آونگ ِ فوکو

احمد شریعتی

آونگ ِ فوکو مسئله ای است بسیار معروف، که تقریباً در هر کتاب ِ مکانیک ی چند خط ی در باره اش هست، امّا تقریباً در هیچ جا به دقّت به آن پرداخته نمی‌شود. این مقاله کوشش ی است برا ی ِ پر کردن ِ این خلاء. در این مقاله حرکت ِ آونگ را به دقّت بررسی می‌کنیم. بخش ِ مهم ی از مقاله معرفی ی ِ کار ِ کامرلینخ اُنِس[a] در مورد ِ آونگ ِ فوکو است.

1 مقدّمه

تا پیش از دوران ِ نوزایش، تصوّر ِ اکثر ِ متفکرین این بود که زمین ساکن است. پس از انقلاب ی که آن را کوپرنیک آغاز کرد و گالیله به سرانجام رساند، دیگر معلوم شده بود که زمین، هم به دور ِ خود ش می‌چرخد، و هم به دور ِ خورشید. یک سؤال ِ بسیار مهم این بود که چرا متوجّه ِ این حرکت نمی‌شویم. آزمایش‌ها یی هم طرح شد. مثلاً مِرسِن[b] ، که از معاصران ِ گالیله[c] و دِکارت[d] بود، پیش‌نهاد کرد گلوله ای را کاملاً عمود بر سطح ِ افق پرتاب کنیم ببینیم به جا ی ِ اوّل ش باز می‌گردد یا نه [1]. این مِرسِن همان کس ی است که عددها ی ِ اوّل ِ مِرسِن را معرّفی کرد، و همان کس ی است که آزمایش‌ها ی ِ غلطیدن ِ گلوله رو ی ِ سطح ِ شیب‌دار را که گالیله گزارش کرده بود تکرار کرد، و متوجّه شد که گالیله یا آزمایش نکرده، یا غلط گزارش کرده [1].

استدلال ِ ارسطویی این بود که اگر زمین حرکت کند، در هنگام ی که گلوله بالا می‌رود، زمین حرکت می‌کند و بنا بر این گلوله به جا یی که از آن پرتاب شده بر نمی‌گردد. گالیله متوجّه ِ نکته ی ِ بسیار مهم ی شد، این که اگر در داخل ِ کشتی ای که با سرعت ِ ثابت رو ی ِ دریا ی ِ آرام پیش می‌رود، این آزمایش را انجام دهیم (یعنی گلوله ی را به بالا بیندازیم)، با آن که می‌دانیم کشتی نسبت به ساحل در حال ِ حرکت است، می‌بینیم نتیجه ی ِ آزمایش درست همان طور است که اگر آن را در کنار ِ ساحل انجام می‌دادیم. از این تجربه، گالیله اصل ی را بیرون کشید که امروز به نام ِ اصل ِ

نسبیّت ِ گالیله‌ای معروف است — اگر دو آزمایش‌گاه چنان باشند که یک ی با سرعت ِ ثابت نسبت به دیگری حرکت کند، با هیچ آزمایش ی در داخل ِ آن‌ها نمی‌توان آن‌ها را از هم تمیز داد. یعنی مثلاً اگر قطار ی با سرعت ِ ثابت و رو ی ِ رِیل ی افقی حرکت کند، با هیچ آزمایش ی در داخل ِ قطار نمی‌توان سرعت ِ آن را نسبت به زمین سنجید (تنها با نگاه کردن به بیرون، و سنجیدن ِ سرعت ِ اشیاء ِ رو ی ِ زمین است که می‌توان این سرعت را سنجید).

اصل ِ نسبیّت ِ گالیله درست است، به این معنی که تجربه آن را تأیید می‌کند. امّا ضمناً پاسخ ِ گالیله به این پرسش که «چرا متوجّه ِ چرخش ِ زمین نمی‌شویم؟» کامل نبود، زیرا آزمایش‌گاه‌ها یی که رو ی ِ زمین اند می‌چرخند، یعنی شتاب دارند، و قاعدتاً باید بتوان شتاب را حس کرد. اگر جسم ی را از سکون رها کنیم، می‌اُفتد، امّا نه در امتداد ِ شاغول، بل که کم ی به شرق منحرف می‌شود (در نیم‌کره ی ِ شمالی). امّا اگر جسم را به بالا بیندازیم، کم ی به غرب منحرف می‌شود. اگر آزمایش ِ مِرسِن را به دقّت انجام دهیم، خواهیم دید که گلوله واقعاً به محل ِ پرتاب ش بر نمی‌گردد، امّا انحراف ش بسیار کم است، زیرا انحراف به غرب ِ حرکت ِ بالارونده، در تقریب ِ اوّل، با انحراف به شرق ِ حرکت ِ پایین‌رونده خنثا می‌شود.

از زمان ِ نیوتن[e] به بعد، بسیار ی از پژوهش‌گران به این فکر می‌کردند که چه طور می‌توان چرخش ِ زمین را در آزمایش‌گاه دید؛ یعنی به دنبال ِ ابداع ِ آزمایش‌ها یی بودند که بتوان آن‌ها را در یک اتاق ِ بسته انجام داد، و سرعت ِ زاویه‌ای ی ِ زمین را آشکار کرد. آونگ ِ فوکو[f] نخستین آزمایش ِ موفّق از این نوع است.

آونگ ِ فوکو در واقع چیز ی نیست جز یک آونگ ِ ساده، که به دلیل ی که خواهیم دید به‌تر است طول و جرم ش زیاد، و زاویه ی ِ انحراف اش کم باشد.

2 معادله‌ها ی ِ حرکت و حل ِ آن‌ها

آونگ ی با دامنه ی ِ کوچک را در نظر بگیریم. محورها را چنان می‌گیریم که محور ِ z در امتداد ِ راستا ی ِ قائم (یعنی عمود بر سطح ِ افق)، y عمود بر z و رو به شمال، و x عمود بر z و رو به شرق باشد. اگر زمین نچرخد، معادله ی ِ حرکت ِ آونگ هست

$$m\,\mathbf{a} = m\,\mathbf{g} + \mathbf{T}, \tag{1}$$

که در این جا $\mathbf{T}$ نیرو ی ِ کشش ِ نخ است. اگر طول ِ نخ ِ آونگ، ℓ، ثابت باشد، $\mathbf{T}$ هم‌واره بر $\mathbf{v}$ عمود است، و بنا بر این کار ش صفر است. با ضرب کردن ِ دو طرف ِ معادله ی ِ حرکت در $\mathbf{v}$ می‌بینیم که

کمیّت ـِ زیر ثابت است.

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+g\,z=\frac{E}{m}=\text{ثابت} \tag{2}$$

ثابت ـِ بودن ـِ طول ـِ نخ یک قید ـِ جبری است بین ـِ x و y و z که می‌گوید

$$(z-\ell)^2+x^2+y^2=\ell^2 \qquad \Rightarrow \qquad z^2-2\,\ell\,z+(x^2+y^2)=0 \tag{3}$$

این معادله دو حل دارد.

$$z=\ell\pm\sqrt{\ell^2-x^2-y^2}. \tag{4}$$

جواب ـِ بزرگ‌تر نزدیک ـِ 2ℓ و جواب ـِ کوچک‌تر نزدیک ـِ 0 است. برا یِ آونگ این جواب ـِ دوّم است که پذیرفتنی است، و با بسط دادن ـِ $\sqrt{\ell^2-x^2-y^2}$ دیده می‌شود که

$$z=\frac{1}{2\ell}\left(x^2+y^2\right). \tag{5}$$

به این ترتیب، با توجّه به این که $\dot{z}\simeq 0$ است، داریم

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{g}{\ell}\left(x^2+y^2\right)=\text{ثابت} \tag{6}$$

خوب است لاگرانژی را هم ببینیم.

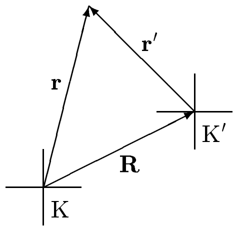
$$L=\frac{1}{2}\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\frac{(x\dot{x}+y\dot{y})^2}{\ell^2}\right]-\frac{1}{2}\omega^2\left(x^2+y^2\right) \tag{7}$$

توجّه کنید که x در مقایسه با ℓ خیل یِ کوچک است و $\dot{x}$ از مرتبه یِ $|\dot{x}|\,\omega$ است، پس $x\,\dot{x}/\ell^2$ از مرتبه یِ $\frac{x^2}{\ell^2}\,\omega$ است و به راحتی می‌توان از آن، و مشابهاً از $y\,\dot{y}/\ell^2$، صرفِ‌نظر کرد. آن چه می‌ماند لاگرانژی یِ یک نوسان‌گر ـِ هم‌سان‌گرد است. از این جا باید برا یمان واضح باشد که معادله‌ها یِ دیفرانسیل ـِ حرکت (برا یِ دامنه یِ کوچک) چنین اند:

$$\ddot{x}+\omega^2\,x=0, \qquad \ddot{y}+\omega^2\,y=0, \qquad \omega:=\sqrt{\frac{g}{\ell}}. \tag{8}$$

راست ش این دو معادله یِ دیفرانسیل تقریبی اند. بس‌آمد ـِ نوسان هم دقیقاً $\sqrt{g/\ell}$ نیست، بل که تابع ی است از دامنه. می‌توان نشان داد که اگر دامنه یِ آونگ α باشد بس‌آمد چنین است [2، ص 215]:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\left(1-\frac{\alpha^2}{16}+\dots\right). \tag{9}$$



شکل ۱: اگر محورها یِ چارچوب ِ K' همواره موازی یِ محورها یِ چارچوب ِ لخت ِ K
باشند، شتاب ِ ذرّه در K' هست: $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \ddot{\mathbf{R}}$
اگر محورها یِ K' با سرعت ِ زاویه‌ای یِ $\vec{\Omega}$ بچرخند، آن وقت داریم:
$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \ddot{\mathbf{R}} - \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}\right) - 2\,\vec{\Omega} \times \mathbf{v}$

پس از حل ِ معادله‌ها یِ (8) ارتفاع ِ z از قید ِ $x^2 + y^2 + (z - \ell)^2 = \ell^2$ به دست می‌آید. پس از آن که z به عنوان ِ تابع ی از t معلوم شد، می‌توان با استفاده از مؤلفه یِ z ِ معادله یِ دیفرانسیل ِ حرکت، یعنی $\ddot{z} + g = (T \cos\alpha)/m$، اندازه یِ نیرو یِ کشش ِ نخ را یافت.

پس، معادله‌ها یِ حرکت می‌گویند که تصویر ِ آونگ در صفحه یِ افق یک نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ ِ ساده یِ دوبعدی یِ هم‌سان‌گرد است ــــ هم‌سان‌گرد یعنی هیچ چیز به راستا بسته‌گی ندارد، یا به عبارت ی، به دور ِ محور ِ z تقارن ِ سمتی داریم.

اکنون ببینیم این معادله‌ها، با در نظر گرفتن ِ این که زمین می‌چرخد، چه تغییرها یی می‌کنند. باید ابتدا به یاد بیاوریم که اگر محورها یِ چارچوب ِ K' همواره موازی یِ محورها یِ چارچوب ِ K باشند، امّا K' با شتاب ِ $\ddot{\mathbf{R}}$ نسبت به K حرکت کند، داریم [2، صص 270 تا 284]:

$$m\,\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\,\ddot{\mathbf{R}}. \qquad (10)$$

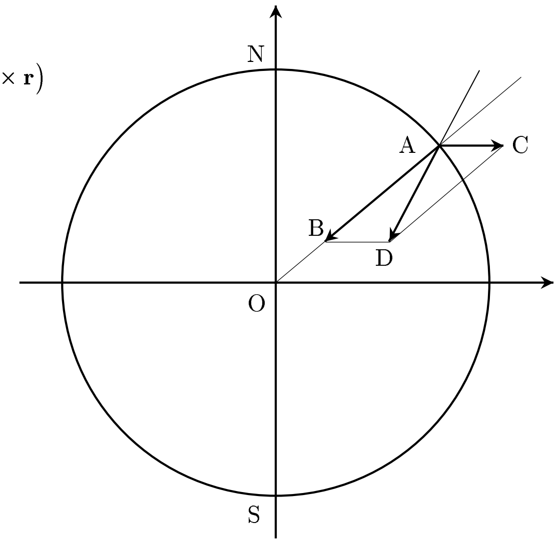
زمین در هر $23^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}\,04^{\mathrm{s}}$ یعنی $86164\,\mathrm{s}$ یک بار به دور ِ محور ِ قطبی اش می‌گردد، پس سرعت ِ زاویه‌ای اش $\Omega = 7.292 \times 10^{-5}\,\mathrm{Rad/s}$ است. آزمایش‌گاه ی که در عرض ِ جغرافیایی یِ λ است، در فضا رو یِ دایره ای به شعاع ِ $R_0\,\cos\lambda$ حرکت می‌کند، و بنا بر این شتاب ش هست $R_0\,\cos\lambda\,\Omega^2\,\mathbf{n}$ که در این جا R_0 شعاع ِ زمین، و $\mathbf{n}$ بردار ی است عمود بر محور ِ چرخش ِ زمین.

