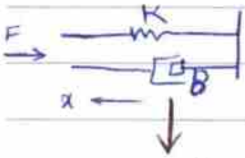
سیستم های کنترل خطی :



انرژی را به صورت مکانیکی ذخیره می کند ← damper

$$\underset{\text{ورودی}}{F} = K\underset{\text{خروجی}}{x} + B\frac{dx}{dt}$$

نمایش سیستم های کنترل :

در دینامیک ها همیشه معادلات دیفرانسیلی داریم .

۱- با استفاده از معادله دیفرانسیل :

$$* \quad a_n\frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 c(t) = b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 r(t)$$

مانند :
$$2\frac{d^3c(t)}{dt^3} + \frac{dc(t)}{dt} + 4c(t) = \frac{dr(t)}{dt} + 5r(t)$$

۲- پاسخ ضربه :

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{سیستم}} \longrightarrow h(t)$$

روش مناسبی نیست چرا که در حوزه ی زمان کار می کند یعنی مثلا برای بدست آوردن خروجی این سیستم مجبور هستیم درگیر انتگرال کانولوشن بشویم .

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

3 - نمایش با استفاده از تابع تبدیل:

برای نمایش دینامیک سیستم های LTI می توان از تبدیل لاپلاس استفاده کرد و معادلات دینامیکی سیستم را به معادلات جبری برحسب s در حوزه ی فرکانس تبدیل کرد و دیگر معادلات دیفرانسیل در حوزه ی زمان نخواهیم شد.

توجه: همواره توجه داشته باشید تبدیل لاپلاس فقط برای سیستم های خطی و تغییر ناپذیر با زمان و شرایط اولیه ی صفر تعریف می شود.

$$\underbrace{2\frac{d^2c(t)}{dt^2}}_{\text{خطی}} + \underbrace{3\left(\frac{dc}{dt}\right)^2}_{\text{عامل غیرخطی}} + \underbrace{\frac{4}{9}}_{\text{عامل غیرخطی}} = 2r(t)$$

برای این سیستم نمی توان لاپلاس تعریف کرد.

پس معادله ها باید خطی معادله ی (*) باشد.

$$\text{تابع تبدیل} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}}\Bigg|_{\text{شرایط اولیه صفر}}$$

توجه: البته یادداشته باشید تعریف تبدیل لاپلاس که در درس سیگنال ها و سیستم ها به صورت $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$ که با نام تبدیل لاپلاس دوطرفه شناخته می شود ولی از آنجایی که در عمل با سیستم ها و سیگنال های حقیقی (علّی) سروکار داریم، تبدیل لاپلاسی که

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تعریف می‌شود ، به صورت $X(S)=\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$ تعریف می‌شود و با نام تبدیل لاپلاس یک طرفه شناخته می‌شود و در درس معادلات دیفرانسیل و کنترل خطی تبدیل لاپلاس یک طرفه تعریف می‌شود .

تابع تبدیل $G(S)=\dfrac{C(S)}{R(S)}$ → تبدیل لاپلاس خروجی $C(S)=G(S)R(S)$

تابع تبدیل پاسخ ضربه :

$$H(S)=\underbrace{1}_{L\{\delta(t)\}}\cdot G(S) \qquad \Rightarrow h(t)=L^{-1}[G(S)]$$

← برای بدست آوردن تابع تبدیل از روی معادله دیفرانسیل خطی کافی است از دو طرف تبدیل لاپلاس گرفته شود .

$$a_n\frac{d^n c(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0c(t)=b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_0r(t)$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس می‌گیریم}} a_nS^nC(S)+a_{n-1}S^{n-1}C(S)+\cdots+a_0C(S)=b_mS^mR(S)+\cdots+b_0R(S)$$

$$G(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_0}$$

$$\frac{d^3c(t)}{dt^3}=S^3C(S)+\cancel{S^2c(0)}+\cancel{S^1\dot{c}(0)}+\cancel{\ddot{c}(0)}$$

شرایط اولیه صفر است .

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

درجه سیستم:

درجه سیستم = بزرگترین درجه ی صورت - بزرگترین درجه ی مخرج

$= m - n$

سیستم اکیداً سره ← $m-n>0$

سیستم سره ← $m-n=0$

سیستم ناسره ← $m-n<0$

مرتبه ی سیستم: بزرگترین درجه ی مخرج می باشد.

نکته خیلی مهم: توجه داشته باشیم تعداد صفرها و قطب های یک سیستم با هم برابرند.

صفرها ← ریشه های صورت   قطب ها ← ریشه های مخرج

مثال) $G(s) = \dfrac{s+1}{s(s^2+1)}$

$Z: -1$ ⟶ یک صفر محدود و 2 صفر نامحدود یعنی 2 صفر در بی نهایت دارد.

$P: 0, \pm j$ ⟶ 3 تا قطب

مثال) $G(s) = \dfrac{(s^2+4)(s+1)}{s(s+5)}$

$Z: \pm 2j, -1$ ⟶ 3 تا صفر دارد

$P: 0, -5$ ⟶ 2 قطب محدود و یک قطب در بی نهایت دارد.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

معادله مشخصه: چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل را معادله‌ی مشخصه می‌گویند که ریشه‌های آن رفتار سیستم را در حوزه‌ی زمان تعیین می‌کند. که آن را با $\Delta(s)$ نشان می‌دهند.

مثلاً $G(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+4}$

$$\Delta(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0$$

دو قضیه‌ی مهم و جالب:

قضیه مقدار اولیه:

$$C(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\,C(s)$$

بدست آوردن مقدار تابع در لحظه‌ی صفر (در حوزه زمان) با استفاده از تبدیل لاپلاس تابع

قضیه مقدار نهایی:

$$C(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,C(s)$$

بدست آوردن مقدار نهایی تابع در حوزه‌ی زمان با استفاده از تبدیل لاپلاس

نکته خیلی مهم: شرط استفاده از قضیه‌ی مقدار نهایی پایدار بودن تبدیل لاپلاس می‌باشد.

یعنی اگر به صورت ریاضی بخواهیم توضیح دهیم ریشه‌های (قسمت حقیقی) مخرج $C(s)$ یا $F(s)$ کوچکتر از صفر باشد.

مثال) فرض کنید تبدیل لاپلاس خروجی یک سیستم را به صورت زیر داریم. می‌خواهیم خروجی در لحظه‌ی صفر و در لحظه‌ی بی‌نهایت را بدست آوریم.

$$C_1(s) = \frac{s^2+3s+4}{(s+1)(s^2+2s+1)} \qquad C_2(s) = \frac{s^2+3s+4}{(s+1)(s^2-2s+1)}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$C_1(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\,C_1(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s^2+3s+4)}{(s+1)(s^2+2s+1)} = 1$$

$$C_1(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,C_1(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(s^2+3s+4)}{(s+1)(s^2+2s+1)} = 0$$

تمام قطب‌های C_1 سمت چپ محور ساز قرار دارد یعنی $0 >$ Real قطب‌ها پس می‌توانیم از قضیه مقدارهای استفاده کنیم.

$$C_2(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\,C_2(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s^2+3s+4)}{(s+1)(s^2-2s+1)} = 1$$

$$C_2(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,C_2(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s^2+3s+4)}{(s+1)(s^2-2s+1)} =$$

به علت آنکه چند جمله‌ای مرتبه دو مخرج علامت ضرایب متفاوتی از یکدیگر دارد پس حداقل یک ریشه سمت راست محور ساز دارد. پس خروجی ناپایدار می‌باشد و به بی‌نهایت میل می‌کند و از قضیه مقدارهای نمی‌توان حل کرد.

$$C_2(s) = \frac{s^2+3s+4}{(s+1)(s-1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$= Ae^{-t} + Be^{t} + Cte^{t}$$

$$C_2(\infty) = \lim_{t\to\infty} c(t)$$

$$\Rightarrow C_2(\infty) = \lim_{t\to\infty} (Ae^{-t} + Be^{t} + Cte^{-t}) = 0 + \infty + \infty = \infty$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

اشتباه خطرناک: اگر برای خروجی c بدون توجه به پایداری از قضیه مقدار نهایی استفاده می‌کردیم مقدار آن صفر بدست می‌آید که اشتباه است.

نکته: برای استفاده از قضیه مقدارهای علاوه بر اینکه ریشه های مخرج تبدیل لاپلاس باید سمت راست محور $j\omega$ نباشد، روی محور $j\omega$ هم باعث ایجاد خطا در محاسبات خواهد شد.

مثال) تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$c(0) = \lim_{s\to\infty} s\,C(s) = \frac{2s}{s^2+4} = 0$$

$$c(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{2s}{s^2+4} = 0 \qquad \times \qquad \text{غلط}$$

$$\sin at \longrightarrow \frac{a}{s^2+a^2} \qquad C(s) = \frac{2}{s^2+4} \xrightarrow{L^{-1}} c(t) = \sin 2t$$

$c(\infty) = -1 < \sin\infty < 1 \longrightarrow$ نمی‌دانیم دقیقاً چه عددی است

ورودی های مهم		تبدیل لاپلاس
$\delta(t)$	$\xrightarrow{L}$	1
$u(t)$	$\xrightarrow{L}$	$1/s$
شیب واحد $r(t)=tu(t)$	$\xrightarrow{L}$	$1/s^2$
سهمی $t^2u(t)$	$\xrightarrow{L}$	$2/s^3$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) پاسخ‌های سیستم زیر را به ورودی شیب واحد بدست آورید (مقدارهای ویژه پاسخ؟)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

$$r(t) = t\,u(t) \xrightarrow{L} R(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \boxed{t^n u(t) \xrightarrow{L} \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

$$C(s) = R(s)\,G(s) = \frac{1}{s^2}\,\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

$$C(s) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} + \frac{E}{s} \longrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{1}{2} \\ E = -1 \end{cases}$$

برای محاسبه E ابتدا باید یک مشتق نسبت به s بگیریم و بعد s=0 قرار می‌دهیم و مقدار E بدست می‌آید.

برای محاسبه‌ی C کل عبارت C(s) را در یک s ضرب می‌کنیم و s→∞ میل می‌دهیم تا مقدار C بدست آید.

$$\xrightarrow{\times s} \frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}s}{s+1} + \frac{Cs^2+Ds}{s^2+1} - 1 = \frac{s}{s^2(s+1)(s^2+1)}$$

$$\xrightarrow[s\to\infty]{} 0 + \frac{1}{2} + C - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

$$1 + \frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{1}{2}+D}{1+1} - \frac{1}{1} = \frac{1}{(1+1)(1+1)} \longrightarrow \boxed{D = -\frac{1}{2}}$$

اگر در مخرج C(s) یک مقدار s^3 هم داشتیم در تبدیل کسرها باید مقدار s^3 و s^2 و s را بنویسیم برای محاسبه‌ی ضریب صورت عبارت s^2 باید مشتق بگیریم و مقدار s=0 قرار می‌دهیم و برای محاسبه‌ی ضریب صورت عبارت s مشتق دوم گرفته و در $\frac{1}{2!}$ ضرب می‌کنیم.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$C(S) = \frac{1}{s^2} + \frac{\frac{1}{2}}{S+1} + \frac{\frac{1}{2}S - \frac{1}{2}}{S^2+1} - \frac{1}{S}$$

$$t\,u(t) + \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} \cos t\, u(t) - \frac{1}{2} \sin t\, u(t) - u(t)$$

$$C(\infty) = \infty + 0 + (\text{عدد} - \text{عدد}) - 1 = \infty$$

تمرین) پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید.

پاسخ ضربه $H(S) = 1 \cdot G(s) \implies h(t) = L^{-1}[G(S)]$

فرم های مختلف تابع تبدیل ، مرتبه و نوع سیستم:

۱- فرم نسبت دو چند جمله ای:

$$G(s) = K \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \qquad n \geq m$$

مرتبه سیستم $= n$ درجه سیستم $= n - m$

2- فرم ثابت زمانی:

برای رسم دیاگرام بود کاربرد دارد.

$$G(s) = K \frac{(1+sT_{z_1})(1+sT_{z_2}) \cdots (1+sT_{z_m})}{s^N (1+sT_{p_1})(1+sT_{p_2}) \cdots (1+sT_{p_n})}$$

مثال) $G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s^3 (s+1)^2 (s+4)} = \frac{2(1+s)(1+\frac{s}{2})}{4 s^3 (1+s)^2 (1+\frac{s}{4})}$ سیستم نوع 3

مرتبه قطب در مبدا یا توان s فاکتورگرفته در مخرج = نوع سیستم

PAYCO

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$G(s)=\frac{s+1}{s^3+3s^2+2s}=\frac{}{s(s^2+3s+2)}$$ درجه 2 ، مرتبه 3 ، نوع صفر

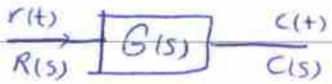
$$G(s)=\frac{s^2+2s}{s^3+3s^2+4s}$$ درجه 1 ، مرتبه 2 ، نوع صفر

3- ترم صفر و قطب:

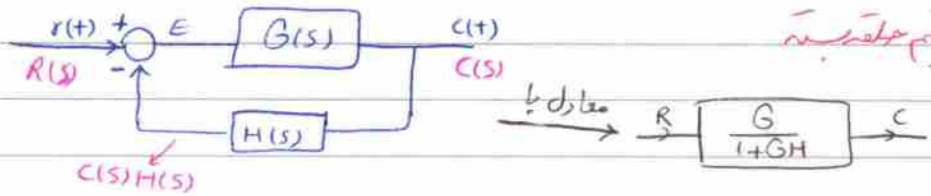
$$G(s)=K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{s^N(s+P_1)(s+P_2)\cdots(s+P_n)}$$

نوع سیستم $= N$ مرتبه سیستم $= N+n$ درجه سیستم $= N+n-m$

4- نمایش سیستم با استفاده از نمودار بلوکی:



سیستم حلقه باز



سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} E(s)=R(s)-C(s)H(s) \\ C(s)=E(s)G(s) \end{cases}$$

$$G_{eq}(s)=T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

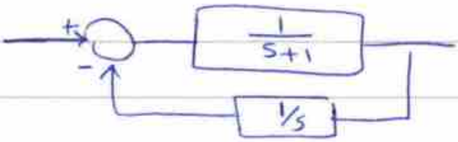
درصورت سؤال یا تست اگر حرفی از نوع فیدبک نزد، فیدبک را نوع منفی درنظر می‌گیریم.

$$T(s)_{\text{حلقه بسته}}=\frac{\text{مسیر مستقیم از ورودی به خروجی}}{1\pm \text{بهره فیدبک}\times\text{مسیر مستقیم}}=\frac{G}{1\pm GH}$$

اگر نوع فیدبک مثبت باشد.

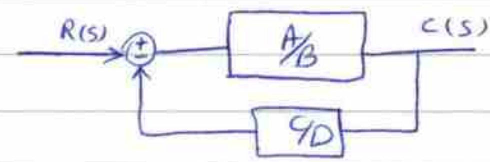
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال)



$$T(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1+\frac{1}{s(s+1)}}$$

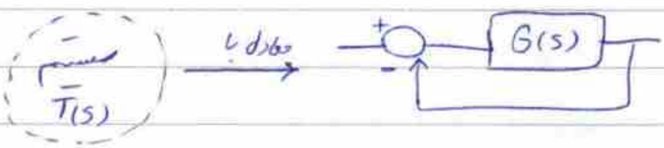
نکته: برای بدست آوردن تابع تبدیل بلوک دیاگرام هایی که فقط یک مسیر پیشرو از ورودی به خروجی و یک فیدبک دارند برای بالا بردن سرعت در بدست آوردن تابع تبدیل حلقه بسته می توان از این رابطه استفاده کرد.



$$T(s) = \frac{\overset{\text{دور در دور}}{AD}}{\underset{\text{مخرج در مخرج}}{BD} \pm \underset{\text{صورت در صورت}}{AC}}$$

فیدبک مثبت

تبدیل بلوک دیاگرام با فیدبک غیر واحد به بلوک دیاگرام با فیدبک واحد (سیستم واحد)



$$T(s)_{\text{حلقه بسته}} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

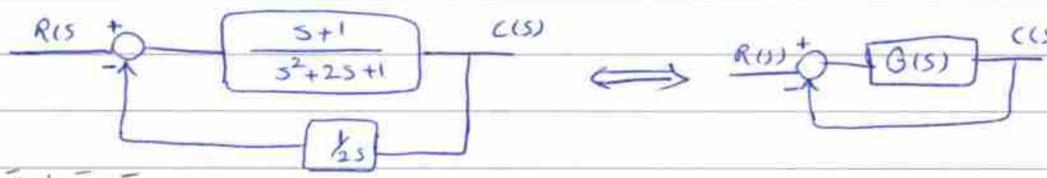
$$\rightarrow T(s) + T(s)\,G(s) = G(s) \rightarrow G(s) = \frac{T(s)}{1 \mp T(s)}$$

فیدبک منفی

فیدبک مثبت

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) سیستم حلقه بسته زیر را با فیدبک غیرواحد به سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد تبدیل کنید.



تابع تبدیل حلقه بسته

$$T(s) = \frac{2s(s+1)}{s+1+2s^3+4s^2+2s}$$

$$G(s) = \frac{T(s)}{1-T(s)} = \frac{\frac{2s^2+2}{2s^3+4s^2+3s+1}}{1-\frac{2s^2+2}{2s^3+4s^2+3s+1}} = \frac{2s^2+2}{2s^3+2s^2+3s-1}$$

تابع تبدیل حلقه باز

مثال) در سیستم کنترل با فیدبک واحد تابع تبدیل حلقه باز را طوری بیابید که تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر داشته باشد.

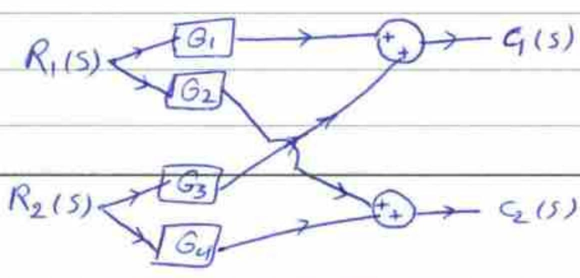
فیدبک واحد

$$T(s) = \frac{Ks+b}{s^2+as+b} \overset{H=1}{=} \frac{G}{1+G}$$

$$G = \frac{T(s)}{1-T(s)}$$

$$G = \frac{\frac{Ks+b}{s^2+as+b}}{1-\frac{Ks+b}{s^2+as+b}} = \frac{Ks+b}{s^2+as+b-Ks+b} = \frac{Ks+b}{s^2+(a-k)s+b}$$

سیستم‌های چندورودی چندخروجی (MIMO):



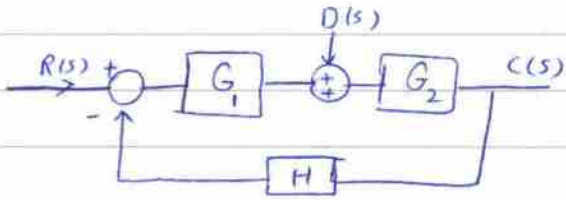
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$C_1 = R_1 G_1(s) + R_2 G_3(s)$$

$$C_2 = R_1 G_2(s) + R_2 G_4(s)$$

$$G_{12} = \frac{C_1}{R_2}\Big|_{R_1=0} = G_3$$

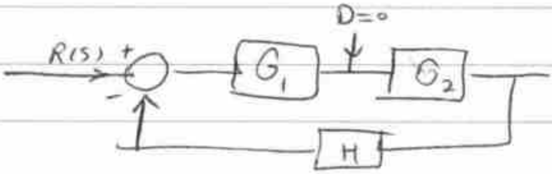
مثال) خروجی این سیستم را برحسب ورودی $R(s)$ واغتشاش $D(s)$ بیان کنید.



$$C(s) = \underbrace{T_1(s)R(s)}_{C_1(s)} + \underbrace{T_2(s)D(s)}_{C_2(s)}$$

برای حل از جمع آثار استفاده می‌کنیم. یعنی در مرحله‌ی اول $D(s)$ را صفر قرار می‌دهیم و خروجی را برحسب $R(s)$ می‌نویسیم. به همین ترتیب برای $D(s)$ مقدار $R(s)$ را صفر قرار می‌دهیم

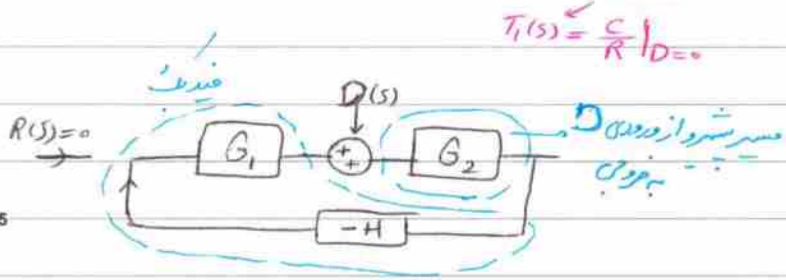
مرحله‌ی اول:



$$C_1(s) = R(s)T_1(s) = R(s)\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}$$

$$T_1(s) = \frac{C}{R}\Big|_{D=0}$$

مرحله‌ی دوم:



$$T_2(s) = \frac{G_2}{1-G_1(-HG_1)} \qquad C_2(s) = D(s)\frac{G_2}{1+G_1G_2H}$$

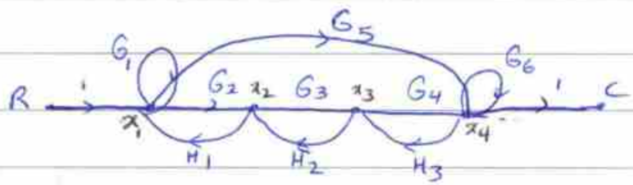
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

جلسه دوم

در مرحله‌ی اول اگر فیدبکی که D به آن وارد می‌شود (+) اگر (−) بود باید به جای G_1، $-G_1$ قرار دهیم.

5- نمودار گذر جریان (Signal Flowgraph و SFG):

یکی از روش‌های نمایش سیستم‌ها نمودار گذر جریان می‌باشد که می‌توان گفت فرم ساده‌تر شده‌ی بلوک دیاگرام است و برای ساده‌سازی بلوک دیاگرام‌ها کاربرد دارد.



شکل 1

تعاریف مربوط به نمودارهای گذر سیگنال:

1- گره: گره، متغیر سیستم را نشان می‌دهد که مقدار آن برابر با مجموع سیگنال‌های وارد شونده به آن گره می‌باشد. سیگنال‌های خارج شونده از گره تأثیری در مقدار آن گره یا همان متغیر آن گره ندارد.

2- شاخه: پاره خطی جهت‌دار است که دو گره را به یکدیگر متصل می‌کند. سیگنال‌های روی یک شاخه تنها در جهت فلش یا پیکان حرکت می‌کند.

نکته‌ی خیلی مهم: هیچ گاه مجاز نیستیم جهت شاخه را برعکس کنیم و در بهره شاخه (−) ضرب کنیم

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

3- ضریب انتقال یا بهره: ضریب انتقال سیگنال بین دو گره را بهره‌ی شاخه می‌نامند و موقع عبور سیگنال از یک شاخه مقدار آن سیگنال در بهره ضرب می‌شود.

4- بهره‌ی مسیر: حاصل‌ضرب بهره‌های شاخه‌هایی که در طول مسیر از یک گره به گره دیگر با آنها مواجه می‌شویم.

5- بهره‌ی حلقه: حاصل‌ضرب بهره‌های حلقه‌هایی که در طول مسیر با آنها مواجه می‌شویم.

مسیر پیشرو: مسیری از ورودی به خروجی، به شرطی که از هر شاخه و گره یکبار حداکثر عبور کنیم.

6- حلقه: مسیری است که از یک گره شروع شده و به همان گره ختم می‌شود و در طول آن با هیچ گره‌ای بیش از یکبار برخورد نمی‌کند.

7- حلقه‌ی غیرتماسی: دو یا چند حلقه را غیرتماسی گویند وقتی که گره‌ها نه در گره و نه در شاخه با هم اشتراک داشته باشند.

با توجه به شکل 1 داریم:

$$x_1 = R + x_2 H_1 + x_1 G_1$$

$$x_2 = x_1 G_2 + x_3 H_2$$

$$C = x_4$$

* شاخه‌های خارج شونده تأثیری در متغیرهای گره ندارد.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

فرمول بهره‌ی میسون : در این روش، دیگر درگیر ساده سازی بلوک ها نخواهیم شد و با استفاده از رابطه‌ی بهره‌ی میسون می‌توانیم تابع تبدیل حلقه بسته‌ی یک سیستم را به دست بیاوریم.

$$T = \frac{C}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \Delta_i}{\Delta}$$

P_i : بهره‌ی مسیر پیشرو از ورودی به خروجی i ام

L_i : بهره حلقه i ام

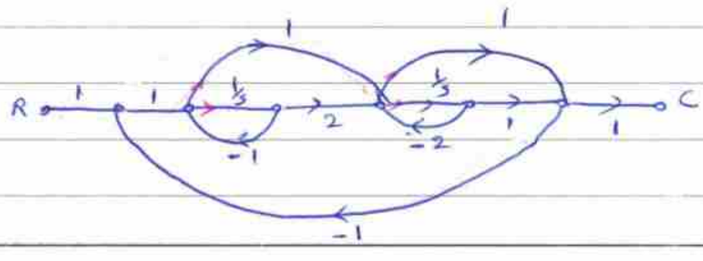
$\Delta = 1 -$ (مجموع بهره های تمام حلقه ها) + (مجموع حاصل ضرب بهره های حلقه‌ها دو به دو غیرتماسی)

$-$ (مجموع حاصل ضرب بهره‌ها 3 حلقه‌ی غیرتماسی)

در فرمول Δ مقادیر بهره‌ها را باید با احتساب علامتشان در فرمول قرار دهیم.

$P_i \Delta_i$: یعنی مسیر i ام را حذف کن (هم شاخه و هم گره‌های آن مسیر) بین حلقه‌ای از سیستم باقی می‌ماند اگر باقی ماند برایش Δ حساب کن و در بهره مسیر حذف شده ضرب کن.

مثال)



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$T(s) = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta}$$

$L_1 = -\frac{1}{s}$ $\qquad P_1 = \frac{2}{s^2}$

$L_2 = -\frac{2}{s}$ $\qquad P_2 = \frac{2}{s}$

$L_3 = -\frac{2}{s^2}$ $\qquad P_3 = \frac{1}{s}$

$L_4 = -\frac{1}{s}$ $\qquad P_4 = 1$

$L_5 = -1$

$L_6 = -\frac{2}{s}$

$$T(s) = \frac{\frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s} + 1}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) + (L_1 L_2)} = \frac{s^2 + s + 2}{2s^2 + 6s + 2}$$

$$P_1 \Delta_1 = \frac{2}{s^2} \times \underset{\downarrow}{1} = \frac{2}{s^2}$$

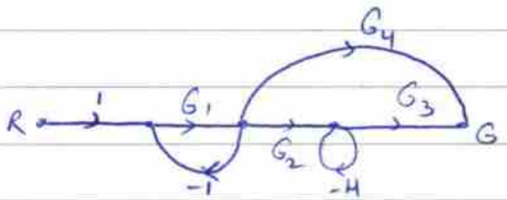
Δ بازای حذف مسیر P_1

* هر شاخه وقتی ترم آن حذف شود، خود شاخه و شاخه‌ها متصل به آن نیز حذف می‌شود

$P_2 \Delta_2 = -\frac{2}{s}(1) = -\frac{2}{s}$ $\qquad P_3 \Delta_3 = \frac{1}{s} \times 1 = \frac{1}{s}$

$P_4 \Delta_4 = 1$

مثال)

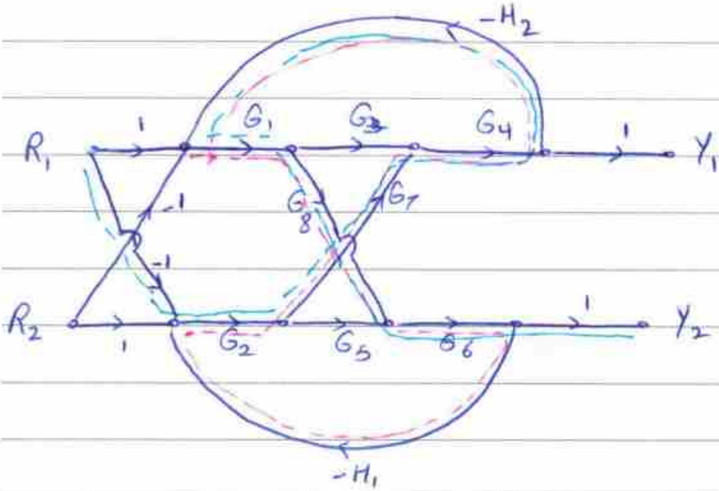


Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

Δ به ازای حذف مسیر دوم

$$T(s)=\frac{G_1G_2G_3\times 1+(G_1G_4)\overbrace{(1-(-H))}}{1-(-G_1-H)+(-G_1\times -H)}$$

مثال)



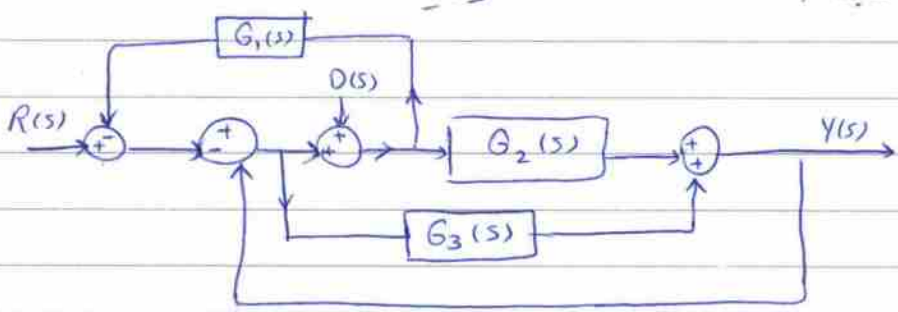
$$\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}=?$$

$$\frac{Y_2(s)}{R_2(s)}=?$$

$$\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}=\frac{G_1G_3G_4(1+G_2G_5G_6H_1)+G_1G_8G_6(-H_1)G_2G_7G_4(1)+(-G_2G_4G_7)(1)}{1-(-G_1G_3G_4H_2-G_2G_5G_6H_1+G_1G_8G_6H_1G_2G_7G_4H_2)}$$

$$\frac{Y_2}{R_1}=\frac{-G_2G_5G_6(1+G_1G_3G_4H_2)+\cdots}{1-(-G_1G_3G_4H_2-G_2G_5G_6H_1+G_1G_8G_6H_1G_2G_7G_4H_2)}$$

مثال) تابع تبدیل خروجی به ورودی اغتشاش را بیابید.
مکانیک 86

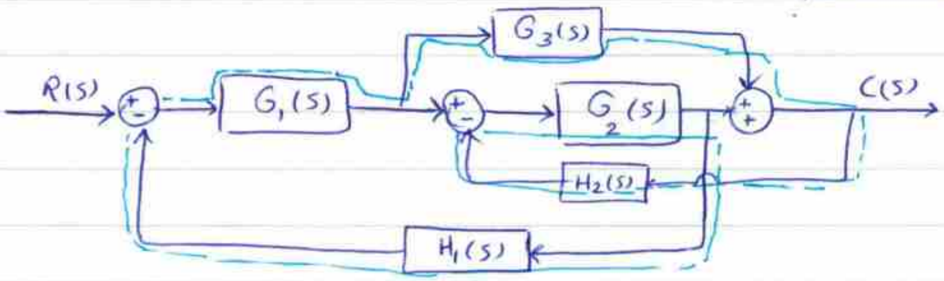


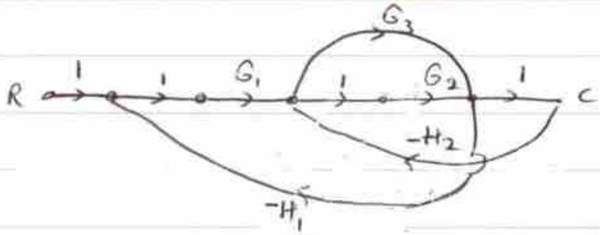
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_2(1)+(-G_1G_3)(1)}{1-(-G_1-G_2-G_3)} = \frac{G_2-G_1G_3}{1+G_1+G_2+G_3}$$

در حل تست همیشه عبارتی که خودمان بدست آوردیم را با یک یا بزرگترین گزینه مقایسه کنیم تا مطمئن شویم که عبارت بدست آمده درست است یا خیر. و از این طریق می‌توانیم به حلقه‌ها یا مسیرهای در نظر گرفته شده پی ببریم.

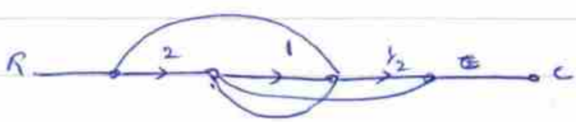
تست: برق 90) معادله مشخصه P



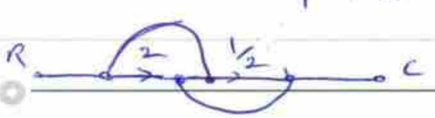


$$\Delta = 1-\left(-G_1G_2H_1 - G_2H_2 - G_1G_3H_2G_2H_1\right)$$

توجه: اگر در شکل میسون شکل زیر را داشته باشیم:

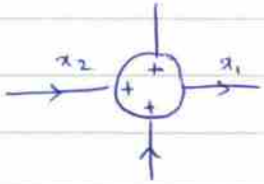


نمی‌توانیم شکل بالا را با شکل زیر یکسان در نظر بگیریم. اینها باهم متفاوتند.



نمی‌توان شاخه‌ای با بهره‌ی 1 را حذف کرد.

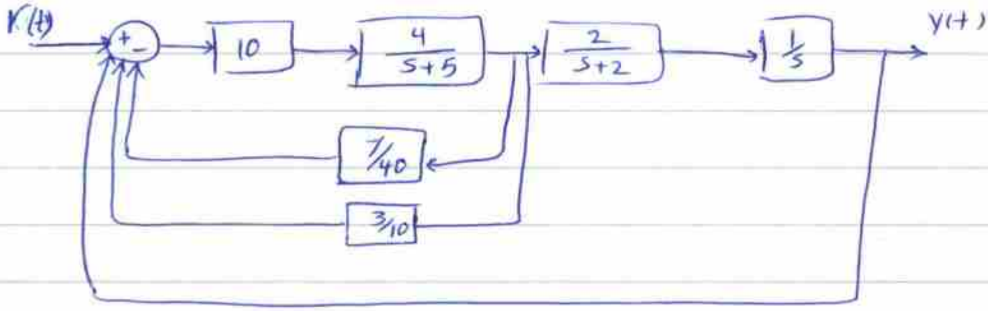
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com



توجه: در جمع کننده ها باید به جهت ها خیلی دقت کنیم.

یعنی نمی توان کل آن را یک گره در نظر گرفت $x_1 \neq x_2$

تست: برق 87) پاسخ پله سیستم داده شده در زیر کدام است؟



1) $1-\frac{1}{17}e^{-10t}+1.72e^{-2t}\sin(2t+30.9^\circ)$

2) $1-\frac{2}{17}e^{-10t}-1.72e^{-2t}\sin(2t+30.9^\circ)$

3) $1+17e^{-10t}+1.72e^{-2t}\sin(2t+30.9^\circ)$

4) $1+\frac{2}{17}e^{-10t}-1.72e^{-2t}\sin(2t+30.9^\circ)$

می توانیم $\sin 30.9 = 0.5$ در نظر بگیریم و $t=0$ قرار دهیم و تقریباً حساب کنیم کدام مقدار درست اوله به صفر نزدیکتر است

چون از قضیه $\lim_{s\to\infty} sY(s)=y(0^+)$ مقدار $y(0^+)$، صفر بدست می آید.

$$T(s)=\frac{10\times\frac{4}{s+5}\times\frac{2}{s+2}\times\frac{1}{s}\ (1)}{1-\left(-10\times\frac{4}{s+5}\times\frac{7}{40}-10\times\frac{4}{s+5}\times\frac{3}{10}-10\times\frac{4}{s+5}\times\frac{2}{s+2}\times\frac{1}{s}\right)}$$

$$=\frac{80}{s^3+14s^2+48s+80}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \longrightarrow$ پاسخ پله $Y(s) = \frac{1}{s} \times T(s)$

$$Y(s) = \frac{80}{s(s^3+4s^2+48s+80)} = \frac{\quad}{s} + \underbrace{\frac{\quad}{s+10}}_{\downarrow} + \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad}$$

با توجه به گزینه‌ها و عامل e^{-10t} بین مخرج باید $s+10$ داشته باشد.

دعوا سر $\frac{A}{s+10}$ است یعنی کافی است ضریب A را حساب کنیم

$$s^3+4s^2+48s+80 \;\Big|\; \frac{s+10}{s^2+4s+8}$$

$$Y(s) = \frac{80}{s(s^2+4s+8)(s+10)} \rightsquigarrow \boxed{A = -\frac{2}{17}}$$

اما اگر می‌خواستیم که ضریب e^{-2t} را هم بدست آوریم باید $\lim_{s\to\infty} Y(s)\cdot s = y(0^+)$ را حساب کنیم.

نکته‌ی خیلی مهم: اگر فاز عبارات sin ای صفر بود یعنی به طور کلی مقدار خروجی در لحظه صفر را در بین تک تک گزینه‌ها می‌توانستیم حل کنیم و جوابها متمایز بودند، می‌توانستیم از قضیه مقدار اولیه استفاده کنیم.

