ در یکی از دو معادله فوق (به دلخواه) می‌توان مقدار x را نیز به دست آورد.

$$\overset{y=1}{2x+3y=7} \Rightarrow 2x+3(1)=7 \Rightarrow 2x+3=7$$

$$\Rightarrow 2x=7-3 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2} \Rightarrow x=2$$

مثال ب) **دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر را به روش جایگذاری حل کنید.**

$$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \end{cases}$$

حل مثال ب: با جایگذاری معادله $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ به جای y در معادله $2x-3y=5$ خواهیم داشت:

$$2x-3(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3})=5 \Rightarrow 2x-3(\frac{1}{3}x)+3(\frac{2}{3})=5 \Rightarrow \underbrace{2x-x+2=5}_{\text{معادله درجه اول}} \Rightarrow x=5-2 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

حال $x=3$ را در معادله $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ قرار می‌دهیم.

$$y=\frac{1}{3}(3)-\frac{2}{3} \Rightarrow \quad y=1-\frac{2}{3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

Scanned by CamScanner