امّا محورها یِ آزمایش‌گاه‌ها یی که رو یِ زمین می‌سازیم، می‌چرخند، زیرا زمین می‌چرخد. بنا بر این، علاوه بر نیرو یِ مجازی یِ $-m\,\ddot{\mathbf{R}}$، دو نیرو یِ مجازی یِ دیگر هم در آزمایش‌گاه حس

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathbf{g}_0 = -\frac{G\,M}{R^2}\hat{r}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\ddot{\mathbf{R}} = -\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \ddot{\mathbf{R}}$$



شکل ۲: شتاب ِ گرانش ی که در نقطه ی ِ A حس می‌شود، $\mathbf{g}$، مجموع ِ دو بردار است. یک ی بردار ِ $\mathbf{g}_0$ که ناشی از گرانش ِ یک زمین ِ کروی است. این بردار به سمت ِ مرکز ِ زمین است. دوّم شتاب ِ گریزازمرکز که در امتداد ِ AC است. مجموع ِ این دو، $\mathbf{g}$، راستا ی ِ شاغول یا سطح ِ تراز ِ آب را تعیین می کند.

می‌شود، یک ی نیرو ی ِ گریزازمرکز ِ ناشی از چرخش ِ محورها ی ِ آزمایش‌گاه، و دوّم نیرو ی ِ کوریولی[g] ، و معادله ی ِ حرکت به این شکل در می‌آید [2]:

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} - m\,\ddot{\mathbf{R}} - m\,\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}\right) - 2\,m\,\vec{\Omega} \times \mathbf{v}. \qquad (11)$$

در مورد ِ آونگ، $\mathbf{F}$ عبارت است از نیرو ی ِ گرانش ِ زمین، به علاوه ی ِ نیرو ی ِ کشش ِ نخ. فرض کنید شتاب ِ گرانش $\mathbf{g}_0$ باشد. تعریف می‌کنیم $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \ddot{\mathbf{R}}$. بردار ِ $\mathbf{g}$ شتاب ِ مؤثر ی است ناشی از هم گرانش ِ زمین و هم گردش ِ آزمایش‌گاه به دور ِ محور ِ زمین. این $\mathbf{g}$ است که راستا یش با شاغول تعیین می‌شود. بنا بر این، در واقع محور ِ z ِ آزمایش‌گاه در راستا ی ِ این $\mathbf{g}$ است، و اندازه ای هم که در آزمایش‌گاه برا ی ِ شتاب ِ گرانش می‌سنجیم، در واقع اندازه ی ِ این $\mathbf{g}$ است. به این ترتیب از این به بعد لازم نیست نگران ِ جمله ی ِ $-m\,\ddot{\mathbf{R}}$، یعنی $-m\,R_0\,\cos\lambda\,\Omega^2\,\mathbf{n}$ باشیم.

ابعاد ـ آزمایش‌گاه معمولاً بسیار کم‌تر از 10^2 متر است. پس شتاب ـ گریزازمرکز ـ ناشی از چرخش ـ محورها ی ـ آزمایش‌گاه، کم‌تر از $7 \times 10^{-8}\,\mathrm{m/s^2}$ است. این عدد کسر ـ کوچک ی از $|\mathbf{g}| \sim 10\,\mathrm{m/s^2}$ است. از این جمله هم صرف‌نظر می‌کنیم.

به این ترتیب، معادله ی ـ حرکت ـ آونگ، با در نظر گرفتن ـ چرخش ـ زمین، این است:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + \frac{1}{m}\mathbf{T} - 2\,\vec{\Omega} \times \mathbf{v}. \qquad (12)$$

واضح است که $\mathbf{T}$ کشش ـ نخ است.

چون $\vec{\Omega} \times \mathbf{v}$ بر $\mathbf{v}$ عمود است، هنوز هم داریم

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + g\,z = \frac{E}{m} = \text{ثابت} \qquad (13)$$

دو جمله ی ـ نخست ـ معادله ی ـ حرکت، یعنی شتاب ـ گرانش و کشش ـ نخ، باز اگر دامنه ی ـ آونگ کوچک باشد، منجر می‌شوند به جمله‌ها ی ـ $-\omega^2 x$ و $-\omega^2 y$، که باز هم $\omega := \sqrt{g/\ell}$. پس کافی است جمله ی ـ کوریولی را به معادله‌ها ی ـ (8) اضافه کنیم. برا ی ـ این کار دقّت می‌کنیم که محور ـ y را به سمت ـ شمال ـ جغرافیایی گرفتیم. بنا بر این $\vec{\Omega}$ در صفحه ی ـ yz است. داریم

$$\vec{\Omega} = \Omega\,\sin\lambda\,\mathbf{k} + \Omega\,\cos\lambda\,\mathbf{j}, \qquad (14)$$

و بنا بر این

$$-\,2\,\vec{\Omega} \times \mathbf{v} = -2\,\Omega\,(\cos\lambda\,\dot{z} - \sin\lambda\,\dot{y})\;\mathbf{i} - 2\,\Omega\,\sin\lambda\,\dot{x}\,\mathbf{j} + 2\,\Omega\,\cos\lambda\,\dot{x}\,\mathbf{k}. \qquad (15)$$

به معادله ی ـ دیفرانسیل ـ z در این مرحله علاقه ای نداریم، زیرا باز هم با معلوم شدن ـ x و y، تابع ـ z را از شرط ـ $x^2 + y^2 + (z-\ell)^2 = \ell^2$ به دست خواهیم آورد، و در صورت ـ نیاز با استفاده از آن نیرو ی ـ کشش ـ نخ را تعیین خواهیم کرد.

در مورد ـ مؤلفه ی ـ x ـ شتاب ـ کوریولی برا ی ـ آونگ، خوب است دو جمله را با هم مقایسه کنیم. اگر دامنه ی ـ آونگ α (رادیان) باشد، مؤلفه ی ـ x ـ سرعت ـ آونگ از مرتبه ی ـ $\frac{1}{2\pi}\omega\ell\alpha$ است، و مؤلفه ی ـ z ـ سرعت ـ آونگ از مرتبه ی ـ $\frac{1}{2\pi}\omega\ell\frac{\alpha^2}{2}$ است (زیرا $(\Delta z = \ell(1-\cos\alpha) \simeq \frac{1}{2}\ell\alpha^2$). به این ترتیب می‌توانیم دو جمله ی ـ مؤلفه ی ـ x ـ شتاب ـ کوریولی را مقایسه کنیم.

$$\frac{\cos\lambda\,|\dot{z}|}{\sin\lambda\,|\dot{x}|} \sim \frac{1}{2}\,\alpha\,\cot\lambda \qquad (16)$$

$\cot\lambda$ در عرض‌ها ی ـ کم، یعنی نزدیک ـ اِستِوا، بزرگ است، امّا در عرض ـ جغرافیایی ی ـ 35° تقریباً 1.4 است. بنا بر این، در جا یی مثل ـ تهران، این نسبت تقریباً همان α است، و بنا بر این در نوشتن ـ

معادله ی ِ حرکت ِ آونگ، در جمله ی ِ شتاب ِ کوریولی، جمله ی ِ $\Omega\cos\lambda\dot{z}$ را نادیده می‌گیریم. به این ترتیب می‌رسیم به معادله‌ها ی ِ زیر

$$\begin{cases} \ddot{x}+\omega^2\,x-2\,\not\Omega\,\dot{y}=0, \\ \ddot{y}+\omega^2\,y+2\,\not\Omega\,\dot{x}=0. \end{cases} \tag{17}$$

در این فرمول‌ها، و از این به بعد، برا ی ِ اختصار تعریف کرده ایم

$$\not\Omega=\Omega\,\sin\lambda. \tag{18}$$

توجّه کنید که اگر دامنه ی ِ نوسان کوچک نباشد، این معادله‌ها باید تصحیح شوند. پس، اگر می‌خواهیم نتیجه ی ِ آزمایش را با این فرمول‌ها مقایسیه کنیم، باید دامنه ی ِ آونگ کوچک باشد.

برا ی ِ حل ِ این معادله‌ها، ابتدا ماتریس‌ها ی ِ زیر را تعریف می‌کنیم.

$$X=:\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\qquad\qquad J=:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

و معادله‌ها را به شکل ِ ماتریسی ی ِ زیر می‌نویسیم.

$$\ddot{X}+\omega^2\,X-2\,\not\Omega\,J\,\dot{X}=0. \tag{20}$$

برا ی ِ حل ِ این معادله، ابتدا می‌کوشیم تبدیل ی پیدا کنیم که معادله را ساده‌تر کند. برا ی ِ این کار فرض کنید S یک ماتریس ِ 2×2 ی ِ وابسته به زمان باشد، و Q یک ماتریس ِ ستونی ِ 1×2، یعنی مثلاً $Q=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$. اکنون بنویسیم $X=SQ$. این در واقع یک تغییر ِ تابع دادن است. واضح است که داریم

$$\dot{X}\;=\;\dot{S}\,Q+S\,\dot{Q} \tag{21}$$

$$\ddot{X}\;=\;\ddot{S}\,Q+2\,\dot{S}\,\dot{Q}+S\,\ddot{Q}. \tag{22}$$

این‌ها را بگذاریم در معادله ی ِ دیفرانسیل. خواهیم داشت:

$$S\,\ddot{Q}+2\left(\dot{S}-\not\Omega\,J\,S\right)\dot{Q}+\left(\omega^2\,S+\ddot{S}-2\,\not\Omega\,J\,\dot{S}\right)Q=0. \tag{23}$$

S را چنان بگیریم که جمله ی ِ شامل ِ $\dot{Q}$ صفر باشد. کافی است S چنان باشد که

$$\dot{S}-\not\Omega\,J\,S=0. \tag{24}$$

این یک معادله ی ِ دیفرانسیل برا ی ِ ماتریس ِ S است، که حل ش نسبتاً ساده و سرراست است. به زود ی حل ِ آن را بررسی خواهیم کرد، فعلاً نیاز ی نیست که شکل ِ صریح ِ حل را بنویسیم، کافی

است توجّه می‌کنیم که اگر $S(t)$ چنان باشد $\dot{S}=\not{\Omega}\,JS$، آن وقت معادله یِ دیفرانسیلِ Q جمله یِ $\dot{Q}$ ندارد، و داریم

$$\ddot{S}=\not{\Omega}\,J\dot{S}=(\not{\Omega})^2\;J^2\,S=-\,(\not{\Omega})^2\;S, \tag{25}$$

$$-2\;\not{\Omega}\,J\,\dot{S}=2\;\not{\Omega}^2\,S. \tag{26}$$

به این ترتیب خواهیم داشت

$$S\,\ddot{Q}+\left(\omega^2+\not{\Omega}^2\right)S\,Q=0, \tag{27}$$

که با ضرب کردنِ آن در S^{-1} (از چپ) می‌رسیم به معادله یِ ساده یِ

$$\ddot{Q}+\left(\omega^2+\not{\Omega}^2\right)Q=0. \tag{28}$$

این معادله بسیار آشنا است: نوسان‌گرِ هم‌آهنگِ هم‌سان‌گرد، با بس‌آمدِ

$$\omega' := \sqrt{\omega^2+\not{\Omega}^2}\simeq\omega+\frac{1}{2}\,\frac{\not{\Omega}^2}{\omega}. \tag{29}$$

برا یِ آونگ ی به طولِ کم‌تر از $100\,\mathrm{m}$، ω بزرگ‌تر از $0.3\,\mathrm{s}^{-1}$ است، و $\not{\Omega}$ کوچک‌تر از $7\times10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$ است، بنا بر این ω' با تقریبِ بسیار خوب ی همان ω است.

