دو نکته :

$$\int f'(x)\,dx = \int \frac{df}{dx}\,dx = f(x)+c$$

&

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) \rightarrow$$ $+c$ ندارد

چون با مشتق گیری از جواب انتگرال ثابت انتگرال از بین می رود.

قضایای اساسی حساب دیفرانسیل:

(*) $$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = v'(x)\,f(v(x)) - u'(x)\,f(u(x))$$

مثال:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t^{50}(1-t)^{50}\,dt$$

$$=(1)\left(x^{50}(1-x)^{50}\right) - \cancel{(0)(*)}^{\,0} = x^{50}(1-x)^{50}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 (2+\operatorname{tg} t)^{99}\,dt$$

$$=(0)(*)-(0)(*)=0$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (s^4+1)\,ds = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left((\sqrt{x})^4+1\right) - (2x)\left((x^2)^4+1\right) = \dots$$

ادامه قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \xLeftarrow{\text{آنگاه}} \int f(x)\,dx = F(x)+c$$

((به انتگرال به فرم $\int_a^b f(x)\,dx$ ، انتگرال معین می‌گوییم.))

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$

مثال:

$$* \int_0^۲ x^۲\,dx = \frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^۲ = \frac{۲^۳}{۳} - \frac{۰^۳}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$* \int_۴^۹ \frac{۱}{\sqrt{x}}\,dx = ۲\sqrt{x}\Big|_۴^۹ = ۲(\sqrt{۹}-\sqrt{۴}) = ۲(۳-۲) = ۲$$

$$* \int_{-۸}^{۱} (۱+x^{\frac{۲}{۳}})\,dx = x+\frac{۳}{۵}x^{\frac{۵}{۳}}\Big|_{-۸}^{۱} = \left(۱+\frac{۳}{۵}(۱)^{\frac{۵}{۳}}\right)-\left(-۸+\frac{۳}{۵}\sqrt[۳]{(-۸)^۵}\right)$$

$$= ۱+\frac{۳}{۵}+۸+\frac{۳(۳۲)}{۵} = ?$$

$$* \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (۲\cos t-۱)\,dt = ۲\sin t - t\Big|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$= \left(۲\underbrace{\sin\frac{\pi}{۲}}_{۱}-\frac{\pi}{۲}\right)-\left(۲\underbrace{\sin\left(\frac{-\pi}{۲}\right)}_{-۱}+\frac{\pi}{۲}\right)$$

$$= ۲-\frac{\pi}{۲}+۲-\frac{\pi}{۲} = ۴-\pi$$

$$* \int_0^2 e^x - 7\,dx = \left(e^x - 7x\right)\Big|_0^2 = \left(e^2 - 7\times 2\right) - \left(\cancel{e^0}^{\,1} - \cancel{7\times 0}\right) = e^2 - 14 - 1 = e^2 - 15$$

$$* \int_{41}^{50} dx = \int_{41}^{50} 1\,dx = x\Big|_{41}^{50} = 50 - 41 = 9$$

این انتگرال بسیار پرکاربرد است و می‌توان به جای حل آن به عنوان یک کران بالا را منهای کران پایین نمود یعنی:

$$\int_{41}^{50} dx = (\text{کران بالا}) - (\text{کران پایین}) = 50 - 41 = 9$$

$$* \int_{41}^{50} 7\,dx = 7\int_{41}^{50} dx = 7(50 - 41) = 7\times 9 = 63$$

$$* \int_0^\pi \underbrace{\sin^2}_{\text{۲ توان است}} x\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos \underbrace{2}_{\text{۲ ضریب زاویه}} x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi$$

به این نحوه فاصله‌گذاری و حل توجه کنید.

$$= \frac{1}{2}(\pi - 0) - \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\sin 2\pi}_{\text{صفر}} - \underbrace{\sin 0}_{\text{صفر}}\Big) = \frac{\pi}{2}$$

$$* \int_{3}^{4} |x|^3 + 1 \, dx = \text{I}$$

چون $3 \leq x \leq 4$ و برای قدرمطلق در این بازه داریم $|x| = x$ پس:

$$\text{I} = \int_{3}^{4} x^3 + 1 \, dx = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)_{3}^{4} = ?$$

$$* \int_{-2}^{-1} |x| dx$$

$$-2 \leq x \leq -1 \Rightarrow |x| = -x$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{-1} |x| dx = \int_{-2}^{-1} -x \, dx = \left(-\frac{x^2}{2}\right)_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2}(\underbrace{1-4}_{-3})$$

$$= +\frac{3}{2} > 0$$

توجه: اگر انتگرالده تابع مثبت باشد و کرانها به ترتیب از کوچک به بزرگ باشند، حاصل لزوماً بزرگتر (یا مساوی) صفر است.