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s)$$

تست: برق 78) تابع تبدیل $\frac{C}{R_2}$ در سیستم زیر عبارت است از:

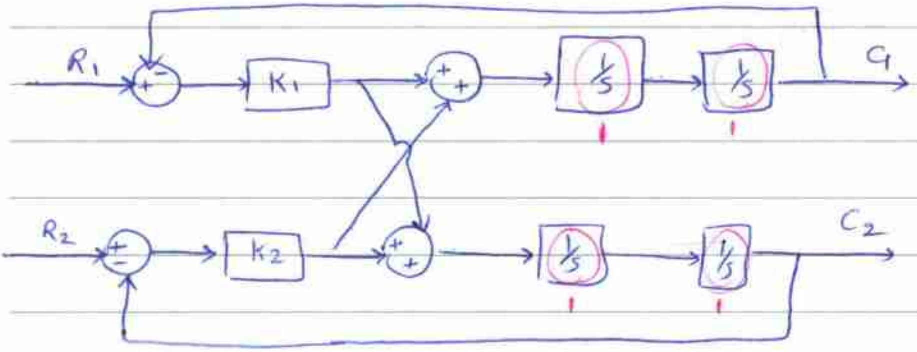
1) $T_{12} = \frac{K_2 s^2}{s^3+(K_1+K_2)s^2+2K_1K_2}$

2) $T_{12} = \frac{K_2}{s^2+(K_1+K_2)}$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$T_{12} = \frac{(K_1+K_2)\,s^2}{s^4+(K_1+K_2)\,s^3+K_2 s^2+K_1K_2} \qquad (3$$

$$T_{12} = \frac{K_1 s + K_2}{K_1 s^2+(K_1+K_2)\,s+K_1K_2} \qquad (4$$

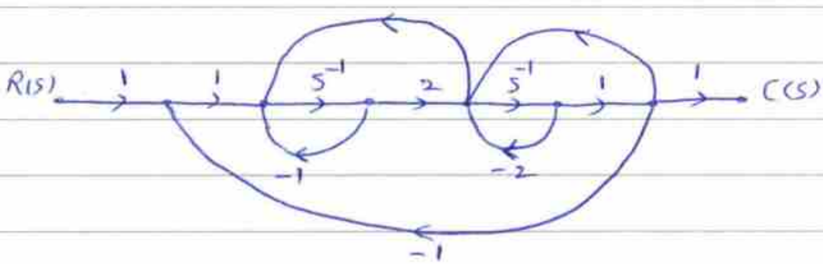


راه تستی: خود تابع s را برابر یک فرض می‌کنیم $\qquad S=1 \rightarrow$

$\dfrac{\qquad}{1-(-K_1-K_2+K_1K_2)+K_1K_2} \longrightarrow$ از روی مخرج می‌توانیم بفهمیم گزینه‌ی 2 صحیح است

نکته: در تست‌هایی که توابع تبدیل در گزینه‌ها برحسب s می‌باشد می‌توان s را یک عدد فرض کرده و با استفاده از میسون تابع تبدیل را به صورت یک عدد بدست آوریم.

مثال) تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ سیستم نشان داده شده در گراف جریان سیگنال زیر را بدست آورید.



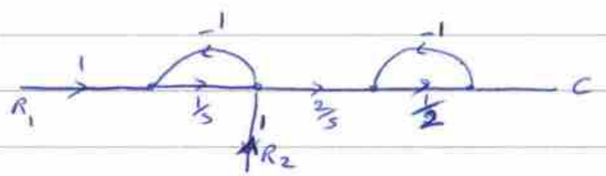
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

1) $\dfrac{s^2+3s+2}{2s^2+6s+4}$ ✓ 2) $\dfrac{2s^2+6s+4}{s^2+3s+2}$

3) $\dfrac{2s^2+6s+4}{2s^2+6s+4}$ 4) $\dfrac{s^2+3s+2}{4s^2+12s+8}$

$$\frac{C}{R} = \frac{2+s^2+s+2s}{s^2+s+2s+2+3s+2+s^2}$$

تست: $T(s) = \dfrac{R_2}{R_1} = ?$



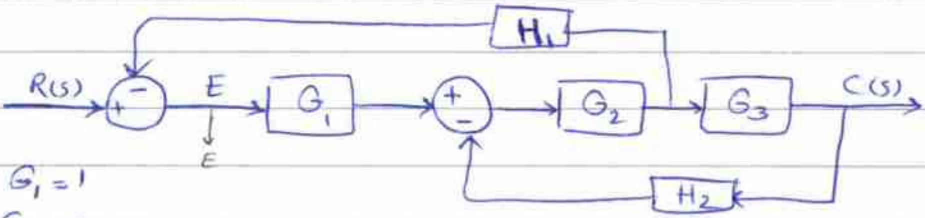
نکته‌ی مهم: تعریف تابع تبدیل عبارت است از نسبت خروجی به ورودی، لذا نمی‌توان از R_1 به R_2 با میسون تابع تبدیل را محاسبه کرد. راه کار حل مسئله این است که مقدار عبارت $\dfrac{C}{R_1} \times \underbrace{\dfrac{R_2}{C}}_{\frac{1}{C/R_2}}$ را محاسبه کنیم.

$$\frac{C}{R_1} = \frac{\frac{1}{s^2}(1)}{1-\left(-\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2s}\right)} \qquad \frac{C}{R_2} = \frac{\frac{1}{s}}{1-\left(-\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2s}}$$

$$\Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{1}{s^2}}{\cancel{1-\left(-\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2s}}} \times \frac{\cancel{1-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2s}}}{\frac{1}{s}} = \frac{1}{s}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تست)



$G_1 = 1$

$G_2 = \frac{2}{s}$

$G_3 = \frac{4}{s+1}$

$H_1 = -1$

$H_2 = -1$

الف) تابع تبدیل خطای $\frac{E(s)}{R(s)}$ تعریف شده را بدست آورید.

ب) خطای سیستم را به ازای ورودی پله در حالت نهایی محاسبه کنید.

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 H_1} = \frac{\frac{8}{s(s+1)}}{1 + \frac{8}{s(s+1)} + \frac{2}{s}} = \frac{8}{s(s+1)+2(s+1)+8}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{8}{s^2+3s+10}$$

الف)

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 \times (1 - G_2 G_3 H_2)}{1 - G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 H_1} = \frac{1 + \frac{8}{s(s+1)}}{1 + \frac{8}{s(s+1)} + \frac{2}{s}} = \frac{s^2+s+8}{s^2+3s+10}$$

ب)

$$E(s) = R(s) \times \frac{s^2+s+8}{s^2+3s+10}$$

$$E(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{ورودی پله}} \times \frac{s^2+s+8}{s^2+3s+10}$$

$$\Rightarrow e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = 0.8$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تست: مکانیک 88) عکس العمل $y(t)$ سیستم زیر نسبت به ورودی پله‌ی واحد $u(t)$ در کدام زمان کمترین مقدار خود را دارد؟

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1-s}{s(s+1)}} \longrightarrow y(t)$$

توصیه: منظور سؤال مقدار min تابع خروجی می‌باشد. (یعنی باید مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم)

پاسخ: $Y(s) = R(s).\ G(s) = \dfrac{1-s}{s^2(s+1)} = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{-2}{s}$

دستمان را می‌گذاریم روی s^2 که ← مشتق می‌گیریم ← بعد صفرش را می‌گذاریم داخل عبارت و ضریب $\frac{1}{s}$ بدست می‌آید

محاسبه‌ی ضریب $\frac{1}{s}$ $\longrightarrow \dfrac{-(s+1)-(1-s)}{(s+1)^2} \underset{=}{\overset{s=0}{=}} \dfrac{-2}{1} = -2$

$$s(t) = tu(t) + 2e^{-t}u(t) - 2u(t)$$

$$s(t) = (t + 2e^{-t} - 2)u(t)$$

به ازای $t>0$ مشتق می‌گیریم که $u(t)=1$ است.

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0 \longrightarrow 1 - 2e^{-t} = 0 \longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-t} \longrightarrow \ln\frac{1}{2} = -t$$

$$\longrightarrow t = -\ln\frac{1}{2} \longrightarrow t = \ln 2$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

پایداری مطلق:

اگر تمام ریشه‌های معادله‌ی مشخصه ($\Delta(s)$) سیستم در طرف چپ محور jω قرار داشت سیستم پایدار است.

شرط لازم برای پایداری این است که تمام ضرایب چندجمله‌ای معادله‌ی مشخصه موجود (غیر صفر) و هم علامت باشند.

مثال)

$$\Delta(s) = 4s^3 + 2s + 1$$
$$\Delta(s) = 4s^3 - 2s^2 + s + 1$$

$\Rightarrow$ شرط اولیه پایداری را ندارد $\Rightarrow$ ناپایدار

$\Delta(s) = 4s^3 + 2s^2 + 5s + 2$ ⟶ شرط اولیه پایداری را دارد ⟶ پایداری باید بررسی شود

روش روث هرویتز:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	---
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	---
s^{n-2}	$\dfrac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$\dfrac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
s^0				

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

قواعد حاکم بر جدول روث هرویتز

1) تعداد تغییر علامت های ستون اول جدول روث هرویتز با تعداد ریشه ها معادله ی مشخصه سیستم حلقه بسته واقع در نیم صفحه راست صفحه ی s برابر است. (یعنی ریشه ها در سمت راست محور $j\omega$ واقع است.)

مثال) $\begin{matrix}4\\-3\\1\end{matrix}$ → دو بار تغییر علامت داده پس دو ریشه سمت راست محور $j\omega$ دارد.

2) با استفاده از روش روث هرویتز نمی توان پایداری سیستم های تأخیردار را بررسی کرد.

مثال، $T(s) = \dfrac{s+1}{s^2+4s+5}\, e^{2s}$ → عامل تأخیر است

یا مثلاً وقتی در حوزه زمان $x(t-1)$ داریم در حوزه ی لاپلاس چون e^{st} پیدا می شود نمی توان پایداری آن را بررسی کرد.

مثال) پایداری سیستم زیر را بررسی کرده و در صورت ناپایداری، تعداد قطب های ناپایدار را معلوم کنید.

$$\Delta(s) = 5s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

	s^5	5	3	1
	s^4	4	2	1
4 x (ضرب)	s^3	$\cancel{\tfrac{1}{2}} \to 2$	$\cancel{-\tfrac{1}{4}} \to -1$	0
	s^2	4	1	
2 x (ضرب)	s^1	$\cancel{-\tfrac{3}{2}} \to -3$	0	
	s^0	1		

قطب پایدار $3 = 5-2$ $\xleftarrow{\text{درجه معادله 5}}$ 2 قطب ناپایدار

2 بار تغییر علامت داده → دو قطب ناپایدار (یعنی 2 قطب در سمت راست محور $j\omega$ و 3 قطب سمت چپ محور $j\omega$ دارد.)

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) K را طوری تعیین کنید تا سیستم با معادله مشخصه زیر پایدار باشد.

$$\Delta(s) = \underbrace{s^3}_{a_3} + \underbrace{Ks^2}_{a_2} + \underbrace{2s}_{a_1} + \underbrace{K+5}_{a_0}$$

شرط لازم هم علامت بودن $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} K>0 \\ \text{و} \\ K+5>0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{اشتراک } \cap} \boxed{K>0}$

s^3	1	2	0
s^2	K	$K+5$	
K مثبت s^1	$\frac{K-5}{K}$		
s^0	$\frac{(2K-(K+5))(K+5)}{2K-(K+5)} \to K+5$		

$$2K-(K+5)>0 \longrightarrow K+5<2K \longrightarrow \boxed{K>5}$$

$$K+5>0 \longrightarrow \boxed{K>-5}$$

اشتراک تمام شرط‌ها : $\left\{\begin{array}{l} K>0 \\ K>5 \\ K>-5 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{K>5}$

حالات خاص جدول روث هرویتز:

۱) اگر در پر کردن جدول روث در ستون اول یکی از سطرها درایه اولش صفر باشد. (یعنی یکی از اعداد ستون اول صفر شود.)

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) $\Delta(s) = 2s^3 + s^2 + 4s + 2$

s^3	2	4
s^2	1	2
s^1	0 ε_+	0
s^0	$\frac{2\varepsilon - 0}{\varepsilon} = 2$	

اشتباه رایج

2) در حالت خاصی که کل ضرایب یک سطر صفر باشند با استفاده از مشتق معادله‌ی کمکی می‌توان سطر کاملاً صفر را به عدد تبدیل کرد.

معادله کمکی: معادله‌ی مشخصه‌ی سطر قبلی سطر کاملاً صفر

مثال) $\Delta(s) = s^6 + 5s^5 + 11s^4 + 25s^3 + 36s^2 + 30s + 36$

$A(s)$	s^6	1	11	36	36
	s^5	5	25	30	0
	s^4	6	30	36	0
	s^3	$0 \to 24$	$0 \to 60$	0	0
$Q(s)$	s^2				
	s^1				
	s^0				

$\rightarrow A(s) = 6s^4 + 30s^2 + 36$ معادله کمکی

مشتق

$\frac{dA(s)}{ds} = 24s^3 + 60s$

$\Delta(s) = A(s) \cdot Q(s)$

یعنی اگر $A(s)$ را داشته باشیم، می‌توانیم $Q(s)$ را بدست آوریم و به این روش $\Delta(s)$ را تجزیه کرده‌ایم و می‌توانیم راحت‌تر به ریشه‌های آن دست پیدا کنیم.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

* نکات :

در دو حالت خاص که کل یک سطر به طور کامل صفر می‌شود به نکات زیر توجه کنید:

1) ریشه‌های معادله‌ی کمکی (که بخشی از ریشه‌های $\Delta(s)$ هستند) نسبت به مبدأ مختصات متقارن‌اند. بنابراین در صورتی که فقط ریشه‌ها متقارن $\Delta(s)$ را خواستیم کافی است ریشه‌های معادله کمکی را بدست آوریم.

2) فقط سطری می‌تواند به طور کامل صفر شود که دارای اندیس فرد باشد.

3) تعداد ریشه‌های متقارن نسبت به مبدأ یک واحد بیشتر از اندیس سطر کاملاً صفر می‌باشد.

4) همواره معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم مضربی از معادله‌ی کمکی می‌باشد.

$$\Delta(s) = (\text{معادله کمکی})\,(Q(s))$$

خیلی مهم
5) * قرارداد: به سطرهای قبل از سطر کاملاً صفر $A(s)$ و به سطرها بعد از سطر کاملاً صفر ناحیه‌ی $Q(s)$ می‌گوییم. به تعداد تغییر علامت‌ها در ستون اول ریشه سمت راست محور $j\omega$ داریم. حال اگر تغییر علامت‌ها در ناحیه‌ی $A(s)$ باشد، به تعداد این تغییر علامت‌ها ریشه نامتقارن داریم. همچنین اگر تغییر علامت در ناحیه‌ی $Q(s)$ داشتیم به تعداد تغییر علامت‌ها ریشه سمت راست محور $j\omega$ و همان تعداد ریشه متقارن نسبت به مبدأ در سمت چپ محور $j\omega$ داریم.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

6) ریشه های متقارن معادله مشخصه به تعداد دفعات صفر شدن سطرها برابر می شود.

7) اگر عنصر اول یک سطر صفر باشد و عنصر دیگری هم در آن سطر وجود نداشته باشد، حالت خاص دوم رخ داده است و باید از روش مربوط به خاصیت دوم استفاده کرد.

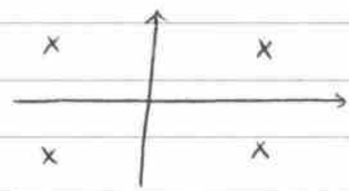
بررسی حالات مختلف مکان 4 ریشه ی متقارن:

1) در حالتی که سطر s^3 کاملاً صفر شده باشد و دو تغییر علامت پس از سطر s^3 رخ داده باشد.

s^3 کاملاً صفر ⟵ 4 ریشه ی متقارن

2 تغییر علامت ⟵ 2 ریشه سمت راست محور $j\omega$

$Q(s)$ در ناحیه 2 تغییر علامت ⟵ ریشه ها متقارن نسبت به مبدأ



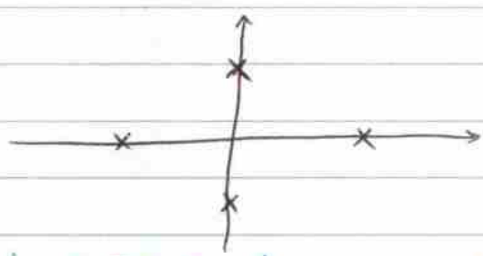
سیستم ناپایدار

2) سطر s^3 کاملاً صفر و یک تغییر علامت پس از سطر s^3 داشته باشیم

(یعنی در آخرین درایه تغییر علامت داده بوده)

$Q(s)$ در ناحیه ⟵ متقارن بوده

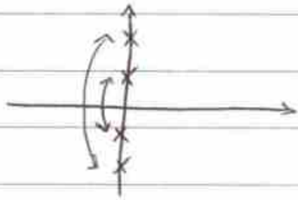
بقیه ریشه ها باید حتماً روی محور $j\omega$ باشند تا متقارن باشند



سیستم ناپایدار ← چون ریشه سمت راست محور $j\omega$ دارد.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

3) سطر s^3 کاملاً صفر و هیچ گونه تغییر علامتی نیز رخ نداده باشد.



چون تغییر علامت نداریم پس سمت راست ریشه نداریم

چون سطر s^3 کاملاً صفر شده ← متقارن است

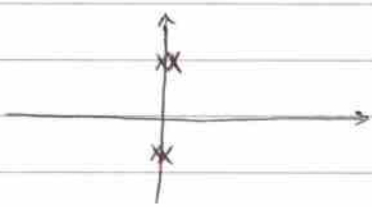
تنها راه این است که ریشه ها روی محور تیز قرار گرفته باشند.

سیستم پایداری مرزی دارد.

4) سطرهای s^3 و s^1 صفر باشند و هیچ گونه تغییر علامتی نیز رخ نداده باشد

تغییر علامت نداریم ← سمت راست ریشه نداریم ← s^3 صفر بوده پس متقارن است ← ریشه ها روی محور تیز

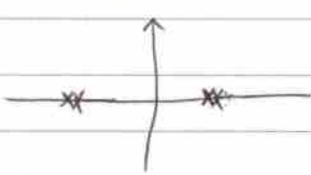
قرار دارند ← دو تا سطر صفر شده $\xleftarrow{\text{طبق نکته 6}}$ به تعداد سطرهای صفر شده ریشه‌ی تکرار داریم. پس 2 ریشه‌ی تکرار داریم.



به دلیل وجود s^3، 4 ریشه‌ی متقارن داریم

* اگر ریشه های تکرار روی محور تیز داشتیم سیستم ناپایدار می شود.

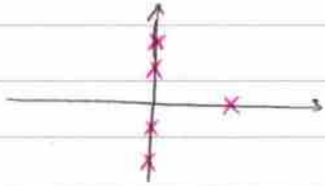
5) سطرهای s^3 و s^1 کاملاً صفر و دو تغییر علامت در ناحیه‌ی $Q(s)$ داشته باشیم.



2 تا سطر صفر شده ← ریشه تکرار

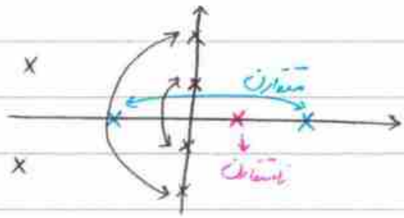
در ناحیه $Q(s)$ ← متقارن

مثال) s^3 کاملاً صفر - یک تغییر



* اگر ریشه مختلط بود حتماً زوج آن هم وجود دارد.

مثال) $\Delta(s)$ درجه 9 / سطر 5 کاملاً صفر شده / یک تغییر علامت در ناحیه A و یک تغییر علامت در ناحیه Q



① ابتدا ریشه های متقارن و نامتقارن را با توجه به تغییر علامت (تعداد) در ناحیه A و Q می چینیم

② با توجه به اندیس سطر صفر شده مابقی ریشه های متقارن را روی محور ها قرار می دهیم. البته به این نکته توجه داشته باشیم که مثلاً اگر قرار باشد 2 جفت ریشه روی محور قرار دهیم:

الف) اگر یک سطر کاملاً صفر داشته باشیم بین ریشه های متقارن مکرر نخواهیم داشت و جفت ریشه ها را به صورت مجزا روی محور ها قرار می دهیم.

ب) اگر دو سطر کاملاً صفر داشته باشیم، ریشه ها متقارن مکرر خواهیم داشت. بین جفت ریشه ها را به صورت مکرر و متقارن نسبت به مبدأ روی محور ها قرار می دهیم.

③ به اندازه اختلاف درجه معادله مشخصه و ریشه های قرار داده شده در سمت چپ محور ها ریشه قرار می دهیم.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تست: (کنکور 86) تابع تبدیل سیستم حلقه بسته به صورت زیر است. پایداری آن را بررسی کنید.

$$H(s) = \frac{24(s-2)}{s^6+4s^5+11s^4+32s^3+40s^2+64s+48}$$

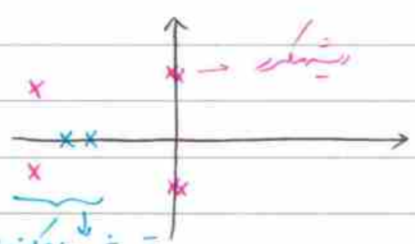
s^6	1	11	40	48
s^5	4	32	64	0
$\frac{1}{3}\times s^4$	$\cancel{3} \to 1$	$\cancel{24} \to 8$	$\cancel{48} \to 16$	
$\times\frac{1}{12}\, s^3$	$\cancel{0} \to \cancel{12} \to 1$	$\cancel{0} \to \cancel{48} \to 4$		
s^2	4	16		
s^1	$\cancel{0} \to 8$	0		
s^0	16			

$\to A(s) = 3s^4 + 24s^2 + 48 \;\downarrow\; \frac{dA(s)}{ds} = 12s^3 + 48s$

$\to A(s) = 4s^2 + 16 \;\downarrow\; \frac{dA(s)}{ds} = 8s$

دو تا سطر صفر داریم $\leftarrow$ ریشه مکرر داریم $\leftarrow$ ناپایدار است. (در حل این تست وقتی متوجه می شویم که ریشه مکرر داریم بنابراین نتیجه می گیریم سیستم ناپایدار است و تست حل می شود)

تغییر علامت نداریم
s^3 کاملا صفر شده $\leftarrow$ ۴ ریشه متقارن
$\Leftarrow$ ریشه ها باید روی محور ها قرار بگیرد



بقیه ریشه ها ممکن است یکی از این دو حالت را داشته باشند

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

اگر بخواهیم ریشه‌ها را (مقادیر دقیق) محاسبه کنیم از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$A(s) = 4s^2 + 16 = 0 \longrightarrow s = \pm 2j$$

$$A(s) = 3s^4 + 24s^2 + 48 = 0 \xrightarrow{(1)\ s^2 = s} 3s^2 + 24s + 48 = 0 \longrightarrow s^2 + 8s + 16 = 0$$

$$\longrightarrow (s+4)^2 = 0 \longrightarrow s = -4, -4$$ ریشه مکرر

$$(1)\quad s^2 = -4, -4 \rightsquigarrow s = \pm 2j, \pm 2j$$

برای محاسبه دو ریشه‌ی باقیمانده باید:

$$\Delta(s) \;\Big|\; \underbrace{3s^4 + 24s^2 + 48}_{A(s)}$$
$$\quad s^2 + 4s + 3$$
$$\vdots$$
$$0$$

$$\Delta(s) = A(s)(s^2 + 4s + 3)$$

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \quad \begin{cases} s = -1 \\ s = -3 \end{cases}$$

* وقتی که فقط یک سطر کاملاً صفر داریم و تغییر علامت هم نداشته باشیم، پایدار مرزی است یا نوسانی می‌باشد. در این حالت سیستم با فرکانسی مانند w که به آن فرکانس نوسانات می‌گویند نوسان می‌کند.

روش بدست آوردن فرکانس نوسانات: معادله‌ی کمکی سطر صفر شده را مساوی با صفر قرار داده و اندازه ریشه‌های بدست آمده فرکانس نوسانات سیستم می‌باشد.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

روش تستی : به دلیل اینکه در کنکور با سیستم های درجه 3 و 4 خیلی سروکار داریم ، حفظ کردن فرمول های زیر که برای پایداری سیستم از روی جدول روث بدست آمده به سرعت حل تست خیلی کمک می کند . البته باید شرط لازم را حتما داشته باشند .

شرط پایداری سیستم درجه 2 : تمام ضرایب مثبت باشند . $\Delta(s) = as^2 + bs + c$

فرکانس نوسانات سیستم درجه 2 : $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{a}{c}}}$

شرط پایداری سیستم درجه 3 : ① تمام ضرایب موجود و هم علامت

$\Delta(s) = as^3 + bs^2 + cs + d = 0$

② ضرب کناری ها < ضرب وسطی ها $\Leftarrow bc > ad$

فرکانس نوسانات : $\underbrace{bs^2 + d = 0}_{\text{معادله کمکی}} \longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{d}{b}}}$

شرط پایداری سیستم مرتبه 4 : ① تمام ضرایب موجود و هم علامت

$\Delta(s) = as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e$

② $bc > ad$

③ $bcd > d^2a + b^2e$

$\underbrace{bcd}_{\text{بدک}} > \underbrace{dad}_{\text{بابا}} + \underbrace{beb}_{\text{بوق}}$

فرکانس نوسانات : $\omega = \sqrt{\frac{be}{bc - ad}}$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) در سیستمی با معادله مشخصه زیر، K را طوری تعیین نمایید که سیستم:

$$\Delta(s) = s^3 + 15ks^2 + (2k-1)s + 5k = 0$$

الف) پایدار

$\begin{cases} \boxed{K>0} \\ 2k-1>0 \longrightarrow \boxed{K>\frac{1}{2}} \end{cases}$

ب) پایدار مرزی

$(15k)(2k-1) > 5k \leadsto$ اشتباه رایج: 5k را با 15k ساده کرد.

$15k(2k-1) - 5k > 0 \Rightarrow 5k(6k-4) > 0$

$6k-4>0 \leadsto \boxed{K>\frac{2}{3}}$

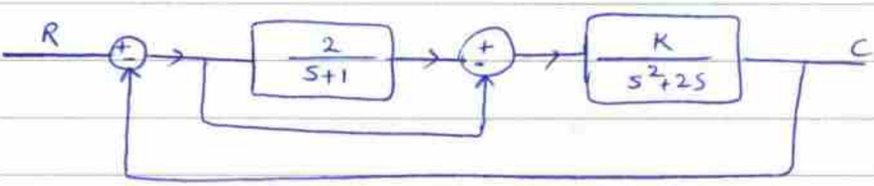
اشتراک بین 3 تا شرط‌ها ⟵ $\boxed{K>\frac{2}{3}}$ سیستم به ازای این مقدار پایدار است

عبارت $5k(6k-4)$ برای اینکه مثبت باشد باید هر دو عبارت منفی یا هر دو عبارت مثبت باشد اما چون از شرط $k>\frac{1}{2}$ را داریم فقط شرط هر دو تا مثبت را چک می‌کنیم.

ب) اگر درجه 3: $bc = ad \leadsto$ مرز پایداری

اگر درجه 4: $bcd = dad + bed \longrightarrow$ مرز پایداری

مثال) حدود K را برای پایداری سیستم حلقه بسته تعیین کنید.



نیازی به محاسبه چون جمله‌ای صورت نمی‌باشد.

$$T(s) = \frac{\qquad}{1 - \left(\frac{-2}{s+1} \times \frac{K}{s^2+2s}\right)} = \frac{\qquad}{(s^2+2s)(s+1)+2K}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 2K$$

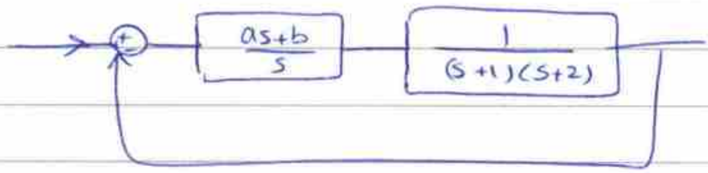
① $+2K > 0 \rightarrow \boxed{K > 0}$

② $3 \times 2 > -2K \rightarrow \boxed{K < 3}$

$\Rightarrow 0 < K < 3$

اگر هیچ اشتراکی نداشته باشند می گوییم به ازای هیچ مقدار K پایدار نمی باشد.

مثال) مقادیر A و B را به گونه ای تعیین کنید که سیستم حلقه بسته پایدار شود.



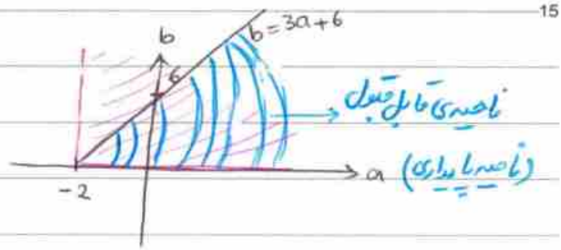
$$T(s) = \frac{as+b}{as+b+s(s+1)(s+2)} \qquad \Delta(s) = s^3 + 3s^2 + (2+a)s + b$$

① $\boxed{b > 0}$

② $2 + a > 0 \rightarrow \boxed{a > -2}$

③ $3(2+a) > b \rightarrow \boxed{3a - b > -6}$

$b < 3a + 6$



مثال) معادله مشخصه سیستمی به صورت $s^4 + 5s^3 + 3s^2 + Ks + K^2$ می باشد، حدود تغییرات K برای داشتن سیستم پایدار را تعیین کنید.

① $\boxed{K > 0}$

② $5 \times 3 > K \rightarrow \boxed{K < 15}$

③ $15K > K^2 + 25K^2 \rightarrow 26K^2 - 15K < 0 \rightarrow \underbrace{K}_{>0}(26K - 15) < 0 \rightarrow 26K - 15 < 0 \rightarrow \boxed{K < \frac{15}{26}}$

اشتراک سه تا $\Rightarrow \boxed{0 < K < \frac{15}{26}}$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) تابع تبدیل سیستمی به صورت $G(s)=\dfrac{s+5}{s^4+5s^3+10s^2+20s+24}$ می باشد. مکان قطب های سیستم حلقه بسته را معلوم کنید.

وقتی مکان قطب ها را می خواهد باید حتما از جدول روث استفاده کنیم و نمی توان از فرمول ها استفاده کرد.

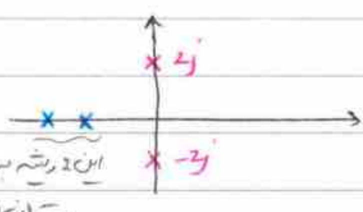
وقتی در صورت سوال حرفی از اینکه تابع تبدیل حلقه بسته است یا باز به میان نمی آورد باید حتما تابع تبدیل برای سیستم حلقه بسته در نظر بگیریم.

s^4	1	10	24
s^3	5	20	
s^2	6	24	
s^1	$0 \to 12$		
s^0	24		

حالت خاص 2 (سطر کاملا صفر)

$A(s) = 6s^2+24$

$A'(s) = 12s$



این 2 ریشه به عنوان مزدوج هم می توان در نظر گرفت

سطر s^1 کاملا صفر شده ← دو ریشه متقارن

$A(s) = 6s^2+24=0 \rightarrow s=\pm 2j$

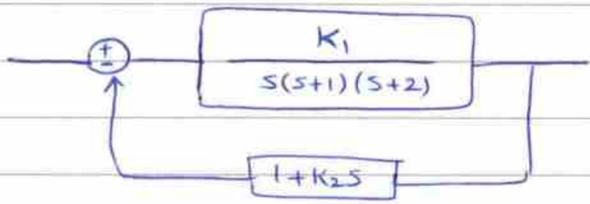
$s^4+5s^3+10s^2+20s+24 \;\Big|\; 6s^2+24$

$\boxed{\frac{1}{6}s^2+\frac{5}{6}s+1}$ ← معادله مشخصه دیگر سیستم

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$\frac{1}{6}s^2 + \frac{5}{6}s + 1 = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} s = \\ s = \end{cases}$$

مثال) در سیستم کنترل شکل زیر K_1 و K_2 در چه ناحیه‌ای تغییر کنند تا سیستم پایدار بماند.



چون 2 تا متغیر داریم پس یک ناحیه را باید مشخص کنیم که در آن سیستم پایدار باشد.

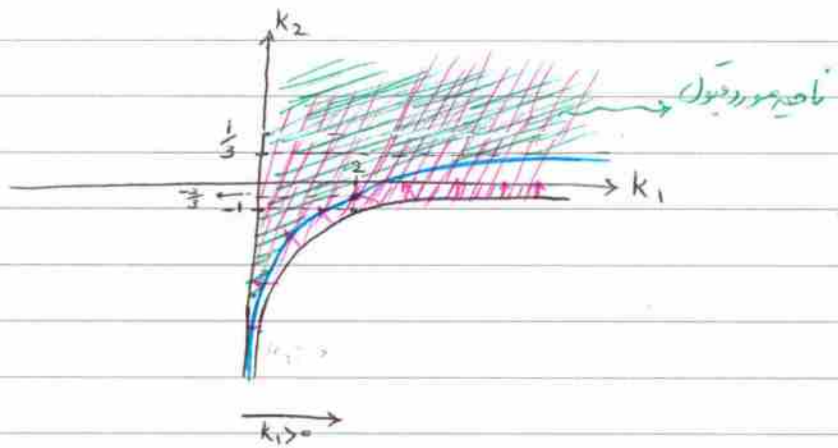
$$T(s) = \frac{K_1}{K_1(1+K_2 s) + s(s+1)(s+2)}$$

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + (2 + K_1 K_2)s + K_1$$

① $\boxed{K_1 > 0}$ → خط

② $2 + K_1 K_2 > 0 \longrightarrow \boxed{K_1 K_2 > -2}$ → صفحه $\quad K_2 = \frac{-2}{K_1}$

③ $3(2 + K_1 K_2) > K_1 \longrightarrow \boxed{3K_1 K_2 - K_1 + 6 > 0}$ → صفحه $\quad K_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{K_1}$



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تعیین مقدار بحرانی K و فرکانس نوسانات ماندا:

برای داشتن فرکانس نوسانات ماندا باید سیستم پایدار مرزی باشد و مقدار K بدست آمده در این حالت را مقدار بحرانی K می نامند برای این کار کافی است آرایه ی راوث را تشکیل داده و شرط کلا صفر شدن یک سطر را با توجه به متغیر K بررسی کنیم.

نکته: برای سیستم های مرتبه 2، 3 و 4 می توان از روابط تستی جلسه قبل استفاده کرد:

مرتبه 2: $as^2+bs+c=0 \rightsquigarrow$ شرط $b=0$

فرکانس نوسانات $= \omega = \sqrt{\frac{c}{a}}$

مرتبه 3: $as^3+bs^2+cs+d=0$

$a,b,c,d>0$, شرط نوسانی: $bc=ad$

معادله نوسانی: $bs^2+d=0 \rightsquigarrow \omega=\sqrt{\frac{d}{b}}$ فرکانس نوسانات

مرتبه 4: $as^4+bs^3+cs^2+ds+e=0$

$bc>ad$, $bcd=dad+beb \rightsquigarrow \omega=\sqrt{\frac{be}{bc-ad}}$

مثال) برای معادله ی مشخصه سیستمی به صورت $s^3+6s^2+13s+K=0$ ، مقدار K را برای آن که سیستم دو ریشه روی محور موهومی داشته باشد را تعیین کنید و فرکانس نوسانات ماندا را نیز بدست

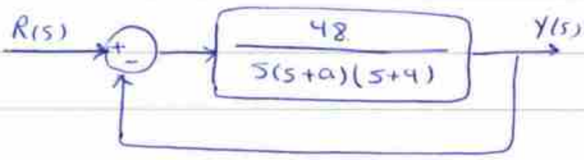
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

داریم:

$$bc = ad \rightsquigarrow 6 \times 13 = k \rightsquigarrow \boxed{k = 78}$$

$$6s^2 + 78 = 0 \rightsquigarrow \omega = \sqrt{\frac{78}{6}} = \sqrt{13}\ \ rad/s$$

مثال) به‌ازای چه مقدار از a ، سیستم کنترل زیر نوسانی است و فرکانس نوسانات آن چقدر است؟



$$T(s) = \frac{48}{s(s+a)(s+4)+48} = \frac{48}{s^3 + (4+a)s^2 + 4as + 48}$$

نکته: برای بررسی پایداری و تعیین مکان قطب‌های یک سیستم باید تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را داشته باشیم.

$$\Delta(s) = s^3 + (4+a)s^2 + 4as + 48$$

$$(4+a)4a = 48 \rightsquigarrow a^2 + 4a - 12 = 0 \quad \begin{cases} a = 2 & \text{ق ق} \\ a = -6 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

اگر این مقدار را انتخاب کنیم ضرایب s^2 و s منفی می‌شوند و شرط پایداری برهم می‌خورد و سیستم ناپایدار می‌شود و نه‌تنها نوسانی نشدن بصورت نمایی اکیداً صعود به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 8s + 48$$

معادله نوسانی : $6s^2 + 48 = 0 \rightsquigarrow \omega = \sqrt{\frac{48}{6}} = 2\sqrt{2}\ \ rad/s$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تعیین مقدار نهایی ۵ برای تعیین مقدار نهایی پاسخ سیستم ها از روی تبدیل لاپلاس پاسخ خروجی $(C(s))$ می توان از قضیه مقدار نهایی استفاده کرد ولی به این نکته توجه داشته باشید که شرط استفاده از قضیه مقدار نهایی پایدار بودن $sC(s)$ است و برای سیستم های ناپایدار مقدار نهایی بدست آمده از قضیه ی مقدار نهایی فاقد اعتبار بوده و سیستم ناپایدار پاسخ بی نهایت خواهد داشت.

$$C(s)=\frac{1}{s-1} \xrightarrow{L^{-1}} c(t)=e^{t}$$ قطب آن سمت راست محور ها است پس ناپایدار است.