فرض کنید آونگ را در $t=0$ به اندازه یِ زاویه یِ $\alpha=A/\ell$ منحرف کنیم، و بدونِ سرعتِ اوّلیه رها کنیم. این یعنی باید معادله یِ دیفرانسیلِ (17) را با شرطِ آغازینِ

$$\begin{array}{ll} x(0)=A\,\cos\varphi_0 & \qquad\dot{x}(0)=0 \\ y(0)=A\,\sin\varphi_0 & \qquad\dot{y}(0)=0 \end{array} \tag{30}$$

حل کنیم. در این جا φ_0 زاویه ای است که صفحه یِ نوسانِ آونگ (در $t=0$) با محورِ x (یعنی امتدادِ غرب به شرق) می‌سازد. برا یِ حلِ (17) کافی است معادله‌ها یِ $\ddot{Q}+\omega^2Q=0$ را حل کنیم، و بعد $X=SQ$ را حساب کنیم. تنها چیز ی که می‌ماند این است که ببینیم شرطِ آغازینِ Q چیست.

$S(0)$ را هر ماتریسِ وارون‌پذیر ی می‌توانیم بگیریم (وضعیّتِ آغازین). یک انتخابِ بسیار خوب $\mathbb{I}$ است. با این انتخاب در $t=0$ فرق ی بینِ X و Q نیست. یعنی در $t=0$ داریم

$$X(0)\;=\;S(0)\,Q(0)=\mathbb{I}\,Q(0)=Q(0) \tag{31}$$

$$\dot{X}(0)\;=\;\dot{S}(0)\,Q(0)+S(0)\,\dot{Q}(0)=\not{\Omega}\,JQ(0)+\dot{Q}(0) \tag{32}$$

یا معادلاً

$$Q(0) = X(0), \qquad \dot{Q}(0) = \dot{X}(0) - \Omega\, J\, X(0). \tag{33}$$

که با نمادگذاری ی ِ متداول‌تر ِ x و y و q_1 و q_2 می‌شود

$$\begin{aligned} q_1(0) &= -A\,\cos\varphi_0 & \dot{q}_1(0) &= +A\;\Omega\,\sin\varphi_0 \\ q_2(0) &= -A\,\sin\varphi_0 & \dot{q}_2(0) &= -A\;\Omega\,\cos\varphi_0 \end{aligned} \tag{34}$$

جواب ِ معادله‌ها ی ِ $\ddot{q}_1 + \omega^2\, q_1 = \ddot{q}_2 + \omega^2\, q_2 = 0$ با این شرط‌ها ی ِ آغازین هست:

$$q_1(t) \;=\; A\left[\cos\varphi_0\,\cos\omega t - \frac{\Omega}{\omega}\,\sin\varphi_0\,\sin\omega t\right] \tag{35}$$

$$q_2(t) \;=\; A\left[\sin\varphi_0\,\cos\omega t + \frac{\Omega}{\omega}\,\cos\varphi_0\,\sin\omega t\right] \tag{36}$$

برا ی ِ آونگ‌ها ی ِ با طول ِ کم‌تر از $100\,\mathrm{m}$، داریم $\omega \geq 0.3\,\mathrm{s}^{-1}$، و بنا بر این

$$\frac{\Omega}{\omega} \leq 2 \times 10^{-4}. \tag{37}$$

پس با خیال ِ راحت می‌توانیم از جمله‌ها ی ِ شامل ِ Ω/ω صرف‌نظر کنیم. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$q_1(t) = A\cos\varphi_0\,\cos\omega t \qquad q_2(t) = A\sin\varphi_0\,\cos\omega t \tag{38}$$

از این جا به ساده‌گی دیده می‌شود که نسبت ِ $\dfrac{q_2}{q_1}$ ثابت است، و این یعنی در صفحه ی ِ $q_1\,q_2$ نوسان‌گر هم‌واره در امتداد ِ یک خط ِ شعاعی نوسان می‌کند؛ خط ی که با محور ِ q_1 زاویه ی ِ φ_0 می‌سازد.

اکنون تنها چیز ی که مانده این است که ماتریس ِ $S(t)$ را حساب کنیم. این کار ساده است. ابتدا کافی است توجّه کنیم که جواب ِ معادله ی ِ دیفرانیسل ِ ماتریسی ی ِ $\dot{S} = KS$ که در آن K یک ماتریس ِ 2×2 است، به شکل ِ زیر است.

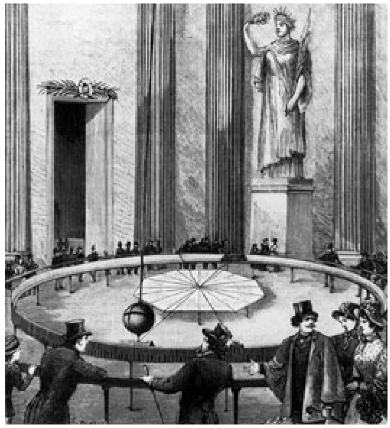
$$S(t) = e^{Kt}\,S(0). \tag{39}$$

در این جا منظور از $\exp(A)$ برا ی ِ ماتریس ِ A، تابع ِ زیر است:

$$\exp(A) = \mathbb{I} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots \tag{40}$$

اثبات بسیار ساده است ــ کافی است مشتق بگیریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{K\,t} \;&=\; \frac{d}{dt}\left(\mathbb{I} + K\,t + \frac{1}{2!}K^2\,t^2 + \frac{1}{3!}K^3\,t^3 + \ldots\right) \\ &=\; \left(0 + K + \frac{2}{2!}K^2\,t + \frac{3}{3!}K^3\,t^2 + \ldots\right) \end{aligned}$$



راست: تصویر ی که گویا در یک ی از روزنامه‌ها یِ پاریس چاپ شده و آزمایش ِ فوکو را نشان می‌دهد. چپ: وزنه یِ آونگ ِ فوکو. این وزنه اکنون در موزه ای در پاریس است.

$$\begin{aligned} &= K\left(\mathbb{I} + K\,t + \frac{1}{2!}K^2\,t^2 + \frac{1}{3!}K^3\,t^3 + \ldots\right) \\ &= K\,e^{K\,t}, \end{aligned} \tag{41}$$

پس

$$\frac{d}{dt}e^{Kt}\,S(0) = K\,e^{Kt}\,S(0) = K\,S. \tag{42}$$

برا یِ مسئله یِ ما $K = \Omega\,J$ که در آن ماتریس ِ J ویژه‌گی یِ جالب ی دارد که کمک می‌کند $e^{\theta J}$ را به ساده‌گی حساب کنیم.

$$J^2 = -\mathbb{I}, \qquad J^3 = -J, \qquad J^4 = \mathbb{I}, \qquad J^5 = J, \cdots \tag{43}$$

بنا بر این

$$\begin{aligned} e^{\theta J} &= \exp\left(\theta J\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}\,J^n \\ &= \mathbb{I} + \theta\,J + \frac{\theta^2}{2!}\,J^2 + \frac{\theta^3}{3!}\,J^3 + \cdots \\ &= \mathbb{I} + \frac{\theta}{1!}\,J - \frac{\theta^2}{2!}\,\mathbb{I} - \frac{\theta^3}{3!}\,J + \frac{\theta^4}{4!}\,\mathbb{I} + \cdots \end{aligned}$$

$$= \cos\theta\,\mathbb{I} + \sin\theta\, J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (44)$$

پس کافی است بگذاریم $\theta = \Omega\, t$، و خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega\, t) \\ -\sin(\Omega\, t) & \cos(\Omega\, t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A\, \cos\varphi_0\, \cos\omega t \\ A\, \sin\varphi_0\, \cos\omega t \end{bmatrix}, \qquad (45)$$

یا، با نمادگذاری ای آشناتر

$$\begin{aligned} x(t) &= A\, \cos\omega t\, [\cos(\Omega\, t)\, \cos\varphi_0 + \sin(\Omega\, t)\, \sin\varphi_0] \\ &= A\, \cos\omega t\, \cos(\varphi_0 - \Omega\, t) \qquad (46) \\ y(t) &= A\, \cos\omega t\, [\sin(\Omega\, t)\, \cos\varphi_0 - \cos(\Omega\, t)\, \sin\varphi_0]. \\ &= A\, \cos\omega t\, \sin(\varphi_0 - \Omega\, t) \qquad (47) \end{aligned}$$

این معادله‌ها می‌گویند: در صفحه ی ِ xy (که در آزمایش‌گاه افقی و ثابت است) یک نوسان با بس‌آمد ِ ω داریم، رو ی ِ خط ی که در $t = 0$ با محور ِ x زاویه ی ِ φ_0 می‌سازد، امّا زاویه ی ِ این خط با محور ِ x ثابت نیست، بل که با سرعت ِ زاویه‌ای ی ِ Ω در جهت ِ عقربه‌ها ی ِ ساعت می‌گردد. برا ی ِ دیدن ِ این مطلب می‌توان زاویه ی ِ بین ِ $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ را با راستا ی ِ $\mathbf{n} = \cos\varphi_0\,\mathbf{i} + \sin\varphi_0\,\mathbf{j}$ حساب کرد. این زاویه را γ بنامیم. داریم

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}|} = \frac{A\, \cos\omega t\, \cos(-\Omega\, t)}{A\, \cos\omega t} \\ &= \cos(-\Omega\, t) \qquad (48) \end{aligned}$$

پس از یک دور گردش ِ زمین، یعنی $86\,164\,\mathrm{s}$، این زاویه می‌شود $2\pi \sin\lambda$، که برا ی ِ $\lambda = 35^\circ$ می‌شود 206°. یعنی آونگ ِ در تهران، در هر ساعت 8.5° پیش‌روی می‌کند. به بیان ِ دیگر، صفحه ی ِ آونگ با دوره ی ِ $2\pi/(\Omega \sin\lambda)$ پیش‌روی می‌کند. این دوره برا ی ِ $\lambda = 35^\circ$ هست $150,225\,\mathrm{s}$، یعنی $41^{\mathrm{h}}\, 43^{\mathrm{m}}\, 45^{\mathrm{s}}$.

3 تعبیرِ هندسی: ناهنجاری در انتقالِ موازی روی ِیک مدارِ کره

⋆ از مطالبِ این بخش در ادامه یِ مقاله استفاده نخواهد شد. خواننده‌ها یی که فکر می‌کنند این مطالب زیاد ی مجرّد است، می‌توانند مستقیماً به بخشِ بعد بروند.

زاویه یِ $2\pi \sin\lambda$ «ناهنجاری» نام دارد. ناهنجاری مفهوم ی است در هندسه یِ دیفرانسیل. برا یِ فهمیدنِ آن ابتدا باید مفهومِ انتقالِ موازی را مرور کنیم.

فرض کنید $\vec{a}$ بردار ی باشد در نقطه یِ P، و فرض کنید Q نقطه ای دیگر از فضا یِ اقلیدسی (E^3) باشد. دو بردارِ $\vec{a}$ و $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ یک و تنها یک متوازی‌الاضلاع تعریف می‌کنند. به کمکِ این متوازی‌الاضلاع می‌توان $\vec{a}$ را به موازاتِ خود ش منتقل کرد تا به Q برسد. توجّه کنید که این انتقالِ موازی خوش‌تعریف است، چون در E^3 اصلِ توازی یِ اقلیدسی برقرار است که می‌گوید از هر نقطه در خارجِ یک خط، یک و تنها یک خط می‌گذرد که با آن موازی است.

