

بسم الله الرحمن الرحيم

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا

به طور کلی یک عبارت گویا، به کسری گفته می‌شود که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند.

این عبارت‌ها گویا هستند.

$$\frac{-x^2}{2x+1}, \frac{-3}{y}, \frac{x}{b+1}, \frac{a^2-b^2}{x+2}, \frac{5}{y}, \frac{1}{x}, \frac{\sqrt{3}}{x}, \frac{-3x}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{ab}, \frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{3}{\sqrt{xy-5}}$$

این عبارت‌ها گویا نیستند:

زیرا $\sqrt{ab}$ و $\sqrt{y}$ و $\sqrt{xy-5}$ طبق تعریف چندجمله‌ای نیستند.

می‌دانیم کسرهای $\frac{3}{y}$ ، $\frac{-3}{y}$ و $\frac{a^2-b^2}{x+2}$ نامعین (تعریف نشده) هستند، یعنی مقدار مشخصی ندارند. بنابراین یک عبارت گویا هنگامی تعریف شده

است که مخرج آن مخالف صفر باشد. برای مثال عبارت $\frac{x}{x+1}$ یک عبارت گویا است که اگر به جای x هر عدد حقیقی قرار دهیم، مقدار آن

مشخص است به جز عدد -1 ، زیرا مقدار عبارت به ازای $x = -1$ می‌شود:

چون $\frac{-1}{-1+1} = \frac{-1}{0}$ جواب مشخصی ندارد، بنابراین می‌گوییم عبارت $\frac{x}{x+1}$ به ازای $x = -1$ تعریف نشده است، یا دامنه‌ی تعریف عبارت برابر است با:

$$D = \mathbb{R} - \{-1\}$$

یعنی هر عدد
حقیقی به جز -1

بنابراین تعیین دامنه‌ی یک عبارت گویا، یعنی مشخص کردن مقادیری که به ازای آن‌ها عبارت گویا تعریف شده باشد.

برای تعیین دامنه‌ی یک عبارت گویا، باید مخرج کسر را مساوی صفر قرار دهیم و مقادیری که مخرج را مساوی صفر می‌کنند، مشخص کنیم و

سپس آن‌ها را از مجموعه‌ی اعداد حقیقی کم کنیم.

دامنه‌ی تعریف هر یک از عبارت‌های گویای زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{2x}{x^2-4}$ ب) $\frac{3x-1}{x+3}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2x(x-\frac{1}{2})}$

الف) $x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \\ x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \end{cases}$

یعنی در عبارت گویای مثال (الف) x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد به جز -2 و 2 .

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

ب) $x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-3\}$

ج) $2x(x-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{2}\}$

در تمامی مسائل مربوط به عبارت‌های گویا، مخرج عبارت مخالف صفر فرض می‌شود.

مقدار عددی یک عبارت گویا: به جای متغیر، مقدار داده شده را قرار می‌دهیم و سپس حاصل کسر را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

مقدار عددی عبارت $\frac{x-4}{2x+1}$ را به ازای $x=13$ حساب کنید.

$$\frac{x-4}{2x+1} = \frac{13-4}{2 \times 13+1} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

ساده کردن عبارت‌های گویا: در کسرها، می‌توان صورت و مخرج کسر را در عددی مخالف صفر ضرب یا بر آن تقسیم کرد و با این عمل، مقدار کسر تغییر نخواهد کرد.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{36}{48} = \frac{36 \div 12}{48 \div 12} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

چون عبارت‌های گویا به صورت کسر هستند، اگر عامل مشترکی به شکل ضرب در صورت و مخرج باشد، می‌توان آن را از صورت و مخرج حذف کرد و عبارت گویای ساده‌تری به دست آورد که با عبارت اولیه مساوی است. به این عمل ساده کردن عبارت گویا می‌گویند.

عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4} =$

ب) $\frac{x^2 + 3x^2}{x^2 + 3x} =$

الف) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+3}{x-2}$

ب) $\frac{x^2 + 3x^2}{x^2 + 3x} = \frac{x^2(x+3)}{x(x+3)} = \frac{x^2}{x} = x$

درس دوم: محاسبات عبارت‌های گویا

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا: ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا مانند ضرب و تقسیم اعداد گویا است. فقط قبل از انجام عمل ضرب و

تقسیم، در صورت امکان ابتدا کسرها را ساده می‌کنیم و سپس عمل ضرب و تقسیم را انجام می‌دهیم.

$$\frac{4}{8} \times \frac{6}{9} =$$

$$\frac{4}{8} \times \frac{6}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

حاصل ضرب مقابل را انجام دهید.

حاصل ضرب‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} =$

ب) $\frac{x^2y}{x^2y^2} \times \frac{y^2z^2}{yz^2} =$

الف) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

ب) $\frac{\cancel{x^2}y}{\cancel{x^2}y^2} \times \frac{\cancel{y^2}z^2}{y\cancel{z^2}} = \frac{1}{x^2y} \times \frac{y}{z} = \frac{1}{x^2yz}$

برای تقسیم عبارت‌های گویا نیز مانند تقسیم اعداد گویا، پس از ساده کردن کسرها، کسر اول را نوشته و تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و کسر دوم را معکوس می‌کنیم و یا از قاعده‌ی دور در دور استفاده می‌کنیم.

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} =$

ب) $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} =$

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{1 \times 5}{2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

● قاعده‌ی دور در دور

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} =$

ب) $\frac{\frac{6x^2}{8y^3}}{\frac{-2x^2}{12y^2z}} =$

الف) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

ب) $\frac{\frac{6x^2}{8y^3}}{\frac{-2x^2}{12y^2z}} = \frac{6x^2 \times 12y^2z}{8y^3 \times (-2x^2)} = \frac{\cancel{6}^2 \times \cancel{12}^3 \times y^2 z}{\cancel{8}^4 \times (-\cancel{2})^1 \times y^3} = \frac{-9z}{2xy}$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

جمع و تفریق عبارت‌های گویا، مانند جمع و تفریق اعداد گویا است، یعنی پس از ساده کردن کسرها در صورت امکان، کسرها را هم‌مخرج کرده و سپس عمل جمع یا تفریق را انجام می‌دهیم.

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} =$

ب) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$

ج) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$

د) $a - \frac{b}{c} =$

الف) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$

ب) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$

ج) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$

د) $a - \frac{b}{c} = \frac{a}{1} - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$

ساده کردن عبارت‌های مرکب: کسری که صورت و مخرج آن عبارت‌های گویا باشند، آن کسر را عبارت گویای مرکب می‌نامند. برای محاسبه‌ی حاصل یک عبارت مرکب، صورت و مخرج را جداگانه ساده می‌کنیم و سپس حاصل صورت را بر حاصل مخرج تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{a+b}{b} + \frac{a+b}{a}} =$$

حاصل عبارت مرکب مقابل را حساب کنید.

$$\frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{a(a+b)+b(a+b)}{ab}} = \frac{(a+b)ab}{ab(a(a+b)+b(a+b))} = \frac{\cancel{a+b}}{\cancel{ab}(a+b)(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

ثابت کنید که اگر متحرکی مسافت x متر را با سرعت ثابت v_1 برود و همین مسافت را با سرعت ثابت v_2 برگردد، سرعت متوسط آن برابر

است با: $\bar{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$

$t_1 = \frac{x}{v_1}$ زمان رفت $t_2 = \frac{x}{v_2}$ زمان برگشت

می‌دانیم که $x = vt$ بنابراین:
 $\downarrow$ مسافت $\downarrow$ سرعت $\downarrow$ زمان

$$\bar{v} = \frac{2x}{t_1 + t_2} = \frac{2x}{\frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2}} = \frac{2x}{\frac{xv_1 + xv_2}{v_1v_2}} = \frac{2x}{x(v_1 + v_2)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای

تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

برای تقسیم دو یک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و قوانین مربوط به ساده کردن جمله‌های توان دار استفاده می‌کنیم.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a \neq 0)$$

حاصل تقسیم‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{-24x^3y^2z}{6xy^2z} =$