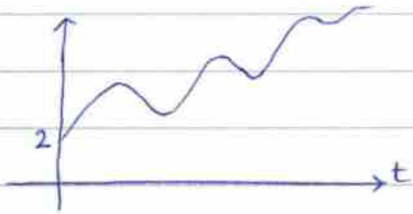
$$\lim_{s\to 0} sC(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s-1}=0 \quad \times$$ غلط است

وقتی L^{-1} از $C(s)$ بگیریم می بینیم که وقتی $t\to\infty$ میل کند مقدار آن ∞ می شود. ناپایداری و خطا مقدار ∞ است.

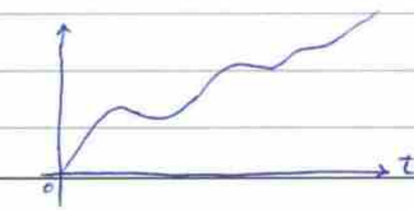
تست تألیفی) سیستمی با تابع تبدیل حلقه بسته ی زیر در نظر بگیرید.

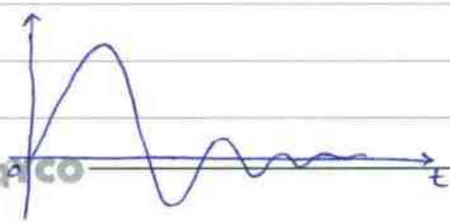
$$T(s)=\frac{2s^3+2s+1}{s^4+s^3+2s^2+8s+9}$$

پاسخ ضربه ی سیستم کدام یک از نمودارهای پاسخ خواهد بود؟

الف) ✓


ج)


ب)


د)


Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

روش ①: اولین راهی که به ذهن می رسد این است که از تبدیل لاپلاس معکوس استفاده کنیم و مقدار آن را در حوزه ی زمان محاسبه کنیم اما چون تبدیل معکوس سخت است از این راه نمی رویم.

روش ②: استفاده از قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی

کاری به پایداری و ناپایداری ندارد در هر شرایطی می توان از آن استفاده کرد.

$C(s) = R(s) \cdot T(s)$

$H(s) = T(s)$

$$h(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\,T(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s(2s^3+2s+1)}{s^4+s^3+2s^2+8s+9} = 2$$

$$h(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,H(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s(2s^3+2s+1)}{s^4+s^3+2s^2+8s+9} = 0 \quad \times$$

اشتباه رایج !!!

چون پایداری را بررسی نکرده!

برای بدست آوردن مقدار نهایی در حوزه زمان بررسی پایداری ضروری است.

شرط لازم ✓

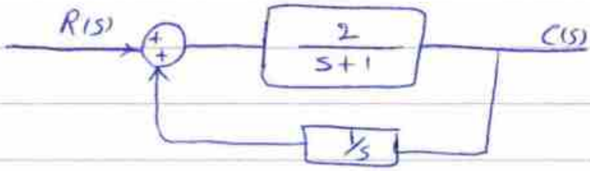
1) $bc > ad \longrightarrow 1 \times 2 < 8 \times 1$ ناپایدار

2) $bcd > beb + dad$

سیستم ناپایدار است و از قضیه مقدار نهایی نمی توان استفاده کرد. خروجی سیستمی که ناپایدار است به سمت بی نهایت میل می کند.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تست تألیفی) سیستم زیر را در نظر بگیرید. پاسخ پایای این سیستم به ورودی پله را بدست آورید.



$$T(s) = \frac{2s}{s(s+1)-2} = \frac{2s}{s^2+s-2}$$

$$C(s) = R(s)T(s)$$

اشتباه رایج!!!

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot T(s) \rightarrow C(\infty) = \lim_{s \to 0} s \times \frac{1}{s} \times \frac{2s}{s^2+s-2} = 0 \quad \times$$

$$\Delta(s) = s^2+s-2 \rightarrow$$ شرط پایداری را ندارد (ضرایب هم‌علامت نیستند)

⇐ پاسخ به هر ورودی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

$$\lim_{t \to \infty} c(t) = \infty$$

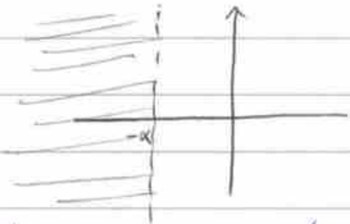
روش روث فقط پایداری مطلق را بررسی می‌کند.

تحلیل پایداری نسبی به کمک روش روث:

معیار پایداری روث نشان دهنده پایداری مطلق سیستم است و درجه پایداری و ناپایداری سیستم را مشخص نمی‌کند اما در عمل برای تعیین پایداری نسبی سیستم باید فاصله‌ی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه را از مبدأ تعیین کنیم. به عبارتی تعداد ریشه‌های قرارگرفته در ناحیه‌ی هاشورخورده در شکل $(Re\{s\}<-\alpha)$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

زیر تعیین کنیم.



$Re\{s\} < -a$

برای آن که بتوانیم قطب های سیستم را سمت چپ $-a$ قرار دهیم کافی است در معادله ی مشخصه سیستم تغییر متغیری به صورت $s \rightarrow s-a$ به کار ببریم و پایداری سیستم را تعیین کنیم.

مثال) یک سیستم فیدبک واحد دارای تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\frac{K}{s(s+3)(s+10)}$ است. حد بالای K چقدر باشد تا همه ی قطب های سیستم سمت چپ $\sigma=-1$ قرار گیرد.

برای بررسی پایداری و مکان قطب ها باید از تابع تبدیل حلقه بسته استفاده کنیم. دقت شود تابع حلقه بسته را اگر نگفته باشد از فیدبک منفی استفاده می کنیم.

$$T(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+10)+K} = \frac{K}{s^3+13s^2+10s+K}$$

$$\Delta(s) = s^3+13s^2+10s+K$$

$$\Longrightarrow \Delta_{mod}(s) = (s-1)^3+13(s-1)^2+10(s-1)+K$$

$$\Delta_{mod}(s) = s^3+10s^2+30s+K-18$$

① $10 \times 30 > (K-18)\times 1 \longrightarrow \boxed{K<318}$

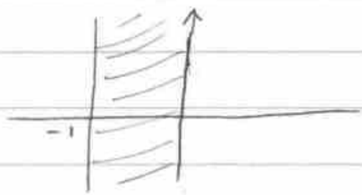
② $K-18>0 \longrightarrow \boxed{K>18}$ $\Longrightarrow \boxed{18<K<318}$

حد بالا

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

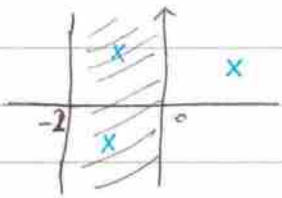
★نکته: برای تعیین تعداد ریشه‌های ناحیه‌ی هاشور خورده زیر $(-a_2 < Re\{s\} < -a_1)$ کافی است $\Delta_{mod}(s-a_1)$ و $\Delta_{mod}(s-a_2)$ را تشکیل داده و تعداد قطب‌های پایدار $\Delta(s-a_1)$ را از تعداد قطب‌های پایدار $\Delta(s-a_2)$ کم کرده.



مثال) معادله مشخصه سیستم زیر را در نظر بگیرید. چند ریشه یا قطب از سیستم در ناحیه‌ی $-2<Re\{s\}<0$ قرار دارند.

$$\Delta(s)=s^4+4s^3+3s^2-2s-6$$

نکته: فرمول‌های بستی جهت پایداری تعداد ریشه‌های پایدار و ناپایدار را مشخص نمی‌کنند برای تشخیص تعداد ریشه‌های ناپایدار، استفاده از جدول روث الزامی است.



$$\Delta_{mod}(s)=s^4+4s^3+3s^2-2s-6$$

$$\Delta_{mod}(s-2)=s^4-4s^3+3s^2+2s-6$$

$\Delta_{mod}(s)$

s^4	1	3	-6
s^3	4	-2	0
s^2	3.5	-6	
s^1	34/7		
s^0	-6		

تغییر علامت

$\Delta_{mod}(s-2)$

s^4	1	3	-6
s^3	-4	2	
s^2	3.5	-6	
s^1	-34/7		
s^0	-6		

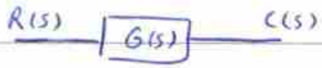
1 ریشه سمت راست است و 3 ریشه سمت چپ — 3 ریشه سمت راست است، 1 ریشه سمت چپ

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

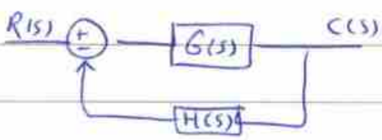
از آنجایی که $\Delta_{mod}(s)$، سه ریشه سمت چپ محور jω دارد و همچنین $\Delta_{mod}(s-2)$، یک ریشه سمت چپ محور $s=-2$ دارد پس می‌توان نتیجه گرفت دو قطب در ناحیه $-2<Re\{s\}<0$ قرار دارد.

مشخصات و عملکرد سیستم های کنترل فیدبکی:

اثر فیدبک روی بهره کل:



$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=G(s)$$



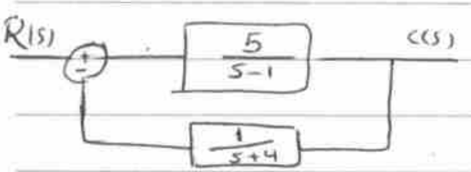
$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+GH}$$

فیدبک بهره کل حلقه بسته را نسبت به حلقه باز کاهش می دهد.

اثر فیدبک روی پایداری: معمولاً فیدبک باعث افزایش پایداری سیستم خواهد شد.

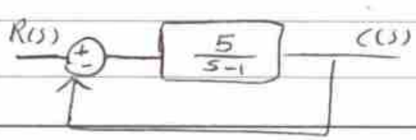
مثلاً می توان تابع تبدیل حلقه باز بهرحم

که سیستمی ناپایدار است به سیستمی پایدار تبدیل کرد.



$$T(s)=\frac{5(s+4)}{(s-1)(s+4)+5}=\frac{}{s^2+3s+1}$$

حتی از طریق فیدبک واحد هم می توان سیستم را پایدار کرد.



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

اثر فیدبک روی خطای سیستم:

خطای سیستم حلقه باز:

$$E = R(s) - C(s) = R(s)\,(1 - G(s))$$

خطای سیستم حلقه بسته:

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - R(s)T(s)$$
$$= R(s)\left(1 - \frac{G(s)}{1 + GH(s)}\right)$$

خطای حالت ماندگار حلقه باز به ورودی پله:

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,E(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{s}\cdot(1 - G(s)) \rightsquigarrow e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s}(1 - G(s)) = 1 - G(0)$$

خطای حالت ماندگار حلقه بسته به ورودی پله:

$$E(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{G(s)}{1 + GH(s)}\right)$$

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s}\left(1 - \frac{G(s)}{1 + GH(s)}\right) = 1 - \frac{G(0)}{1 + \underbrace{G(0)H(0)}_{\text{گین DC حلقه باز}}}$$

در فصل بعد مبحث خطا به تفصیل بررسی خواهد شد.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مفهوم ریاضی حساسیت:

فرض کنید f تابعی از متغیر α باشد. $f=f(\alpha)$. اگر α به اندازه ی $\Delta\alpha$ تغییر کند آن گاه f نیز به اندازه Δf تغییر می کند و حساسیت f نسبت به تغییرات α به صورت زیر تعریف می شود:

$$\underbrace{S_\alpha^f}_{\text{عدد}} = \frac{\Delta f}{\Delta\alpha}\cdot\frac{\alpha}{f(\alpha)}$$ بی متغیره

فرض کنید f تابعی دو متغیره از α و β باشد:

$$f=f(\alpha,\beta) \longrightarrow S_\alpha^f = \frac{\partial f}{\partial\alpha}\times\frac{\alpha}{f(\alpha,\beta)}$$

قاعده زنجیره ای در محاسبه حساسیت:

اگر $f=f(k,\alpha,\beta,\gamma,\dots) \longrightarrow S_k^f = S_\alpha^f\times S_\beta^\alpha\times S_\gamma^\beta\times S_k^\gamma$

نکته: اگر $S_\alpha^f = 1$ باشد. تابع f با متغیر α رابطه ی مستقیم دارد. همچنین اگر $S_\alpha^f=-1$ باشد f با α رابطه ی عکس دارد.

مثال) $f(\alpha)=\alpha k$: $S_\alpha^f = \frac{df}{d\alpha}\times\frac{\alpha}{f(\alpha)} = k\times\frac{\alpha}{\alpha k} = 1$

$f(\alpha)=\frac{k}{\alpha}$: $S_\alpha^f = \frac{df}{d\alpha}\cdot\frac{\alpha}{f(\alpha)} = \frac{-k}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha}{k/\alpha} = -1$

نکته: اگر $S_\alpha^f = 0$ باشد یعنی حساسیتی ندارد. به عبارتی دیگر f و α هیچ رابطه ای با هم ندارند. تابع f نسبت به α هیچ

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) $f(\alpha) = \dfrac{K\alpha^2+2\alpha K+K}{(K-1)(\alpha+1)^2}$

$$S_\alpha^f = \underbrace{\frac{df}{d\alpha}}_{\downarrow} \times \frac{\alpha}{f(\alpha)} = 0$$

بعد از محاسبه ی مشتق برابر صفر می شود. $f(\alpha) = \dfrac{K(\alpha^2+2\alpha+1)}{(K-1)(\alpha+1)^2} = \dfrac{K}{K-1}$

تذکر: حساسیت برای سیستم های پایدار تعریف می شود.

مثال) حساسیت تابع زیر را نسبت به پارامترهای α و t حساب کنید.

$$f = \frac{e^{-Ts}}{s+\alpha}$$

$$S_\alpha^f = \frac{df}{d\alpha} \times \frac{\alpha}{f} = \frac{-e^{-Ts}}{(s+\alpha)^2} \times \frac{\alpha}{\frac{e^{-Ts}}{s+\alpha}} = \frac{-\alpha}{s+\alpha}$$

$$S_T^f = \frac{df}{dT} \times \frac{T}{f} = \frac{-se^{-Ts}}{s+\alpha} \times \frac{T}{\frac{e^{-Ts}}{s+\alpha}} = -Ts$$

اگر پارامتری که حساسیت تابع را نسبت به آن می خواهیم حساب کنیم در مخرج قرار گرفته باشد مقدار حساسیت منفی در می آید و اگر در صورت عبارت یا تابع باشد حساسیت مثبت می شود.

حساسیت تابع حلقه باز نسبت به تغییرات $G(s)$:

$R(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow C(s)$ $C(s) = R(s)\,G(s)$

$$S_G^C = \frac{dC}{dG} \times \frac{G}{C} = R(s)\cdot\frac{G}{R\cdot G} = 1$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

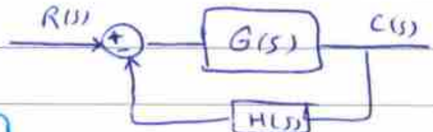
در سیستم حلقه باز حساسیت خروجی و تابع تبدیل حلقه بسته نسبت به $G(s)$ یک می باشد

یعنی تغییرات در $G(s)$ بدون هیچ تضعیفی موجب تغییرات خروجی یا تابع تبدیل حلقه بسته می شود

$$T = G$$

$$S_G^T = \frac{dT}{dG} \cdot \frac{G}{T} = 1$$

حساسیت سیستم حلقه بسته نسبت به تغییرات $G(s)$:



$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T}$$

$$= \frac{(1+GH-GH)}{(1+GH)^2} \cdot \frac{G}{\frac{G}{1+GH}} = \boxed{\frac{1}{1+GH}}$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

با مقایسه ی حساسیت سیستم حلقه باز و حلقه بسته نسبت به $G(s)$ در می یابیم که حساسیت سیستم حلقه بسته نسبت به G کمتر از سیستم حلقه باز است و این یک حسن سیستم حلقه بسته محسوب می شود

$$GH \gg 1 \longrightarrow S_G^T \simeq 0$$

حساسیت سیستم حلقه بسته نسبت به تغییرات $H(s)$:

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} = \frac{-G \cdot G}{(1+GH)^2} \cdot \frac{H}{\frac{G}{1+GH}} = \frac{-GH}{1+GH}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

حساسیت $T(s)$ سیستم حلقه بسته نسبت به پارامترهای α و β در توابع $G(s)$ و $H(s)$:

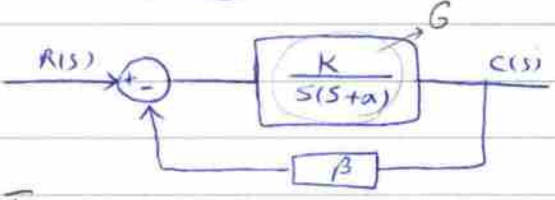
1) اگر α پارامتری در $G(s)$ باشد (مثلاً $G(s)=\frac{s+1}{s^2+\alpha}$)

$S_\alpha^T = S_G^T \cdot S_\alpha^G = \frac{1}{1+GH} \cdot S_\alpha^G$ طبق قاعده زنجیره‌ای

2) اگر β پارامتری در $H(s)$ باشد

$$S_\beta^T = S_H^T \times S_\beta^H = \frac{-GH}{1+GH} \times S_\beta^H$$

مثال) در سیستم کنترلی زیر S_K^T، S_α^T و S_β^T را برای مقادیر نامی $K=20$، $\alpha=4$، $\beta=1$ محاسبه کنید. اگر پارامتر K به اندازه 10% تغییر کند مقدار تغییرات تابع تبدیل حلقه بسته را بیابید.



ابتدا به صورت پارامتری محاسبه می‌کنیم و سپس اعداد را جایگذاری می‌کنیم.

$$S_K^T = S_G^T \cdot S_K^G = \frac{1}{1+GH} \times 1 = \frac{1}{1+GH} = \frac{1}{1+\frac{K\beta}{s(s+\alpha)}} = \frac{s(s+\alpha)}{s(s+\alpha)+K\beta}$$

چون رابطه مستقیم دارند.

$$= \frac{s(s+4)}{s(s+4)+20}$$

حالا عددگذاری می‌کنیم

$$S_{K\,DC}^T \xrightarrow{s=0} \frac{s(s+4)}{s(s+4)+20} = 0$$

$$S_K^T \xrightarrow{s=\infty} \frac{s(s+4)}{s(s+4)+20} = 1$$

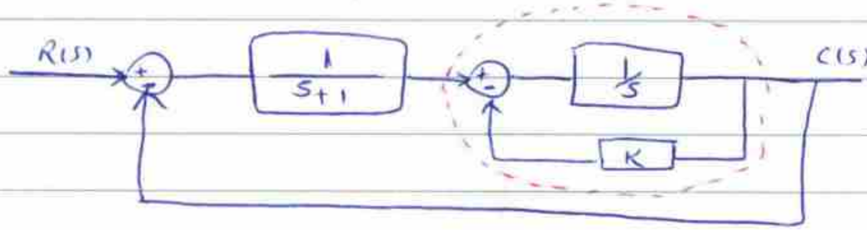
فرکانس بالا

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$S_{\beta}^{T} = \underbrace{S_{H}^{T} \times S_{\beta}^{H}}_{\text{رابطه مستقیم } H \text{ و } \beta} = \frac{-GH}{1+GH} \times 1 = \frac{-GH}{1+GH}$$

اگر چند فیدبک داشتیم دیگر از راه قاعده زنجیره ای (از این روش) نمی توان استفاده کرد و باید از مشتق استفاده کرد.
دقیقاً باید از فرمول حساسیت استفاده کنیم

مثال) در سیستم زیر حساسیت سیستم حلقه بسته نسبت به تغییرات K در فرکانس های پایین و بالا را بدست آورید.



$$T(s) = \frac{1}{(s+1)(K+s)+1}$$

حل کنید

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$M_1(s) = \frac{Y(s)}{T_1(s)} = \frac{K_2 G_2 \downarrow}{1+K_1K_2G_1G_2 \uparrow}$$

$K_2 \downarrow$ (چون در صورت وجود دارد کم شود)

$K_1K_2 \uparrow$ (چون مخرج باید زیاد شود)

$$M_2(s) = \frac{Y(s)}{T_2(s)} = \frac{1}{1+K_1K_2G_1G_2 \uparrow}$$

1) K_1 و K_2 بزرگ به طوری که K_1K_2 بزرگ باشد.

2) K_1 بزرگ و K_2 کوچک به طوری که K_1K_2 بزرگ باشد.

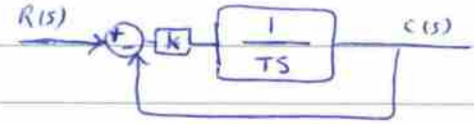
3) K_1 کوچک و K_2 بزرگ به طوری که K_1K_2 بزرگ باشد.

4) K_1 کوچک و K_2 کوچک به طوری که K_1K_2 کوچک باشد.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تحلیل سیستم های کنترل در حوزه زمان:

$$C(t) = \underbrace{C_{tr}(t)}_{\text{حالت گذرا}} + \underbrace{C_{ss}(t)}_{\text{حالت دائمی}}$$



$$T(s) = \frac{K}{TS+1}$$

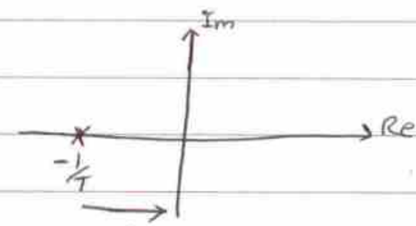
$$T(0) = \lim_{s \to 0} T(s) = K$$

قطب حلقه بسته $= -\frac{1}{T}$

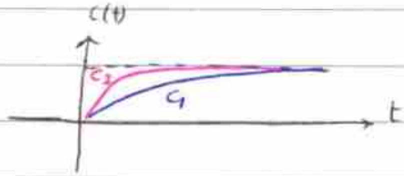
ثابت زمانی $= \frac{1}{\text{قطب}} = T$

ثابت زمانی همیشه پارامتری مثبت است

ثابت زمانی $\propto \frac{1}{\text{سرعت}}$



$T\uparrow \rightarrow$ سرعت $\downarrow$



$$\begin{cases} \text{سرعت } c_2 > \text{سرعت } c_1 \\ T_2 < T_1 \end{cases}$$

هر چقدر قطب به مبدا نزدیک می شود ثابت زمانی بیشتر شده و سرعت کم می شود.

رابطه سرعت پاسخ زمانی، ثابت زمانی و محل قرارگیری قطب سیستم مرتبه اول:

سرعت پاسخ سیستم مرتبه اول با ثابت زمانی رابطه عکس دارد یعنی هر چقدر ثابت زمانی (t) ازیاد شود، سرعت پاسخ کاهش می یابد و از نظر قرارگیری قطب های سیستم مرتبه اول می توان گفت

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

هر چه قطب به مبدأ نزدیک شود، T زیادتر می شود. یعنی سرعت کاهش می یابد.

لاپلاس سیستم های مهم:

$\delta(t) \xrightarrow{L} 1$

$u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}$

$r(t) = t\,u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s^2}$

$t^2 u(t) \xrightarrow{L} \frac{2}{s^3}$

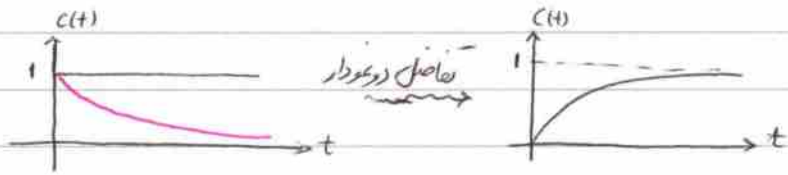
$t^n u(t) \xrightarrow{L} \frac{n!}{s^{n+1}}$

پاسخ پله سیستم مرتبه اول:

پاسخ پله: $C(S) = R(S) \cdot T(S) \longrightarrow C(S) = \frac{1}{S} \cdot \frac{K}{TS+1} = \frac{K}{S(TS+1)} = \frac{K}{S} + \frac{-KT}{TS+1}$

$\frac{-KT}{TS+1} = \frac{-K}{S+\frac{1}{T}}$

$\xrightarrow{L^{-1}} K u(t) - K e^{-t/T} u(t) = K(1 - e^{-t/T}) u(t)$

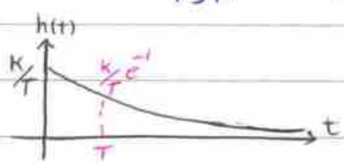


Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

- پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول:

پاسخ ضربه $H(s) = R(s).T(s) \longrightarrow H(s) = T(s) = \dfrac{K}{Ts+1} = \dfrac{K/T}{s+1/T}$

$\xrightarrow{L^{-1}} h(t) = \dfrac{K}{T} e^{-t/T}$



مقدار پاسخ نهایی $= 0$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

سیستم های مرتبه 2 :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = c\frac{dx}{dt} + dx$$

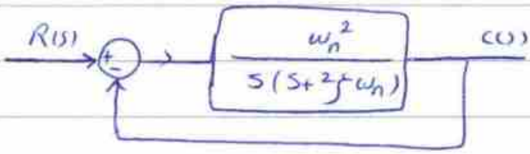
$$\xrightarrow{L} Y(s^2+as+b) = X(sc+d)$$

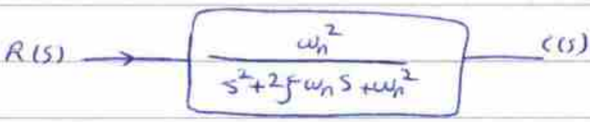
دو فرم رایج برای تحلیل سیستم های مرتبه 2

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{cs+d}{s^2+as+2}$$

$$T(s) = \frac{c}{s^2+as+2} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

می تواند هر عددی باشد





فرکانس طبیعی نامیرا $= \omega_n$

استهلاک ، damping ، نسبت میرایی $= \zeta$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ فرکانس میرا

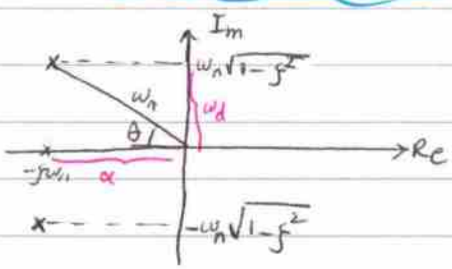
$\alpha = \zeta\omega_n$: ضریب میرایی

معادله مشخصه و قطب های سیستم مرتبه 2 استاندارد :

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \longrightarrow s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

$$\longrightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} = -\alpha \pm j\omega_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

مز مختلط

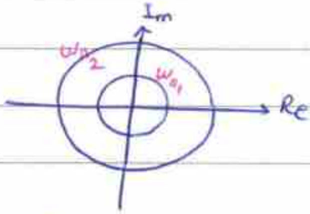


$\cos\theta = \zeta$ یا $\theta = \cos^{-1}\zeta$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

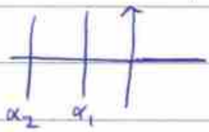
با توجه به تعریف پارامترهای ζ ، ω_n ، α و ω_d می‌توان مکان هندسی ζ ثابت، ω_n ثابت، α ثابت و ω_d ثابت را در صفحه‌ی S بدست آورد.

مکان هندسی ω_n ثابت



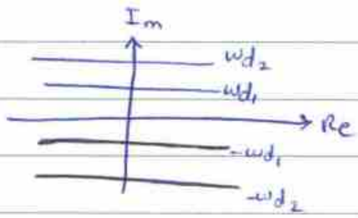
$\omega_{n_2} > \omega_{n_1}$

مکان هندسی α ثابت

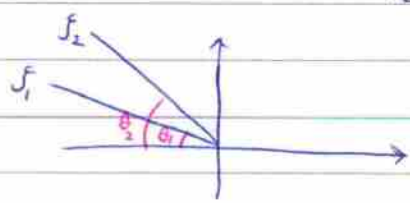


$\alpha_2 > \alpha_1$ یا $\zeta_2\omega_{n_2} > \zeta_1\omega_{n_1}$

مکان هندسی ω_d ثابت



مکان هندسی ζ ثابت



$\zeta_2 < \zeta_1$

$\theta_2 > \theta_1 \rightsquigarrow \cos\theta_2 < \cos\theta_1$

یادآوری : (معادلات دیفرانسیل مرتبه 2)

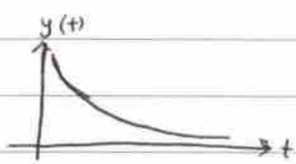
حالات مختلف پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه 2 :

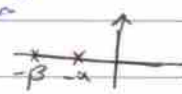
۱) میرایی شدید

$$\Delta(s) = as^2 + bs + c = 0 \rightsquigarrow s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \begin{cases} s_1 = \alpha \\ s_2 = \beta \end{cases}$$

حقیقی غیرمکرر

$$y(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}$$

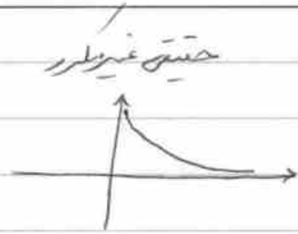




Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

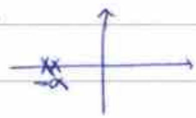
مثال) $\Delta(s) = s^2+4s+3 = 0 \begin{cases} s_1=-1 \\ s_2=-3 \end{cases}$ ← حقیقی غیرمکرر

$y(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t}$

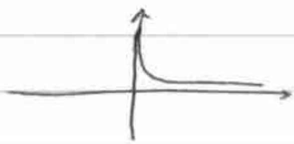


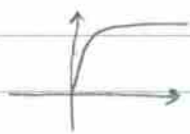
2) میرایی بحرانی

$\Delta(s) = as^2+bs+c = 0 \begin{cases} s_1=-\alpha \\ s_2=-\alpha \end{cases}$ ریشه مکرر حقیقی



$y(t) = Ae^{-\alpha t} + Bte^{-\alpha t}$

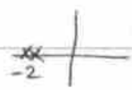




سرعت میرایی شدید < سرعت میرایی بحرانی

که به پایداری می خواهد میل می کند. حال می تواند صعودی یا نزولی باشد. بستگی به ریشه ها دارد.

مثال) $\Delta(s) = s^2+4s+4 = 0 \begin{cases} s_1=-2 \\ s_2=-2 \end{cases}$ حقیقی مکرر

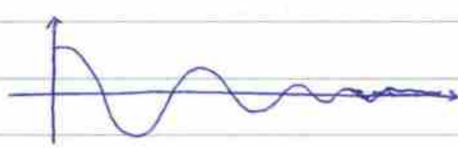


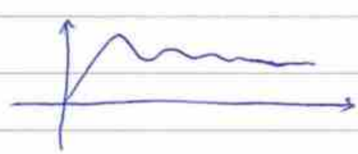
$y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$

3) میرایی ضعیف (نوسانی میرا):

$\Delta(s) = as^2+bs+c = 0 \begin{cases} s_1=-\alpha+\beta j \\ s_2=-\alpha-\beta j \end{cases}$ حقیقی و موهومی

$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$





Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

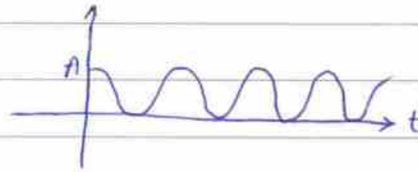
(مثال $\Delta(S) = S^2 + 4S + 8 = 0$ → $S_1 = -2+2j$, $S_2 = -2-2j$

$$y(t) = e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$$

4) نوسانی دائم (نامیرا) :

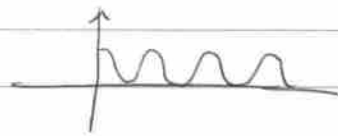
$\Delta(s) = as^2 + bs + c = 0$ → $S_1 = \beta j$, $S_2 = -\beta j$ ریشه موهومی خالص

$$y(t) = A\cos\beta t + B\sin\beta t$$

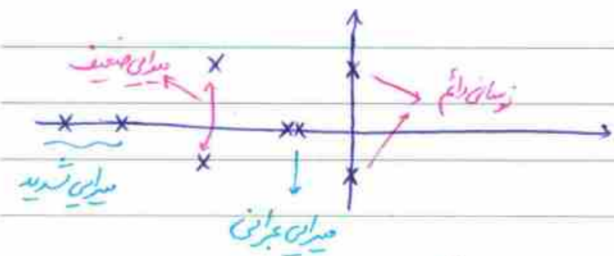


(مثال $\Delta(S) = S^2 + 9 = 0$ → $S_1 = +3j$, $S_2 = -3j$

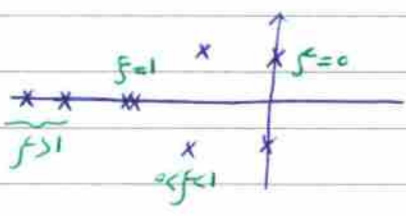
$$y(t) = A\cos 3t + B\sin 3t$$



خلاصه این 4 میرایی بر روی نمودار :



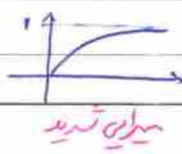
حالات مختلف پاسخ پله سیستم مرتبه 2 استاندارد با توجه به محل قرارگیری قطب ها :



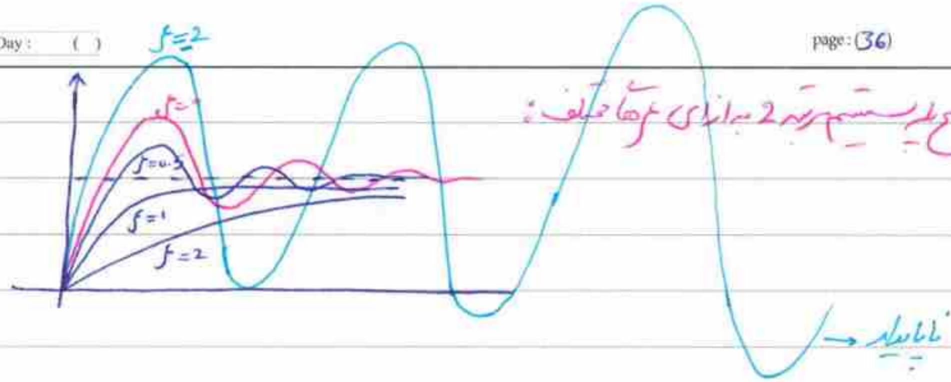
$$\Delta(s) = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

1) $\zeta>1$ (میرایی شدید یا فرامیرا)

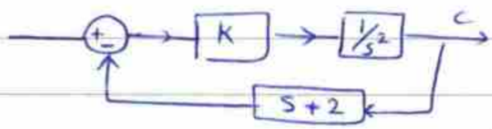
$$\begin{cases} S_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \\ S_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \end{cases}$$



پاسخ یک سیستم مرتبه 2 به ازای ζ های مختلف:



مثال) در سیستم زیر مقدار K چقدر باشد تا پاسخ سیستم به ورودی پله واحد، بدون نوسان و بیشترین سرعت به مقدار نهایی خود میل کند. میرایی بحرانی است.



بدون نوسان ← { میرایی شدید ، میرایی بحرانی }

میرایی بحرانی ← بیشترین سرعت

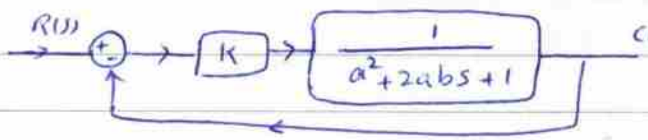
$\boxed{\zeta=1}$

$$T(s)=\frac{K}{s^2+K(s+2)}=\frac{K}{s^2+Ks+2K}$$

$$\omega_n^2=2K \rightsquigarrow \omega_n=\sqrt{2K}$$

$$2\zeta\omega_n=K \rightsquigarrow 2\underset{1}{\zeta}\times\sqrt{2K}=K \rightarrow \boxed{K=8}$$

مثال) در سیستم زیر a و b را به گونه‌ای تعیین کنید که خروجی پایدار و پاسخ پله غیرنوسانی باشد.



$$T(s)=\frac{K}{as^2+2abs+K+1} \qquad \begin{cases} a>0 \\ 2ab>0 \\ K+1>0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a,b>0 \\ K>-1 \end{cases}$$

$$\Delta(s)=s^2+2bs+\frac{K+1}{a} \rightsquigarrow \omega_n^2=\frac{K+1}{a} \rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{1+K}{a}} \ *$$

$$\boxed{\zeta\geqslant 1}$$

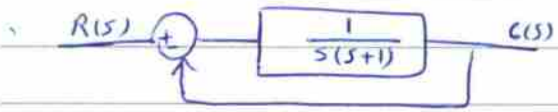
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$2\zeta\omega_n = 2b \rightsquigarrow \zeta = \frac{b}{\omega_n} \xrightarrow{*} \zeta = b\sqrt{\frac{a}{1+k}} \rightarrow b\sqrt{\frac{a}{1+k}} \geq 0$

$\zeta \geq 1$ غیر نوسانی

بیشترین سرعت $\zeta = 1 \rightarrow b\sqrt{\frac{a}{1+k}} = 1 \rightsquigarrow \frac{a}{1+k} = \frac{1}{b^2} \rightsquigarrow \boxed{ab^2 - k - 1 = 0}$

مثال) پاسخ پله سیستم زیر را بدست آورید و رسم کنید.