اکنون رویه ای خمیده (Σ) در فضا یِ اقلیدسی یِ E^3 در نظر بگیرید. فرض کنید P و Q دو نقطه از این رویه باشند و $\vec{a}$ بردار ی باشد که در P بر رویه مماس است. آیا می‌توان بدونِ ابهام از موازی منتقل شده یِ $\vec{a}$ به Q صحبت کرد طور ی که بردار ی که به دست می‌آید در Q بر Σ مماس باشد؟ نه. زیرا اگر $\vec{a}$ را در E^3 موازی منتقل کنیم، در حالتِ کلّی در Q بر Σ مماس نخواهد بود. امّا می‌توان انتقالِ موازی را به نحوِ دیگر ی تعریف کرد که بشود آن را به رویه‌ها یِ خمیده هم تعمیم داد، به این نحو:

انتقالِ موازی در امتدادِ یک خم که رو یِ رویه یِ خمیده یِ Σ است:

خمِ Γ را به قطعه‌ها یی بسیار کوچک تقسیم می‌کنیم. در امتدادِ هر قطعه یِ کوچک این طور انتقالِ موازی می‌دهیم: بردارِ $\vec{a}$ را در فضا یِ اقلیدسی یِ E^3 در امتدادِ این قطعه یِ بسیار کوچک منتقل می‌کنیم. به این ترتیب بردار ی به دست می‌آید که ممکن است بر رویه مماس نباشد. مؤلفه یِ قائم بر رویه اش را حذف می‌کنیم، یا اصطلاحاً بردار را بر رویه تصویر می‌کنیم. به این ترتیب بردار ی به دست می‌آید که بر رویه مماس است. این کار را به ترتیب برا یِ همه یِ قطعه‌ها یِ بسیار کوچک انجام می‌دهیم تا به بردار ی در Q برسیم. این بردار حاصلِ انتقالِ موازی یِ $\vec{a}$ از P به Q در امتدادِ Γ است. نکته یِ بسیار مهم این است که این بردار ی که به دست می‌آید به مسیرِ Γ بسته‌گی دارد. این انتقالِ موازی را «انتقالِ موازی یِ لِوی ـ چیویتا»[h] می‌نامیم. می‌توان نشان داد که طولِ بردار ی که به این نحو به دست می‌آید با $|\vec{a}|$ برابر است.

فرض کنید Γ یک خم ِ بسته باشد و Q نقطه ای از Γ باشد. اگر $\vec{a}$ را در امتداد ِ Γ انتقال ِ موازی بدهیم تا باز به Q برسد چه می‌شود؟ بردار ی مثل ِ $\vec{b}$ به دست می‌آید که طول ش برابر است با طول ِ $\vec{a}$، پس می‌توان آن را با دادن ِ یک زاویه مشخّص کرد. این زاویه را ناهنجاری برا ی ِ خم ِ Γ می‌گویند. در زیر این تعریف ِ انتقال ِ موازی را برا ی ِ یک کره، و برا ی ِ وقت ی که Γ یک مدار ِ کره باشد دنبال می‌کنیم و ناهنجاری را به دست می‌آوریم.

فرض کنید بردار ِ $\vec{u}$ در نقطه ای به عرض ِ λ بر کره ای مماس باشد. این بردار را در امتداد ِ مدار ِ λ «انتقال ِ موازی» بدهیم، تا دوباره به همان نقطه باز گردد. از مختصّه‌ها ی ِ متعارف ِ کروی استفاده می‌کنیم. داریم

$$\hat{r} \;=\; \sin\theta\,\cos\varphi\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\sin\varphi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k} \tag{49}$$

$$\hat{\theta} \;=\; \cos\theta\,\cos\varphi\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\sin\varphi\,\mathbf{j} \tag{50}$$

$$\hat{\varphi} \;=\; -\sin\varphi\,\mathbf{i}+\cos\varphi\,\mathbf{j} \tag{51}$$

این سه بردار در نقطه ی ِ (θ,φ) اند. در نقطه ی ِ $(\theta,\varphi+\delta\varphi)$ سه بردار ِ دیگر داریم که اگر $\delta\varphi$ کوچک باشد می‌توانیم آن‌ها را با بسط دادن ِ توابع ِ بالا به دست آوریم.

$$\hat{r}' \;=\; \hat{r}+\delta\varphi\,\sin\theta\,\hat{\varphi} \tag{52}$$

$$\hat{\theta}' \;=\; \hat{\theta}+\delta\varphi\,\cos\theta\,\hat{\varphi} \tag{53}$$

$$\hat{\varphi}' \;=\; \hat{\varphi}-\delta\varphi\,\sin\theta\,\hat{r}'-\delta\varphi\,\cos\theta\,\hat{\theta}. \tag{54}$$

بردار ی در نظر بگیریم که در نقطه ی ِ (θ,φ) بر کره مماس باشد، یعنی

$$\mathbf{u}=a_1\,\hat{\theta}+a_2\,\hat{\varphi}. \tag{55}$$

این بردار را در فضا ی ِ 3 بعدی، به موازات ِ خود ش منتقل می‌کنیم و به نقطه ی ِ $(\theta,\varphi+\delta\varphi)$ می‌بریم. توجّه کنید که این انتقال ِ موازی در فضا ی ِ اقلیدسی است، و کاملاً خوش‌تعریف است. در این صورت بردار ی خواهیم داشت که می‌توانیم آن را بر حسب سه بردار ِ $\hat{r}'$ و $\hat{\theta}'$ و $\hat{\varphi}'$ بنویسیم (برا ی ِ این کار به‌تر است ابتدا عکس ِ رابطه‌ها ی ِ بالا را حساب کنیم، که بسیار ساده است). خواهیم داشت

$$\mathbf{u}=(a_1+a_2\,\delta\varphi\,\cos\theta)\;\hat{\theta}'+(-a_1\,\delta\varphi\,\cos\theta+a_2)\;\hat{\varphi}'+a_2\,\delta\varphi\,\sin\theta\,\hat{r}'. \tag{56}$$

همان طور که می‌بینیم، این بردار در نقطه ی ِ $(\theta,\varphi+\delta\varphi)$ بر کره مماس نیست (زیرا مؤلفه ی ِ $\hat{r}'$ هم دارد). اگر این $\mathbf{u}$ را در این نقطه ی ِ جدید بر کره تصویر کنیم (یعنی مؤلفه ی ِ عمود بر کره اش را حذف

کنیم) بردار ی به دست می‌آید که می‌گوییم «حاصل ـِ انتقال ـِ موازی یـِ بردار ـِ $\vec{u}$، در امتداد ـِ مدار ـِ θ ثابت، رو یـِ کره» است. البتّه این کار را برا یـِ $\delta\varphi$ ها یـِ بسیار کوچک می‌کنیم.

به این ترتیب توانستیم مفهوم ـِ انتقال ـِ موازی برا یـِ یک جابه‌جایی یـِ بسیارکوچک در امتداد ـِ یک مدار را تعریف کنیم، که با حذف ـِ جمله یـِ متناسب با $\hat{r}'$ از فرمول ـِ بالا داده می‌شود. مؤلفه‌ها یـِ بردار ـِ $\vec{u}$ دو عدد ـِ a_1 و a_2 اند. وقت ی این بردار را رو یـِ کره انتقال ـِ موازی می‌دهیم بردار ـِ دیگر ی به دست می‌آید با مؤلفه‌ها یـِ a'_1 و a'_2 که داریم

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\varphi\,\cos\theta \\ -\delta\varphi\,\cos\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

این فرمول را با تعریف ـِ

$$X := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \tag{58}$$

می‌توان به شکل ـِ زیر نوشت.

$$X \mapsto X' = X + \delta X \qquad\qquad \delta X = \delta\varphi\,\cos\theta\,J\,X. \tag{59}$$

در این فرمول J همان ماتریس ی است که پیش‌تر تعریف کردیم. واضح است که در حد ـِ $\delta\varphi \to 0$ می‌رسیم به معادله یـِ دیفرانسیل ـِ زیر.

$$\frac{dX}{d\varphi} = \cos\theta\,J\,X. \tag{60}$$

حل ـِ این معادله با شرط ـِ آغازین ـِ $X(0) = X_0$ هست

$$X(s) = e^{\varphi\,\cos\theta\,J}X_0 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi\,\cos\theta) & \sin(s\,\cos\theta) \\ -\sin(\varphi\,\cos\theta) & \cos(\varphi\,\cos\theta) \end{pmatrix} X_0. \tag{61}$$

این ماتریس را با ماتریس ی که در (45) آمد مقایسه کنید! واضح است که اگر بگذاریم $\varphi = -\Omega\,t$، این ماتریس می‌شود همان ماتریس ی که با حل ـِ معادله یـِ حرکت ـِ آونگ به دست آوردیم.[1] نتیجه این که: بردار ـِ عمود بر صفحه یـِ نوسان ـِ آونگ، با چرخش ـِ زمین به دور ـِ محور ش، موازی منتقل می‌شود. انتقال ـِ موازی برا یـِ مدار ی که در نیم‌کره یـِ شمالی است بردار را به اندازه یـِ زاویه یـِ $\Delta\varphi\,(\cos\theta)$ می‌چرخاند، طور ی که بردار ی که ابتدا به سمت ـِ شرق بود، کم ی به سمت ـِ جنوب متمایل می‌شود.

$X(2\pi)$ بردار ی است در همان نقطه یـِ آغازین، یعنی در همان نقطه ای که $X(0)$ بر کره مماس بود. پس زاویه یـِ $X(2\pi)$ با $X(0)$ کمیّت ـِ خوش‌تعریف ی است. این زاویه $2\pi\cos\theta$ است که بر

[1] علامت ـِ منفی درست است! دقّت کنید که جهت ـِ بردار ـِ یکه یـِ $\hat{\theta}$ به سمت ـِ جنوب است، امّا وقت ی دینامیک ـِ آونگ ـِ فوکو را مطالعه می‌کردیم جهت ـِ محور ـِ y را رو به شمال گرفتیم.

حسب ِ عرض ِ جغرافیایی می‌شود $2\pi \sin \lambda$.

اینک می‌توانیم چرخش ِ صفحه ی ِ نوسان ِ آونگ ِ فوکو را به این شکل بیان کنیم:

> صفحه ی ِ نوسان ِ آونگ ِ فوکو با بردار ی عمود بر آن که بر کره ی ِ زمین مماس است مشخّص می‌شود. زمین که می‌چرخد، این بردار رو ی ِ مدار ِ λ موازی منتقل می‌شود، و پس از یک دور ِ کامل یک ناهنجاری به اندازه ی ِ $2\pi \sin \lambda$ پیدا می‌کند.

در این جا یک تذکّر ِ بسیار مهم را لازم می‌دانم. این چیز ی که هم‌اینک در مورد ِ آونگ ِ فوکو بیان کردیم، به هیچ وجه از ابتدا بدیهی نبود و نیست. به اصطلاح ِ فیلسوف‌ها این گزاره یک گزاره ی ِ پَسینی است، نه پیشینی، به این معنی که به هیچ وجه با تفکر ِ محض، یعنی بدون ِ ارجاع به تجربه یا حل ِ معادله‌ها ی ِ حرکت، نمی‌توان استدلال کرد که «بردار ِ عمود بر صفحه ی ِ نوسان ِ آونگ ِ فوکو، با چرخش ِ زمین، موازی منتقل می‌شود». تنها پس از آن که معادله‌ها ی ِ حرکت را نوشتیم این نکته روشن شد. امّا، برا ی ِ کسان ی که با معادله‌ها ی ِ حرکت در فضاها ی ِ خمیده و حل ِ آن‌ها آشنا یند، به نوع ی «واضح» است که حرکت ِ جسم ِ آزاد ی که مقیّد است رو ی ِ یک سطح ِ خمیده حرکت کند «حرکت ِ ژئودزیک» است، و به‌ساده‌گی از این جا نتیجه می‌گیرند که اگر یک نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ ِ هم‌سان‌گرد را که مقیّد است رو ی ِ سطح ی نوسان کند، به آرامی منتقل کنیم، قطرها ی ِ بیضی اش موازی منتقل می‌شوند (برا ی ِ دیدن ِ این نوع استدلال ِ هندسی، رجوع کنید به [3] و [4]). باید توجّه کرد که در استدلال‌ها یی از این نوع چیزها ی ِ دیگر ی فرض شده — مثلاً این که حرکت ژئودزیک است، یا این که انتقالِ‌موازی درست همان انتقالِ‌موازی ی ِ لِوی ـ چیویتا است، و متریک ِ فضا ی ِ اطراف ِ زمین بر اثر ِ چرخش ِ زمین تغییر نمی‌کند، و چیزها یی از این دست.