$$* \int_{a}^{a} f(x) dx = F(x) \Big|_{a}^{a} = F(a) - F(a) = 0$$

یادآوری:

اگر تابعی دارای دامنه متقارن نسبت به مبداء (صفر) باشد (مانند $(-a,a)$) ، در این صورت:

الف) زوج است به شرط آنکه $f(-x)=f(x)$ ؛

ب) فرد است به شرط آنکه $f(-x)=-f(x)$.

مثال: توابع $f(x)=x^2+4x^4$ و $g(x)=\cos x$ زوج هستند زیرا:

$$f(-x)=(-x)^2+4(-x)^4=x^2+4x^4=f(x);$$

$$g(-x)=\cos(-x)=\cos(x)=g(x).$$

همچنین توابع $h(x)=3x^3-x$ و $t(x)=\sin x$ فرد هستند زیرا:

$$h(-x)=3(-x)^3-(-x)=-3x^3+x=-(3x^3-x)=-h(x);$$

$$t(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-t(x).$$

تابع $Q(x)=0$ تابع هم زوج و هم فرد است زیرا $Q(-x)=0=Q(x)=-Q(x)$.

تابع $C(x)=7+x$ تابع نه زوج و نه فرد است زیرا

$$C(-x)=7-x\neq 7+x=C(x);$$

&

$$C(-x)=7-x\neq -(7+x)=-C(x).$$

انتگرال گیری از توابع زوج یا فرد:

اگر f تابعی زوج و پیوسته باشد:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

اگر f تابعی فرد و پیوسته باشد:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

مثال:

* $\int_{-4}^{4}(-x^2+7x^4)\,dx$

حل: $f(x)=7x^4-x^2 \Rightarrow f(-x)=7(-x)^4-(-x)^2=7x^4-x^2=f(x)$

$\Rightarrow$ f زوج است

لذا:

$$\int_{-4}^{4}(7x^4-x^2)\,dx = 2\int_{0}^{4}(7x^4-x^2)\,dx$$
$$= 2\left(7\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right)_0^4 = 2\left(\frac{7}{5}(4)^5-\frac{1}{3}(4)^3\right)=\dots$$

* $\int_{-1}^{1}\sin^4 x\cdot tg\,x\,dx$

حل: $g(x)=\sin^4 x\cdot tg\,x = \sin^4 x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$

$$\Rightarrow g(-x)=\sin^4(-x)\cdot\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = (-\sin x)^4\,\frac{-\sin x}{\cos x}$$

$\Rightarrow g(-x) = -\sin^4 x\cdot tg\,x = -g(x) \Rightarrow$ g تابع فرد است

لذا

$$\int_{-1}^{1}\sin^4 x\cdot tg\,x\,dx \overset{\text{انتگرالده}}{\underset{\text{فرد}}{=}} 0.$$

* $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t-1)\,dt$ ، این مثال قبلاً حل شده و پاسخ آن $4-\pi$ بوده است.

حل مجدد: $2\cos(-t)-1=2\cos t-1 \Rightarrow$ انتگرال‌ده زوج

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t-1)\,dt = 2(2\sin t - t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\Big(\big(2\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1} - \tfrac{\pi}{2}\big) - \cancel{(2\sin 0 - 0)}\Big)$$

$$= 4-\pi$$

مهم و کاربردی

* $\int_{-4}^{4} x^3 - 3\sin^5 x + 7\,dx = I$

با نگاهی به این تابع درمی‌یابیم که دو جمله اول انتگرال‌ده فرد می‌باشند زیرا:

$$(-x)^3 - 3(\sin(-x))^5 = -x^3 - 3(-\sin x)^5$$

$$= -x^3 + 3\sin^5 x = -(x^3 - 3\sin^5 x) \Rightarrow$$ قسمتی از انتگرال‌ده فرد است. لذا:

$$I = \underbrace{\int_{-4}^{4} (x^3 - 3\sin^5 x)\,dx}_{\text{انتگرال‌ده فرد}} + \int_{-4}^{4} 7\,dx$$

$$= 0 + (7x)_{-4}^{4} = 7(4+4) = 56$$

که البته انتگرال‌ده دوم نیز زوج بود و می‌توانستیم آن را نیز به صورت $2(7x)_0^4 = 56$ حل کنیم.