$C(s) = R(s)\cdot T(s)$

$C(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} + \frac{As+B}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1}$

$\times s \rightarrow \lim_{s\to\infty} \rightarrow 0 = 1 + A \rightsquigarrow \boxed{A = -1}$

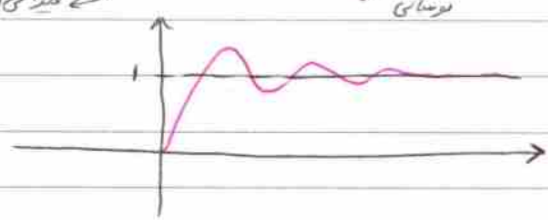
$s = 1 \rightarrow \frac{1}{3} = 1 + \frac{-1+B}{3} \rightarrow \boxed{B = -1}$

$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$\xrightarrow{L^{-1}} u(t) - \left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$

$= \left(1 - \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}}_{\text{میرا می‌کند تابع را}}\underbrace{\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t}{2}\right)}_{\text{نوسانی}}\right)u(t)$

$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$, $e^{-at}\cos bt$



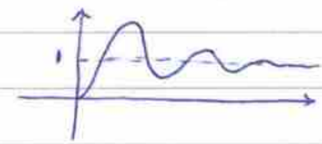
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

ζ=1 (2

$$\begin{cases} S_1 = -\omega_n \\ S_2 = -\omega_n \end{cases} \quad \text{مکرر}$$

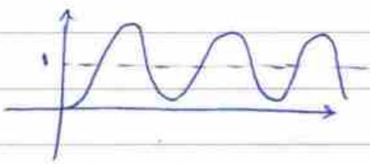
(3 $0<\zeta<1$ (میرایی ضعیف) یا زیرمیرا (فرومیرا)

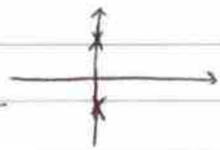
$$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



(4 $\zeta=0$ (نوسانی دائم)

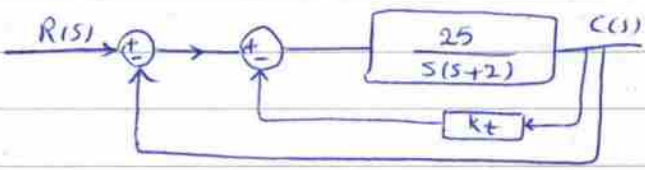
$$S_{1,2} = \pm j\omega_n$$



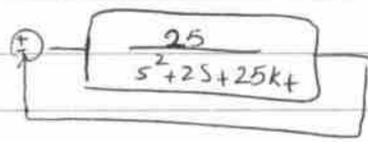


← پایداری مرزی است چون قطب هاش روی محور jω قرار می‌گیرند.

مثال) در سیستم زیر K_t را بگونه‌ای انتخاب کنید که نسبت میرایی 0.5 شود.



$\zeta = 0.5$

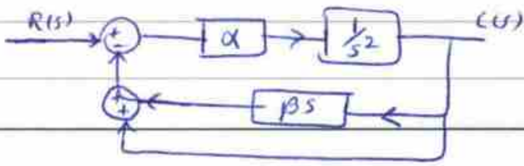


$$T(s) = \frac{25}{s^2 + \underbrace{2s}_{2\zeta\omega_n} + \underbrace{25K_t + 25}_{\omega_n^2}}$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \rightsquigarrow \zeta\omega_n = 1 \rightsquigarrow \omega_n = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$\omega_n^2 = 25K_t + 25 \rightsquigarrow 4 = 25K_t + 25 \rightsquigarrow K_t = \frac{-21}{25}$$

مثال) در سیستم کنترل زیر مقادیر β و α چقدر باشد تا نسبت میرایی 0.6 و فرکانس نوسانات نامیرا 2 باشد.



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$\zeta = 0.6 \ , \ \omega_n = 2$

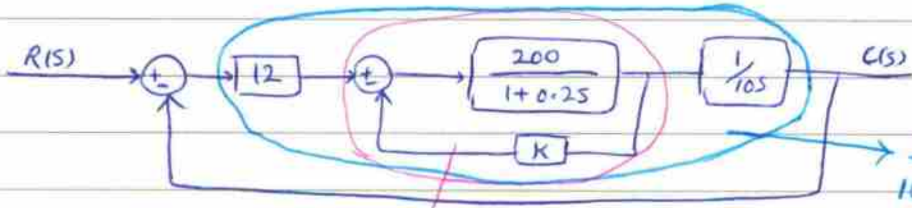
$$T(s) = \frac{\frac{\alpha}{s^2}(1)}{1-\left(-\frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha\beta}{s}\right)} = \frac{\alpha}{\underbrace{s^2 + \alpha\beta s + \alpha}_{\Delta(s)}}$$

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + \alpha\beta s + \alpha \Rightarrow s^2 + 2.4s + 4 = s^2 + \alpha\beta s + \alpha$$

$\alpha = 4$

$\alpha\beta = 2.4 \rightsquigarrow \beta = \frac{2.4}{4} = 0.6$

مثال) در سیستم زیر K را طوری تعیین کنید که فرکانس طبیعی میرا $30 \ \frac{rad}{sec}$ باشد.



$$\frac{12 \times 200}{10s(0.2s + 200k + 1)}$$

$$\frac{200}{0.2s + 200k + 1}$$

$$\Delta(s) = s^2 + \underbrace{5(200k+1)}_{2\zeta\omega_n} s + \underbrace{1200}_{\omega_n^2} = 0$$

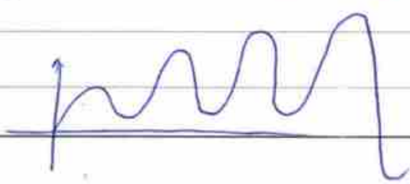
$\omega_n^2 = 1200 \rightsquigarrow \omega_n = 20\sqrt{3}$

$\omega_d = 30$

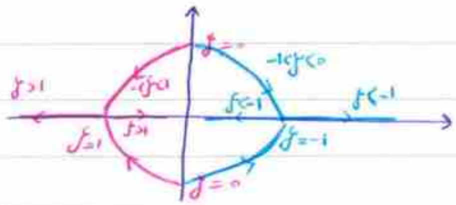
$30 = 20\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \rightsquigarrow \frac{3}{2\sqrt{3}} = \sqrt{1-\zeta^2} \rightsquigarrow \zeta = \frac{1}{2} = 0.5$

5) $-1 < \zeta < 0$ (میرای منفی نوسانی)

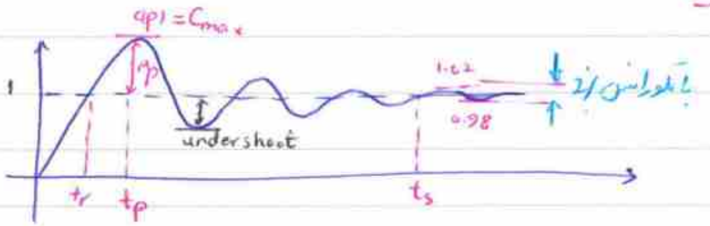
$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com



پاسخ سیستم مرتبه 2 زیرمیرا:



$$Mp\% = \frac{C(p)-C(\infty)}{C(\infty)}$$

% بالازدگی overshoot

$$\text{پله}\ C(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{ورودی}} \times \overbrace{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}^{T(s)}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \cos^{-1}\xi)$$

محاسبه t_r با استفاده از معادله‌ی زمانی پاسخ پله:

طبق تعریف زمان صعود (t_r) یعنی اولین زمانی که مقدار پاسخ پله به مقدار نهایی خودش می‌رسد. پس برای بدست آوردن t_r کافی است معادله‌ی پاسخ سیستم مرتبه اول را برابر با مقدار نهایی خودش (یک) قرار داده و کوچکترین t را انتخاب کرد.

مثلاً $c(t) = 1 - e^{-2t}\cos(3t)$

$$1 - e^{-2t}\cos 3t = 1 \rightsquigarrow e^{-2t}\cos 3t = 0 \rightsquigarrow \cos 3t = 0 \Rightarrow 3\pi = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{k=0} \boxed{t = \frac{1}{6}}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

t_r: اولین زمانی که سیستم به مقدار نهایی خود می‌رسد.

t_p: زمان اولین فراجهش

M_p: درصد بالازدگی نسبت به مقدار نهایی

t_s: زمان نشست (زمانی که پاسخ سیستم با مقدار نهایی خود کمتر از ۲٪ اختلاف داشته باشد.

محاسبه‌ی t_p و C_{max} با استفاده از پاسخ زمانی سیستم:

از آنجایی که پاسخ پله‌ی این سیستم ما خاصیت overshoot و under shoot دارد، یعنی بیش از یک اکسترمم داریم. برای محاسبه‌ی اکسترمم‌ها با مشتق گرفتن از پاسخ و برابر صفر قرار دادن آن می‌توان t_p را حساب کرد و در پاسخ سیستم به ازای این t_p می‌توان C_{max} را بدست آورد.

$$C(t) \rightsquigarrow \frac{dc(t)}{dt} = 0 \Longrightarrow t = t_p \qquad C(t_p) = C_{max}$$

روابط محاسبه‌ی پارامترهای پاسخ پله سیستم مرتبه 2 استاندارد با استفاده از ζ و ω_n:

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \cos^{-1}\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \theta = \cos^{-1}\zeta$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad M_p = e^{\frac{-\zeta\pi n}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{\frac{-\alpha\pi n}{\omega_d}} = \begin{cases} \text{فراجهش} \rightarrow \text{فرد} = n \\ \text{فروجهش} \rightarrow \text{زوج} = n \end{cases}$$

تلورانس 2٪ $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ تلورانس ۵٪ $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$

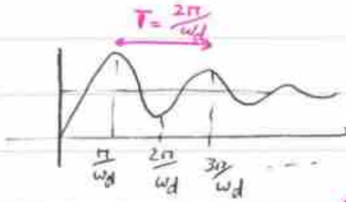
↓

یعنی ۵٪ اختلاف

همواره $t_r < t_p$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$t_p = \frac{n\pi}{\omega_d} \longrightarrow \begin{cases} n=1,3,5,\dots & \text{Overshoot} \\ n=2,4,6,\dots & \text{under shoot} \end{cases}$$



نکته: اگر $M_p=0\%$ باشد معادل پاسخ میرای شدید یا میرایی بحرانی است و $M_p=100\%$ معادل نوسانی دائم یا نامیرا است.

رابطه بین ζ و M_p: درصدی که مقدار M_p را داشته باشیم:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \rightsquigarrow \ln M_p = \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \rightsquigarrow \zeta = \frac{-\ln M_p}{\sqrt{\ln M_p^2+\pi^2}}$$

M_p ← درصد هست ⇐ $0<M_p<1$ ⇐ $\ln M_p<0 \xrightarrow{\zeta>0} -\ln M_p>0$

رابطه ζ و ω_n با t_r:

$$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d} = \frac{\pi-\cos^{-1}\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \begin{cases} \omega_n\uparrow \Rightarrow t_r\downarrow \\ \zeta\uparrow \Rightarrow t_r\uparrow \end{cases}$$

هرچه ζ کم شود، سرعت زیاد می‌شود.

رابطه ζ و ω_n با t_p:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad \begin{cases} \omega_n\uparrow \longrightarrow t_p\downarrow \\ \zeta\uparrow \longrightarrow t_p\uparrow \end{cases}$$

رابطه ζ و ω_n با M_p:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad \begin{cases} \omega_n\uparrow \text{ یا } \downarrow \longrightarrow M_p=cte \\ \zeta\uparrow \longrightarrow M_p\downarrow \end{cases}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

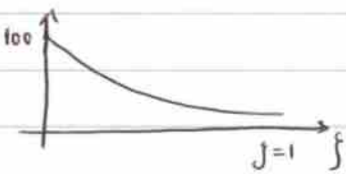
* توضیح: M_p (0.5) و t_p رابطه‌ی معکوس با یکدیگر دارند. (نمی‌توانیم هم خدا را داشته باشیم هم خرما را!!!.

یعنی نمی‌توان هم انتظار داشت که سرعت بالا رود و هم M_p کاهش یابد. اگر بخواهیم M_p کم شود باید ξ افزایش یابد یعنی t_p هم زیاد شود که این بدان معنی است که سرعت کاهش یافته)

رابطه ξ و ω_n با t_s :

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

$$\begin{cases} \omega_n \uparrow \longrightarrow t_s \downarrow \\ \xi \uparrow \longrightarrow t_s \downarrow \end{cases}$$



$$M_p = P.O = 0.5 = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

نکته: پاسخ گذرا را می‌توان براساس دو عامل زیر توصیف کرد:

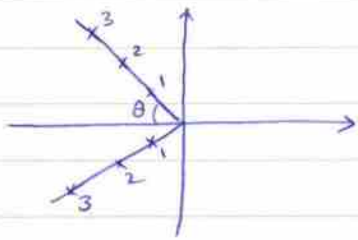
الف) سرعت پاسخ که با زمان صعود (t_r) و زمان اوج (t_p) توصیف کرد.

ب) نزدیکی پاسخ به پاسخ مطلوب با فراجهش و زمان نشست (t_s) مشخص می‌شود.

هر دو عامل بالا با یکدیگر در تضاد هستند، یعنی نمی‌توان هم سرعت پاسخ خوب و بالازدگی کم داشته باشیم.

تمرین) با تغییر مکان قطب‌های حلقه بسته سیستم مرتبه 2 استاندارد به صورت زیر در مورد سرعت و فراجهش بحث کنید.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com



$1 \to 2 \to 3 \begin{cases} \theta = cte \to \zeta = cte \\ \omega_n \uparrow \end{cases}$

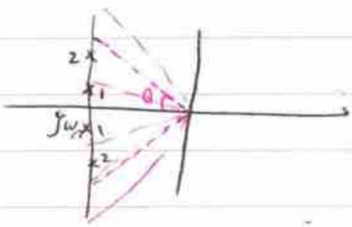
$t_r \downarrow$ ← سرعت زیاد

$M_p = cte$

$t_p \downarrow$

$t_s \downarrow$

حال اگر نمودار به صورت زیر باشد:



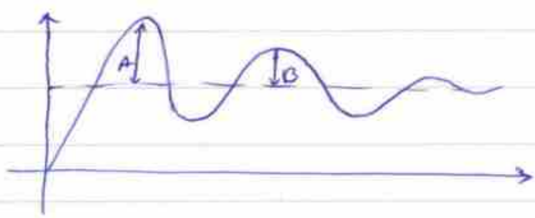
$\omega_n \uparrow \to \theta \uparrow \to \zeta \downarrow$

θ افزایش می‌یابد و ζ و θ رابطه‌ی عکس با هم دارند پس شعاع یعنی ω_nها زیاد می‌شود

$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta \downarrow}{\sqrt{1-\zeta^2}\uparrow}} \longrightarrow M_p \uparrow \longrightarrow t_r \downarrow$

$2^2 > 2^1 \longrightarrow 2^{-2} < 2^{-1}$

تست) پاسخ پله‌ی واحد یک سیستم مرتبه 2 به شکل زیر است. با تعریف $\delta = \ln\frac{A}{B}$ نسبت میرایی از کدام رابطه‌ی زیر بدست می‌آید؟



1) $\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+\pi^2}}$ 3) $\frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2+\pi^2}}$

2) $\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}$ ✓ 4) $\frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}$

$A = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

$B = e^{\frac{-3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

$\to \frac{A}{B} = \frac{e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{e^{\frac{-3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}} = e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \xrightarrow{\text{ln می‌گیریم}} \delta = \frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$\delta^2 = \frac{4\xi^2\pi^2}{1-\xi^2} \Rightarrow \delta^2 = 4\xi^2\pi^2 + \delta^2\xi^2 \to \xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}$$

تست) برق - 88 در یک سیستم مرتبه دوم با تابع تبدیل حلقه بسته $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ می باشد وقتی میرایی سیستم از نوع بحرانی است. حساسیت پاسخ ضربه سیستم نسبت به ω_n پس از گذشت 1s از اعمال ضربه چقدر است؟

ابتدا مقدار حساسیت را به صورت پارامتری کاملاً محاسبه کرده و بعد عددگذاری می کنیم.

$$S_t^F = \frac{dF}{dt} \times \frac{t}{F(t)}$$

میرایی بحرانی $\longrightarrow \xi = 1$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

لاپلاس معکوس تابع تبدیل همان پاسخ ضربه سیستم است.

$$\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \xrightarrow{L^{-1}} \omega_n^2 e^{-\omega_n t} t u(t) \qquad e^{-at} r(t) \to \frac{1}{(s+a)^2}$$

تمرین) پاسخ ضربه سیستم با تابع تبدیل حلقه بسته بالا برای $\xi = 0$ و $0<\xi<1$ و $1<\xi$ را محاسبه کنید.

$$S_{\omega_n}^F = \frac{dF}{d\omega_n} \times \frac{\omega_n}{F(\omega_n, t)} = \left(2\omega_n e^{-\omega_n t} t u(t) - t\omega_n^2 e^{-\omega_n t} t u(t)\right) \times \frac{\omega_n}{\omega_n^2 e^{-\omega_n t} t u(t)}$$

$$= 2 - t\omega_n \Big|_{t=1} = 2 - \omega_n$$

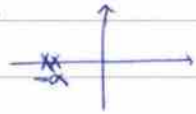
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) $\Delta(s) = s^2+4s+3 = 0 \begin{cases} s_1=-1 \\ s_2=-3 \end{cases}$ ← حقیقی غیرتکرار

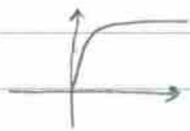
$y(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t}$

2) میرایی بحرانی

$\Delta(s) = as^2+bs+c = 0 \begin{cases} s_1=-\alpha \\ s_2=-\alpha \end{cases}$ ریشه تکرار حقیقی



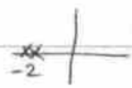
$y(t) = Ae^{-\alpha t} + Bte^{-\alpha t}$



سرعت میرایی شدید < سرعت میرایی بحرانی

که به یک مقداری می‌خواهد میل می‌کند. حال می‌تواند صعودی یا نزولی باشد. بستگی به ریشه‌ها دارد.

مثال) $\Delta(s) = s^2+4s+4 = 0 \begin{cases} s_1=-2 \\ s_2=-2 \end{cases}$ ← حقیقی تکرار



$y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$

3) میرایی ضعیف (نوسانی میرا) :

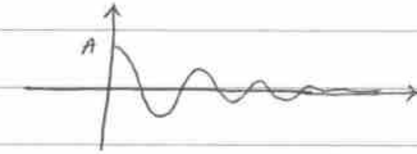
$\Delta(s) = as^2+bs+c = 0 \begin{cases} s_1 = -\alpha+\beta j \\ s_2 = -\alpha-\beta j \end{cases}$ حقیقی و موهومی

$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) $\Delta(S) = S^2 + 4S + 8 = 0 \quad \begin{cases} S_1 = -2+2j \\ S_2 = -2-2j \end{cases}$

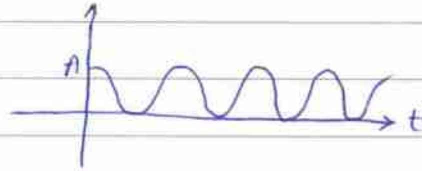
$y(t) = e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$



4) نوسانی دائم (نامیرا) :

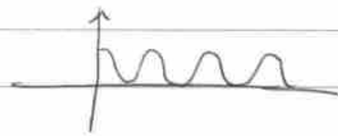
$\Delta(s) = as^2 + bs + c = 0 \quad \begin{cases} s_1 = \beta j \\ s_2 = -\beta j \end{cases}$ ریشه موهومی خالص

$y(t) = A\cos\beta t + B\sin\beta t$

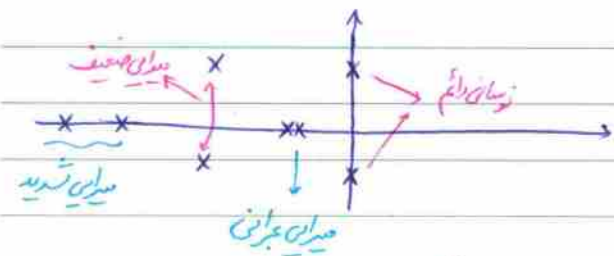


مثال) $\Delta(S) = S^2 + 9 = 0 \quad \begin{cases} S_1 = +3j \\ S_2 = -3j \end{cases}$

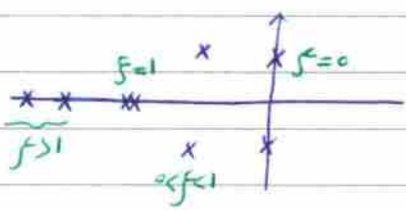
$y(t) = A\cos 3t + B\sin 3t$



خلاصه این 4 میرایی بر روی نمودار :



حالات مختلف پاسخ سیستم مرتبه 2 استاندارد با توجه به محل قرارگیری قطب ها :



$\Delta(s) = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

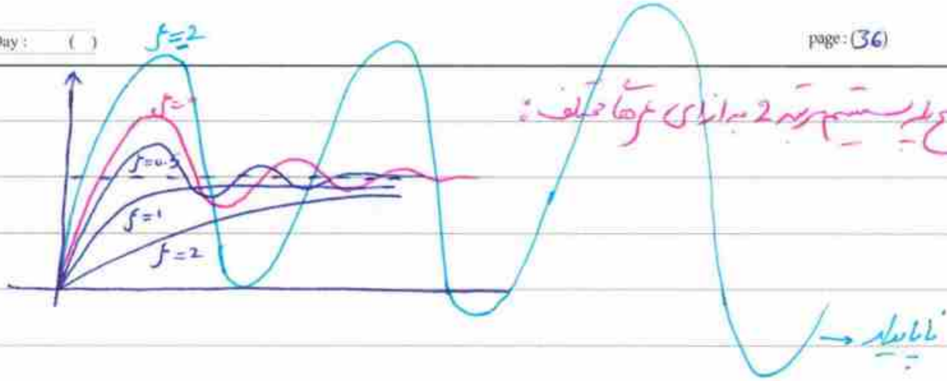
1) $\zeta>1$ (میرایی شدید یا فرامیرا)

$\begin{cases} S_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \\ S_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \end{cases}$

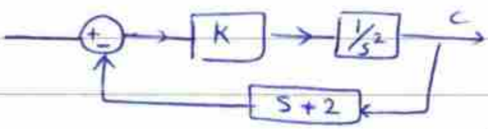
میرایی شدید

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

پاسخ یک سیستم مرتبه 2 به ازای ζهای مختلف:



مثال) در سیستم زیر مقدار K چقدر باشد تا پاسخ سیستم به ورودی پله واحد، بدون نوسان و بیشترین سرعت به مقدار نهایی خود میل کند. میرایی بحرانی است.



بدون نوسان ← { میرایی شدید ، میرایی بحرانی }   میرایی بحرانی ← بیشترین سرعت

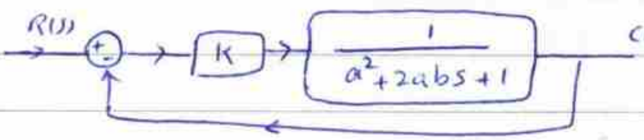
$\boxed{\zeta=1}$

$$T(s)=\frac{K}{s^2+K(s+2)}=\frac{K}{s^2+Ks+2K}$$

$$\omega_n^2=2K \rightsquigarrow \omega_n=\sqrt{2K}$$

$$2\zeta\omega_n=K \rightsquigarrow 2\underbrace{\zeta}_{1}\times\sqrt{2K}=K \longrightarrow \boxed{K=8}$$

مثال) در سیستم زیر a و b را به گونه‌ای تعیین کنید که خروجی پایدار و پاسخ پله غیرنوسانی باشد.



$$T(s)=\frac{K}{as^2+2abs+K+1} \qquad \begin{cases} a>0 \\ 2ab>0 \\ K+1>0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a,b>0 \\ K>-1 \end{cases}$$

$$\Delta(s)=s^2+2bs+\frac{K+1}{a} \rightsquigarrow \omega_n^2=\frac{K+1}{a} \rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{1+K}{a}} \;\star$$

$\boxed{\zeta\geq 1}$

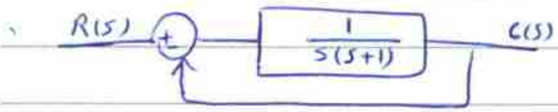
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$2\xi\omega_n = 2b \rightsquigarrow \xi = \frac{b}{\omega_n} \xrightarrow{*} \xi = b\sqrt{\frac{a}{1+k}} \rightarrow b\sqrt{\frac{a}{1+k}} \geq 0$

غیرنوسانی $\xi \geq 1$

بیشترین سرعت $\xi = 1 \rightarrow b\sqrt{\frac{a}{1+k}} = 1 \rightsquigarrow \frac{a}{1+k} = \frac{1}{b^2} \rightsquigarrow \boxed{ab^2 - k - 1 = 0}$

مثال) پاسخ پله سیستم زیر را بدست آورید و رسم کنید.



$C(S) = R(S) \cdot T(S)$

$$C(S) = \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{S^2+S+1} = \frac{1}{S} + \frac{AS+B}{S^2+S+1} = \frac{1}{S} - \frac{S+1}{S^2+S+1}$$

$\times S \rightarrow \lim_{S\to\infty} \rightarrow 0 = 1 + A \rightsquigarrow \boxed{A = -1}$

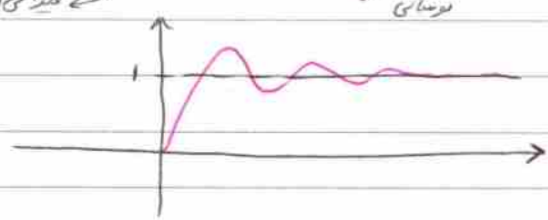
$S = 1 \rightarrow \frac{1}{3} = 1 + \frac{-1+B}{3} \rightarrow \boxed{B = -1}$

$$C(S) = \frac{1}{S} - \frac{S+1}{(S+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{S} - \frac{S+\frac{1}{2}}{(S+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{(S+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} u(t) - \left(e^{-\frac{1}{2}t} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + e^{-\frac{1}{2}t} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$$

$$= \left(1 - \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}}_{\text{میرا می‌کند تابع را}} \underbrace{\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}_{\text{نوسانی}}\right) u(t)$$

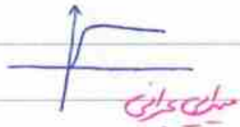
$\frac{S+a}{(S+a)^2+b^2} , e^{-at}\cos bt$



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

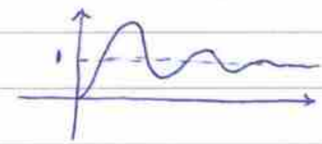
ζ=1 (2

$$\begin{cases} S_1 = -\omega_n \\ S_2 = -\omega_n \end{cases}$$ تکرار



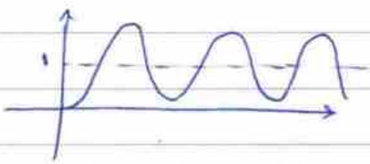
(3 $0<\zeta<1$ (میرای ضعیف) یا زیرمیرا (فرومیرا)

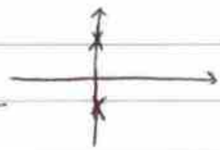
$$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



(4 $\zeta=0$ (نوسانی دائم)

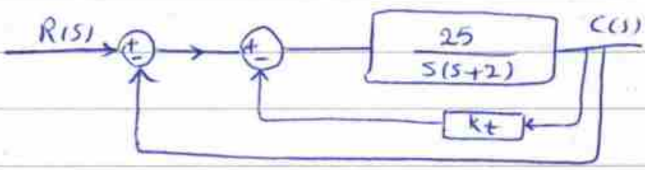
$$S_{1,2} = \pm j\omega_n$$



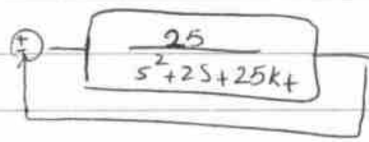


— پایداری مرزی است چون قطب هاش روی محورها قرار می گیرند.

مثال) در سیستم زیر K_t را بگونه ای انتخاب کنید که نسبت میرایی 0.5 شود.



$\zeta = 0.5$

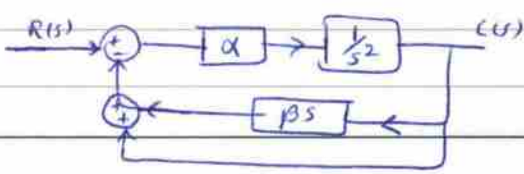


$$T(s) = \frac{25}{s^2 + \underbrace{2s}_{2\zeta\omega_n} + \underbrace{25k_t + 25}_{\omega_n^2}}$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \rightsquigarrow \zeta\omega_n = 1 \rightsquigarrow \omega_n = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$\omega_n^2 = 25k_t + 25 \rightsquigarrow 4 = 25k_t + 25 \rightsquigarrow k_t = \frac{-21}{25}$$

مثال) در سیستم کنترل زیر مقادیر β و α چقدر باشد تا نسبت میرایی 0.6 و فرکانس نوسانات نامیرا 2 باشد.



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$\zeta = 0.6 \; , \; \omega_n = 2$

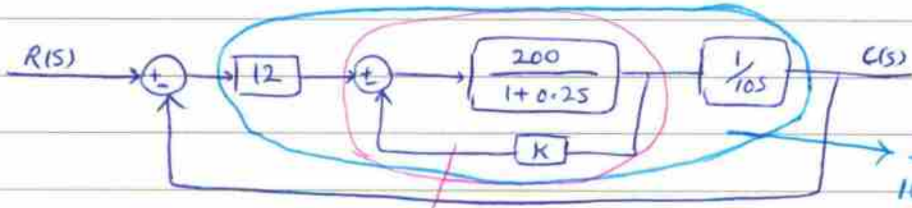
$$T(s) = \frac{\frac{\alpha}{s^2}(1)}{1-\left(-\frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha\beta}{s}\right)} = \frac{\alpha}{\underbrace{s^2+\alpha\beta s+\alpha}_{\Delta(s)}}$$

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2+\alpha\beta s+\alpha \Rightarrow s^2+2.4s+4 = s^2+\alpha\beta s+\alpha$$

$\alpha = 4$

$\alpha\beta = 2.4 \rightsquigarrow \beta = \frac{2.4}{4} = 0.6$

مثال) در سیستم زیر K را طوری تعیین کنید که فرکانس طبیعی میرا 30 $\frac{rad}{sec}$ باشد.



$$\frac{12\times 200}{10s(0.2s+200k+1)}$$

$$\frac{200}{0.2s+200k+1}$$

$$\Delta(s) = s^2 + \underbrace{5(200K+1)}_{2\zeta\omega_n} s + \underbrace{1200}_{\omega_n^2} = 0$$

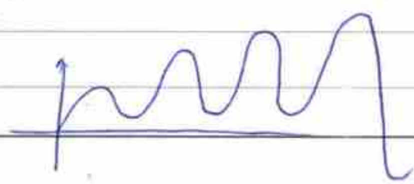
$\omega_n^2 = 1200 \rightsquigarrow \omega_n = 20\sqrt{3}$

$\omega_d = 30$

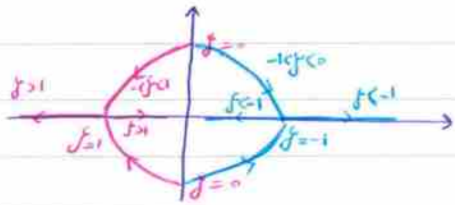
$30 = 20\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \rightsquigarrow \frac{3}{2\sqrt{3}} = \sqrt{1-\zeta^2} \rightsquigarrow \zeta = \frac{1}{2} = 0.5$

5) $0 < \zeta < 1$ (میرای متغیر نوسانی)

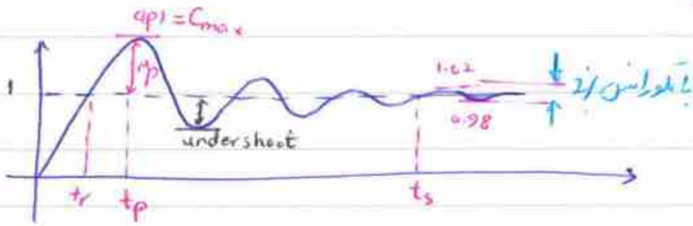
$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com



پاسخ سیستم مرتبه 2 زیر میرا:



$$Mp\% = \frac{C(p) - C(\infty)}{C(\infty)}$$

% بالازدگی overshoot

$$\text{پله } C(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{ورودی}} \times \overbrace{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}^{T(s)}$$

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \cos^{-1}\zeta)$$

محاسبه t_r با استفاده از معادله‌ی زمانی پاسخ پله:

طبق تعریف زمان صعود (t_r) یعنی اولین زمانی که مقدار پاسخ پله به مقدار نهایی خود می‌رسد. پس برای بدست آوردن t_r کافی است معادله‌ی پاسخ سیستم مرتبه اول را برابر با مقدار نهایی خودش (یعنی 1) قرار داده و کوچکترین t را انتخاب کرد.

مثلاً $c(t) = 1 - e^{-2t}\cos(3t)$

$$1 - e^{-2t}\cos 3t = 1 \rightsquigarrow e^{-2t}\cos 3t = 0 \rightsquigarrow \cos 3t = 0 \Rightarrow 3\pi = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{k=0} \boxed{t = \frac{1}{6}}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

t_r: اولین زمانی که سیستم به مقدار نهایی خود می‌رسد.

t_p: زمان اولین فراجهش

M_p: درصد بالازدگی نسبت به مقدار نهایی

t_s: زمان نشست (زمانی که پاسخ سیستم با مقدار نهایی خود کمتر از 2% اختلاف داشته باشد.

محاسبه‌ی t_p و C_{max} با استفاده از پاسخ زمانی سیستم:

از آنجایی که پاسخ پله‌ی این سیستم بی‌نهایت overshoot و under shoot دارد، یعنی بیش از یک اکسترمم داریم. برای محاسبه‌ی اکسترمم‌ها با مشتق گرفتن از پاسخ و برابر صفر قرار دادن آن می‌توان t_p را حساب کرد و در پاسخ سیستم به ازای این t_p می‌توان C_{max} را بدست آورد.

$$C(t) \rightsquigarrow \frac{dc(t)}{dt}=0 \Longrightarrow t=t_p \qquad C(t_p)=C_{max}$$

روابط محاسبه‌ی پارامترهای پاسخ پله سیستم مرتبه 2 (استاندارد) با استفاده از ξ و ω_n:

$$t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}=\frac{\pi-\cos^{-1}\xi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \theta=\cos^{-1}\xi$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d} \qquad M_p=e^{\frac{-\xi\pi n}{\sqrt{1-\xi^2}}}=e^{\frac{-\alpha\pi n}{\omega_d}}=\begin{cases}\text{فراجهش} \rightarrow \text{فرد} = n\\ \text{فروجهش} \rightarrow \text{زوج} = n\end{cases}$$

تلورانس 2%: $t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}$ تلورانس 4%: $t_s=\frac{3}{\xi\omega_n}$

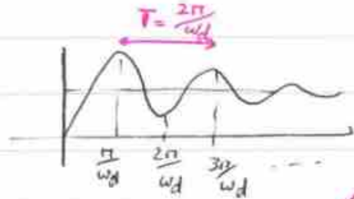
↓

یعنی 4% اختلاف

همواره $t_r < t_p$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$t_p = \frac{n\pi}{\omega_d} \longrightarrow \begin{cases} n=1,3,5,\dots & \text{Overshoot} \\ n=2,4,6,\dots & \text{under shoot} \end{cases}$$



نکته: اگر $Mp=0$ باشد معادل با سیستم میرای شدید یا میرایی بحرانی است و $Mp=100\%$ معادل نوسانی دائم یا ناپایدار است.

رابطه بین ζ و Mp: درصدی که مقدار Mp را داشته باشیم:

$$Mp = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \rightsquigarrow \ln Mp = \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \rightsquigarrow \zeta = \frac{-\ln Mp}{\sqrt{\ln Mp^2+\pi^2}}$$

Mp ← درصد هست ⇐ $0<Mp<1$ ⇐ $\ln Mp<0 \xleftarrow{\zeta>0} -\ln Mp>0$

رابطه ζ و ω_n با t_r:

$$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d} = \frac{\pi-\cos^{-1}\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \begin{cases} \omega_n\uparrow \Rightarrow t_r\downarrow \\ \zeta\uparrow \Rightarrow t_r\uparrow \end{cases}$$

هرچه ζ کم شود، سرعت زیاد می‌شود.

رابطه ζ و ω_n با t_p:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad \begin{cases} \omega_n\uparrow \longrightarrow t_p\downarrow \\ \zeta\uparrow \longrightarrow t_p\uparrow \end{cases}$$

رابطه ζ و ω_n با Mp:

$$Mp = e^{-\frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad \begin{cases} \omega_n\uparrow \text{ یا } \downarrow \longrightarrow Mp=cte \\ \zeta\uparrow \longrightarrow Mp\downarrow \end{cases}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

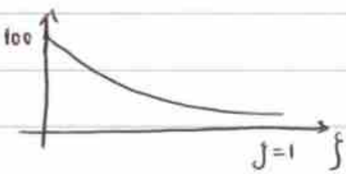
* توضیح: M_p (0.5) و t_p رابطه‌ی معکوس با یکدیگر دارند. (نمی‌توانیم هم خدا را داشته باشیم هم خرما را!!!.

یعنی نمی‌توان هم انتظار داشت که سرعت بالا رود و هم M_p کاهش یابد. اگر بخواهیم M_p کم شود باید ξ افزایش یابد یعنی t_p هم زیاد شود که این بدان معنی است که سرعت کاهش یافته)

رابطه ξ و ω_n با t_s:

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

$$\begin{cases} \omega_n \uparrow \longrightarrow t_s \downarrow \\ \xi \uparrow \longrightarrow t_s \downarrow \end{cases}$$



$$M_p = P.O = 0.5 = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

نکته: پاسخ گذرا را می‌توان براساس دو عامل زیر توصیف کرد:

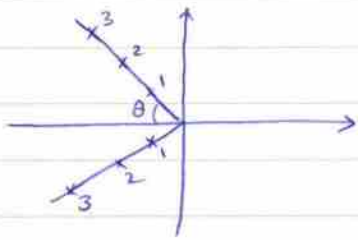
الف) سرعت پاسخ که با زمان صعود (t_r) و زمان اوج (t_p) توصیف کرد.

ب) نزدیکی پاسخ به پاسخ مطلوب با فراجهش و زمان نشست (t_s) مشخص می‌شود.

هر دو عامل بالا با یکدیگر در تضاد هستند، یعنی نمی‌توان هم سرعت پاسخ خوب و بالازدگی کم داشته باشیم.