4 تخمین ی از میرایی

پیش‌روی ی ِ صفحه ی ِ نوسان ِ آونگ ِ فوکو کند است. برا ی ِ آن که مردم آن را ببینند، باید چند ساعت صبر کرد. پس باید آونگ ی داشته باشیم که دستِ‌کم چند ساعت نوسان کند، بی آن که دامنه ی ِ نوسان ش به طرز ِ فاحش ی کم شود. وقت ی کره ای به شعاع ِ a در هوا حرکت می‌کند، نیرو ی ِ اصطکاک ی بر آن وارد می‌شود. این نیرو را می‌توان مجموع ِ دو نیرو دانست. اوّل نیرو ی ِ ناشی از گران‌روی که به شکل ِ $6\,\pi\,\eta\,a\,v$ است. در این فرمول η ضریب ِ گران‌روی است که در دما ی ِ $0°C$ و فشار ِ $1\,\mathrm{atm}$ برا ی ِ هوا $1.78 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg/(m\,s)}$ است. دوّم نیرو ی ِ ناشی از برخورد ِ ملکول‌ها ی ِ هوا با کره. این نیرو به شکل ِ $K\,\pi\,a^2\,\rho'\,v^2$ است، که در این جا ρ' چگالی ی ِ هوا است که دما و فشار ِ متعارفی $\rho' = 1.3\,\mathrm{kg/m^3}$ است. ضریب ِ K ثابت ی است بی‌بُعد. اگر برخوردها کاملاً

ناکش‌سان باشند، یعنی ملکول‌ها یِ هوا بچسبند به جسم $K=1$ است. فرض ِ ناکش‌سان بودن ِ برخوردها چندان فرض ِ خوب ی نیست، امّا نکته یِ مهم این است که عموماً K عدد ی از مرتبه یِ 1 است.

نسبت ِ این دو نیرو عدد ِ بی‌بُعد ی است که آن را عدد ِ رِینولدز[i] ِ مربوط به این مسئله می‌نامیم و با Re نشان ش می‌دهیم.[2]

$$\mathrm{Re}=\frac{\pi\,a^2\,\rho'\,v^2}{6\,\pi\,\eta\,a\,v}=\frac{6\,\rho'\,a\,v}{\eta}. \tag{62}$$

وقت ی Re کوچک‌تر از 1 است، نیرو یِ ناشی از گران‌روی مهم‌تر است، و وقت ی Re بزرگ‌تر از 1 است، نیرو یِ متناسب با v^2 مهم‌تر است. برا یِ آونگ ی به طول ِ ℓ و دامنه یِ α، میان‌گین ِ سرعت تقریباً $\alpha\,\ell\,\omega$ است، که در آن $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ است. به این ترتیب داریم

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho'\,a\,\ell^{1/2}\,g^{1/2}}{6\,\eta}\simeq 2\times 10^4\,\alpha\,a\,\sqrt{\ell}\qquad [\text{SI units}]\,. \tag{63}$$

برا یِ آونگ ی به طول ِ $1\,\mathrm{m}$ که وزنه اش کره ای به شعاع ِ $0.5\,\mathrm{cm}$ باشد، این عدد $100\,\alpha$ است. هم با بلندتر شدن ِ ℓ، و هم با بزرگ‌تر شدن ِ a، ضریب ِ α بزرگ می‌شود. از این جا واضح است که برا یِ آن که عدد ِ رینولدز کوچک باشد، باید دامنه خیل ی کوچک باشد. مثلاً برا یِ آن که عدد ِ رینولدز 0.5 باشد، باید α تقریباً $0.005\,\mathrm{Rad}$ باشد، که برا یِ آونگ ی با طول ِ $1\,\mathrm{m}$، یعنی دامنه یِ $5\,\mathrm{mm}$ که بسیار کوچک است. با چنین آونگ ی نمی‌توان خوب آزمایش کرد. به بیان ِ دیگر در آزمایش‌ها یِ معمول با آونگ عدد ِ رینولدز بزرگ است، یعنی نیرو یِ اصطکاک به شکل ِ $\pi\,a^2\,\rho'\,v^2$ است. چنین نیرو یی با توان ِ $\pi\,a^2\,\rho'\,v^3$ از انرژی یِ آونگ می‌کاهد.

با فرض ِ کوچک بودن ِ دامنه یِ نوسان‌ها یِ آونگ، می‌توانیم بنویسیم $x=A\,\cos\omega t$ و از آن جا $v=\dot{x}=-A\,\omega\,\sin\omega t$، و بنا بر این در نصف ِ دوره یِ تناوب داریم

$$\int_0^{\pi/\omega} v^3\,dt=\int_0^{\pi/\omega} A^3\,\omega^2\,\sin^3\omega t\,dt=\frac{4}{3}\,A^3\,\omega^2. \tag{64}$$

پس، در هر دوره یِ تناوب به اندازه یِ $\frac{8\,\pi}{3}\,A^3\,a^2\,\omega^2\,\rho'$ از انرژی یِ آونگ کم می‌شود. انرژی یِ کل ِ آونگ هست $E=\frac{4\,\pi}{3}\,a^3\,\rho\,A^2\,\omega^2$، که یعنی $A=\left(\frac{3\,E}{4\,\pi\,a^3\,\rho\,\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$، و بنا بر این در مدّت زمان ِ $\frac{2\,\pi}{\omega}$ به اندازه یِ dE از انرژی یِ آونگ کم می‌شود که برابر است با

---

[2] معمولاً، برا یِ حرکت ِ یک کره در یک سیّال، عدد ِ رینولدز را $\frac{2\,a\,\rho' v}{\eta}$ تعریف می‌کنند، که 12 برابر ِ آن چیز ی است که ما با Re نشان داده ایم.

$$\begin{aligned} dE &= -\frac{8\,\pi}{3}\,a^2\,\omega^2\,\rho' \left(\frac{3\,E}{4\,\pi\,a^3\,\rho\,\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{4}{3}\,a^2\,\rho' \left(\frac{3}{4\,\pi\,a^3\,\rho}\right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}}\,dt \qquad\qquad dt = \frac{2\,\pi}{\omega} \end{aligned} \tag{65}$$

این معادله یِ دیفرانسیل ی است به شکل ِ $\frac{dE}{dt} = c\,E^{3/2}$ که حل ش ساده است. جواب ِ آن با شرط ِ آغازین ِ $E(0) = E_0$ هست $\frac{E}{E_0} = \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-2}$ که یعنی $\frac{A}{A_0} = \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-1}$. در این فرمول‌ها

$$\tau = \frac{\pi}{2}\,\frac{a}{A_0}\,\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{66}$$

زمان ِ مشخّصه یِ میرایی، و A_0 دامنه یِ آغازین ِ آونگ است. فرض کنیم

$$\rho = 3.7 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}, \qquad a = 15\,\mathrm{cm}, \qquad \ell = 11\,\mathrm{m}, \qquad A = 1\,\mathrm{m} \tag{67}$$

خواهیم داشت

$$\tau = 7 \times 10^2\,\mathrm{s} = 12^{\mathrm{m}} \tag{68}$$

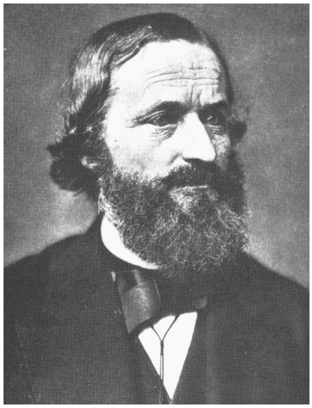
پس اگر چنین آونگ ی را با دامنه یِ $1\,\mathrm{m}$ به نوسان در آوریم، پس از 5^{h} دامنه اش می‌شود

$$\frac{A}{A_0} = \left(1 + \frac{300}{12}\right)^{-1} = 0.04 \tag{69}$$

و این یعنی دامنه اش پس از 5^{h} تقریباً $4\,\mathrm{cm}$ است. در [5] گزارش شده که آونگ ی با چنین مشخّصه‌ها یی تا 5 یا 6 ساعت کار می‌کند، که خیل ی با تخمین ِ ما فاصله ندارد، و البتّه قدر ی بیش‌تر از انتظار ِ ما است.

فوکو در سال ِ 1851 در زیر ِ تاق ِ عمارت ِ پانتِئون[j] ِ پاریس آونگ ی نصب کرد و آزمایش کرد. چرخش ِ زمین مشهود بود. برا یِ نخستین بار مردم می‌توانستند چرخش ِ زمین را ببینند. آن طور که در [6] آمده است: طول ِ آونگ 67 متر بود که یعنی پریود ِ تقریباً 16 ثانیه. شعاع ِ وزنه $a = 8.5\,\mathrm{cm}$، وزن ش $28\,\mathrm{kg}$، چگالی اش $1.1 \times 10^4\,\mathrm{kg/m^3}$ بود. (وزنه از برنج و آهن ساخته شده بود که تو یش سُرب پر کرده بودند.) زمان ِ مشخّصه، τ، برا یِ دامنه یِ $1\,\mathrm{m}$ می‌شود $9 \times 10^3\,\mathrm{s}$، یعنی حدود ِ 2.5 ساعت. زیر ِ آونگ مقدار ِ زیاد ی خاک ریخته بودند که اگر نخ ِ آونگ پاره شد افتادن ِ وزنه کف ِ سرسرا یِ پانتِئون را خراب نکند. ضمناً، فوکو به وزنه قلم ی وصل کرده بود که رو یِ خاک رد می‌انداخت. به این ترتیب می‌شد مسیر ِ تصویر ِ وزنه را دید. نمایش چند روز ادامه داشت. مردم می‌آمدند و چرخش ِ زمین را به چشم می‌دیدند.

لِئون فوکو



گوستاو کیرشهُف

هِیکه کامِرلینخ اُنِس

5 حرکت بیضوی می‌شود!

آونگ ِ فوکو همان طور که نظریه پیش‌بینی می‌کرد پیش‌روی می‌کرد؛ امّا، در تمام ِ آزمایش‌ها، پس از گذشت ِ مدّت ی، پیش از آن که اصطکاک باعث ِ کم شدن ِ دامنه ی ِ آونگ بشود، اتّفاق ِ دیگر ی می‌افتاد ــ حرکت ِ آونگ به مرور بیضوی می‌شد! و یک پرسش ِ مهم این است که چرا. چرا حرکت ِ آونگ ِ فوکو پس از مدّت ی بیضوی می‌شود؟ نخستین چیز ی که به ذهن می‌رسد این است که ممکن است وزنه یا آویزگاه نامتقارن باشد. خوب است به یاد بیاوریم که اصولاً فیزیک این طور پیش‌رفت می‌کند که نتیجه ی ِ آزمایش و نظریه را با هم مقایسه می‌کنیم، و هر وقت انحراف ی دیدیم، می‌کوشیم هم آزمایش را دقیق‌تر انجام بدهیم، و هم نظریّه را دقیق‌تر بررسی کنیم. تفاوت ِ فیزیک‌پیشه‌ها ی ِ تراز اوّل با بقیّه در همین توجّه به آزمایش و دقّت در نظریّه است.