ب) $\frac{-68a^2b^2c^4}{-17ab^2c^2} =$

الف) $\frac{-24x^3y^2z}{6xy^2z} = -\frac{\cancel{24}^4 \cancel{x^3}^1 \cancel{y^2}^1 \cancel{z}^1}{\cancel{6}^1 \cancel{x}^1 \cancel{y^2}^1 \cancel{z}^1} = -\frac{4x^2}{y}$

ب) $\frac{-68a^2b^2c^4}{-17ab^2c^2} = +\frac{\cancel{68}^{17} \cancel{a^2}^1 \cancel{b^2}^1 \cancel{c^4}^2}{\cancel{17}^1 \cancel{a}^1 \cancel{b^2}^1 \cancel{c^2}^1} = 4abc$

تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای

به مثال زیر توجه کنید.

$$\frac{4+2}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{2}$$

به این قاعده، قاعده‌ی تفکیک یا جدا کردن می‌گویند.

برای تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای، می‌توان از قاعده‌ی بالا استفاده کرد.

$$\frac{18a^3 - 24a^2 + 12a}{3a} =$$

حاصل تقسیم مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{18a^3 - 24a^2 + 12a}{3a} = \frac{\cancel{18}^6 \cancel{a^3}^1}{\cancel{3}^1 \cancel{a}^1} - \frac{\cancel{24}^8 \cancel{a^2}^1}{\cancel{3}^1 \cancel{a}^1} + \frac{\cancel{12}^4 \cancel{a}^1}{\cancel{3}^1 \cancel{a}^1} = 6a^2 - 8a + 4$$



اگر تقسیمی درست انجام شده باشد، باید رابطه‌های زیر، برای آن تقسیم درست باشد.

مقسوم	مقسوم علیه
باقی مانده	خارج قسمت

$$\begin{cases} \text{مقسوم علیه} < \text{باقی مانده: رابطه‌ی (۱)} \\ \text{مقسوم} = \text{باقی مانده} + \text{مقسوم علیه} \times \text{خارج قسمت: رابطه‌ی (۲)} \end{cases}$$

اگر باقی مانده‌ی تقسیم صفر باشد، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم علیه، بخش پذیر است.

در تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای باید به ۲ نکته دقت کنیم:

۱- قبل از انجام عمل تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه بر حسب توان‌های نزولی متغیر مرتب شده باشند.

۲- تقسیم را تا جایی باید ادامه دهیم که، یا باقی مانده صفر شود و یا درجه‌ی باقی مانده از درجه‌ی مقسوم علیه کم‌تر باشد.

اکنون با یک مثال، تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را توضیح می‌دهیم.

حاصل تقسیم چندجمله‌ای $x^3 + 2x^2 - x^2 + 4 + x$ را بر چندجمله‌ای $1 - x$ حساب کنید و باقی مانده را مشخص کنید.

$$\begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 + 4 + x \quad | \quad 1 - x \\ \hline \end{array}$$

در مرحله‌ی اول، مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \quad | \quad -x + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{2x^3}{-x} = -2x^2$$

سپس اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \quad | \quad -x + 1 \\ \hline -2x^2 \\ \hline \end{array}$$

خارج قسمت به دست آمده (جمله‌ی $-2x^2$) را در مقسوم علیه $(-x + 1)$ ضرب می‌کنیم و

حاصل ضرب را زیر مقسوم می‌نویسیم. چون عبارت به دست آمده را باید از مقسوم کم کنیم،

$$\begin{array}{r} \cancel{2x^3} - x^2 + x + 4 \\ \pm \cancel{2x^3} \mp 2x^2 \\ \hline x^2 + x + 4 \\ - \mp x \\ \hline 2x + 4 \\ - 2x \mp 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

بنابراین علامت جمله‌های آن را قرینه می‌کنیم.

اکنون چندجمله‌ای باقی مانده را نیز مانند مرحله‌ی قبل بر مقسوم علیه، تقسیم می‌کنیم و به

همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا عمل تقسیم پایان یابد.

باقی مانده $\rightarrow 6$

داکتشاپ