تمرین کلاسی) با تغییر مکان قطب‌های حلقه بسته سیستم مرتبه 2 استاندارد به صورت زیر در مورد سرعت و فراجهش بحث کنید.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com



$1 \to 2 \to 3 \quad \begin{cases} \theta = cte \to \zeta = cte \\ \omega_n \uparrow \end{cases}$

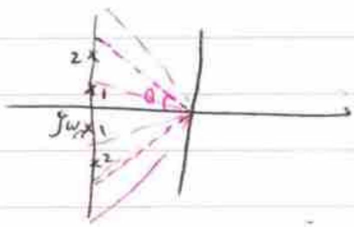
$t_r \downarrow$ سرعت زیاد

$M_p = cte$

$t_p \downarrow$

$t_s \downarrow$

حال اگر نمودار به صورت زیر باشد:



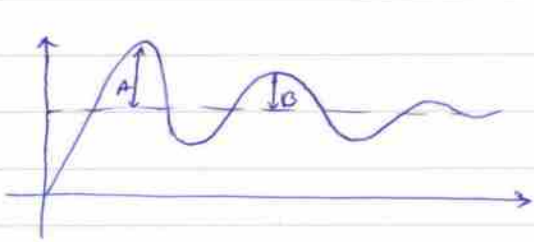
$\omega_n \uparrow \to \theta \uparrow \to \zeta \downarrow$

θ افزایش می یابد و ζ و θ رابطه ی عکس با هم دارند پس شعاع یعنی ω_n ها زیاد می شود

$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta \downarrow}{\sqrt{1-\zeta^2}\uparrow}} \longrightarrow M_p \uparrow \longrightarrow t_r \downarrow$

$2^2 > 2^1 \longrightarrow 2^{-2} < 2^{-1}$

تست) پاسخ پله ی واحد یک سیستم مرتبه 2 به شکل زیر است. با تعریف $\delta = \ln \frac{A}{B}$ نسبت میرایی از کدام رابطه ی زیر بدست می آید؟



1) $\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+\pi^2}}$ 3) $\frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2+\pi^2}}$

2) $\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}$ ✓ 4) $\frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}$

$A = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

$B = e^{\frac{-3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

$\to \frac{A}{B} = \frac{e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{e^{\frac{-3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}} = e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \xrightarrow{\text{ln می گیریم}} \delta = \frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$\delta^2 = \frac{4\zeta^2\pi^2}{1-\zeta^2} \Rightarrow \delta^2 = 4\zeta^2\pi^2 + \delta^2\zeta^2 \to \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}$$

تست) در یک سیستم مرتبه دوم با تابع تبدیل حلقه بسته $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ می باشد
برق - 88

وقتی میرایی سیستم از نوع بحرانی است، حساسیت پاسخ ضربه سیستم نسبت به ω_n پس از گذشت 1s از اعمال ضربه چقدر است؟

ابتدا مقدار حساسیت را به صورت پارامتری کاملاً محاسبه کرده و بعد عددگذاری می کنیم.

$$S_t^f = \frac{df}{dt} \times \frac{t}{f(t)}$$

میرایی بحرانی $\longrightarrow \zeta = 1$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

لاپلاس معکوس تابع تبدیل همان پاسخ ضربه سیستم است.

$$\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \xrightarrow{L^{-1}} \omega_n^2 e^{-\omega_n t} t u(t) \qquad e^{-at} r(t) \to \frac{1}{(s+a)^2}$$

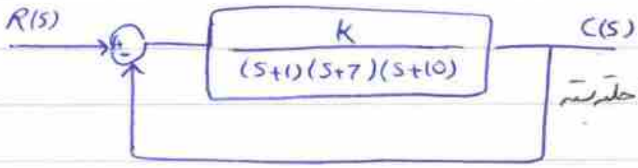
تمرین) پاسخ ضربه سیستم با تابع تبدیل حلقه بسته بالا برای $\zeta = 0$ و $0<\zeta<1$ و $\zeta>1$ را محاسبه کنید.

$$S_{\omega_n}^f = \frac{df}{d\omega_n} \times \frac{\omega_n}{f(\omega_n, t)} = \left(2\omega_n e^{-\omega_n t} t u(t) - t\omega_n^2 e^{-\omega_n t} t u(t)\right) \times \frac{\omega_n}{\omega_n^2 e^{-\omega_n t} t u(t)}$$

$$= 2 - t\omega_n \Big|_{t=1} = 2 - \omega_n$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

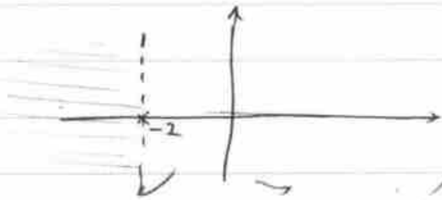
تست) به ازای چه مقادیری از K، زمان نشست با معیار ٪2 کمتر از 2s است؟



$$T_{\text{حلقه بسته}}(s) = \frac{K}{(s+1)(s+7)(s+10)+K} = \frac{K}{s^3+18s^2+87s+70+K}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} < 2 \longrightarrow \xi\omega_n > 2 \to -\xi\omega_n < -2$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



محور را جابجا می‌کنیم و به جای s ، s-2 می‌گذاریم

$$\Delta(s) = s^3 + 18s^2 + 87s + 70 + K$$

$$\Delta_{mod}(s-2) = (s-2)^3 + 18(s-2)^2 + 87(s-2) + 70 + K$$

$$\Delta_{mod} = s^3 + 12s^2 + 27s + K - 40$$

شرط اول : $K > 40$

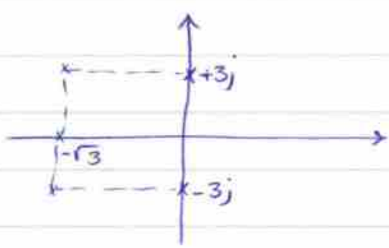
شرط دوم : $12 \times 27 > K - 40 \longrightarrow K < 364$

$$\Rightarrow 40 < K < 364$$

تست) محل قطب‌های حلقه بستهٔ یک سیستم مرتبه 2 در شکل زیر داده شده است. زمان فراجهش و زمان مستقر شدن سیستم به ترتیب کدام است؟ 85ق

$t_p = ?$

$t_s = ?$



$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\omega_d = 3 \qquad s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -\sqrt{3} \pm 3j$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

نکته: روابط t_p و t_r و M_p فقط و فقط برای سیستم مرتبه 2 استاندارد به فرم $T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ قابل استفاده است و اگر سیستم مرتبه 3 بود (بدون هیچ صفری) در صورتی که قطب سوم نسبت به قطب های دیگر نسبت به مبدأ خیلی دورتر بود (بتوان کاهش مرتبه به مرتبه 2 داد) باز هم می توان از این روابط استفاده کرد اما اگر سیستم مرتبه 2 شامل صفر هم باشد، برای محاسبه‌ی پارامترهای سیستم باید پاسخ سیستم را در حوزه‌ی زمان بررسی کرد و نمی توان از روابط استفاده کرد.

نکته: به طور استثناء، t_s را برای سیستم مرتبه 2 به بالاتر را هم می توان بدست آورد. چرا که زمان نشست با قسمت حقیقی قطب ها رابطه دارد.

برق 85) در یک سیستم کنترل با پس خورد واحد منفی $G(s)=\frac{K(s+4)}{s(s+3)}$ حداکثر مقدار overshoot با ورودی پله واحد به ازای چه مقدار K بدست می آید؟

هدف مسئله $\longrightarrow$ $\max p.o \equiv \min \zeta$

$G(s)$ سیستم مرتبه 2 استاندارد نیست که بتوانیم بگوییم به ازای $\zeta=0$، $M_p=100\%$ می شود و نمی توانیم از فرمول های t_p و t_r و M_p و t_s استفاده کرد.

$$\Delta(s)=s^2+(3+K)s+4K$$

$$4K=\omega_n^2 \rightsquigarrow \omega_n=2\sqrt{K}$$

$$3+K=2\zeta\omega_n \longrightarrow \zeta=\frac{3+K}{4\sqrt{K}} \rightsquigarrow \frac{d\zeta}{dK}=\frac{4\sqrt{K}-\left(\frac{2}{\sqrt{K}}\right)(3+K)}{4\sqrt{K}}=0$$

$$\longrightarrow \boxed{K=3}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تست تألیفی) تابع تبدیل حلقه باز سیستم با فیدبک واحد $G(s)=\frac{s+4}{s(s+3)}$ می باشد. مطلوب است t_p و M_p

$$C(s)=\frac{1}{s}\times T(s)$$

$$T(s)=\frac{s+4}{s^2+4s+4}\xrightarrow{\times\frac{1}{s}}\frac{(s+2)+2}{s(s+2)^2}=\frac{1}{s+2}+\frac{-1}{(s+2)^2}+\frac{1}{s}$$

$$S(t)=e^{-2t}u(t)-e^{-2t}t\,u(t)+u(t)=(1-e^{-2t}t+e^{-2t})u(t)$$

چون مقادیر M_p و t_p برای پاسخ پله است به همین دلیل در محاسبه $C(s)$، $\frac{1}{s}$ را در $T(s)$ ضرب می کنیم.

$$\frac{ds(t)}{dt}=0\longrightarrow(2e^{-2t}t-e^{-2t}-e^{-2t})u(t)=0\rightarrow 2e^{-2t}t-2e^{-2t}=0$$

$$\longrightarrow 2e^{-2t}(t-1)=0\ \Big<\begin{array}{l}t=\infty\\ \boxed{t_p=1}\end{array}$$

$t=\infty$ ← برای ∞ فراجهش محسوب نمی شود

نکته ی مهم: در این سیستم $\xi=1$ است یعنی میرایی بحرانی می باشد که برای آن t_p و M_p تعریف نمی شود.

* برای میرایی شدید و میرایی بحرانی روابط t_p و M_p تعریف نمی شود.

مثال) تابع تبدیل سیستم حلقه بسته به صورت $T(s)=\frac{s+4}{s^2+2s+2}$ می باشد. مطلوب است t_p، t_r و M_p؟

$$C(s)=\frac{1}{s}\times\frac{s+4}{s^2+2s+2}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}\quad\begin{cases}A=2\\B=-2\\C=-3\end{cases}$$

$$\lim_{s\to\infty} s\times C(s):\ 0=2+B$$

$$\xrightarrow{s=1}\ \frac{5}{5}=2+\frac{C-2}{5}\ \leadsto\ \boxed{C=-3}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$C(s)=\frac{2}{s}-\frac{2s+3}{s^2+2s+2}=\frac{2}{s}-\frac{2s+3}{(s+1)^2+1}=\frac{2}{s}-\frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2+1}$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

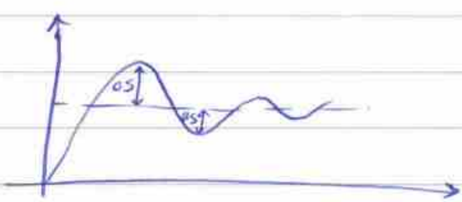
$$c(t)=\left(2-2e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t\right)u(t)$$

$$\frac{dc(t)}{dt}=0\Rightarrow +2e^{-t}\cos t+2e^{-t}\sin t-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=0$$

$$e^{-t}(3\cos t+\sin t)=0\rightarrow 3\cos t+\sin t=0\xrightarrow{\div\cos t} tg\,t=-3\rightarrow t=tg^{-1}-3$$

برق 82) در پاسخ پله یک سیستم مرتبه 2، رابطه میان فراجهش و فروجهش نشان داده شده در شکل زیر کدام گزینه است؟

1) $OS=(US)^2$ 2) $US=2OS$ 3) $US=(OS)^2$ 4) $US=0.5OS$



$$\left.\begin{array}{l} OS=e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega_d}} \\ US=e^{-\frac{2\alpha\pi}{\omega_d}} \end{array}\right\}\rightarrow US=(OS)^2$$

آثار افزودن صفر و قطب به توابع تبدیل حلقه باز و حلقه بسته:

افزودن یک قطب به تابع تبدیل حلقه باز:

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)\underbrace{(1+T_p s)}_{\text{قطب اضافه شده به حلقه باز}}}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

آثار اضافه کردن قطب به تابع حلقه باز:

① مرتبه‌ی سیستم را افزایش می‌دهد.

② پایداری کاهش پیدا می‌کند.

③ پهنای باند کاهش پیدا می‌کند.

④ زمان خیز (t_r) افزایش پیدا می‌کند.

⑤ overshoot افزایش پیدا می‌کند.

افزودن یک قطب به تابع تبدیل حلقه بسته:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(T_p s+1)}$$

آثار افزودن یک قطب به تابع حلقه بسته:

1) مرتبه سیستم افزایش پیدا می‌کند.

2) پایداری کاهش پیدا می‌کند.

3) زمان خیز پاسخ پله را افزایش می‌دهد. (سیستم کند می‌شود)

4) overshoot را کاهش می‌دهد.

* هر چه قدر قطب به سیستم اضافه می‌شود، سرعت سیستم کاهش می‌یابد.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

افزودن یک صفر به تابع تبدیل حلقه بسته :

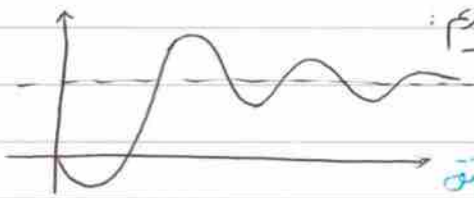
$$T(s) = \frac{\omega_n^2 (1+T_d s)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

آثار افزودن یک صفر به تابع حلقه بسته :

1) ماکزیمم overshoot ، زمان نشست t_s را افزایش می دهد.

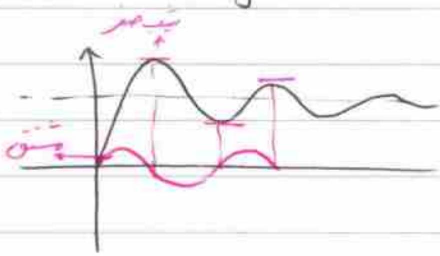
2) زمان خیز کاهش می یابد (بهبود سرعت سیستم)

اگر $T_d<0$ باشد در لحظات اول undershoot داریم :



مشتق

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} + \frac{T_d s \omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \Rightarrow c(t) = c(t) + T_d \frac{dc(t)}{dt}$$



3) پایداری سیستم را افزایش می دهد.

4) اگر صفر سمت راست به تابع تبدیل حلقه بسته اضافه شود ($T_d<0$) undershoot داریم.

آثار افزودن یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز :

$$T(s) = \frac{\omega_n^2 (1+T_d s)}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

اگر صفر افزوده شده از محور ساز خیلی دور باشد overshoot بزرگ و میرایی خیلی ضعیف است

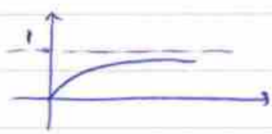
اما اگر " " به محور ساز خیلی نزدیک باشد overshoot کاهش و میرایی بهبود می یابد

هر چقدر صفر به مبدأ نزدیک باشد یعنی بسیار به مبدأ نزدیک شود، overshoot افزایش می یابد اما میرایی بهبود پیدا می‌کند.

تست) پاسخ سیستمی با $G(s)=\frac{2-s}{s(s+1)}$ به ورودی پله واحد، کدام گزینه است؟

(1

(2



(3

(4 ✓

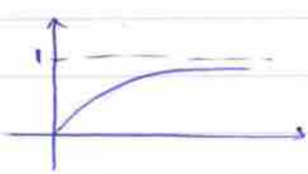
چون یک صفر در سمت راست محور داریم یعنی tdo بین overshoot داریم.

$$T(s)=\frac{2-s}{s^2+3s+2}$$

گزینه 2 و 4 قابل قبول است ⟶ $\boxed{\xi > 1}$ ⟶ $\Delta > 0$ (یعنی دو ریشه حقیقی دارد)

تست ثانیه) تابع تبدیل حلقه بسته به فرم $T(s)=\frac{1}{(s+1)(s+\frac{3}{2})(s+2)}$ را در نظر بگیرید. پاسخ پله‌ی این سیستم کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

(1

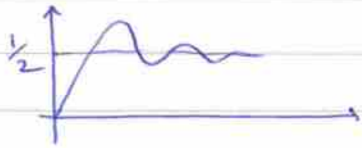


(2

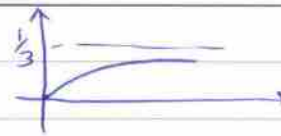
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

page: ( )

Subject:
Year : Month : Day : ( )



(4



(3) ✓

تمام قطب ها حقیقی می باشند. پاسخ میرا است ← گزینه ۱ و 3 قبول است

تفاوت بین گزینه ۱ و 3 در مقدار نهایی آن است. (سیستم پایدار است چون تمام قطب های سمت چپ محور موهومی هستند)

$$C(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{(s+1)(s+\frac{3}{2})(s+2)}$$

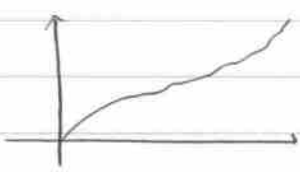
$$C(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,C(s) = \frac{s}{s} \times \frac{1}{(s+1)(s+\frac{3}{2})(s+2)} = \frac{1}{3}$$

اگر تابع ما به صورت $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$ بود پاسخ یکی از گزینه ها 2 و 4 می شد به خاطر اینکه

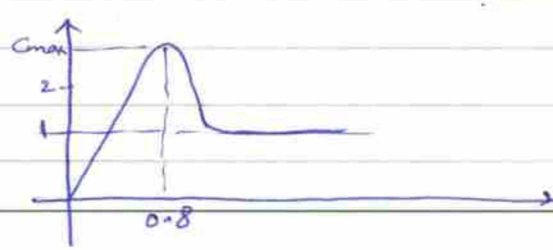
s^2+2s+2 باعث ایجاد نوسان می شود.

اگر سیستم به صورت $\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$ بود، چون یک قطب ناپایدار داریم شکل سیستم

به صورت یک تابع نمایی می شود که مدام بر مقدارش افزوده می شود



تست) شکل زیر پاسخ پله کدام تابع تبدیل است؟



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$G(s)=\frac{2(1+5s)}{(s+1)(s+2)} \quad (1$$

$$G(s)=\frac{2(1+5s)}{s^2+1.4s+2} \quad (2$$

$$G(s)=\frac{2(1+5s)(1+0.1s)}{(s+1)(s+2)} \quad (3$$

$$G(s)=\frac{2(1+5s)(1+0.1s)}{s^2+1.4s+2} \quad (4$$

این سیستم غیرنوسانی است چون قطب‌ها حقیقی هستند ⇐ گزینه‌های 2 و 4 که $0<\xi<1$ غیر قابل قبول اند.

مقدار نهایی:

① و $C(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} s\times\frac{1}{s}\times\frac{2(1+5s}{(s+1)(s+2)}=1$

④ و $c(\infty)=1$

مقدار اولیه:

① و: $c(0)=\lim\limits_{s\to\infty} s\times\frac{1}{s}\times\frac{2(1+5s)}{(s+1)(s+2)}=0$

④ و: $c(0)=\lim\limits_{s\to\infty} s\times\frac{1}{s}\times\frac{2(1+5s)(1+0.1s)}{s^2+1.4s+2}=1$

مقدار اولیه ی خروجی برابر صفر است پس گزینه ① درست است.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

حالت دائمی پاسخ سیستم به ورودی های مختلف:

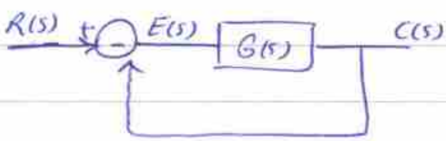
برای بررسی اینکه پس از گذشت حالت گذرای پاسخ خروجی سیستم به ورودی مطلوب در نهایت می رسد یا اینکه در نهایت چقدر خروجی با ورودی مطلوب اختلاف دارد مباحث مربوط به خطای حالت دائمی سیستم مورد بررسی قرار می گیرد.

نکته خیلی مهم: خطا به دو صورت تعریف می شود:

1) $E(s)=R(s)-C(s)$

2) $E'(s)=R(s)-C(s)H(s)$

تعریف خطا برای سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد:

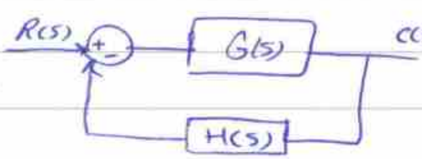


(میسون) $\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G} \longrightarrow E(s)=\frac{R(s)}{1+G}$

$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(0)}$

به ازای ورودی های مختلف $R(s)$ را تغییر می دهیم.

تعریف خطا برای سیستم حلقه بسته با فیدبک غیر واحد:



$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)H(s)}$ (از راه میسون)

$\longrightarrow E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{R(s)}{1+G(0)H(0)}$$

نکته خیلی مهم: در سیستم های حلقه بسته با فیدبک غیر واحد باید به صورت ثبت و تعریفی که از خطا کرده توجه کنیم. اگر خطا به صورت $E=R(s)-C(s)H(s)$ تعریف شده بود از رابطه ی $e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{R(s)}{1+G(0)H(0)}$ استفاده می کنیم. اما اگر خطا در سیستم فیدبک غیر واحد به صورت $E(s)=R(s)-C(s)$ تعریف شده بود، می توان سیستم حلقه بسته با فیدبک غیر واحد را به حلقه بسته با فیدبک واحد تبدیل کرده و از رابطه ی $e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \times \frac{R(s)}{1+G'(0)}$ استفاده کرد.

نحوه تبدیل سیستم حلقه بسته با فیدبک غیر واحد به فیدبک واحد:

$$G'(s) = \frac{G_{eq}(s)}{1+G_{eq}H(s)-G_{eq}(s)}$$

$G_{eq} = \frac{T(s)}{1-T(s)}$ تبدیل حلقه بسته به حلقه باز با فیدبک واحد

$T(s) = \frac{A}{B}$ ⟶ فیدبک $G_{eq} = \frac{A}{B-A}$ بدست آوردن بلوک حلقه باز با فیدبک واحد

مثال) $T(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+4} \Rightarrow G_{eq} = \frac{s+1}{s^2+2s+4-(s+1)}$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

فیدبک غیر واحد

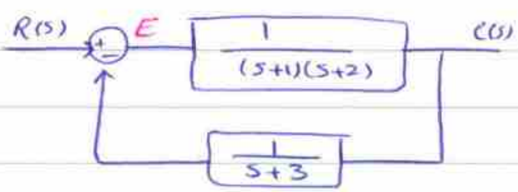
فیدبک واحد $\boxed{G_{eq} = \dfrac{G(s)}{1+GH-G(s)}}$

نکته هرگیاره: قبل از بدست آوردن خطای حالت دائمی بررسی پایداری سیستم الزامی است.

چرا که اگر سیستم ناپایدار باشد، خروجی به سمت بی نهایت میل کرده در نتیجه خطای حالت دائمی بی نهایت یا تعریف نشده است. وقتی که بدون توجه به پایداری خطای سیستم را محاسبه می کنیم به مقدار خاصی می رسیم و گزینه غلط را درست خواهیم زد.

پس برای زدن تست های خطا اگر در گزینه ها گزینه ای به صورت تعریف نشده یا بی نهایت وجود داشت، ابتدا پایداری را بررسی کرده و در صورت پایدار بودن خطا را بدست آورید.

مثال) سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید. خطای حالت ماندگار به ورودی پله برای هر دو تعریف زیر را بدست آورید.



$$E(s) = R(s) - C(s)H(s) \qquad (1$$

$$E(s) = R(s) - C(s) \qquad (2$$

ابتدا باید پایداری را بررسی کنیم، اگر سیستم پایدار باشد آنگاه خطا تعریف می شود

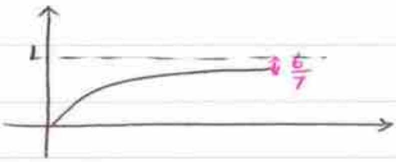
$$\Delta(s) = (s+1)(s+2)(s+3)+1$$

$bc > ad$ ✓ ⟶ پایدار

تعریف اول :

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \times \frac{1/s}{1+\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{1}{1+\frac{1}{6}} = \frac{6}{7}$$

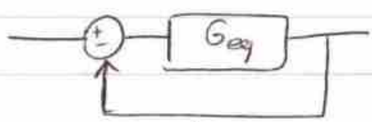


یا

حالت گذرای سیستم و نمودار آن براساس قطب‌های سیستم مشخص می‌شوند. (نوع پاسخ گذرا با توجه به محل قطب‌های سیستم حلقه‌بسته یعنی قطب‌های $\Delta(s)$ شکل می‌گیرد)

تعریف دوم : با توجه به تعریفی که از خطا کرده و حلقه بسته فیدبک غیرواحد باید سیستم را به فیدبک واحد معادل تبدیل کرد و خطا را بدست آورد.

$\equiv$

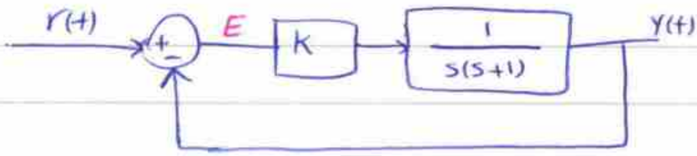


$$G_{eq} = \frac{G}{1+GH-G} = \frac{\frac{1}{(s+1)(s+2)}}{1+\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}-\frac{1}{(s+1)(s+2)}} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)+1-(s+3)}$$

$$E = \frac{R(s)}{1+G_{eq}(s)} \longrightarrow e_{ss} = \lim_{s\to\infty} \frac{s \times 1/s}{1+G_{eq}(0)} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$$

مثال) در سیستم فیدبک زیر به ازای کدام مقدار K خطای حالت ماندگار به ازای ورودی پله واحد برابر ۵ باشد.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com



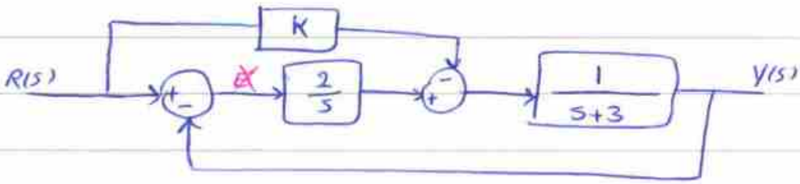
توجه: فیدبک واحد است و هر دو تعریف باید برابر باشند.

$$\Delta(s) = s^2 + s + K$$ شرط پایداری $K>0$

$$E = \frac{R(s)}{1+\frac{K}{s(s+1)}} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\times \frac{1/s}{1+\frac{K}{s(s+1)}} = 0$$

به ازای تمام مقادیر $K>0$ خطا به ورودی پله صفر خواهد بود.

مثال: در سیستم شکل زیر به ازای چه مقداری از K خطای $e(t)$ به ورودی پله واحد به صورت $e^{-t}u(t)$ می‌باشد؟



$$E(s) = R(s) - y(s) = R - T(s)R(s) = R(s)\left(1 - \frac{\frac{2}{s(s+3)} - \frac{K}{s+3}}{1+\frac{2}{s(s+3)}}\right)$$

$$E(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{2-Ks}{s^2+3s+2}\right) = \frac{s+3+K}{s^2+3s+2} = \frac{K+2}{\underset{e^{-t}}{\underline{s+1}}} - \frac{K+1}{\underset{e^{-2t}}{\underline{s+2}}} \quad (1)$$

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{L} E(s) = \frac{1}{s+1} \quad (2)$$

با مقایسه (1) و (2) می‌فهمیم:
به ازای $K=-1$، $e(t) = e^{-t}u(t)$ ایجاد می‌شود.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

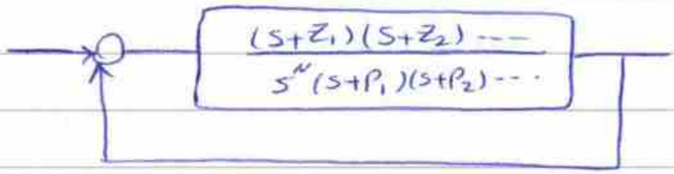
محاسبه‌ی خطای حالت ماندگار از روی تابع تبدیل حلقه‌باز و ثابت‌های استاتیکی خطا:

ثابت خطای استاتیکی موقعیت: $K_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s)$

ثابت خطای استاتیکی سرعت: $K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s)H(s)$

ثابت خطای استاتیکی شتاب: $K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)H(s)$

نوع سیستم: مرتبه‌ی قطب حلقه‌باز موجود روی صفر با فیدبک واحد را نوع سیستم می‌گویند.



نکته: برای بدست آوردن نوع سیستم تابع تبدیل حلقه‌بسته با فیدبک غیرواحد ابتدا تابع تبدیل حلقه‌بسته را محاسبه کرده و سپس با تبدیل به فیدبک واحد نوع سیستم را انتخاب می‌کنیم.

	مرتبه‌ی ورودی	نوع سیستم
$t^0 u(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$t^1 u(t)$	$\frac{1}{s^2}$	1
$t^2 u(t)$	$\frac{2}{s^3}$	2

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مرتبه ورودی $<$ نوع سیستم $\longrightarrow$ $e_{ss}=0$

مرتبه ورودی $=$ نوع سیستم $\longrightarrow$ $e_{ss}=cte$ عدد ثابت

مرتبه ورودی $>$ نوع سیستم $\longrightarrow$ $e_{ss}=\infty$

خطای ورودی پله سیستم نوع ۰ $= \dfrac{1}{1+K_p}$

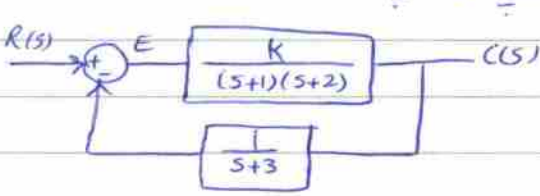
خطای به ورودی شیب سیستم نوع ۱ $= \dfrac{1}{K_v}$

خطای به ورودی سهمی سیستم نوع 2 $= \dfrac{1}{K_a}$

خطاهای ماندگار :

نوع ورودی	سیستم نوع صفر	سیستم نوع یک	سیستم نوع 2
پله	$\dfrac{1}{1+K_p}$	0	0
شیب	∞	$\dfrac{1}{K_v}$	0
سهمی	∞	∞	$\dfrac{1}{K_a}$

مثال) در سیستم زیر حداقل خطای ماندگار به ورودی پله واحد چقدر است؟



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

نکته: در تست هایی که $E(s)$ را روی بلوک پس از جمع کننده مشخص می کنند منظور تعریف $E(s)=R(s)-CH(s)$ در سیستم حلقه بسته با فیدبک غیرواحد می باشد و می توان از روابط مثل محاسبه ی خطا استفاده کرد. اما اگر فیدبک غیرواحد بود و $E(s)$ را بعد از جمع کننده تعریف نکرده بود حق استفاده از روابط گفته شده را نداریم و باید پس از تبدیل حلقه بسته با فیدبک غیرواحد به فیدبک واحد از روابط استفاده کرد.

حل مثال:

روش اول) ① ابتدا باید پایداری را چک کنیم.

$$\Delta(s)=(s+1)(s+2)(s+3)+K$$

$$\rightarrow \Delta(s)=s^3+6s^2+11s+6+K$$

$$6+K>0 \rightarrow K>-6$$
$$66>1(6+K)\rightarrow K<60$$
$$\boxed{-6<K<60}$$

مسئله:

$$E(s)=R(s)-CH(s) \qquad E(s)=\frac{\cancel{R(s)}\rightarrow 1/s}{1+\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\times\frac{1/s}{1+\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}}=\frac{6}{6+K}$$

ماکزیمم مقداری که می توان برای K انتخاب کرد تا e_{ss} حداقل شود با توجه به شرط پایداری

$K=60$ می تواند باشد در نتیجه $e_{ss_{min}}=\frac{6}{66}=\frac{1}{11}$

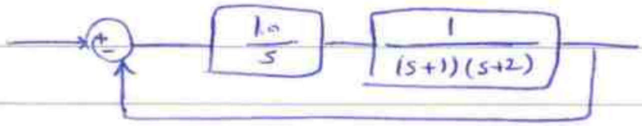
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

روش دوم :

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+GH(0)} = \frac{1}{1+\frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{k}{6}} = \frac{6}{6+k}$$

مثال) در سیستم مدار بسته ی زیر خطای حالت ماندگار به ورودی پله واحد کدام است ؟



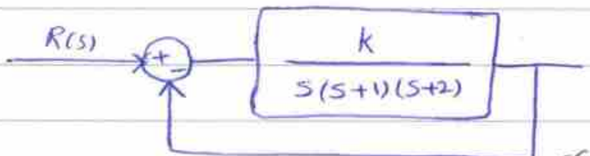
سیستم نوع 1 است پس مرتبه ی ورودی کمتر از نوع سیستم می باشد و سیستم ورودی را به طور کامل ردیابی می کند و در صورت پایدار بودن سیستم ، خطای حالت ماندگار صفر خواهد بود .

$$\Delta(s) = s(s+1)(s+2)+10 = s^3+3s^2+2s+10$$

$3\times 2 < 10$ ← سیستم ناپایدار

← در نتیجه خطا بی نهایت است .

مثال) در سیستم زیر K را چنان تعیین کنید تا خطای ماندگار به ورودی شیب واحد 0.1 شود ؟



نوع سیستم 1 و مرتبه ی ورودی 1 ← در صورت پایداری خطا می تواند یک عدد ثابت باشد .

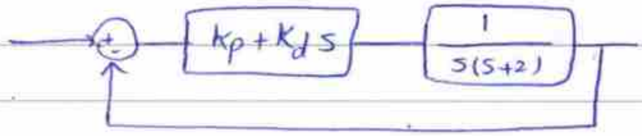
$$\Delta(s) = s^3+3s^2+2s+k \qquad 3\times 2 > k \rightsquigarrow \boxed{k<6}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)H(s)} = \frac{1}{\frac{k}{2}} = \frac{2}{k} \qquad \frac{2}{k} = 0.1 \rightsquigarrow \boxed{k=20}$$

باعث ناپایداری سیستم خواهد شد .

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تست) در سیستم کنترل شکل زیر مقادیر kp و kd چقدر باشد تا خطای ماندگار سیستم به ورودی شیب واحد برابر 0.5 و رژیم گذرای سیستم میرای بحرانی باشد؟ بهمن 90



1) $K_p = K_d = 4$

2) $k_p = 1$, $k_d = 0$

3) $k_p = 4$, $k_d = 2$

4) چنین کنترل کننده ای نمی‌توان طراحی کرد.

ابتدا شرط پایداری را باید چک کنیم.

$$\Delta(s) = s^2 + (2+k_d)s + k_p \rightarrow \begin{cases} k_p > 0 \\ k_d > -2 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} \frac{k_p + k_d s}{s+2}} = 0.5 \Rightarrow \boxed{k_p = 4}$$

$s^2 + (2+k_d)s + 4 = 0$ ⟶ برای اینکه میرای بحرانی باشد $\boxed{k_d = 2}$

یا $\omega_n = 2$, $\zeta = 1$ $\rightarrow 2 + k_d = 2\zeta\omega_n \rightarrow k_d = 2$

اما چون عبارت ما به صورت $4 + 2s$ می‌شود. وقتی در $\frac{1}{s(s+2)}$ ضرب می‌شود مرتبه‌ی سیستم را کاهش می‌دهد.

پس از بررسی پایداری سیستم و بدست آوردن kp و kd برای ارضا کردن شرط خطای حالت ماندگار و نوع پاسخ گذرا (میرایی بحرانی) دیدیم که ضرایب بدست آمده با پایداری مشکلی ندارد اما $K_p + K_d s = 2(s+2)$ با بلوک سری با خودش حذف صفر و قطب انجام می‌دهد و مرتبه‌ی سیستم را به مرتبه یک کاهش

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

می دهد و برای سیستم های مرتبه ی اول معیاری برای تعریف نمی شود. در نتیجه گزینه ۴ درست است.

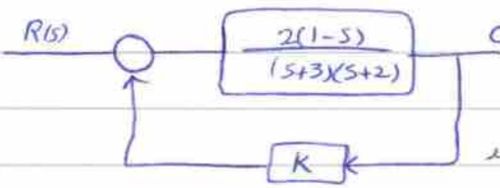
نکته: به طور کلی در تست های کنترل اگر یکی از گزینه ها به صورت تعریف نشده یا بی نهایت و یا هر چیزی که حالت خاصی بود باید در حل تست خیلی با دقت عمل کنیم و به هر چیزی شک کنیم.

تست سری ۸۸) در سیستم شکل زیر اگر بخواهیم خطای حالت دائمی $e(t)=r(t)-c(t)$ برای ورودی پله واحد صفر شود، چه باید کرد؟

۱) با انتخاب $K=-2$ خطا صفر می شود.
۲) $K=\infty$ خطا به ورودی پله صفر می شود

۳) اگر یک انتگرالگیر در مسیر پیشرو قرار دهیم خطای حالت دائمی صفر می شود.

۴) این سیستم چون نوع صفر است نمی توان خطای حالت دائمی به ورودی پله را صفر نمود.



$$E(s)=R(s)-C(s)$$

$$\text{فیدبک واحد } G_{eq}=\frac{\frac{2(1-s)}{(s+3)(s+2)}}{1+\frac{2K(1-s)}{(s+3)(s+2)}-\frac{2(1-s)}{(s+3)(s+2)}}$$

$$\text{فیدبک واحد } G_{eq}=\frac{2(1-s)}{(s+3)(s+2)+2(1-s)(K-1)}$$

$$K_p=\lim_{s\to 0} G_{eq}(0)=\frac{2}{6+2(K-1)}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+\frac{2}{4+2K}}=0$$

$$\to 4+2K=0\to K=-2$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

با توجه به تعریف خطا که به صورت $e(t) = r(t) - c(t)$ شده است باید یا از تعریف کلی ($E(s) = R(s) - R(s)T(s)$) استفاده کنیم یا تابع تبدیل را به G_{eq} معادل با فیدبک واحد تبدیل کرده تا با تبدیل سازگار باشد. حال می‌توان از روش ضرایب استاتیکی خطا را به دست حساب کرد.