در اواسط ِ دهه ی ِ 1870، گوستاو کیرشهُف[k] که فیزیک‌پیشه ی ِ برجسته ای بود، هِیکه کامرلینخ اُنِس را، که چند سال پیش‌تر در هایدِلبِرگ دانش‌جو یش بود، ترغیب کرد که مسئله را حل کند. کامرلینخ اُنِس، در خِرونینخِن[1] ِ هُلند مسئله را دنبال کرد، و در 1879 رساله ی ِ دکترا یش را در این باره نوشت [7]. این کامرلینخ اُنِس همان کس ی است که بعدها یک ی از پیش‌تازان ِ فیزیک ِ دماها ی ِ کم بود، و ابررسانایی را کشف کرد، و در 1913 جایزه ی ِ نُبِل ِ فیزیک را گرفت و یک ی از برجسته‌ترین فیزیک‌پیشه‌ها ی ِ تجربه‌گر بوده است.

کامِرلینخ اُنِس آونگ ی ساخت بسیار متقارن. آویزگاه ی هم ساخت که او را قانع می‌کرد هیچ گشتاور ی وارد نمی‌کند. هنوز مدار بیضی می‌شد! برا ی ِ یک فیزیک‌پیشه ی ِ تجربه‌گر ِ معمولی، این می‌توانست یک دست‌آورد باشد. امّا کامِرلینخ اُنِس یک فیزیک‌پیشه ی ِ برجسته بود، و در این حد متوقّف نشد، بل که مسئله را از دید ِ نظری هم بررسی کرد.

6 بسته‌گی ی ِ بس‌آمد ِ آونگ به راستا ی ِ نوسان

کامرلینخ اُنِس در هم‌سان‌گرد ی ِ میدان ِ گرانش، حول ِ محور ِ z ِ آزمایش‌گاه شک کرد. زمین به هیچ وجه حول ِ محور ی که از مرکز ِ زمین و محل ِ آزمایش‌گاه می‌گذرد تقارن ِ چرخشی ندارد ــ زیرا اوّلاً زمین پخ است، ثانیاً ناهم‌گنی‌ها ی ِ موضعی ی ِ زیاد ی دارد (مثل ِ کوه‌ها، درّه‌ها، ساختمان‌ها، که ممکن است نزدیک ِ آزمایش‌گاه باشند). پس تقارن ِ چرخشی، حول ِ محور ِ z ِ آزمایش‌گاه دقیق نیست. آن چه می‌دانیم این است که میدان ِ گرانش ِ مؤثر ِ زمین[3] با یک تابع ِ پتانسیل که حل ِ معادله ی ِ لاپلاس است داده می‌شود.

این پتانسیل، به علاوه ی ِ نیرو ی ِ قیدی ی ِ نخ، در مجموع باعث می‌شوند تصویر ِ وزنه ی ِ آونگ بر صفحه ی ِ $z=0$، تحت ِ تأثیر ِ یک انرژی ی ِ پتانسیل ِ $U(x,y)$ باشد. اگر میدان ِ گرانش ِ مؤثر ِ زمین، دور ِ محور ِ z ِ آزمایش‌گاه هم‌سان‌گرد بود، این تابع به شکل ِ $\frac{1}{2}m\,\omega^2\,(x^2+y^2)$ بود. وجود ِ ناهم‌سان‌گردی این شکل را عوض می‌کند. این شکل را بیابیم.

پتانیسل ِ گرانشی، که یعنی انرژی ی ِ پتانسیل تقسیم بر جرم ِ جسم، بسط ِ تِیلُر ی در مختصّه‌ها ی ِ دکارتی دارد.

$$\phi = A\,x + B\,y + C\,z + \frac{1}{2}\left(\alpha\,x^2 + \beta\,y^2 + \gamma\,z^2 + 2\,\epsilon\,x\,y + 2\,\eta\,x\,z + 2\,\kappa\,y\,z\right). \qquad (70)$$

چون این تابع باید حل ِ معادله ی ِ لاپلاس باشد، داریم

$$\gamma = -(\alpha+\beta). \qquad (71)$$

گرادیان ِ این تابع $\mathbf{g}$ را می‌دهد:

$$\vec{\nabla}\phi = (A+\alpha\,x+\epsilon\,y+\eta\,z)\,\mathbf{i} + (B+\beta\,y+\epsilon\,x+\kappa\,z)\,\mathbf{j} + (C+\gamma\,z+\eta\,x+\kappa\,y)\,\mathbf{k} \qquad (72)$$

شتاب ِ گرانش در مبداء، $x=y=z=0$ برابر است با g_0، و محور ِ z بنا به تعریف راستا ی ِ شاغول، یعنی راستا ی ِ $-\mathbf{g}=\vec{\nabla}\phi$ است. بنا بر این A و B باید صفر باشند، و $C=g_0$ است. پس داریم

$$\phi = g_0\,z + \frac{1}{2}\left(\alpha\,x^2 + \beta\,y^2 + \gamma\,z^2 + 2\,\epsilon\,x\,y + 2\,\eta\,x\,z + 2\,\kappa\,y\,z\right). \qquad (73)$$

اکنون اگر باز برا ی ِ آونگ ِ کم‌دامنه z را از فرمول ِ (5) در این تابع بگذاریم، و از توان‌ها ی ِ 3 صرفِ‌نظر کنیم، می‌رسیم به

[3] در این جا منظور از مؤثر، مجموع ِ گرانش و شتاب ِ گریزازمرکز است.

$$\phi \;=\; \frac{g_0}{2\ell}\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha\,x^2+2\,\epsilon\,x\,y+\beta\,y^2\right)$$

$$=\; \frac{1}{2}\left[\left(\omega^2+\alpha\right)\;x^2+2\,\epsilon\,x\,y+\left(\omega^2+\beta\right)\right]. \tag{74}$$

می‌بینیم با در نظر گرفتن ِ ناهم‌سان‌گردی در پتانسیل ِ گرانشی، پتانسیل ی که حرکت ِ آونگ را توصیف می‌کند پتانسیل ِ یک نوسان‌گر ِ ناهم‌سان‌گرد است. البتّه این ناهم‌سان‌گردی کوچک است، که یعنی α و β و ϵ کوچک اند؛ امّا چه قدر کوچک؟ آن‌ها را تخمین بزنیم.

پتانسیل ِ گرانش ِ زمین با تقریب ِ خوب ی چنین است [8]:

$$\phi=-\frac{G\,M}{R}\left[\frac{R}{r}-\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{J_2}{2}\;\left(3\,\cos^2\theta-1\right)\right], \tag{75}$$

که در این جا M جرم ِ زمین، R شعاع ِ زمین، و J_2 یک ثابت ِ بی‌بُعد است.

$$J_2=1.08\times 10^{-3},\qquad\qquad R=6.378\times 10^6\,\mathrm{m}. \tag{76}$$

این پتانسیل را حول ِ نقطه ی ِ (r,θ,φ) بسط بدهیم، البتّه تنها در امتدادها ی ِ θ و φ (زیرا برا ی ِ آونگ z، یعنی r با دقّت ِ خوب ی ثابت است). تغییر ِ جمله ی ِ چهارقطبی ی ِ پتانسیل چنین خواهد بود:

$$\delta\left(\frac{1}{2}\left(3\,\cos^2\theta-1\right)\right)\;=\;-\frac{3}{2}\sin 2\theta\,\delta\theta-\frac{1}{2!}\,\frac{3}{2}\,2\,\cos 2\theta\,(\delta\theta)^2. \tag{77}$$

جمله ی ِ مرتبه ی ِ اوّل باعث می‌شود شاغول در راستا ی ِ $\hat{r}$ نایستد؛ امّا ما z را با راستا ی ِ شاغول تعریف می‌کنیم. به عبارت ِ دیگر، وقت ی پتانیسیل را به شکل ِ $g_0\,z+\delta\phi$ می‌نویسیم، جمله ای که در $\delta\theta$ از مرتبه ی ِ اوّل است در خود ِ g_0 و z آمده است. آن چه می‌ماند جمله ی ِ مرتبه ی ِ دوّم در $\delta\theta$ است. اگر این را بر حسب ِ عرض ِ جغرافیایی، λ، بنویسیم، و به یاد بیاوریم که محور ِ y را در امتداد ِ نصف‌النّهار و رو به شمال گرفته بودیم، می‌بینیم

$$\delta\theta=-\delta\lambda=-\frac{y}{R} \tag{78}$$

و از این جا

$$\phi\;=\;g_0\,z-\frac{G\,M}{R}\,J_2\,\frac{y^2}{R^2}\,\cos 2\lambda$$

$$= g_0\, z - \frac{G\, M}{R^2}\,\frac{1}{R}\, J_2\, y^2$$

$$= g_0\, z - \frac{g_0\, J_2}{R}\, y^2 \tag{79}$$

یعنی با نمادگذاری یِ قبلی مان،

$$\beta \sim \frac{g_0\, J_2}{R} \sim 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}. \tag{80}$$

این عدد در مقایسه با ω^2 یِ آونگ بسیار کوچک است، و باعث می‌شود ω از مرتبه یِ 10^{-9} تغییر کند، زیرا

$$\sqrt{\omega^2+\beta} \simeq \omega\left(1+\frac{\beta}{2\,\omega^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\delta\omega}{\omega} \simeq \frac{\beta}{2\,\omega^2} \sim 10^{-9}. \tag{81}$$

تغییرات ِ بس‌آمد ِ آونگ، بر اثر ِ چرخش ِ زمین، از مرتبه یِ $\Omega/\omega \sim 10^{-5}$ است. بنا بر این چهارقطبی یِ گرانشی یِ زمین عامل ِ چندان مهم ی در ناهم‌سان‌گرد شدن ِ آونگ نیست.

آیا ناهم‌گنی‌ها یِ موضعی مهم اند؟ برا یِ تخمین فرض کنیم کره ای به شعاع ِ R و چگالی یِ ρ در فاصله یِ L از آزمایش‌گاه باشد.[4] با تحلیل ِ ابعادی می‌توان انتظار داشت که این باعث ِ تغییر ِ پتانسیل ِ گرانشی بشود، طور ی که ضرایب ِ α و β و ϵ که بالاتر معرفی شدند از مرتبه یِ زیر باشند.

$$\alpha, \beta, \epsilon \sim \frac{4\, G\, R^3\, \rho}{L^3}. \tag{82}$$

برا یِ $\frac{R}{L} \sim 1$، و $\rho \sim 5\times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$، خواهیم داشت

$$\alpha, \beta, \epsilon \sim 10^{-6}\,\mathrm{s}^{-2}. \tag{83}$$

بنا بر این می‌بینیم که ناهم‌سان‌گردی‌ها یی در پتانسیل ِ گرانش از مرتبه یِ $10^{-6}\,\mathrm{s}^{-2}$ اصلاً بعید نیست.

امّا تأثیر ِ این‌ها بر بس‌آمد ِ آونگ چیست؟ دقّت کنیم که پتانسیل ِ مسئله به شکل ِ یک فرم ِ درجه یِ 2 است.

$$\phi = \frac{1}{2}\,[\,x \quad y\,]\begin{pmatrix}\omega^2+\alpha & \epsilon\\ \epsilon & \omega^2+\beta\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}. \tag{84}$$

می‌دانیم که با انتخاب ِ دو محور ِ مناسب، که بر هم عمود هم هستند، می‌توانیم این فرم را قطری کنیم. اگر X و Y این محورها باشند، خواهیم داشت

$$\phi = \frac{1}{2}\left[\omega_1^2\, X^2 + \omega_2^2 Y^2\right]. \tag{85}$$

[4] یک حفره هم درست چنین اثر ی دارد، امّا با علامت ِ برعکس.

در این جا ω_1 و ω_2 ویژه‌مقدارها ی ِ ماتریس ِ فوق اند. حساب کردن ِ آن‌ها سخت نیست.

$$\omega_{1,2}^2 = \omega^2 + \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\,(\alpha-\beta)^2 + \epsilon^2}. \tag{86}$$

نکته ی ِ مهم این است که اگر α و β و ϵ، که خیل ی کوچک اند، از مرتبه ی ِ مثلاً $\bar{\alpha}$ باشند $\delta\omega/\omega$ از مرتبه ی ِ $\bar{\alpha}/\omega^2$ است.