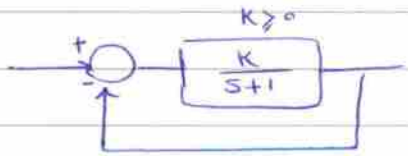
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

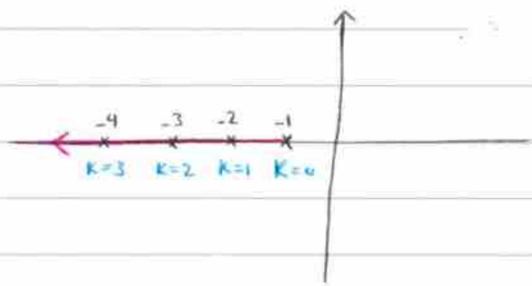
مکان هندسی:

تحلیل کیفی مکان هندسی ریشه های حلقه بسته:

برای تحلیل گرافیکی مکان قطب های حلقه بسته با تغییر یک متغیر (مثلاً K) در تابع تبدیل از مکان هندسی ریشه ها استفاده می کنیم. قبل از ورود به بحث قواعد رسم مکان هندسی بهتر است با چند مکان هندسی نمونه آشنا شویم.

مثال ۱) مکان هندسی ریشه های حلقه بسته ی سیستم های زیر را رسم کرده و آنها را تحلیل کنید.





$$\Delta(S) = S + K + 1$$

مکان قطب های حلقه بسته به متغیر K وابسته است پس با تغییر متغیر K مکان قطب ها تغییر می کند.

می بینیم که با افزایش K مکان هندسی قطب های حلقه بسته از $S=-1$ شروع شده و تا $-\infty$ روی محور حقیقی حرکت می کند.

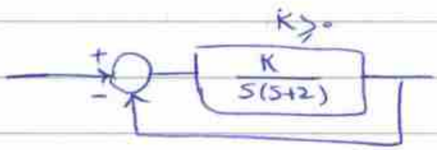
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

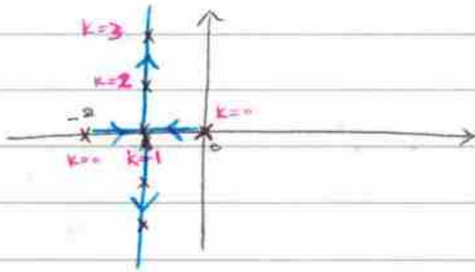
تحلیل مکان هندسی :

۱) با افزایش K سیستم ناپایدار نمی‌شود (قطبها از محور jω دور تر می‌شوند)

۲) ثابت زمانی که با مکان قطب رابطه عکس دارد ($T = \frac{1}{\text{مکان قطب}}$) با افزایش K ، ثابت زمانی کاهش یافته یعنی سرعت سیستم افزایش می‌یابد .

مثال ۲)





$$\Delta(S) = S^2 + 2S + K$$

$$S_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4K}}{2}$$

تحلیل مکان هندسی :

برای تمام مقادیر $K > 0$ سیستم پایدار باشد چرا که مکان هندسی همواره سمت چپ محور jω قرار دارد .

تحلیل دینامیک سیستم :

برای $0 < K < 1$ دو ریشه روی محور حقیقی بوده و غیر مختلط می‌باشند پس می‌توان گفت سیستم میرایی شدید دارد .

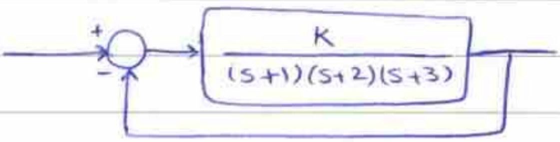
برای $K=1$ هر دو ریشه روی $S=-1$ قرار می‌گیرد یعنی در این حالت قطب مضاعف خواهیم داشت

پس برای $K=+1$ سیستم میرایی بحرانی است .

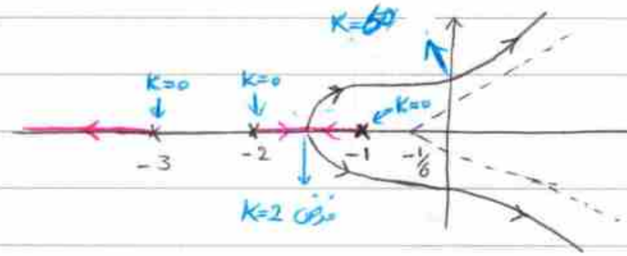
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

به ازای $K>1$ مکان هندسی به صورت دو زوج قطب مختلط ظاهر شده که با افزایش K سمت حقیقی قطب ها ثابت و سمت موهومی (ω_d) افزایش می یابد یعنی می توان گفت سیستم میرایی ضعیف است که با افزایش K فرکانس نوسانات (ω_d) افزایش می یابد.

مثال 3)



$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K$$



$bc = ad$

$\rightarrow 6 \times 11 = 6 + K$

$\rightarrow K = 60$

تحلیل:

به ازای $0<K<2$ سیستم همواره میرا است چراکه هر 3 قطب روی محور حقیقی بوده و نوسان ایجاد نمی کنند.

به ازای $2<K<60$ دوتا از قطب ها به صورت زوج قطب مختلط و قطب دیگر همواره حقیقی است. به علت وجود زوج قطب های مختلط سیستم میرایی ضعیف خواهد بود.

به ازای $K=60$ سیستم پایدار مرزی است. چراکه با افزایش اندکی K زوج قطب های مختلط سمت راست محور $j\omega$ می رود و سیستم ناپایدار خواهد شد.

به ازای $K>60$ زوج قطب ها همواره سمت راست محور $j\omega$ و قطب سوم به سمت $-\infty$ روی محور حقیقی حرکت می کند.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تعریف نقطه شکست: نقطه‌ای است که ۲ یا چند قطب از یکدیگر جدا شده (break away) (نقطه ترک) یا دو یا چند شاخه در یک نقطه به هم می‌رسند و قطب مضاعف را ایجاد می‌کنند.

مثلاً در مکان هندسی شکل قبل به ازای $K=2$ قطب‌های $p=-1$ و $p=-2$ به نقطه $s=-1.5$ رسیده‌اند و این شاخه‌ها از $s=-1.5$ که نقطه شکست است، جدا می‌شوند.

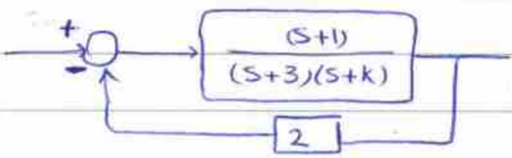
تعریف مجانب: پس از جدا شدن مکان هندسی از محور حقیقی، زاویه‌ی حرکت شاخه‌های مکان هندسی به سمت ∞ حائز اهمیت است، که برای مشخص کردن مجانب باید مکان مجانب و زاویه‌ی مجانب را مشخص کنیم.

خواص اساسی مکان ریشه‌ها:

فرم استاندارد رسم مکان هندسی به صورت $\Delta(s) = 1 + KGH(s)$ می‌باشد.

قبل از رسم مکان هندسی باید معادله مشخصه به فرم استاندارد درآید. $1 + KF(s) = 0$

مثال: فرم استاندارد معادله مشخصه این سیستم را برای رسم مکان هندسی بدست آورید.



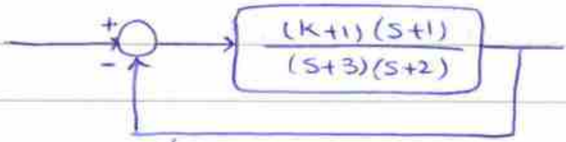
$$\Delta(s) = (s+3)(s+K) + 2(s+1) = 0 \rightsquigarrow s^2 + (K+3)s + 2s + 2 + 3K = 0$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

فرم استاندارد : $1+KF(s)=0$

$$\rightsquigarrow \quad s^2+K(s+3)+5s+2=0 \xrightarrow{\div\, s^2+5s+2} 1+\frac{K(s+3)}{s^2+5s+2}=0$$

مثال)



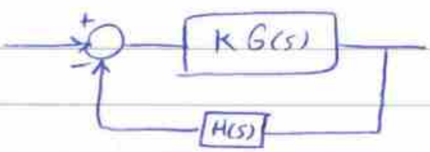
اشتباه رایج : با در نظر گرفتن $K+1=K'$ مکان هندسی را به ازای تغییرات K' رسم می‌کنیم که این اشتباه است.

$$\Delta(s)=s^2+5s+6+(K+1)s+(K+1)=s^2+6s+7+K(s+1)=0$$

قدم اول: از K فاکتور بگیرید. قدم دوم: عبارت را به شکل استاندارد $1+KF(s)$ تبدیل کنید.

$$1+\frac{K(s+1)}{s^2+6s+7}=0$$

شرط اندازه و فاز مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه:



$$\Delta(s)=1+K\,G(s)H(s)=0 \rightsquigarrow \boxed{K\,G(s)H(s)=-1}^{*}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |K\,G(s)H(s)|=1 \longrightarrow |G(s)H(s)|=\frac{1}{K} \\ \angle G(s)H(s)=(2q+1)\pi \end{cases}$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

دو شرط اندازه و فاز بیان می‌شوند هر نقطه‌ای روی مکان هندسی باشد s_1 باید دو شرط اندازه و فاز را ارضا کند یعنی فاز GH در نقطهٔ آزمون s_1 باید مضارب فردی از π باشد و همچنین می‌توان گفت حاصل ضرب $GH(s_1)$ در K نقطهٔ آزمون اندازه‌اش باید یک شود.

منظور $F(s)$ است.

$$\begin{cases} \angle \overbrace{GH(s_1)} = (2q+1)\pi \rightsquigarrow \text{فیدبک منفی} \\ |K_1 GH(s_1)| = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

شرط قرارگرفتن نقطهٔ آزمون s_1 با K_1 روی مکان هندسی سیستم

نکته: شرط های گفته شده از یکدیگر مستقل هستند یعنی برای اینکه ببینیم یک نقطه روی مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم قرار دارد، ابتدا با شرط فاز وجود نقطه را روی مکان هندسی چک می‌کنیم اگر روی مکان قرار داشت با شرط اندازه، K مربوط به آن نقطه را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta(s) = 1 - KGH(s) = 0 \rightsquigarrow KGH(s) = 1 \rightsquigarrow \boxed{\angle GH(s) = 2q\pi} \to \text{فیدبک مثبت}$$

مثال) برای سیستم با فیدبک واحد منفی و تابع تبدیل حلقه باز $G(s) = \dfrac{K(s+2)}{s(s^2+2s+2)}$ باشد، نشان دهید کدام یک از نقاط زیر روی مکان هندسی ریشه‌ها قرار دارد.

الف) $s_1 = -1+2j$

ب) $s_2 = -\frac{3}{2}$

ج) $s_3 = \frac{3}{2}$

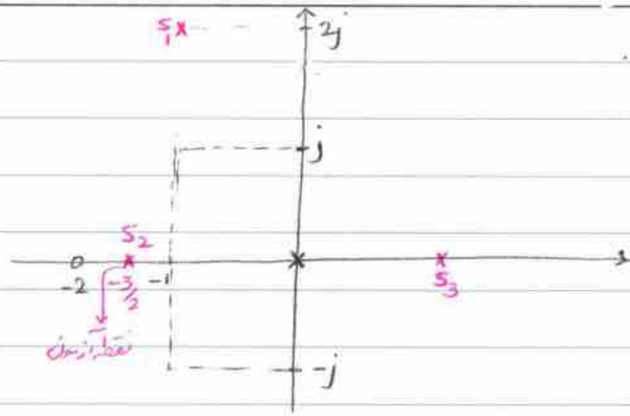
روش اول: شرط وجود: $\angle GH(s) = (2q+1)\pi$

$$GH(s) = \frac{s+2}{s(s^2+2s+2)}$$

$$\angle GH(s_1) = (2q+1)\pi \rightsquigarrow \angle \frac{-1+2j+2}{(-1+2j)\left((-1+2j)^2+2(-1+2j)+2\right)} \overset{?}{=} (2q+1)\pi$$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

روش اول ، روش جبری نسبت .



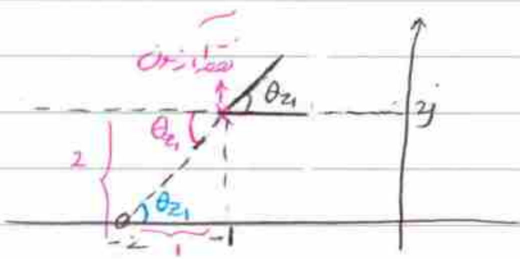
$$\angle GH(s) = \sum_{i=1} \theta_{z_i} - \sum_{i=1} \theta_{p_i}$$

$\theta_{z_i} =$ زاویه‌ی صفرهای $GH(s)$ تا نقطه‌ی آزمون

$\theta_{p_i} =$ " " " " قطبهای " "

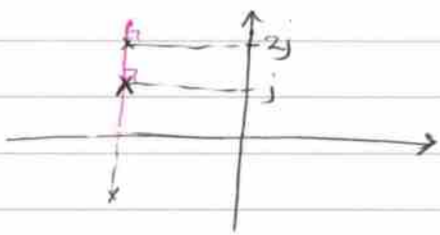
الف) $s_1 = -1+2j$

محاسبه‌ی θ_{z_1} :



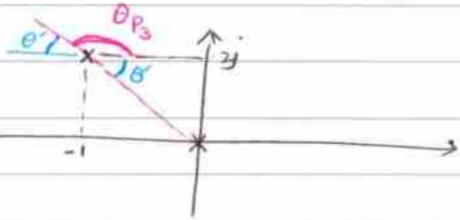
$$\theta_{z_1} = tg^{-1}\frac{2}{1}$$

محاسبه‌ی θ_{p_1} و θ_{p_2} :



$$\underset{-1+j}{\theta_{p_1}} = \underset{-1-j}{\theta_{p_2}} = \frac{\pi}{2}$$

محاسبه‌ی θ_{p_3} :



$$\theta_{p_3} = \pi - \theta' = \pi - tg^{-1}\frac{2}{1}$$

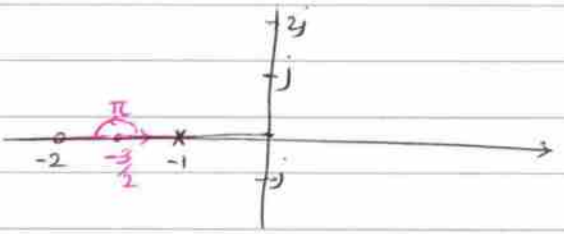
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$\angle GH(s) = \sum_{i=1} \theta_{z_i} - \sum_{i=1} \theta_{p_i} \overset{?}{=} (2q+1)\pi$$

$$tg^{-1}2 - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi - tg^{-1}2\right) \neq (2q+1)\pi$$

نقطه $S_1 = -1+2j$ روی مکان هندسی ریشه ها قرار ندارد چون در فرمول مربوط به فاز صدق نکرد

ب) $S_2 = -\frac{3}{2}$



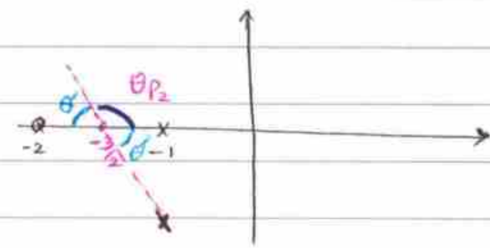
$\theta_{z_1} = 0°$

$z=-2$

$\theta_{p_3} = \pi$

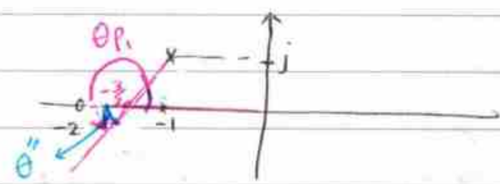
$p=0$

محاسبه ی θ_{p_2}:



$$\theta_{p_2} = \pi - \theta' = \pi - tg^{-1}\left(\frac{1}{1/2}\right)$$

محاسبه ی θ_{p_1}:



$$\theta_{p_1} = (\pi + \theta'') = \pi + tg^{-1}\frac{1}{1/2}$$

$$\sum \theta_{z_i} - \sum \theta_{p_i} \overset{?}{=} (2q+1)\pi \rightsquigarrow 0 - (\pi + \pi - tg^{-1}2 + \pi + tg^{-1}2) = -3\pi \checkmark$$

مضرب فردی از π می باشد پس روی مکان هندسی قرار دارد.

از آنجایی که شرط فاز به ازای نقطه $S_2 = -\frac{3}{2}$ ارضا شد این نقطه روی مکان قرار دارد و می توانیم

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

K مربوط به این نقطه را روی مکان هندسی را با استفاده از شرط اندازه به دست آورد.

$$|KGH_{(s)}| = 1 \rightarrow |K| = \frac{1}{|GH(s)|} = \frac{|\text{ضرب اندازه قطب‌ها تا نقطه آزمون}|}{|\text{ضرب اندازه صفرها تا نقطه آزمون}|} = \frac{\Pi P_i}{\Pi Z_i} = \frac{L_{P_1} L_{P_2} L_{P_3} \cdots}{L_{Z_1} L_{Z_2} L_{Z_3} \cdots}$$

L_{P_i}: اندازه بردار رسم شده از قطب iام تا نقطه آزمون

L_{Z_i}: " " " " " صفر iام " " "

$$|K| = \frac{(\sqrt{\frac{1}{4}+1})(\sqrt{\frac{1}{4}+1})}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

شرط استفاده از رابطه اندازه ارضا شدن شرط فاز می‌باشد.

نکته: درصورتی که $GH(s)$ فاقد صفر یا قطب باشد به جای L_{P_i} سیستم بدون قطب 1 و به جای L_{Z_i} سیستم بدون صفر 1 در رابطه اندازه قرار می‌دهیم.

نکته: درصورتی که بدون بررسی شرط فاز بخواهیم وجود نقطه آزمون را روی مکان هندسی بررسی کنیم می‌توان K را از معادله $1+KGH=0$ به ازای نقطه آزمون محاسبه کنیم و درصورتی که مقدار حقیقی بود آن نقطه روی مکان وجود دارد. البته بررسی شرط K باید به صورت ریاضی انجام پذیرد نه ریاضی و گرافیکی.

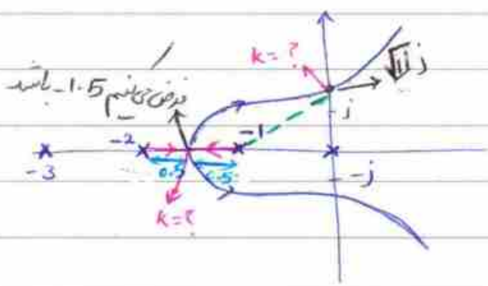
درصورتی که K مقدار حقیقی بود، نقطه آزمون روی مکان وجود دارد و اندازه K به دست آمده را می‌توان به عنوان مقدار K نقطه آزمون در نظر گرفت.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$1 + KGH(s) = 0 \rightsquigarrow K = \frac{-1}{GH(s)}$$

$$K = \frac{-1}{G(s)} = -\frac{s(s^2+2s+2)}{s+2}\Bigg|_{s=-1+2j} = -\frac{(-1+2j)\left((-1+2j)^2+2(-1+2j)+2\right)}{-1+2j+2}$$

مثال) مطلوبست K در نقطه شکست و مقدار K که به ازای آن سیستم پایدار مرزی می‌شود را در مثال 3 محاسبه کنید



$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K$$

$$\hookrightarrow \omega_d = \sqrt{\frac{6+60}{6}} = \sqrt{11}$$

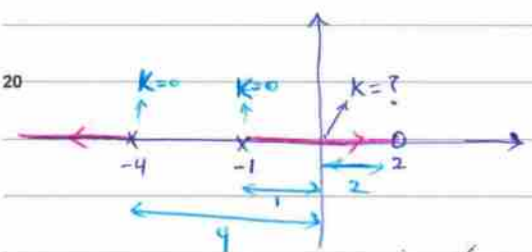
فرکانس نوسانات

$$|K| = \frac{1}{|GH(s_1)|} = \frac{L_{P_1} L_{P_2} L_{P_3} \cdots}{L_{z_1} L_{z_2} \cdots} = \frac{1.5 \times 0.5 \times 0.5}{1} = 3/8 \rightarrow$$

در نقطه $s=-1.5$

مرز پایداری $|K| = \dfrac{\sqrt{11} \times \sqrt{\frac{1}{11}+1} \times \sqrt{\frac{1}{11}+4} \times \sqrt{\frac{1}{11}+9}}{1}$

مثال) در سیستم زیر با مکان هندسی رسم شده، حدود پایداری را بررسی کنید.



$$|K| = \frac{1 \times 4}{2} = 2$$

شرط پایداری : $0 < K \le 2$

همانطور که مشاهده می‌کنید با افزایش مقدار K قطب‌های حلقه بسته یکی به سمت $-\infty$ و دیگری از 1- به سمت راست محور [illegible] در حرکت است. پس برای بررسی پایداری مقدار K مرز پایداری را با استفاده از شرط اندازه

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

محاسبه می‌کنیم و می‌بینیم که سیستم برای پایداری نباید متغیر k بزرگتر از K مرز پایداری باشد.

ویژگی ها و قواعد رسم مکان ریشه ها:

مکان هندسی رسم شده، مکان قطب های **حلقه بسته** است که با استفاده از تابع تبدیل و صفر و قطب های حلقه باز رسم می شود.

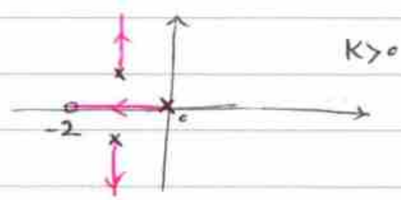
قبل از ورود به قواعد رسم مکان هندسی فرم معادله مشخصه باید به فرم استاندارد $\Delta(s)=1+KF(s)$ باشد.

۱) نقاط شروع و نقاط ختم: مکان هندسی فیدبک مثبت و منفی

الف) به ازای $K>0$ از قطب های حلقه باز ($F(s)$) شروع شده و به صفرها ختم می شود.

ب) به ازای $K<0$ از صفرهای " " " " و به قطب ها " " .

مثال) $\Delta(s)=1+K\frac{s+2}{(s^2+2s+2)(s)}$



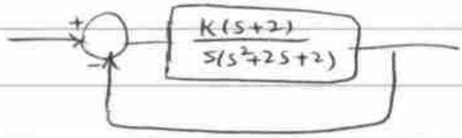
3 شاخه دارد. (2 شاخه در بی نهایت)

نکته: همواره در هر سیستمی تعداد صفر و قطب ها (محدود و نامحدود) با یکدیگر برابرند. یعنی به عنوان مثال در سیستم بالا یک صفر محدود در $s=-2$ داریم و ۳ قطب محدود در $s=0$ و $s=-1\pm j$ قرار دارد. پس با توجه به نکته گفته شده می توان نتیجه گرفت که جهت برابری صفر و قطب ها باید دو صفر در بی نهایت داشته باشیم.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

نکته: مکان هندسی رسم شده از صفر و قطب های حلقه باز کمک گرفته ولی مکان قطب های حلقه بسته را نشان می دهد.

$$T(s) = \frac{k(s+2)}{\underbrace{s(s^2+2s+2)+k(s+2)}_{\Delta(s)\ \text{تابع حلقه بسته}}}$$



2) تعداد شاخه های مکان ریشه: تعداد شاخه های مکان ریشه های معادله مشخصه $\Delta(s)=1+KF(s)$ با مرتبه $F(s)$ برابر است.

نکته: اگر تابع $F(s)$ تعداد n قطب محدود و m صفر محدود داشته باشد. با توجه به نکته 1

اگر $n>m$ باشد تعداد $n-m$ صفر در بی نهایت دارد

اگر $n<m$ باشد تعداد $m-n$ قطب در بی نهایت دارد.

درنتیجه تعداد $|n-m|$ شاخه مکان ریشه های مثبت یا منفی در بی نهایت ختم می شود.

3) تقارن مکان ریشه های کامل: مکان ریشه های کامل نسبت به محور تقارن آرایش صفر و قطب $F(s)$ متقارن است.

نکته: اگر ضرایب معادله مشخصه $1+kF(s)$ حقیقی باشند، ریشه ها حقیقی یا مختلط مزدوج هستند و محل صفر و قطب ها نسبت به محور حقیقی متقارن است. بنابراین:

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

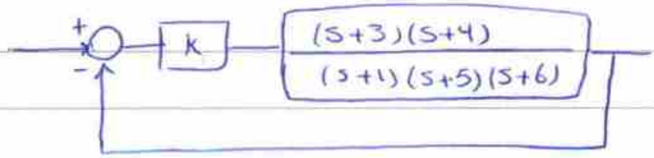
نکته : مکان ریشه های کامل نسبت به محور حقیقی صفحه s متقارن است.

۴) مکان ریشه ها روی محور حقیقی :

الف) مکان ریشه های مثبت $(K>0)$ بخش هایی از محور حقیقی را در بر می گیرد که تعداد کل صفر و قطب های $F(s)$ در طرف راست این بخش فرد باشد. (برای فیدبک منفی)

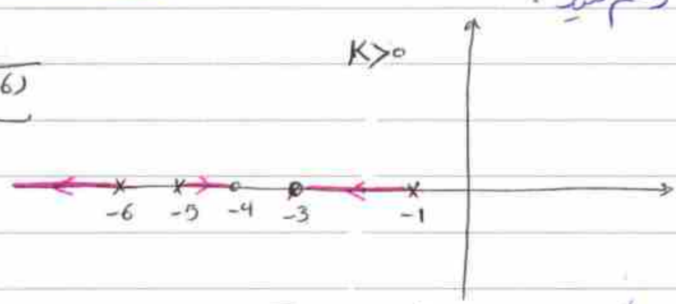
ب) مکان ریشه های منفی $(K<0)$ بخش هایی از محور حقیقی را در بر می گیرد که تعداد کل صفرها و قطب ها $F(s)$ در طرف راست این بخش زوج باشد. (برای فیدبک منفی)

مثال) مکان هندسی سیستم زیر را رسم کنید.

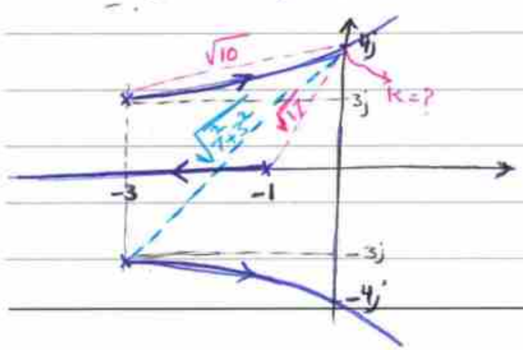


$$\Delta(s) = 1 + K\underbrace{\frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+5)(s+6)}}_{F(s)}$$

$K>0$



مثال) مکان هندسی ریشه های سیستمی بصورت زیر است. حدود K برای پایداری را بیابید.



$$1 + KGH(s) = 0$$

$$|K| = \frac{1}{GH(s)} = \frac{\sum L_{p_i}}{\sum L_{z_i}}$$

$$|K| = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{17} \times \sqrt{58}}{1}$$

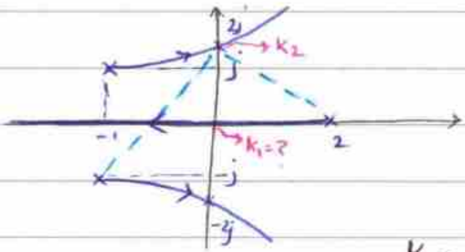
که صفر نداریم

$$\boxed{0 < K < \sqrt{}}$$

شرط پایداری

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) مکان هندسی ریشه های سیستمی به صورت زیر است. حدود K را برای پایداری بیابید.



اگر بتوانیم $K_1 < K < K_2$ داشته باشیم در آن صورت است که سیستم پایدار باشد.

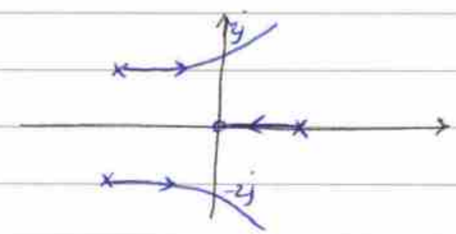
$$K_1 = \frac{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{1} = 4$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{2^2+2^2}\times\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{3^2+1^2}}{1} = \sqrt{10}\,\sqrt{2}\,\sqrt{8} = 4\sqrt{10}$$

$\boxed{4 < K < 4\sqrt{10}}$ شرط پایداری

جهت پایداری این سیستم باید شاخه های روی محور حقیقی $K > K_1$ سمت چپ محور jω قرار بگیرد و همچنین شاخه های که به سمت بی نهایت حرکت می کند باید به ازای $K < K_2$ سمت راست محور jω نرود به همین منظور K_1 و K_2 را که متناظر با پایداری مرزی می باشد را با استفاده از شرط اندازه محاسبه می کنیم. در صورتی که شرط $K_1 < K < K_2$ برقرار نباشد سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

مثال) مکان هندسی ریشه های سیستمی به صورت زیر است. حدود K را برای پایداری بیابید.



این سیستم همواره یک شاخه سمت راست محور jω دارد و به ازای هیچ مقداری از K مکان هندسی روی محور حقیقی سمت چپ محور jω قرار نمی گیرد.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

5) مجانب های مکان ریشه ها: مکان ریشه ها به ازای اختلاف درجه‌ی $F(s)$ شاخه به سمت بی‌نهایت دارد (به اندازه‌ی تعداد $|n-m|$). زاویه‌ی این شاخه‌ها را زاویه‌ی مجانب تعیین می‌کند. البته مکان مجانب نیز حائز اهمیت است.

زاویه مجانب (فیدبک منفی):

$$\theta_A = \frac{(2q+1)\pi}{|n-m|}$$

$|n-m| \longrightarrow$ اختلاف درجه مخرج و صورت $F(s)$

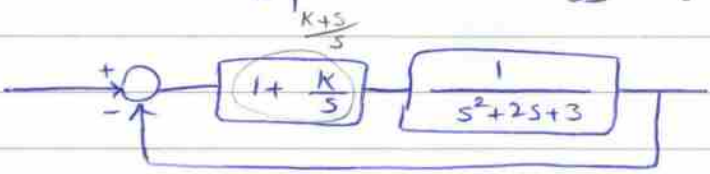
زاویه مجانب (فیدبک مثبت):

$$\theta_A = \frac{2q\pi}{|n-m|}$$

مکان مجانب:

$$\sigma_A = \frac{\sum Re\,p_i - \sum Re\,z_i}{|n-m|} = \frac{\sum \text{قسمت حقیقی قطب‌ها} - \sum \text{قسمت حقیقی صفرها}}{|n-m|}$$

مثال) مکان هندسی سیستم زیر را به ازای تغییرات k از 0 تا ∞ رسم کنید.

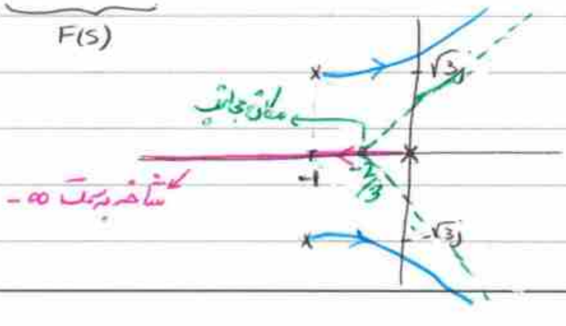


استاندارد کردن: $\Delta(s) = s(s^2+2s+3)+K+s = 0$

$\div\, s(s^2+2s+3)+s \longrightarrow \Delta(s) = 1 + K\underbrace{\frac{1}{s(s^2+2s+4)}}_{F(s)} = 0 \longleftarrow$ فرم استاندارد

$|3-0|=3$ شاخه به سمت ∞ داریم.

$$\theta = \frac{(2q+1)\pi}{3-0} = \frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3},\ \pi$$



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

قطب روی محور — قطب $-1 \pm \sqrt{3}j$ — صفر نداریم

$$\sigma_A = \frac{0 + (-1) + (-1) - \sum 0}{3 - 0} = \frac{-2}{3}$$

نکته : بدست آوردن مجموع قسمت حقیقی ریشه های یک چندجمله ای از درجه n

اگر چندجمله ای به فرم تجزیه شده نباشد و تجزیه این چندجمله ای غیرعملی باشد از رابطه زیر با توجه به جمله ی دوم چندجمله ای از درجه n می توان مجموع قسمت حقیقی ریشه های چندجمله ای را محاسبه کرد .

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0$$

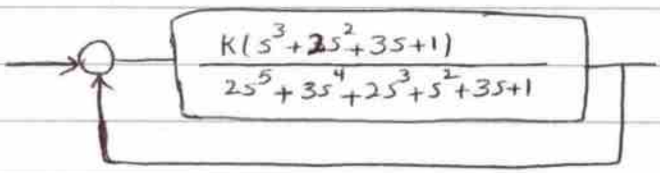
$$P(x) \text{ ریشه های } = \text{ مجموع قسمت حقیقی } = \sum Re\, x_i = -a_{n-1}$$

توجه شود که ضریب x^n (بالاترین ریشه عبارت) باید حتماً یک باشد تا رابطه ی بالا صدق کند .

مثال) $5s^5 + 4s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s + 1 \xrightarrow{\div 5} s^5 + \frac{4}{5} s^4 + \frac{3}{5} s^3 + \frac{1}{5} s^2 + \frac{2}{5} s + \frac{1}{5}$

$-\frac{4}{5} \longrightarrow$ مجموع قسمت حقیقی ریشه ها

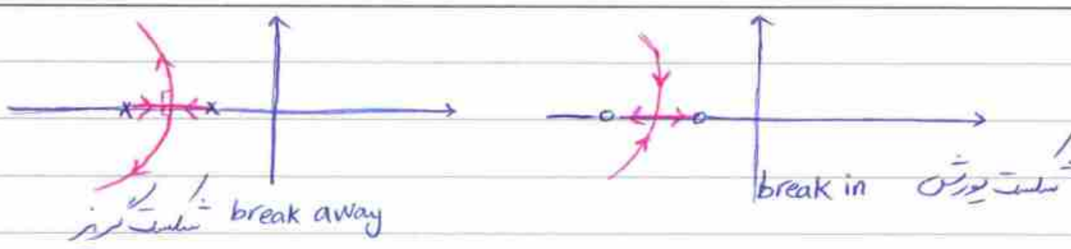
مثال



$$\sigma = \frac{\sum Re\, P_i - \sum Re\, Z_i}{|n-m|} \rightsquigarrow \sigma_A = \frac{-\frac{3}{2} - 2}{5 - 3}$$

6) نقاط شکست یا نقاط زینی : نقطه شکست روی مکان ریشه های معادله مشخصه ی $1 + KF(s) = 0$ نشان دهنده ی ریشه های مکرر معادله می باشند .

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com



در نقطه‌ی شکست $F(s)$ ریشه‌ی مکرر دارد یعنی هم $1+KF(s_1)=0$ و هم $KF'(s_1)=0$ که s_1 نقطه‌ی شکست می‌باشد. **بنابراین** نقاط شکست روی مکان ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی $1+KF(s)=0$ ریشه‌های $F'(s)=0$ یا $\frac{dF(s)}{ds}=0$ می‌باشد و به شرطی که در $1+KF(s)=0$ صدق کند.

نکته: برای محاسبه‌ی نقاط شکست به طور کلی می‌توان گفت ابتدا جواب $\frac{dF(s)}{ds}=0$ یا $\frac{dGH(s)}{ds}=0$ را یافته و به ازای نقاط شکست بدست آمده K را از فرمول $K=\frac{-1}{F(s)}$ یا $K=\frac{-1}{GH(s)}$ محاسبه می‌کنیم. اگر K مقدار حقیقی بدست آمد نقطه بدست آمده، نقطه شکست می‌باشد.

نکته: اگر نقطه‌ی شکست محاسبه شده از $\frac{dF(s)}{ds}$ روی محور حقیقی و روی مکان هندسی قرار داشت نیازی به چک کردن حقیقی بودن K نیست و نقطه‌ی شکست بدست آمده صحیح می‌باشد.

روش دوم برای محاسبه‌ی نقاط شکست:

$$D(s)=1+KF(s)=0 \rightsquigarrow K=\frac{-1}{F(s)}=\frac{-1}{GH(s)}$$

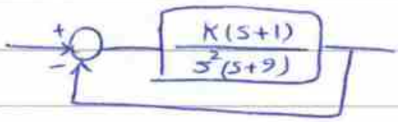
نقاط شکست $\frac{dK}{ds}=0$

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

توصیه: در هر یک از روش‌های تعیین نقاط شکست، جواب‌های بدست آمده زمانی نقاط شکست می‌باشند که در معادله‌ی مشخصه $\Delta(s)=1+KF(s)=0$ صدق کنند.