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \sim \frac{\bar{\alpha}}{\omega^2} \sim \frac{\bar{\alpha}\,\ell}{g}. \tag{87}$$

این فرمول می‌گوید که ناهم‌سان‌گردی ی ِ بس‌آمد ِ آونگ، متناسب با طول ِ آونگ است. پس هر چه آونگ بلندتر باشد، ناهم‌سان‌گردی مهم‌تر است.

7 تأثیر ِ ناهم‌سان‌گردی

پس، پتانسیل ی که نوسان ِ آونگ را می‌دهد به شکل ِ عمومی ی ِ یک نوسان‌گر ِ ناهم‌سان‌گرد است. چنین نوسان‌گر ی دو محور ِ اصلی دارد که بر هم عمود اند. دو بس‌آمد ِ اصلی خواهیم داشت، که اگر میدان ِ گرانش هم‌سان‌گرد می‌بود، یک ی می‌بودند. اکنون این دو بس‌آمد کم ی با هم اختلاف دارند، به دو علّت: یک ی ناهم‌سان‌گردی ی ِ زمین، دیگری چرخش ِ زمین (این را خواهیم دید). باید دید ویژه‌تابع‌ها ی ِ مختل‌شده چه هستند؟ این کار امروز برا ی ِ ما آشنا است: نظریه ی ِ اختلال ِ حالت‌ها ی ِ تبه‌گن در مکانیک ِ کوانتمی را به یاد بیاورید! امّا در در دهه ی ِ 1870، ریاضیات ِ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارها، و روش ِ اختلال ِ تبه‌گن، به هیچ وجه جزو ِ مطالب ِ متعارف ِ فیزیک نبود؛ نه در فیزیک ِ نظری، و نه در فیزیک ِ تجربی. امّا کامرلینخ اُنِس، برا ی ِ حل ِ یک مسئله ی ِ کاملاً تجربی، این روش را به کار می‌بَرَد، و استادانه هم به کار می‌بَرَد (این را مقایسه کنید با مقاومت ی که معمولاً دانش‌جوها ی ِ فیزیک ِ ما در برابر ِ روش‌ها ی ِ ریاضی نشان می‌دهند).

محورها ی ِ مختصّات را چنان می‌گیریم که x و y محورها ی ِ اصلی باشند، و x متناظر باشد با ویژه‌بس‌آمد ِ بزرگ‌تر، و xyz راست‌گرد باشد. در این مختصّه‌ها معادله‌ها ی ِ حرکت چنین اند:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\;\Omega\,\dot{y} + \omega_1^2\,x = 0, \\ \ddot{y} + 2\;\Omega\,\dot{x} + \omega_2^2\,y = 0. \end{cases} \tag{88}$$

ω_1 و ω_2 دو بس‌آمد ِ بسیار نزدیک به هم هستند. بنویسیم،

$$\omega_1 = \omega + \delta, \qquad \omega_2 = \omega - \delta. \tag{89}$$

برا ی ِ آن که عملیّات ِ جبری ساده‌تر شوند، واحدها را چنان بگیریم که $\omega = 1$ باشد؛ این یعنی واحد ِ

زمان را چنان بگیریم که دوره ی ِ تناوب ِ آونگ 2π باشد. به این ترتیب با دو معادله ی ِ جفت‌شده ی ِ زیر مواجه ایم.

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\ \Omega\, \dot{y} + (1+\delta)^2\, x = 0 \\ \ddot{y} + 2\ \Omega\, \dot{x} + (1-\delta)^2\, y = 0 \end{cases} \tag{90}$$

روش ی که برا ی ِ حل ِ مسئله بدون ِ در نظر گرفتن ِ ناهم‌سان‌گردی ی ِ میدان ِ گرانش در پیش گرفتیم در این جا مفید نیست. ببینیم چرا.

معادله را به شکل ِ ماتریسی ی ِ زیر می‌نویسیم.

$$\ddot{X} - 2\ \Omega\, J\, \dot{X} + K_0\, X = 0, \qquad K_0 = \begin{pmatrix} 1+2\,\delta & 0 \\ 0 & 1-2\,\delta \end{pmatrix}. \tag{91}$$

در نوشتن ِ این شکل دقّت کرده ایم که δ کوچک است (از δ^2 صرفِ‌نظر کرده ایم). اکنون اگر باز هم بنویسیم $X = SQ$، با انتخاب ِ $S = \exp(\Omega\, t\, J)$ معادله به شکل ِ زیر در می آید.

$$\ddot{Q} + \left(1 + \Omega^2\right) Q + 2\,\delta \cdot B(t) Q = 0, \qquad B = \begin{pmatrix} -\cos 2\ \Omega t & \sin 2\ \Omega t \\ \sin 2\ \Omega t & \cos 2\ \Omega t \end{pmatrix} \tag{92}$$

متأسفانه B وابسته به زمان است، و زمان ِ مشخّصه ی ِ تغییر ش نصف ِ دوره ی ِ تغییر ِ S است. اگر δ صفر بود، این تغییرِتابع مسئله را حل می‌کرد، امّا حالا که δ صفر نیست باید فکر ِ دیگر ی بکنیم.

8 وجه‌ها ی ِ طبیعی

در آزمایش‌گاه دیده ایم که نوسان به شکل ِ بیضی می‌شود، پس حل را به شکل ِ زیر حدس می‌زنیم.

$$\begin{cases} x(t) = a\ \cos\left[(1+\Delta)\, t + \varphi\right], \\ y(t) = b\ \sin\left[(1+\Delta)\, t + \varphi\right]. \end{cases} \tag{93}$$

در این فرمول Δ بس‌آمد ی است که هنوز نمی‌دانیم چیست، و a و b دو ثابت اند (a را با شعاع ِ وزنه ی ِ آونگ اشتباه نکنید). دقّت کنید که به این ترتیب نقطه ی ِ $(x(t), y(t))$ رو ی ِ یک بیضی حرکت می‌کند، زیرا

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{94}$$

اکنون کافی است مشتق بگیریم، و در معادله جاگذاری کنیم. خواهیم داشت

$$\begin{cases} -a\,(1+\Delta)^2 - 2\,b\ \Omega\,(1+\Delta) + a\,(1+\delta)^2 = 0 \\ \\ -b\,(1+\Delta)^2 - 2\,a\ \Omega\,(1+\Delta) + b\,(1-\delta)^2 = 0 \end{cases} \tag{95}$$

اگر این رابطه را جمع‌وجور کنیم (و البته از توان‌ها ی ِ دوّم ِ δ و Δ، و حاصلِ‌ضرب ِ Δ $\not\Omega$ صرفِ‌نظر کنیم) می‌رسیم به معادله ی ِ ماتریسی یِ

$$L\,U = \Delta\,U, \tag{96}$$

که در آن

$$L := \begin{pmatrix} \delta & -\not\Omega \\ -\not\Omega & -\delta \end{pmatrix}, \qquad U := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{97}$$

این یعنی بردار ِ U ویژه‌بردار ِ ماتریس ِ L است، و Δ ویژه‌مقدار ِ این ماتریس است.

به دست آوردن ِ ویژه‌مقدارها سرراست است.

$$\Delta = \pm A, \qquad A = \sqrt{\delta^2 + \not\Omega^2}. \tag{98}$$

چون ماتریس ِ L متقارن و حقیقی است، ویژه‌بردارها یش بر هم عمود اند. ویژه‌بردارها را یکّه می‌گیریم. به این ترتیب ویژه‌بردار ِ متناظر با $\Delta = -A$ برداری است مثل ِ $\begin{pmatrix} \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}$، و ویژه‌بردار ِ متناظر با $\Delta = -A$ قطعاً عمود بر این بردار است، یعنی $\begin{pmatrix} -\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$. با جاگذاری ی ِ این‌ها در معادله ی ِ ویژه‌مقداری می‌بینیم

$$\tan\beta = \frac{\not\Omega}{A + \delta}. \tag{99}$$

پس تا این جا فهمیدیم که معادله ی ِ حرکت ِ آونگ، با فرض ِ ناهم‌سان‌گردی ی ِ میدان ِ گرانش و در نظر گرفتن ِ نیرو ی ِ کوریولی، دو حل ِ بیضی‌شکل دارد که عبارت اند از:

$$\psi_+(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\beta\,\cos\left[(1+A)t + \varphi_1\right] \\ +\sin\beta\,\sin\left[(1+A)t + \varphi_1\right] \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$\psi_-(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta\,\cos\left[(1-A)t + \varphi_2\right] \\ \cos\beta\,\sin\left[(1-A)t + \varphi_2\right] \end{pmatrix} \tag{101}$$

ψ_+ بیضی ای است که محورها یش موازی ی ِ x و y است، و با گذشت ِ زمان در جهت ِ عقربه‌ها ی ِ ساعت پیموده می‌شود. ψ_- بیضی‌است که محورها یش موازی ی ِ x و y است، امّا عمود بر بیضی ی ِ ψ_+ است. ضمناً ψ_- در خلاف ِ جهت ِ عقربه‌ها ی ِ ساعت پیموده می‌شود.

ψ_+ و ψ_- دو ویژه‌تابع ِ معادله‌ها ی ِ حرکت اند. می‌توان در آزمایش‌گاه آونگ را چنان راه انداخت که در یک ی از این دو ویژه‌حالت باشد. در این صورت با گذشت ِ زمان چیز ی عوض نمی‌شود (جز کم شدن ِ تدریجی ی ِ دامنه، که نتیجه ی ِ اصطکاک است). امّا چون معادله ی ِ دیفرانسیل ِ تحوّل خطّی

ψ_+

$\mathrm{OB}=1$

$\mathrm{OA}=\cos\beta$

$\mathrm{OC}=\sin\beta$

$$A=\sqrt{\not\Omega^2+\delta^2}$$

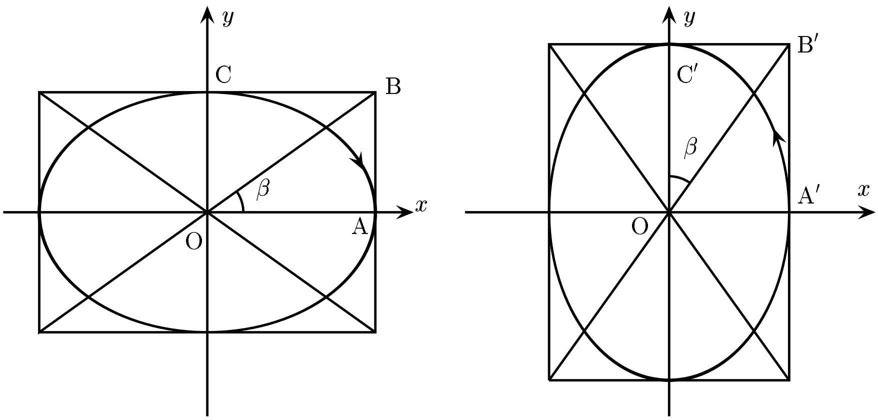
$$\tan\beta=\frac{\not\Omega}{A+\delta}$$

ψ_-

$\mathrm{OB}'=1$

$\mathrm{OA}'=\sin\beta$

$\mathrm{OC}'=\cos\beta$



شکل ۳: قطبش‌ها یِ ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد ِ آونگ ِ فوکو ($\psi_\pm$). توجّه کنید که اگر δ صفر باشد، $A=\not\Omega$ و $\beta=\pi/4$ است و این دو بیضی می‌شوند دو دایره. اگر $\not\Omega$ صفر باشد $\beta=0$ است و این دو بیضی می‌شوند دو خط ِ راست ِ عمود بر هم. در اِستِوا $\not\Omega$ صفر است.

است، می‌توان آونگ را در ترکیب ی خطّی از این دو وجه ـِ طبیعی به نوسان واداشت، یعنی حل‌ها یی داریم به شکل ـِ

$$\psi(t) = E\,\psi_+(t) + F\,\psi_-(t) \tag{102}$$

که در این جا E و F دو ثابت اند. بس‌آمدها یِ $\psi_\pm$ با هم فرق دارند، این‌ها را $\omega_\pm$ بنامیم، داریم

$$\psi_\pm \;\leftrightarrow\; \omega_\pm = 1 \pm A. \tag{103}$$

به یاد بیاوریم که واحدها را چنان گرفته بودیم که $\omega = 1$ بود. در واحدها یِ متداول (مثلاً SI) خواهیم داشت

$$\psi_\pm \;\leftrightarrow\; \omega_\pm = \omega \pm A. \tag{104}$$

اختلاف ـِ این دو بس‌آمد $2A$ است. تابع ـِ $\psi(t)$ مجموع ـِ دو تابع ـِ تناوبی است، با بس‌آمدها یِ مختلف، با اختلاف ـِ کم. پس پدیده یِ ضربان دیده خواهد شد، با بس‌آمد ـِ $2A$ یعنی دوره یِ

$$T = \frac{2\pi}{2A} = \frac{\pi}{\sqrt{\not{\Omega}^2 + \delta^2}}. \tag{105}$$

دقّت کنیم که

$$2\,A = 2\,\sqrt{\not{\Omega}^2 + \delta^2} \approx 10^{-5}\,\mathrm{Rad/s}. \tag{106}$$

پیش از ادامه، یک نکته هست که خوب است روشن کنیم. بس‌آمد ـِ آونگ به دامنه بسته‌گی دارد (فرمول ـِ 9 را نگاه کنید). برا یِ دو دامنه یِ $\alpha = 0.10$ و $\tilde{\alpha} = 0.05$ داریم

$$\omega \;=\; \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\left(1 - \frac{\alpha^2}{16}\right) = \left(1 - 6.3\times 10^{-4}\right)\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\tilde{\omega} \;=\; \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,\left(1 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{16}\right) = \left(1 - 1.6\times 10^{-4}\right)\sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{107}$$

که یعنی $|\omega - \tilde{\omega}|/\omega \approx 4\times 10^{-4}$ است. آیا این جمله مهم‌تر است یا اثر ـِ بی‌تقارنی یِ میدان ـِ گرانش؟ نکته این جا است که هر چند تغییر ی که بس‌آمد ـِ آونگ بر اثر ـِ تغییر ـِ دامنه می‌کند بزرگ‌تر است، امّا بر اثر ـِ تغییر ـِ دامنه هم‌سان‌گرد بودن ـِ نوسان تغییر نمی‌کند. آن چه در بالا نشان دادیم این بود که بر اثر ـِ بی‌تقارنی‌ها یِ میدان ـِ گرانش بس‌آمد ـِ آونگ به راستا بسته‌گی پیدا می‌کند. این اختلاف ـِ بس‌آمد ـِ دو راستا است که مهم است، نه مقدار ـِ مطلق ـِ ω. در واقع، در تمام ـِ بحث ـِ پیش منظور از ω همان مقدار ی است که به دامنه بسته‌گی دارد، و این ω است که به راستا یِ نوسان هم بسته‌گی خواهد داشت.

9 تحلیل

آزمایش ِ کلاسیک ِ فوکو این است که در آغاز آونگ را در امتداد ِ یک خط به نوسان واداریم. یعنی مثلاً

$$\psi(0)=\begin{pmatrix} x(0)=D\,\cos\vartheta \\ y(0)=D\,\sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \dot\psi(0)=\begin{pmatrix} \dot x(0)=0 \\ \dot y(0)=0 \end{pmatrix} \tag{108}$$

در $t=0$ داریم $\psi(0)=E\,\psi_+(0)+F\,\psi_-(0)$، یعنی

$$\begin{aligned} D\,\cos\vartheta &= -E\,\cos\beta\,\cos\varphi_1+F\,\sin\beta\,\cos\varphi_2 \\ D\,\sin\vartheta &= +E\,\sin\beta\,\sin\varphi_1+F\,\cos\beta\,\sin\varphi_2. \end{aligned} \tag{109}$$

از طرف ی با مشتق‌گیری از $\psi_\pm(t)$ داریم

$$\dot\psi_+(0)=\begin{pmatrix} \dot x(0)=+(1+A)\,\cos\beta\,\sin\varphi_1 \\ \dot y(0)=+(1+A)\,\sin\beta\,\cos\varphi_1 \end{pmatrix} \tag{110}$$

$$\dot\psi_-(0)=\begin{pmatrix} \dot x(0)=-(1-A)\,\sin\beta\,\sin\varphi_2 \\ \dot y(0)=+(1-A)\,\cos\beta\,\cos\varphi_2 \end{pmatrix} \tag{111}$$

باید داشته باشیم

$$\dot\psi(0)=E\,\dot\psi_+(0)+F\,\dot\psi_-(0), \tag{112}$$

که یعنی

$$\begin{aligned} 0 &= +(1+A)\,E\,\cos\beta\,\sin\varphi_1-(1-A)\,F\,\sin\beta\,\sin\varphi_2 \\ 0 &= +(1+A)\,E\,\sin\beta\,\cos\varphi_1+(1-A)\,F\,\cos\beta\,\cos\varphi_2. \end{aligned} \tag{113}$$

به این ترتیب چهار معادله داریم برا ی ِ چهار مجهول (E و F و φ_1 و φ_2). این چهار معادله را می‌توان حل کرد، و $\psi(t)$ به دست می‌آید. کامرلینخ اُنِس این‌ها را حل می‌کند، و در باره ی ِ جواب‌ها ی ِ آن‌ها به تفصیل و به دقّت بحث می‌کند. جواب، با فرض ِ $D=1$، این است:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos\vartheta\,(\cos\omega t\,\cos At-\cos 2\beta\,\sin\omega t\,\sin At)+\sin\vartheta\,\sin 2\beta\,\cos\omega t\,\sin At, \\ y(t) &= \sin\vartheta\,(\cos\omega t\,\cos At+\cos 2\beta\,\sin\omega t\,\sin At)-\cos\vartheta\,\sin 2\alpha\,\cos\omega t\,\sin At. \end{aligned}$$

توصیف ِ حرکت ِ آونگ، گاه بسیار پیچیده است. برا ی ِ دیدن ِ خلاصه ی ِ بحث به [7] مراجعه کنید.

اگر میدان ـِ گرانش ـِ مؤثر، تقارن ـِ سمتی داشته باشد δ صفر است، و بنا بر این $A = B$، و از این جا $\beta = \frac{\pi}{4}$ است. در این حالت دو بیضی یِ $\psi_{\pm}$ تبدیل به دایره می‌شوند. وضعیّت کاملاً شبیه ـِ انتشار ـِ نور ـِ قطبیده در محیط‌ها یی است که سرعت ـِ نور برا یِ قطبش‌ها یِ راست‌گرد و چپ‌گرد فرق دارد. یک مثال حرکت ـِ موج در پلاسما یی است که در آن یک میدان ـِ مغناطیسی در راستا یِ انتشار ـِ نور وجود داشته باشد (اثر ـِ فارادِی[m]). در چنین موارد ی، اگر یک نور ـِ خطّی‌قطبیده در محیط منتشر شود، راستا یِ قطبش ثابت نمی‌ماند، بل که به آرامی می‌چرخد. پیش‌روی یِ آونگ ـِ فوکو، در یک میدان ـِ گرانش با تقارن ـِ سمتی درست چنین چرخش ی است.

کامرلینخ اُنِس علاوه بر تحلیل ـِ مدارها، دوباره آزمایش می‌کند. وزنه یِ آونگ را کم ی نامتقارن می‌کند تا دو بس‌آمد تقریباً برابر شوند. در این حالت آونگ همان رفتار ی را از خود نشان می‌دهد که در نبود ـِ ناهم‌سان‌گری انتظار داریم.

10 آونگ‌ها یِ کوتاه

نیاز به آونگ ی که چند ساعت ی نوسان کند فوکو و دیگران را بر آن داشت که آونگ را حتی‌المقدور بلند و سنگین انتخاب کنند. امّا، فرض کنید بتوانیم به طریق ی در هر دوره یِ آونگ، انرژی ای را که در آن دوره از دست داده به آونگ باز گردانیم بی آن که گشت‌آور ی به آن وارد کنیم. در این صورت لازم نیست آونگ بلند و سنگین باشد. ضمناً، پیش‌تر دیدیم که ناهم‌سان‌گردی یِ بس‌آمد ـِ متناسب با طول ـِ آونگ است.

ساختن ـِ آونگ ـِ فوکو با طول ـِ کوچک‌تر از متر در قرن ـِ بیستم ممکن شد. اساس ـِ این کار این است که وزنه یِ آونگ آهن، یا آهن‌ربا یِ دائمی باشد، و در زیر ـِ آونگ یک آهن‌ربا یِ الکتریکی هر بار که آونگ به بالاترین نقطه یِ مسیر ش می‌رسد روشن شود و آهن‌ربا را کم ی جذب کند، درست به اندازه یِ لازم، و درست در امتداد ـِ خط ـِ واصل از مکان ـِ وزنه یِ آونگ به نقطه یِ تعادل ـِ پای‌دار ـِ آونگ [9]. به این ترتیب آونگ‌ها یی با طول ـِ حدود ـِ $70\ \mathrm{cm}$ ساخته شده که به دیوار نصب می‌شود و دائماً کار می‌کند [10]. چنین آونگ‌ها یی برا یِ آزمایش‌گاه‌ها یِ فیزیک ـِ عمومی بسیار مناسب اند، امّا باید توجّه کرد که با تنظیم ـِ آهن‌ربا یِ زیر ـِ آونگ و کنترل ـِ الکترونیکی اش، می‌توان آونگ را به هر شکل ی به نوسان در آورد. حتّا می‌توان کار ی کرد که در خلاف ـِ جهت ـِ یک آونگ ـِ فوکو یِ واقعی پیش‌روی کند.

این کلک ـِ کار گذاشتن ـِ یک آهن‌ربا یِ الکتریکی در زیر ـِ آونگ را گاه برا یِ آونگ‌ها یِ فوکو یِ بلند هم به کار می‌برند. مثلاً آونگ ی که در ساختمان ـِ دانش‌کده یِ فیزیک ـِ دانش‌گاه ـِ

صنعتی ی ِ شریف هست چنین آهن‌ربا یی دارد.

11 سپاس‌گزاری

از محمد خرّمی و فرهنگ لران، به خاطر تذکرها ی ِ خوب ِ شان سپاس‌گزار ام.

12 مراجع

[1] I. Bernard Cohen, *The Birth of a New Physics*, Anchor Books, Now York, 1960, Plate I.

[2] Keith R. Symon, *Mechanics*, 3^{ed} edition, Addison-Wesley, 1971,

[3] John B. Hart, Raymond E. Miller, Robert L. Mills, "Simple geometric model for visualizing the motion of a Foucault pendulum", *American Journal of Physics*, vol. 55 (1987), no. 1, pp. 67-70. (1987)

[4] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Multidimensional Real Analysis I*, Cambridge University Press, 2004, pp. 362-363.

[5] Willard A. Brown, "Suspension for Foucault Pendulum" *American Journal of Physics* vol. 29 (1961) p. 646

[6] William Tobin, *The Life and Science of Léon Foucault: The Man Who Proved the Earth Rotates*, Cambridge University Press, 2003, p. 147.

[7] E. O. Schultz-DuBois, "Foucault Pendulum Experiment by Kamerlingh Onnes and Degenerate Perturbation Theory", *Americal Journal of Physics*, vol. 38 (1970), no. 2, pp. 173-188.

[8] O. Montenbruck, E. Gill, *Satellite Orbits, Models, Methodes, Applications*, Springe, 2000, pp. 56-61.

[9] R. Stuart Mackay, "Sustained Foucault Pendulums", *American Journal of Physics*, vol 21 (1953) pp. 180-183.

[10] Wallace A. Hilton, “The Foucault pendulum: A corridor demonstration”, *American Journal of Physics*, vol 46 (1978) no. 4, pp. 436-438.

نام‌ها ی ِ خاص

[a] Heike Kamerling Onnes, [b] Marin Mersenne, [c] Galileo Galilei, [d] René Descartes, [e] Isaac Newton, [f] Jean Bernard Léon Foucault, [g] Gaspare-Gustave de Coriolis [h] Tullio Levi-Civita, [i] Osborne Reynolds, [j] Panthéon [k] Gustav Kirchhoff, [l] Geroningen, [m] Michael Faraday,