مثال) تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد به صورت زیر است. به ازای کدام مقدار K هر 3 ریشه‌ی سیستم حلقه بسته حقیقی و برابر خواهند بود؟

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$$



منظور بدست آوردن K متناظر با نقطه‌ی شکست می‌باشد چرا که سؤال گفته هر 3 ریشه حقیقی و برابر باشند یعنی هر 3 شاخه‌ی مکان هندسی به ازای آن K در یک نقطه با یکدیگر برخورد کنند.

$$K=\frac{-1}{F(s)}=\frac{-1}{GH(s)}=-\frac{s^2(s+9)}{s+1}$$

$$\frac{dK}{ds}=0 \longrightarrow \left(2s(s+9)+s^2\right)(s+1)-s^2(s+9)=0$$

$$\longrightarrow (s+3)^2=0 \Rightarrow \boxed{s=-3}$$

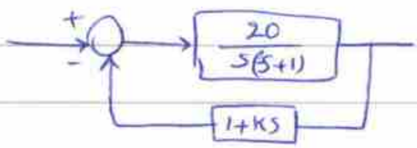
در تست می‌توان از گزینه‌ها استفاده کرد. مقادیر گزینه‌ها را در جواب جای گذاریم اگر صدق کرد آن نقطه، نقطه شکست است. در این مسئله $s=-3$ در صورتی نقطه شکست است که در $1+KF(s)=0$ صدق کند و K متناظر با آن حقیقی بدست آید.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$1+KF(s)=0\Big|_{s=-3} \rightsquigarrow 1+K\frac{(-3+1)}{(-3)^2(-3+9)}=0 \rightsquigarrow K=-27$$

مقدار حقیقی منفی بدست آمد یعنی نقطه شکست برای مکان $K<0$ قبول است.

مثال) نقاط شکست مکان ریشه سیستم زیر را به ازای تغییرات K از ۰ تا ∞ رسم کنید.



استاندارد کردن : $\Delta(s)=s^2+(1+20K)s+20=0$

$$\rightarrow s^2+s+20Ks+20=0 \xrightarrow{\div\, s^2+s+20} 1+\frac{K\,20s}{s^2+s+20}=0$$

$$F(s)=\frac{20s}{s^2+s+20} \rightsquigarrow K=\frac{-(s^2+s+20)}{20s} \rightsquigarrow \frac{dK}{ds}=(2s+1)(20s)-20(s^2+s+20)=0$$

$$\longrightarrow 20s^2-400=0 \rightsquigarrow s=\pm\sqrt{20}$$

$K\Big|_{s=\sqrt{20}}=-\frac{20+\sqrt{20}+20}{20\sqrt{20}}<0$ برای $s=\sqrt{20}$ و $K<0$ نقطه شکست است.

$K\Big|_{s=-\sqrt{20}}=-\frac{20-\sqrt{20}+20}{-20\sqrt{20}}>0$ برای $s=-\sqrt{20}$ و $K>0$ نقطه شکست است.

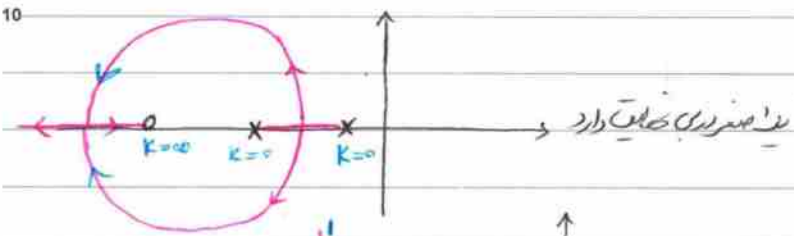
تعیین کیفی نقاط شکست : اگر شاخه‌ای از مکان هندسی ریشه‌ها بین دو قطب حلقه باز مجاور واقع بر محور حقیقی باشد بین آن دو قطب حداقل یک نقطه شکست گریز داریم $(K>0)$ و برای $K<0$ نقطه شکست ورود داریم.

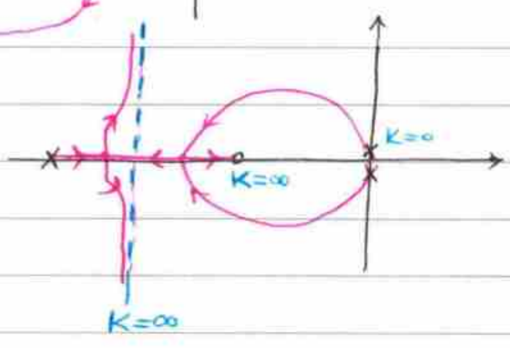
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

اگر شاخه‌های از مکان هندسی بین دو صفر حلقه باز مجاور واقع بر محور حقیقی باشد (که یکی می‌تواند در ∞ باشد) بین آن دو صفر می‌تواند یک نقطه شکست قرار بگیرد.

اگر شاخه‌ای از مکان هندسی بین یک صفر (محدود یا نامحدود) و یک قطب حلقه باز مجاور واقع بر محور حقیقی که (یکی می‌تواند در ∞ باشد) قرار داشته باشد، ممکن است روی آن نقطه شکستی وجود نداشته باشد یا دو نقطه‌ی شکست وجود داشته باشد.

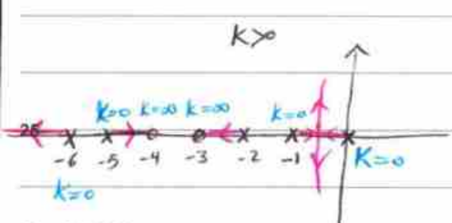
مثال)

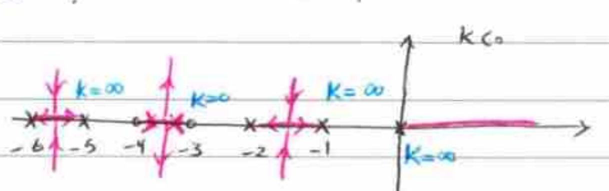




مثال) اگر تابع تبدیل حلقه باز با فیدبک واحد به صورت $GH(s) = K\dfrac{(s+3)(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+5)(s+6)}$ باشد

در مورد تعداد نقاط شکست به ازای $K>0$ و $K<0$ بحث کنید.





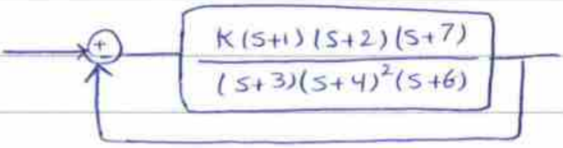
Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

نکته : اگر محل صفر و قطب های $F(s)$ را بدانیم می توانیم به جای دو رابطه ی قبلی برای محاسبه ی نقطه ی شکست از رابطه ی زیر استفاده کرد تا درگیر مشتق گیری نشویم :

اگر نقطه ی شکست را b بنامیم باید در رابطه ی زیر صدق کند :

$$\sum_i \frac{1}{b-z_i} = \sum_j \frac{1}{b-p_j}$$

مثال) نقطه شکست سیستم زیر را محاسبه کنید .



$$1+KF(s)=0 \rightsquigarrow 1+K\frac{(s+1)(s+2)(s+7)}{(s+3)(s+4)^2(s+6)}=0$$

$$\sum_i \frac{1}{b-z_i} = \sum_j \frac{1}{b-p_j} \Rightarrow \frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{b+7}=\frac{1}{b+3}+\frac{1}{b+4}+\frac{1}{b+4}+\frac{1}{b+6}$$

با جایگذاری مقادیر موجود در گزینه مقدار b را بدست می آوریم .

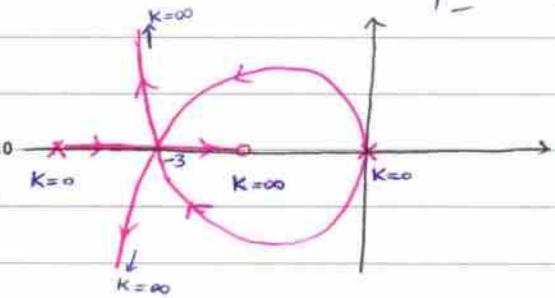
نکته : نقطه شکست مختلط در صورتی داریم که :

۱) معادله مشخصه حداقل از درجه ی 4 باشد . (چرا که حداقل دو جفت قطب مختلط باید وجود داشته باشد تا دو شاخه از قطب ها بالای محور حقیقی به یکدیگر برخورد کنند و همچنین دو شاخه قطب مزدوج باید پایین محور حقیقی به یکدیگر برخورد کنند .)

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

2) نقطه شکست بدست آمده در معادله‌ی $K=\frac{-1}{F(s)}$ ، K حقیقی نتیجه دهد.

نکته: اگر سیستم قطب مکرر مرتبه‌ی 3 داشته باشد، می‌توان گفت به ازای مقداری از K نقطه‌ی شکست مرتبه‌ی 3 داریم (یعنی سه شاخه از مکان هندسی در یک نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند.) در صورتی که مشتق $\frac{dK}{ds}=0$ از مرتبه‌ی 2 باشد، یعنی قطب مکرر مرتبه‌ی 3 داریم.



$$\begin{cases} \left.\frac{dk}{ds}\right|_{s=-3}=0 \\ \left.\frac{d^2k}{ds^2}\right|_{s=-3}=0 \end{cases}$$

$$(s+3)^2(s+1)+(s+2)(s+3)^2=0$$

$$\hookrightarrow (s+3)^2(s+1+s+2)=0$$

$$\underline{L}\quad 1+KF(s)=0 \longrightarrow \begin{cases} \frac{dF(s)}{ds}=0 \\ \frac{d^2F(s)}{ds^2}=0 \end{cases}$$

7) زوایای ورود و خروج از صفر و قطب‌ها

اگر صفر یا قطب مختلط داشته باشیم برای رسم مکان هندسی باید به زاویه‌ی خروج از قطب به ازای $K>0$ و ورود به صفر ($K>0$) توجه کنیم. برای محاسبه‌ی این زوایا می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.

زاویه قطب (φ):

$\varphi=(2q+1)\pi+\sum\theta_i-\sum\varphi_i$ فیدبک منفی

$\varphi=(2q)\pi+\sum\theta_i-\sum\varphi_i$ فیدبک مثبت

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

زاویه صفر (θ) :

$$\theta = (2q+1)\pi + \sum \varphi_i - \sum \theta_i$$ فیدبک منفی

$$\theta = (2q)\pi + \sum \varphi_i - \sum \theta_i$$ فیدبک مثبت

$\sum \varphi_i$: یعنی مجموع زوایای رسم شده از سایر قطب ها به سمت نقطه ی آزمون (صفر یا قطب مورد نظر)

$\sum \theta_i$: مجموع زوایای رسم شده از سایر صفرها به سمت نقطه ی آزمون (صفر یا قطب مورد نظر)

نکات :

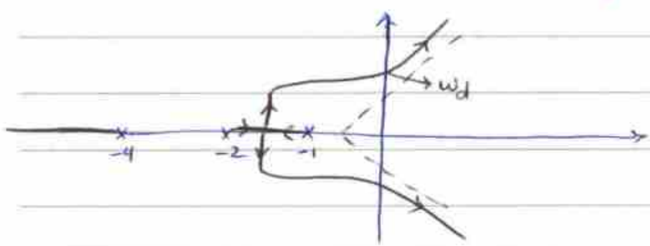
1- اگر F(s) قطب و صفر مکرر داشته باشند، برای محاسبه ی زاویه ی ورود و خروج کافی است در سمت چپ روابط بالا مرتبه ی تکرار (n) ضرب کنیم.

$$n\varphi = \underset{2q\pi}{(2q+1)\pi} + \sum \theta_i - \sum \varphi_i$$ هرچی بدست آمد بعد تقسیم بر n می کنیم

$$n\theta = \underset{2q\pi}{(2q+1)\pi} + \sum \varphi_i - \sum \theta_i$$

2- اگر F(s) صفر و قطب مختلط مزدوج داشت، محاسبه ی زاویه ی خروج یکی از صفر و قطب ها کفایت می کند. با توجه به تقارن مکان هندسی می توان زاویه ی قطب یا صفر مزدوج را حساب کرد.

8) تعیین محل برخورد مکان هندسی با محور $j\omega$:



Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

K محل برخورد با محور حقیقی را با توجه به روابط و فرمول های تئوری مربوط به شرط نوسانی بودن محاسبه می کنیم و سپس با استفاده از K بدست آمده از معادله ی مشخصه ی حلقه بسته را ($\overbrace{1+KF(s)}^{\Delta(s)}$) تشکیل داده و فرکانس نوسانات را بدست می آوریم.

$\Delta(s) = 1 + KF(s) = 0$

$K \rightsquigarrow$ K را برای نوسانی شدن محاسبه می کنیم

فرکانس نوسان را که محل برخورد با محور موهومی است را بدست می آوریم. $\leftarrow$ $\Delta(s) = 1 + KF(s) = 0$

تشخیص فیدبک مثبت و منفی برای مکان هندسی:

جهت حرکت مکان هندسی:

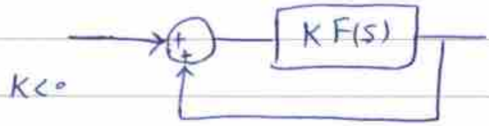
$\times \longrightarrow \circ$ (بدون توجه به علامت فیدبک) $K>0$

$\times \longleftarrow \circ$ (بدون توجه به علامت فیدبک) $K<0$

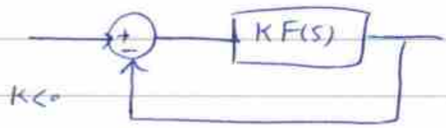
* منظور از فیدبک مثبت و فیدبک منفی برای محاسبه ی زاویه ی جانب و زوایای ورود و خروج به صفر و قطب ها:

علامت K × علامت فیدبک = فیدبک مثبت / فیدبک منفی

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com



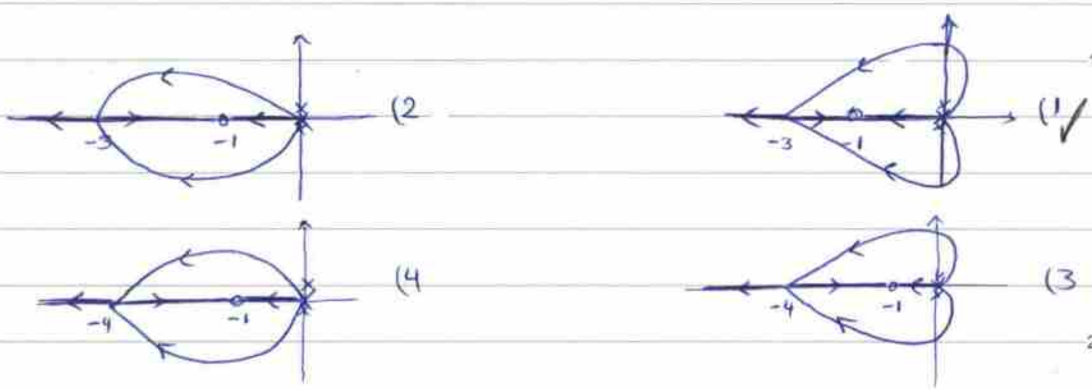
علامت فیدبک + و K<0 ⇐ فیدبک منفی است



علامت فیدبک − و K<0 ⇐ فیدبک مثبت است

توصیه: هرگاه علامت فیدبک در سوال مشخص نبود، فیدبک را منفی در نظر می گیریم.

مثال) کنکور 86 تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی به صورت $GH=\frac{K(s+1)^2}{s^3}$ می باشد. مکان ریشه ها حلقه بسته این سیستم به ازای K>0 کدام است؟



بررسی پایداری:

گزینه 2 و 4 همواره پایدار، گزینه 1 و 3 به ازای برخی از مقادیر K پایدار می باشند و تفاوت دیگر گزینه‌ها در نقطه‌ی شکست −3 و −4 می باشد.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

$$\Delta(s) = 1 + K\frac{(s+1)^2}{s^3} = s^3 + Ks^2 + 2Ks + K = 0$$

حرفی از فیدبک در سوال نزده ← فیدبک واحد و منفی در نظر می گیریم.

$(2k)k > K$ ← همواره برقرار است پس این سیستم به ازای $k>\frac{1}{2}$ پایدار است. به ازای $k>\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2k^2 - k > 0$

	0		$\frac{1}{2}$	
$+$		$-$		$+$

تفاوت گزینه‌ی 2 و 4 در نقطه‌ی شکست است و از آنجایی که محل صفر و قطب ها مشخص است برای محاسبه‌ی نقطه‌ی شکست از رابطه‌ی زیر استفاده می کنیم:

$$\sum_i \frac{1}{b-z_i} = \sum_j \frac{1}{b-p_j}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{b-(-1)} + \frac{1}{b-(-1)} = \frac{1}{b-0} + \frac{1}{b-0} + \frac{1}{b-0} \rightsquigarrow \frac{2}{b+1} = \frac{3}{b} \rightarrow \boxed{b=-3}$$

روش دوم: برای انتخاب گزینه‌ی 1 و 3 یا 2 و 4

زاویه‌ی خروج از قطب مکرر روی صفر: $3\varphi = (2q+1)\pi + \sum \theta_i - \sum \varphi_i$

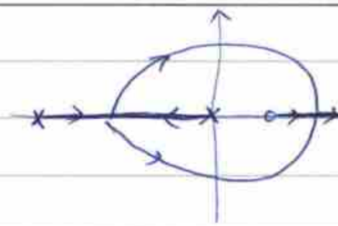
$$= (2q+1)\pi + 0 + 0 \rightsquigarrow \varphi = \pi/3,\ \pi,\ -\pi/3$$

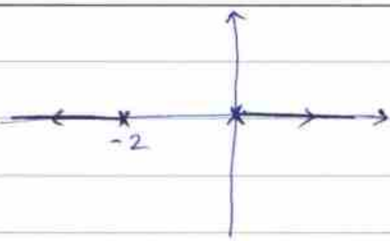
یا گزینه‌ی 1 و یا گزینه 3 درست می باشد اما چون $b=-3$ بدست آمد پس گزینه‌ی 1 درست است.

کنکور 86) مکان هندسی ریشه‌های تابع تبدیل حلقه بسته‌ی سیستمی با فیدبک واحد منفی و تابع تبدیل حلقه باز

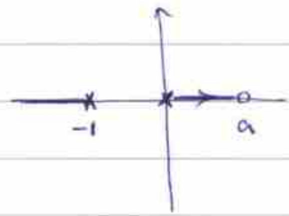
$G(s) = \frac{s-a}{s(s+1)}$ به ازای تغییرات a چه کدام گزینه است؟

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

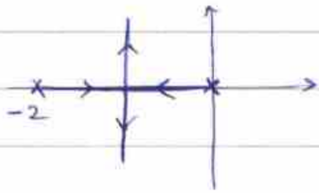

(1



(2



(3



(4

$\Delta(s) = s^2 + 2s - a = 0 \longrightarrow \Delta(s) = 1 + \frac{-a}{s^2+2s} = 0$

گزینه‌ی 2 یا 4 می‌تواند صحیح باشد با توجه به صفر و قطب های $F(s)$

روش اول :

می‌توانیم $-a$ را K فرض کرده و مکان هندسی را به ازای $K<0$ بررسی کنیم که در این حالت قسمتی از محور حقیقی که تعداد زوج قطب و صفر سمت راست آن وجود دارد جزء مکان محسوب می‌شود و گزینه‌ی 2 جواب است .

روش دوم : با تشکیل $\Delta(s)$ و بررسی پایداری می‌توانیم ببینیم که سیستم به ازای تمام مقادیر مثبت a ناپایدار است :

$\Delta(s) = s^2 + 2s - a = 0$

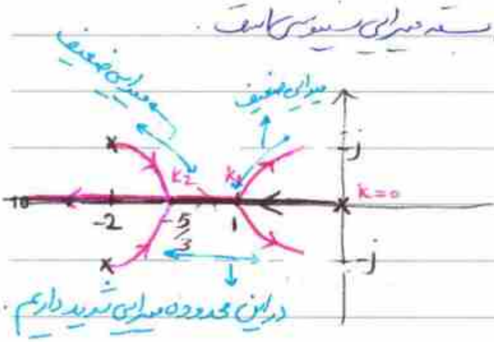
پس می‌توان نتیجه گرفت با توجه به ناپایداری سیستم گزینه‌ی 2 جواب می‌باشد .

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

تست ۶) در چه بازه‌ای از K پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s^2+4s+5)}$ میرایی شدید می‌باشد؟

۱) $0<K\le 2$ ۲) $\frac{50}{27}\le K\le 2$ ✓ ۳) $1\le K\le \frac{5}{3}$

۴) به ازای هر مقدار $0<K<20$ پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته میرایی سینوسی کاسته.



$$\frac{dGH}{ds}=0 \longrightarrow s^2+4s+5+s(2s+4)=0$$

$$\longrightarrow 3s^2+8s+5=0 \;\begin{cases} s_1=-1 \\ s_2=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

راه دوم:

$$1+k\overbrace{GH}^{F(s)}=0 \rightsquigarrow k=\frac{-1}{F(s)} \rightsquigarrow \frac{dk}{ds}=0 \rightsquigarrow \begin{cases} s_1=-1 \\ s_2=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

$$\frac{dk}{ds}=-\left(s(s^2+4s+5)\right)'$$

$$K_1=\frac{\prod L_{P_i}}{\prod L_{Z_i}}=\frac{1\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{1}=2$$

میرایی شدید $K_2<K<K_1 \rightsquigarrow \frac{50}{27}\le k\le 2$

پس از مشاهده‌ی $F(s)$ می‌بینیم که سیستم مرتبه‌ی 3 می‌باشد و نمی‌توانیم $\Delta(s)$ را تشکیل دهیم و از روی آن با توجه به ζ و پارامترهای سیستم مرتبه 2 شرط میرایی شدید را برقرار کنیم. پس با استفاده از مکان هندسی و رسم تقریبی شکل مقادیر K را تعیین کنیم.

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

Subject:
page: ( ) Year: Month: Day: ( )

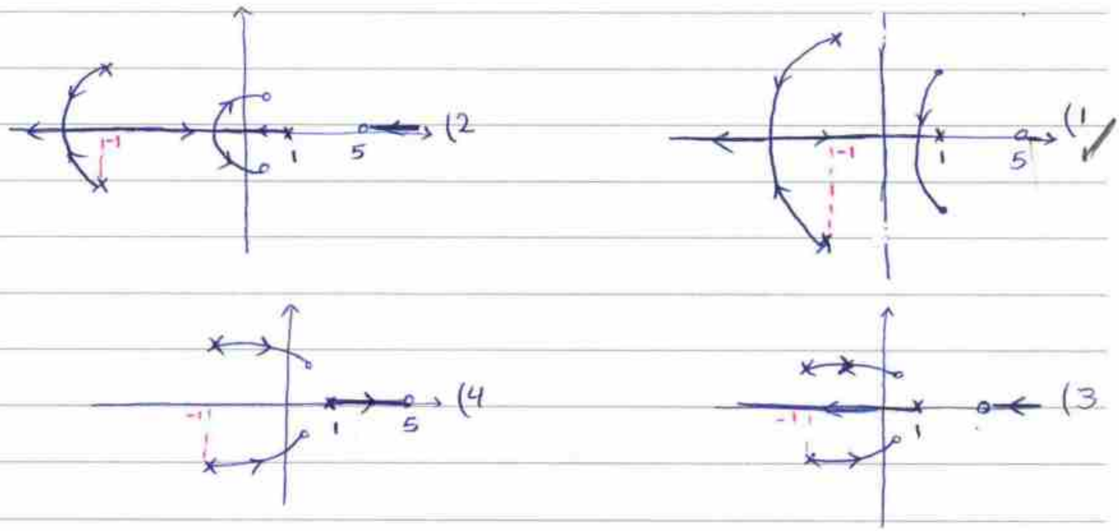
یادآوری: بین یک قطب و یک صفر در بی نهایت یا نقطه ی شکست نداریم و یا اگر داریم 2 تا نقطه ی شکست داریم. پس وجود نقطه ی شکست را بررسی می کنیم. برای میرایی شدید باید تمامی قطبها روی محور حقیقی و غیر تکراری باشند.

(جزوه)

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

کنکور ۹۱) سیستم فیدبک واحد زیر را با $G(s)=\dfrac{(s-5)(s^2-s+1.25)}{(s-1)(s^2+2s+5)}$ در نظر بگیرید. مکان هندسی ریشه‌ها

برای تغییرات $K>0$ کدام گزینه است؟



$K>0$ و علامت فیدبک + ← فیدبک مثبت است. ← باید تعداد زوج صفر و قطب

سمت راست محور حقیقی روی مکان هندسی باشد. ← گزینه 4 رد می‌شود.

$$\frac{dG}{ds}=\Big((s^2-s+1.25)+(s-5)(2s-1)\Big)(s-1)(s^2+2s+5)-$$

$$\Big((s^2+2s+5)+(s-1)(2s+2)\Big)(s-5)(s^2-s+1.25)=0$$

توضیح: همانطور که مشاهده می‌کنید ساده کردن عبارت بالا کار بسیار سخت و زمان‌بری است ولی

از آنجایی که تفاوت گزینه‌ها در وجود نقطه‌ی شکست بین صفر و یک و وجود نقطه‌ی شکست بین صفر و ۱-

و گزینه‌ای که نقطه‌ی شکست ندارد، می‌باشد می‌توانیم به جای ساده سازی از قضیه‌ی زیر استفاده کنیم:

Eng.Tavasoli
hadi.tavasoli@gmail.com

قضیه‌ی مقدار میانی: اگر $f(x)$ بین a و b ریشه داشته باشد باید $f(a)f(b)<0$ باشد.

$f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$ → باید این مقادیر را بدست آوریم $\Rightarrow$ $f(1)f(0)<0$ ⟶ گزینه ۱ صحیح است ✓

$f(-1)f(0)>0$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

تحلیل سیستم‌های کنترل در حوزه فرکانس :

اگر $r(t) = A\sin(\omega t+\theta)$ باشد، $s=\sigma+j\omega$ ، σ مربوط به حالت گذرا و ω مربوط به حالت دائمی می‌باشد. پس برای بررسی پاسخ به ورودی سینوسی باید sهای در تابع تبدیل سیستم را $j\omega$ در نظر بگیریم یعنی $\sigma=0$ قرار می‌دهیم. در نتیجه:

$$G(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$$

$$G(j\omega) = F\{g(t)\}$$

$$A\sin(\omega_0 t+\theta) \longrightarrow \boxed{G(j\omega)} \longrightarrow M A\sin(\omega_0 t+\theta+\varphi)$$

اندازه تابع تبدیل فرکانسی در فرکانس ω_0

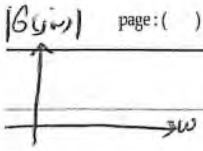
$M = |G(j\omega_0)|$ $\qquad$ $\varphi = \angle G(j\omega_0)$

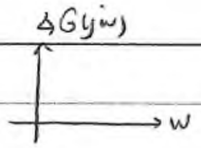
M اندازه‌ی پاسخ فرکانسی و φ فاز تابع تبدیل در حوزه فرکانس است. یعنی به طور کلی می‌توان گفت اگر ورودی دائمی سینوسی وارد یک سیستم LTI شود، خروجی هم یک سینوسی با همان فرکانس ورودی بوده و فقط اندازه و فاز ورودی تحت تأثیر اندازه و فاز تابع تبدیل قرار می‌گیرد.

روش‌های نمایش پاسخ فرکانسی :

۱- دیاگرام بود : در این روش اندازه‌ی پاسخ فرکانسی روی یک نمودار برحسب دسی‌بل

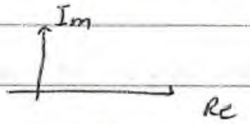
Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



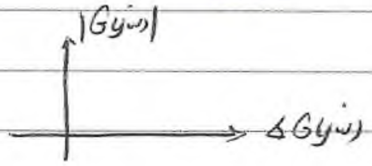


و فاز پاسخ فرکانسی روی نمودار دیگر رسم می‌شود.

2_ دیاگرام نایکوئیست: در این دیاگرام روی یک نمودار پاسخ فرکانسی با Real (مقدار حقیقی) و Im (مقدار موهومی) رسم می‌شود. (مقدار ω مشخص نیست)



3_ دیاگرام دامنه برحسب فاز (نیکولز): در این روش اندازه و فاز پاسخ فرکانسی روی یک نمودار مشخص می‌شود (مقدار ω مشخص نیست)

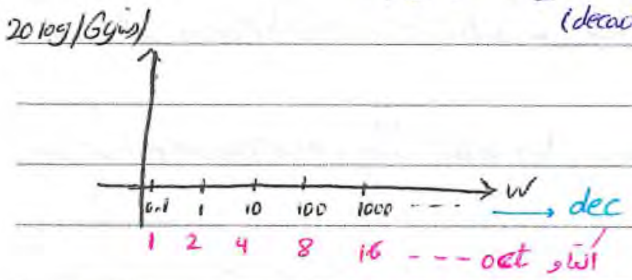


رسم دیاگرام بود:

در نمودار دیاگرام بود اندازه‌ی تابع تبدیل حلقه باز و فاز تابع تبدیل حلقه باز را رسم می‌کنیم که اندازه پاسخ فرکانسی را برحسب dB رسم می‌کنیم.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$$

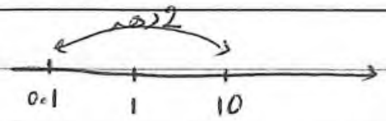
در نمودارهای بود نسبت های فرکانسی برحسب دهه یا اکتاو می باشد.
(decade)



پاسخ فرکانسی:

$$G(j\omega) = \underbrace{|G(j\omega)|}_{\text{اندازه پاسخ فرکانسی}} \, e^{j\underbrace{\angle G(j\omega)}_{\text{فاز پاسخ فرکانسی}}}$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



$$\log_{10} \frac{10}{0.1} = \log_{10} 100 = 2\log_{10} 10 = 2$$

توجه: نمودار بود از فرکانس صفر شروع نمی‌شود.

شیب خطوط مستقیم در نمودار بود اگر محور ω برحسب دهه بود به صورت $\frac{dB}{dec}$ و اگر محور ω برحسب اکتاو بود شیب خطوط برحسب $\frac{dB}{oct}$ است.

$$20\log_{10}\frac{w_2}{w_1} = 20\times 0.3\log_2\frac{w_2}{w_1} = 6\log\frac{w_2}{w_1}$$

$$\boxed{20\frac{dB}{dec} = 6\frac{dB}{oct}} \qquad \boxed{40\frac{dB}{dec} = 12\frac{dB}{oct}} \qquad \boxed{60\frac{dB}{dec} = 18\frac{dB}{oct}}$$

رسم نمودارهای بود

$$GH(s) = K\frac{\prod_i (s^2 + 2\xi_i\omega_{n_i}s + \omega_{n_i}^2)\prod_i (s+Z_i)}{\prod_j (s^2 + 2\xi_j\omega_{n_j}s + \omega_{n_j}^2)\prod_j (s+P_j)}$$

$$= \frac{KZ_i\,\omega_{n_i}^2 \prod_i \left(\left(\frac{s}{\omega_{n_i}}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_{n_i}}s + 1\right)\prod_i\left(1+\frac{s}{Z_i}\right)}{\omega_{n_j}^2 P_j \prod_j \left(\left(\frac{s}{\omega_{n_j}}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_{n_j}}s + 1\right)\prod_j\left(1+\frac{s}{P_j}\right)}$$

برحسب ثابت زمانی

$$\xrightarrow{s=j\omega} GH(j\omega) = \frac{K'\prod\overbrace{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega\right)}^{\text{صفر مرتبه 2}}\prod\overbrace{\left(1+\frac{j\omega}{Z_i}\right)}^{\text{صفر مرتبه 1}}}{\prod\underbrace{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega\right)}_{\text{قطب مرتبه 2}}\prod\underbrace{\left(1+\frac{j\omega}{P_j}\right)}_{\text{قطب مرتبه 1}}}$$

برحسب ثابت زمانی

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

Subject:
Year : Month : Day : (

بهره — صفر مرتبه اول — صفر مرتبه دوم

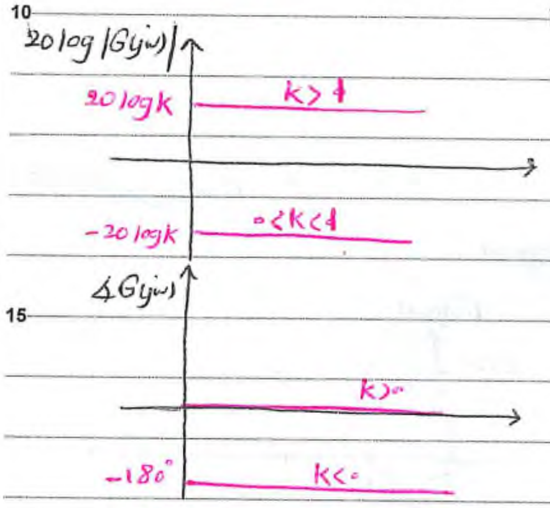
$$GH(j\omega) = \frac{2(j\omega+1)\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)^2\left(1-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2+\frac{j\omega}{4}\right)}{\omega^2\left(\frac{j\omega}{3}+1\right)^2\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)^2}$$

قطب مرتبه دوم — قطب مرتبه دوم

$G(j\omega) = K$

رسم اندازه $20 \log|G(j\omega)| = 20 \log K$

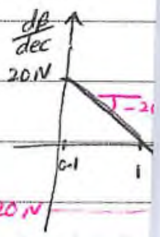
رسم زاویه $\angle G(j\omega) = \angle K \xrightarrow{K>0} 0^\circ$, $\xrightarrow{K<0} 180^\circ$ یا -180°



$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^N}$$

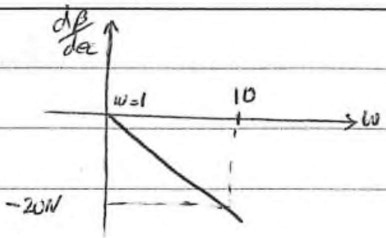
$$20 \log|G(j\omega)| = 20 \log\left|\frac{1}{(j\omega)^N}\right| = 20 \log\left(\frac{1}{\omega^N}\right) =$$

$$\rightarrow G(j\omega) = \begin{cases} +20N & \omega = 0.1 \\ 0 & \omega = 1 \\ -20N & \omega = 10 \end{cases}$$



PAYCO

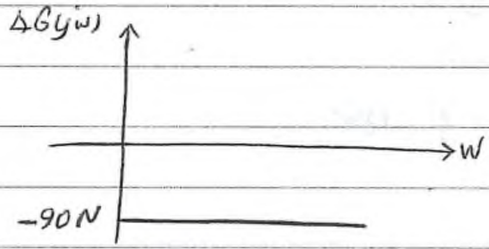
Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



در اینجا نقطه شروع $\omega=1$ است اما در شکل قبلی $\omega=0.1$ نقطه شروع است.

تفاوت در نقطه شروع باعث تفاوت در شکل می‌شود.

$$\angle G(j\omega) = \angle\left(\frac{1}{(j\omega)^N}\right) = -\angle (j\omega)^N = -(N\,90^\circ)$$

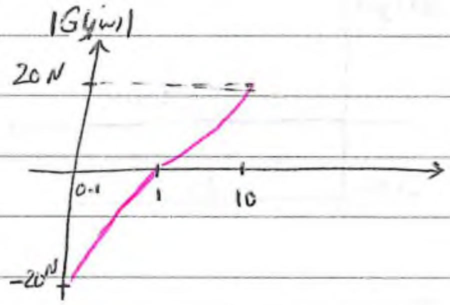


3- صفر در مبدا

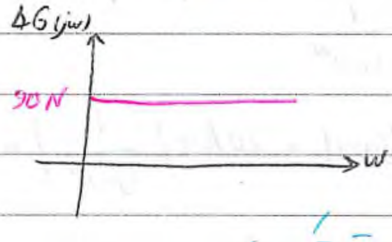
$$G(j\omega) = (j\omega)^N$$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\left((j\omega)^N\right) = 20N\log\omega \ \text{dB}$$

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} -20N & \omega = 0.1 \\ 0 & \omega = 1 \\ 20N & \omega = 10 \end{cases}$$



$$\angle G(j\omega) = \angle (j\omega)^N = N\,90^\circ$$



۴- صفر حقیقی با مرتبه تکرار N

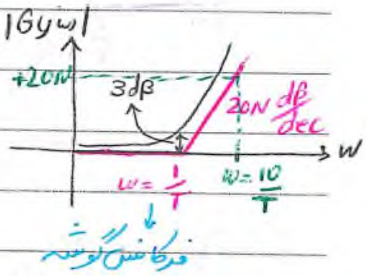
$$G(j\omega) = (1 + j\omega T)^N$$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log(1+j\omega T)^N = 20N\log\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

$$20\log|G(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega T \ll 1 \\ 20N\log \omega T & \omega T \gg 1 \end{cases}$$

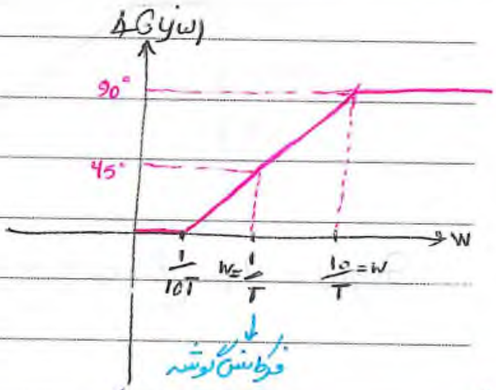
یعنی $\omega \ll \frac{1}{T}$



نکته: در واقع مقدار دقیق اندازه در فرکانس گوشه 3dβ است.

$$\angle G(j\omega) = \angle (1+j\omega T)^N = N\, tg^{-1}\, \omega T$$

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0 & \omega T \ll 1 \\ 45^\circ N & \omega = \frac{1}{T} \\ 90^\circ N & \omega T \gg 1 \end{cases}$$



نکته: تغییرات نمودار فاز از یک دهه قبل از فرکانس گوشه شروع و تا یک دهه بعد از فرکانس گوشه ادامه می یابد و بعد از آن به فاز نهایی می رسد.
مهم

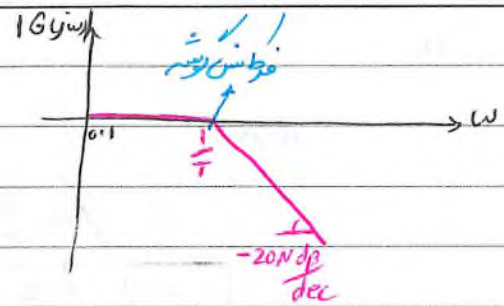
5. قطب حقیقی با مرتبه تکرار N

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega T)^N}$$

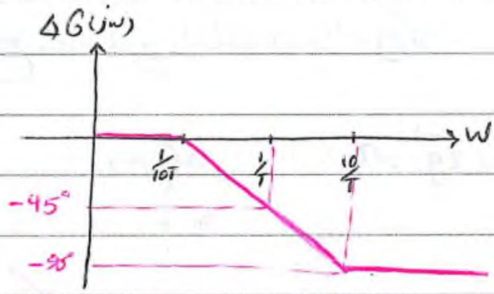
$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{(1+j\omega T)^N}\right| = 20\log\frac{1}{|(1+j\omega T)^N|} = -20N\log\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

$$20\log|G(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega T \ll 1 \\ -20N\log \omega T & \omega T \gg 1 \end{cases}$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



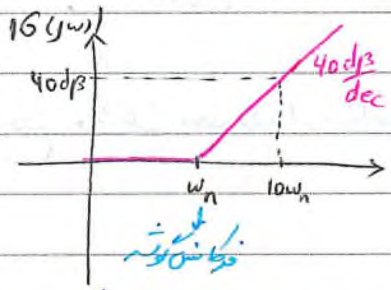
$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{(1+j\omega T)^N} = -N\,tg^{-1}(\omega T) = \begin{cases} 0 & \omega T \ll 1 \\ -45^\circ & \omega = 1/T \\ -90^\circ & \omega T \gg 1 \end{cases}$$



صفرهای مزدوج مختلط:

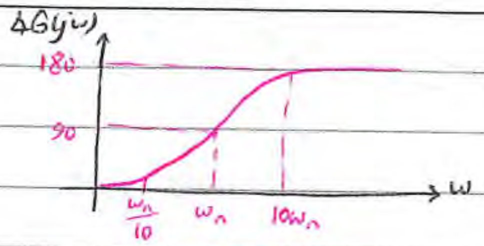
$$G(j\omega) = 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega$$

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} 20\log 1 = 0 & \omega \ll \omega_n \\ 20\log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 40\log \frac{\omega}{\omega_n} & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$



تذکر: توجه داشته باشید که تقریب های که برای قطب ها و صفرهای مزدوج مختلط بکار می روند شدیداً به ζ وابسته اند و هر چقدر ζ بیشتر باشد جواب با نمودار دقیق اختلاف بیشتری خواهد داشت.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



$$tg^{-1}\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

$$\omega\uparrow \to \angle = \pi - \underset{\omega\to\infty}{tg^{-1}}\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{(\frac{\omega}{\omega_n})^2} = \pi$$

تغییرات از یک دهه قبل تا یک دهه بعد

همیشه tg^{-1} را بصورت موهومی به حقیقی نوشت باید توجه داشته باشیم که درجه ناحیه‌ای قرار می‌گیرد ممکن است فاز به صورت $\pi - tg^{-1}$ باشد.

روش کلی برای رسم نمودار بود :

1) در $GH(s)$ به جای s، $j\omega$ قرار دهید تا پاسخ فرکانسی بدست آید.

2) تابع تبدیل سینوسی را به صورت حاصل ضربی از عوامل پایه به فرم ثابت زمانی بنویسید یعنی داخل هر عامل عدد ثابت باید یک باشد.

3) فرکانس گوشه مربوط به هر عامل را مشخص کنید. (مثلاً در $1+Ts$ فرکانس گوشه $\frac{1}{T}$ است)

4) با دانستن فرکانس های گوشه منحنی اندازه مجانبی را رسم کنید. یعنی بعد از فرکانس گوشه مربوط به صفر از مرتبه n، شیب نمودار اندازه $+20N\frac{dB}{dec}$ افزایش می‌یابد و همچنین بعد از هر فرکانس گوشه مربوط به قطب از مرتبه n، شیب نمودار اندازه $-20N\frac{dB}{dec}$ کاهش می‌یابد.

5) برای رسم نمودار فاز باید فاز تابع را در چند فرکانس محاسبه کرده و نمودار را به صورت تقریبی رسم کنیم.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

6) اندازه‌ی تابع در فرکانس‌های پایین اگر تابع به فرم ثابت زمانی باشد می‌توانیم با $20\log K$ محاسبه کنیم. (البته درصورتی که نمودار با $\omega=1$ شروع شده باشد.)

مثال) اگر تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل بصورت $G(s)=\dfrac{40(s+1)^2}{s(s+4)(s^2+4s+4)}$ باشد.

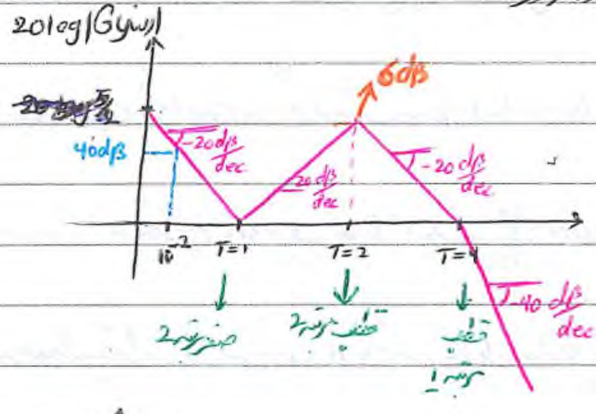
دیاگرام بود آن را رسم نمایید.

$G(s)$ را باید به فرم ثابت زمانی تبدیل کنیم.

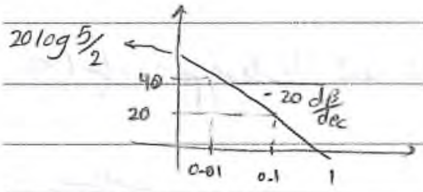
$$G(s)=\frac{40(s+1)^2}{4\times4\times s\left(\frac{s}{4}+1\right)\left(\left(\frac{s}{2}\right)^2+s+1\right)}=\frac{\frac{5}{2}(s+1)^2}{s\left(1+\frac{s}{4}\right)\left(\left(\frac{s}{2}\right)^2+s+1\right)}$$

$$G(j\omega)=\frac{\underbrace{\frac{5}{2}}_{K}\underbrace{(j\omega+1)^2}_{T=1}}{j\omega\underbrace{\left(1+\frac{j\omega}{4}\right)}_{T=4}\underbrace{\left(\left(\frac{j\omega}{2}\right)^2+j\omega+1\right)}_{\omega_n=2}}$$

مقدار $K=\frac{5}{2}$ است پس برای شروع مقدار K را در بالای نمودار انتخاب می‌کنیم.



$$\begin{cases} 20\,\dfrac{dB}{dec}=6\,\dfrac{dB}{oct} \\ 40\,\dfrac{dB}{dec}=12\,\dfrac{dB}{oct} \\ 60\,\dfrac{dB}{dec}=18\,\dfrac{dB}{oct} \end{cases}$$



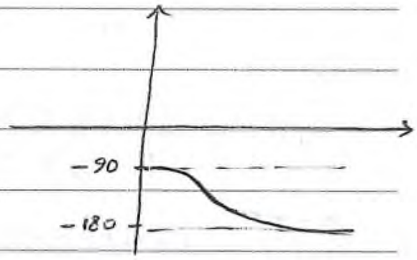
Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

$$\angle G(j\omega) = 2tg^{-1}\omega - \left(90 + tg^{-1}\frac{\omega}{4} + tg^{-1}\frac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right)$$

$$\angle G(j\omega)_{\omega \to 0} = 0 - (90+0+0) = -90$$

$$\angle G(j\omega)_{\omega \to \infty} = 2\times 90 - (90 + 90 + \pi - 0) = -180$$

$\omega \to \infty \qquad 1 - \frac{\omega^2}{4} \simeq -\frac{\omega^2}{4}$ ربع دوم



نکته: شیب نهایی نمودار اندازه را می‌توان با رابطه‌ی زیر تعیین کرد:

$$\text{شیب نهایی نمودار اندازه} = \underbrace{(n-m)}_{\text{درجه نسبی سیستم}}\left(-20\,\frac{dB}{dec}\right)$$

یا اختلاف درجه صورت و مخرج (مرتبه)

نکته: فاز نهایی نمودار فاز در سیستم‌های min فاز با رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\text{فاز نهایی} = (n-m)(-90^\circ)$$

سیستم‌های min فاز: سیستم‌های min فاز سیستمی که تمام قطب و صفرهای آن سمت چپ محور Im قرار داشته باشد.

سیستم min فاز، سیستمی است که در سیستم‌هایی که نمودار دامنه‌ی یکسانی دارند، تغییرات فاز کمتری دارند.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

مثلاً هردو تابع تبدیل G_1 و G_2 دارای نمودار اندازه‌ی یکسان ولی تابع G_1 که نامینیمم فازی باشد بخاطر (عامل $S-1$ صورت) تغییرات فاز بیشتری نسبت به G_2 دارد و دیاگرام فاز G_1 و G_2 با هم برابر نیستند.

$$G_1(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+3)^2(s^2+6s+9)}$$

$$G_2(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)^2(s^2+6.s+9)}$$

$$\measuredangle G_1(j\omega) = \underbrace{\pi - tg^{-1}\omega}_{\text{در ربع دوم (برای عامل } S-1)} + tg^{-1}\frac{\omega}{2} - \left(2tg^{-1}\frac{\omega}{3} + 2tg^{-1}\frac{\omega}{3}\right)$$

$$\measuredangle G_2(j\omega) = tg^{-1}\omega + tg^{-1}\frac{\omega}{2} - \left(2tg^{-1}\frac{\omega}{3} + 2tg^{-1}\frac{\omega}{3}\right)$$

نکته: چگونه می‌توان با داشتن نمودار اندازه و فاز و بدون تابع تبدیل از min فاز یا نامینیمم فاز بودن آگاه شویم؟

البته با شیب نهائی نمودار اندازه به اختلاف درجه مخرج و صورت پی می‌بریم. اگر فاز نهائی برابر با اختلاف درجه $90 \times (n-m)$ بود، سیستم min فاز، در غیر این صورت نامینیمم فاز است.

نکته: برای یک سیستم min فاز تابع تبدیل را می‌توان با توجه به منحنی دامنه به طور کامل مشخص کرد به شرطی که علامت بهره معلوم باشد، اما برای سیستم نامینیمم فاز چنین نیست.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

وضعیت نامینیمم فاز بودن به 2 دلیل پیش می‌آید:

الف) وقتی کنترلر نامینیمم فاز (صفر یا قطب سمت راست محور $j\omega$) باشد

ب) وقتی سیستم حلقه‌های داخلی ناپایدار داشته باشد.

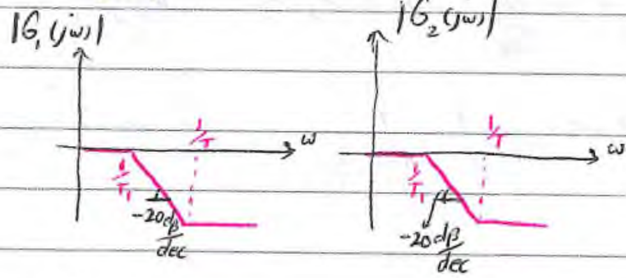
مثال) دو سیستم با توابع تبدیل زیر را با فرض $T_1 > T$ که در نظر بگیرید و نمودار اندازه و فاز آن را رسم کرده و در مورد آن بحث کنید.

فرکانس گوشه $\frac{1}{T}$

$$G_1(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1} \qquad G_2(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T_1}$$

فرکانس گوشه $\frac{1}{T_1}$

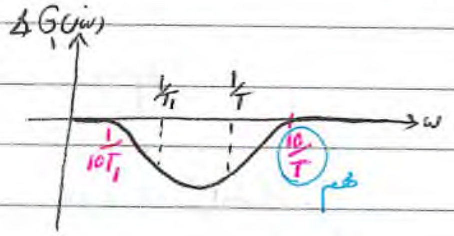
$$0 < T < T_1 \rightsquigarrow \infty > \frac{1}{T} > \frac{1}{T_1}$$



$$\angle G_1(j\omega) = tg^{-1}\omega T - tg^{-1}\omega T_1$$

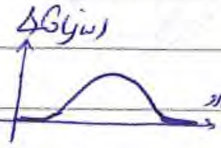
$$\angle G_1(0) = 0$$

$$\angle G_1(\infty) = 0$$



* تغییرات نمودار فاز همواره از یک دهه قبل از اولین فرکانس گوشه شروع تا یک دهه بعد از آخرین فرکانس گوشه ادامه پیدا می‌کند.

سؤال) چرا نمودار فاز به صورت روبرو



رسم نکنیم؟ چون اولین فرکانس گوشه مربوط به قطب می‌باشد که در ابتدا فاز را کاهش داده سپس به وسیله‌ی فرکانس گوشه‌ی

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

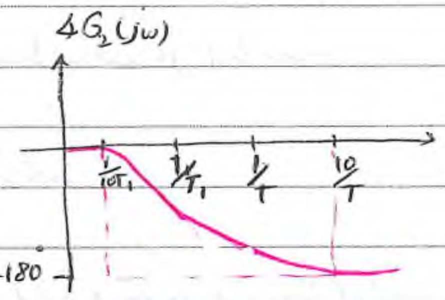
مربوط به صفر فاز، φ افزایش می‌دهد تا به صفر درجه برسد.

صفر حقیقی در ربع چهارم

$$\angle G_2(j\omega) = -tg^{-1}\omega T - tg^{-1}\omega T_1$$

$$\angle G_2(0) = 0$$

$$\angle G_2(\infty) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

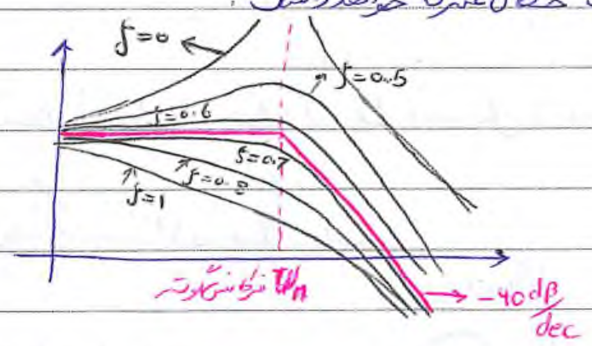


تعیین تابع تبدیل از روی نمودار اندازه و فاز

در نمودار اندازه با فرض min فاز بودن سیستم اگر در یک فرکانس گوشه شیب $20\frac{dB}{dec}$ کم یا زیاد شد به ترتیب قطب یا صفر مرتبه اول داریم یعنی قطب به صورت $\frac{1}{1+\frac{s}{T_1}}$ یا صفر به صورت $1+\frac{s}{T_1}$ داریم.

اثر تغییرات ζ بر روی نمودار اندازه عامل قطب مرتبه دوم

هرچه ζ افزایش یابد، نمودار دقیق با مجانب خطای کمتری خواهد داشت.
(برای $0<\zeta<0.7$)

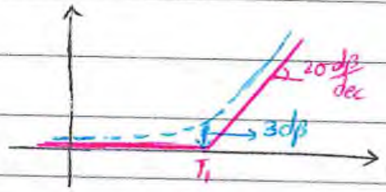


اگر قطب مرتبه 2 مختلط داشته باشیم، مقدار خطای نمودار دقیق و مجانب به ζ وابسته است. لذا در

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

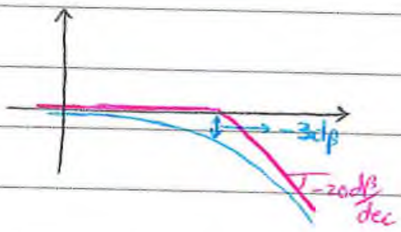
بالا نشان داده شده است. اگر قطب مرتبه 2 حقیقی داشته باشیم در فرکانس گوشه مقدار دقیق و مجانبی با یکدیگر 6dB تفاوت دارند.

یادآوری: قطب یا صفر مرتبه اول مقدار مجانبی و دقیق با یکدیگر در فرکانس گوشه 3dB تفاوت دارد.



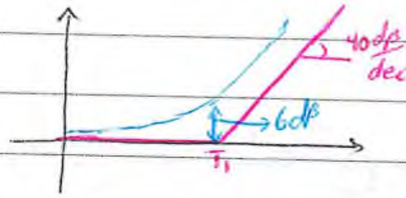
صفر مرتبه اول

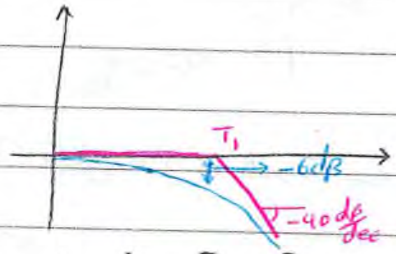
عامل $(1+\frac{S}{T_1})$



قطب مرتبه اول

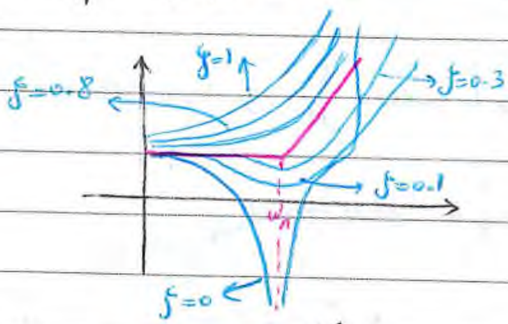
عامل $(\frac{1}{1+\frac{S}{T_1}})$

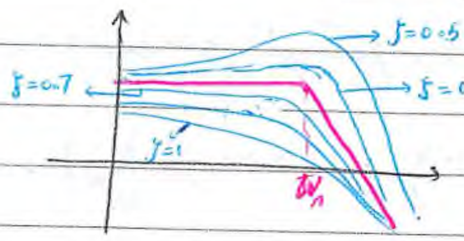




صفر حقیقی مرتبه دوم $(1+\frac{S}{T_1})^2$

قطب حقیقی مرتبه دوم $(\frac{1}{1+\frac{S}{T_1}})^2$





صفر مختلط مرتبه دوم

عامل $S^2+2\zeta w_n S+w_n^2$

قطب مختلط مرتبه دوم

عامل $\frac{1}{S^2+2\zeta w_n S+w_n^2}$

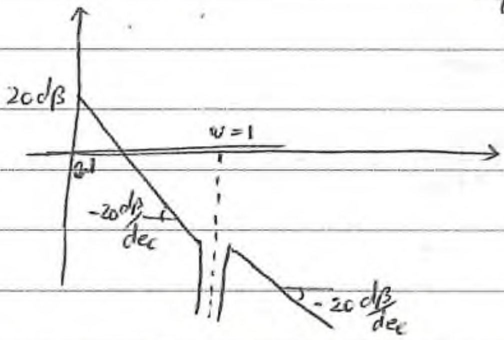
Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

نکته: چگونه از روی نمودارها با توجه به داشتن دیاگرام اندازه قطب مرتبه 2 حقیقی و مختلط را از یکدیگر تشخیص دهیم؟

اگر اختلاف خطای نمودار دقیق با مجانب $6\,\frac{dB}{dec}$ نبود مطمئناً عامل مرتبه 2 مزدوج بوده البته به شرطی که تغییر شیب بعد از فرکانس گوشه $40\,\frac{dB}{dec}$ باشد.

مثال: دیاگرام بود دامنه تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=\frac{s^2+1}{s(s+1)^2}$ را رسم کنید.

$\omega_n=1$ ، $T=1$



نقطه‌ی شروع نمودار: نقطه‌ی شروع نمودار اندازه فقط عوامل بهره‌ی K و s در مخرج یا صورت تأثیرگذار خواهند بود. یعنی اینکه برای تعیین نقطه‌ی شروع اگر $G(s)=\frac{K(s+z_i)\cdots}{s^N(s+P_i)\cdots}$ باشد در فرکانس‌های پایین $G(s)=\frac{K}{s^N}$ تأثیرگذار خواهد بود یعنی نقطه‌ی شروع (اندازه) برابر است با:

$$20\log\left|\frac{K}{s^N}\right| = 20\log\left|\frac{K}{(j\omega)^N}\right| = 20\log K - 20N\log\omega$$

فرکانس شروع

اگر $G(s)=\frac{Ks^N(s+z_i)\cdots}{(s+P_i)\cdots}$ باشد در فرکانس‌های پایین $G(s)\simeq Ks^N$ خواهد بود.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

پس بهره‌ی شروع برابر است با : (برحسب dB)
اندازه

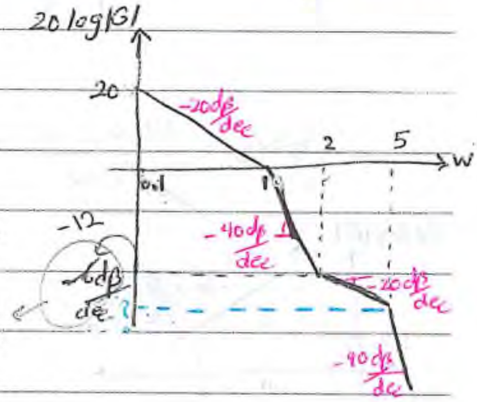
$$20\log|KS^N| = 20\log|K(j\omega)^N| = 20\log K + 20N\log\omega$$ → فرکانس شروع

در پایین و یا بالا رفتن نمودار یکی فقط در خروجی K می‌تواند تأثیرگذار باشد.

هروقت نشان دهنده داشتیم با $(2q+1)\pi$ منظورمان علامت K × علامت فیزیک است.

مثال) نمودار اندازه‌ی بود تابع تبدیل زیر را رسم نمایید و مقادیر فاز را در فرکانس‌های صفر و بی‌نهایت مشخص کنید.

$$G(s) = \frac{\overbrace{1+0.5s}^{2}}{s\underbrace{(1+s)}_{1}\underbrace{(1+0.25s)}_{5}}$$



عامل تأثیرگذار در فرکانس پایین $G(s) \simeq \frac{1}{s} = \frac{1}{j\omega}$

$$|G| = \frac{1}{\omega} \xrightarrow{\omega=0.1} 20\log\frac{1}{0.1} = 20$$

$$20\log G(5) - 20\log G(2) = x+6$$

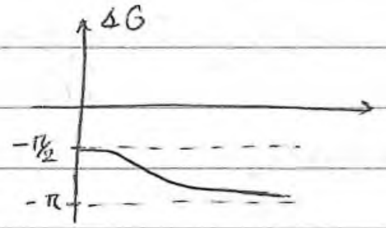
$$\to 20\log\frac{G(5)}{G(2)} = x+6$$

$$G(j\omega) = \frac{1+0.5j\omega}{j\omega(1+j\omega)(1+0.2j\omega)}$$

فاز در فرکانس صفر $\angle G(j\omega)_0 = \varepsilon^+ - (\frac{\pi}{2} + \varepsilon^+ + \varepsilon^+) = -\frac{\pi}{2} - \varepsilon^+$

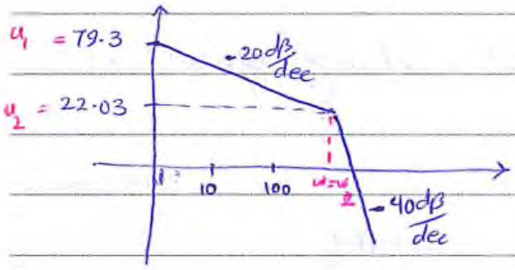
فاز در فرکانس بی‌نهایت $\angle G(j\omega)_\infty = (\frac{\pi}{2} - \varepsilon^+) - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \varepsilon^+ + \frac{\pi}{2} - \varepsilon^+) = -\pi + \varepsilon^+$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



$-\pi$ را هیچ وقت نباید با π یکسان در نظر گرفت. اگر π بنویسیم یعنی فاز افزایش پیدا کرده درصورتی که فاز کاهش پیدا کرده است.

مثال) منحنی دیاگرام بود حلقه باز یک سیستم به صورت زیر می باشد. تابع تبدیل آن را بدست آورید.
تابع تبدیل
(با فرض min فاز بودن)

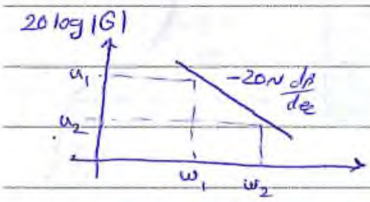


شیب منفی

$$u_2 - u_1 = -20 \log \frac{w_2}{w_1}$$

$$\rightsquigarrow 22.03 - 79.3 = -20 \log \frac{w_2}{1}$$

$$\rightsquigarrow \log w_2 = \frac{22.03 - 79.3}{-20} \rightsquigarrow w_2 = 10^{\frac{22.03-79.3}{-20}} = 730$$



$$u_2 - u_1 = -20N \log \frac{w_2}{w_1} \qquad\qquad u_2 - u_1 = 20N \log \frac{w_2}{w_1}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(1+\frac{s}{w_2})} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{j\omega\,(1+\frac{j\omega}{w_2})}$$

بخاطر min فاز بودن حتماً + است

محاسبه K:

$$79.3\ dB = 20\log|G(j1)| \Rightarrow 79.3 = 20\log\left(\left|\frac{K}{\omega\sqrt{1+(\frac{\omega}{730})^2}}\right|\right)\Bigg|_{\omega=1}$$

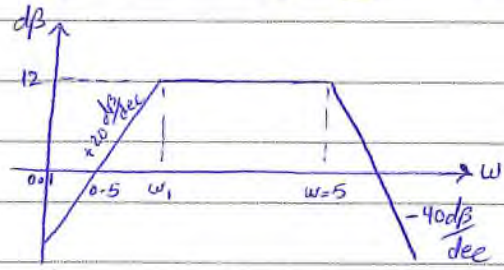
Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

$$79.3\ dB = 20\log\left|\frac{K}{1}\right| \Rightarrow K = 10^{\frac{79.3}{20}}$$

شیب شروع نمودار اندازه با $-20\frac{dB}{dec}$ شروع شده است یعنی نتیجه می‌گیریم یک قطب در مبدأ وجود دارد و در فرکانس $\omega=\omega_2$ ، $-90\frac{dB}{dec}$ به شیب اندازه اضافه شده است یعنی یک قطب مرتبه اول دیگر در تابع تبدیل وجود دارد. همچنین از آنجایی که فرکانس شروع یک می‌باشد عدد K که نمودار اندازه را بالا و پایین می‌آورد را حساب می‌کنیم.

برای محاسبه‌ی K با توجه به اینکه فرم تابع تبدیل به صورت ثابت زمانی می‌باشد در فرکانس‌های پایین می‌توان تابع تبدیل را به صورت $G(s)=\frac{K}{s}$ در نظر گرفت و مقدار K را با توجه به فرکانس $\omega=1$ محاسبه کرد.

مثال) نمودار بود سیستم min فازی به صورت زیر است. تابع تبدیل آن را بدست آورید.



$$G(s) = \frac{Ks}{(1+\frac{s}{\omega_1})(1+\frac{s}{5})^2}$$

روش اول برای محاسبه ω_1 :

12dB که بالا رفته یعنی معادل 2 اکتاو بالا رفته پس $\omega_1 = 2$ است. تغییرات اندازه از فرکانس 0.5 تا ω_1 به میزان 12dB یعنی 2x6 dB می‌باشد. که با توجه به روابط بین اکتاو و dB متوجه می‌شویم که از فرکانس 0.5 تا ω_1، 2^{oct} بوده پس $\omega_1 = 4\times0.5$ بوده است.

روش دوم برای محاسبه ω_1 :

$$12dB - 0 = 20\log\frac{\omega_1}{0.5} \rightarrow \boxed{\omega_1 = 2}$$

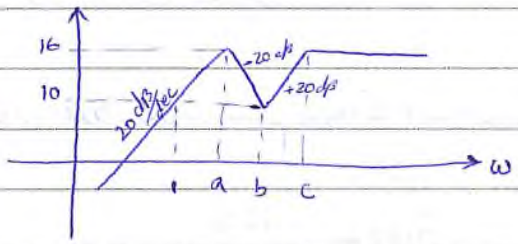
نکته: به طور کلی هر گاه تغییرات اندازه در نمودار بود به میزان 6dB، 12dB، 18 و ... است باید به روابط اکتاو توجه کرد.

$$G(j\omega) = \frac{Kj\omega}{(1+\frac{j\omega}{2})(1+\frac{j\omega}{5})^2}$$

$$0 = 20\log|G(j0.5)| = 20\log\left|\frac{Kj\omega}{(1+\frac{j\omega}{2})(1+\frac{j\omega}{5})^2}\right| = 20\log\left.\frac{K\omega}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{2})^2}\sqrt{(1+(\frac{\omega}{5})^2)^2}}\right|_{\omega=0.5}$$

$$0 = 20\log\frac{0.5K}{(1)(1)} \rightarrow \boxed{K=2}$$

مثال) مقادیر a، b، c را با توجه به نمودار اندازه‌ی رسم شده بدست آورید و تابع تبدیل سیستم را مشخص کنید.



حل:

$$G(s) = \frac{Ks(1+\frac{s}{b})^2}{(1+\frac{s}{a})^2(1+\frac{s}{c})}$$

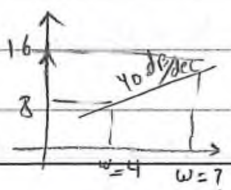
روش اول:

$$16 - 10 = 20\log a \rightarrow a = 10^{6/20} = 2$$

$$10 - 16 = -20\log\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

روش دوم: اختلاف $16-10$ است و شیب $20\frac{dB}{dec}$ پس به اندازه 1 اکتاو بالا رفته

یعنی $a=2$ و ...



$\omega = 8$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

$$G(j\omega) = 1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)$$

$\omega\to\infty$ چون ← زور حقیقی بیشتره پس π داریم اما به هر حال چون موهومی هم داریم یکمی آن را به سمت بالا می‌برد

$$\measuredangle G(j\omega) = \pi - tg^{-1}\frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \pi-\varepsilon$$

ربع دوم　　0^+

تحلیل نظری : ← منحنی ربع سوم را تصویر نمودار را باید به سمت بالا باشد.

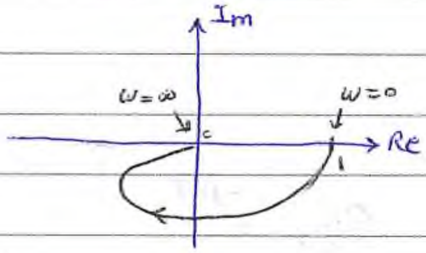
می‌توان گفت $\pi-\varepsilon \simeq 179$

عامل مرتبه 2 در مخرج

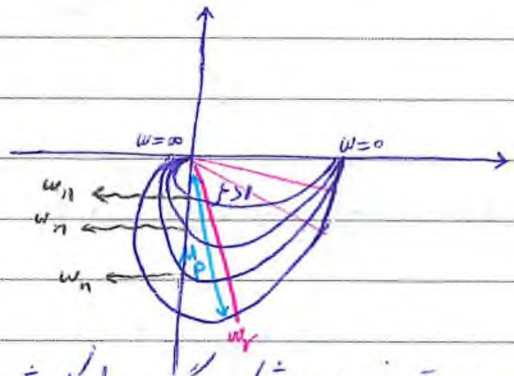
$$G(j\omega) = \frac{1}{1+2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$G(j0^+) = 1\measuredangle\, 0-(\varepsilon^+) = 1\measuredangle -\varepsilon$$

$$G(j\infty) = 0\measuredangle\, 0-(\pi-\varepsilon) = 0\measuredangle -\pi+\varepsilon$$



تاثیر ζ روی عامل مرتبه دوم :



نمودار قطبی عامل مرتبه 2 با افزایش ζ به سمت نیم دایره شکل می‌گیرد و با کاهش ζ باعث ایجاد پیک تشدیدی می‌شود.

تعریف پیک تشدید: اندازه‌ی نمودار قطبی را در یک فرکانس خاص پیک تشدید گویند که عامل های مرتبه 2

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

تعیین نوع سیستم و ثابت های خطا از روی نمودارهای بوده:

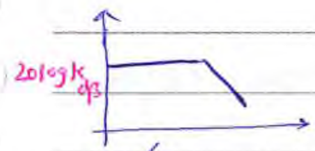
برای تشخیص نوع سیستم در نمودار بود $GH(s)$ به شیب نمودار اندازه در فرکانس های پایین توجه می کنیم. اگر نمودارهای اندازه با شیب $0 \frac{dB}{dec}$ شروع شده بود، نوع سیستم صفر، اگر با شیب $-20 \frac{dB}{dec}$ شروع شده بود، نوع سیستم یک و اگر با $-40\frac{dB}{dec}$ شروع شده بود، نوع سیستم 2 می باشد.

تعیین ثابت خطای وضعیت:

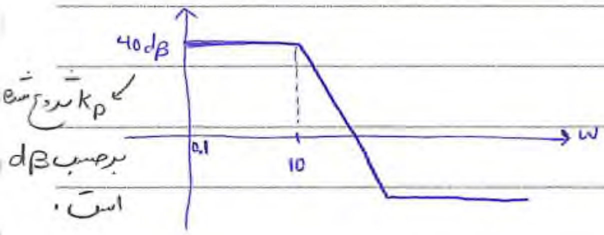
منحنی اندازه یک سیستم نوع صفر در فرکانس های پایین یک خط افقی با مقدار $20 \log K_{dB}$ می باشد و از طرف دیگر ثابت خطای وضعیت برای سیستم نوع صفر به صورت زیر می باشد:

$$K_p = \lim_{s\to 0} GH(s) = K \qquad K_{p_{dB}} = 20 \log K$$

بنابراین جواب فرکانس پایین خط افقی در $20 \log K_{p_{dB}}$ است.



مثال) با فرض پایداری خطای حالت ماندگار به ورودی پله سیستم زیر با دیاگرام بوده داده شده را محاسبه کنید.



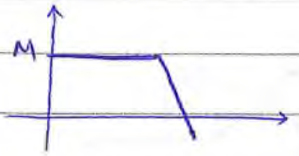
نوع صفر ← چون نمودار با شیب صفر شروع شده پس s در مخرج نداشته.

$$20 \log K_p = 40 \longrightarrow K_p = 100$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{101}$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

به طور کلی:



$$M_{dB} = 20\log K_p$$

$$\boxed{K_p = 10^{\frac{M_{dB}}{20}}}$$

$$GH(s) = \frac{K(1+\frac{s}{\omega_1})(1+\frac{s}{\omega_2})\cdots}{s^N(1+\frac{s}{\omega_{p_1}})(1+\frac{s}{\omega_{p_2}})\cdots}$$

در سیستم مرتبه صفر $\longleftarrow N=0$

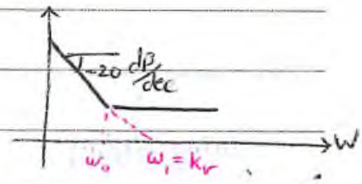
سیستم نوع یک:

تعیین ثابت خطای سرعت: ثابت خطای سرعت برای سیستم های نوع یک تعریف می شود که به طور زیر محاسبه می شود:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = K$$

و از روی نمودار بود می توان گفت اگر شیب ابتدایی $-20dB$ را ادامه دهیم و فرض کنیم برخورد با محور ω را ω_1 بنامیم، K_v همان ω_1 خواهد بود.

فرکانس های پایین $G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}$ $\omega \ll 1$



$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{K_v}{\omega} = 0 \longrightarrow \boxed{K_v = \omega_1}$$

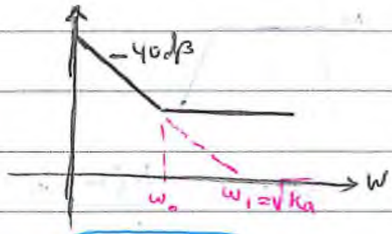
$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$ با شرط پایداری

تعیین ثابت خطای شتاب در سیستم نوع 2:

برای محاسبه خطای ایستای شتاب، شیب $-40\,dB$ اولیه را ادامه می دهیم و فرض کنیم برخورد با محور ω را ω_1 می نامیم و از رابطه زیر می توانیم K_a را محاسبه کنیم:

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 GH(s) = K$

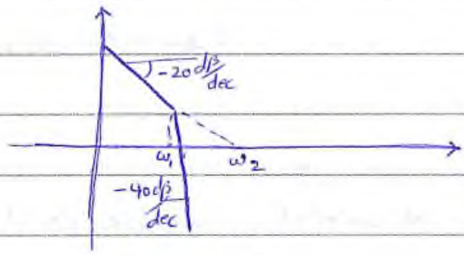


فرکانس های پایین $G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}$ $\omega \ll 1$

$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{K_a}{\omega^2} = 0 \longrightarrow K_a=\omega_1^2 \longrightarrow \boxed{\omega_1=\sqrt{K_a}}$

با شرط پایداری $e_{ss}=\frac{1}{K_a}$

مثال) تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم با $G(s)=\frac{20}{s(s+4)}$ می باشد. مطلوبست محاسبه $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ ؟



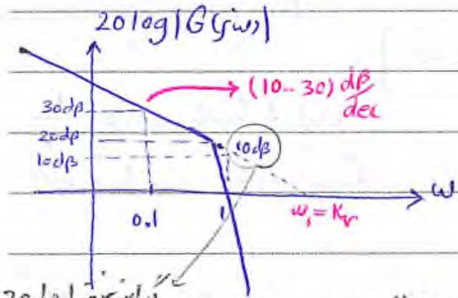
$\boxed{\omega_1 = 4}$ فرکانس گوشه

مربوط به قطب [illegible]

فرم ثابت زمانی $G(j\omega)=\frac{5}{j\omega(1+\frac{j\omega}{4})}$

$\boxed{W_2 = K_v = 5}$ $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{4}{5}$

مثال) دیاگرام بود اندازه ی یک سیستم min فاز به صورت زیر می باشد، نوع سیستم و ثابت خطای استاتیکی آن را محاسبه کنید.



سیستم نوع یک است چون شیب محاسبه شده $-20\frac{dB}{dec}$ است.

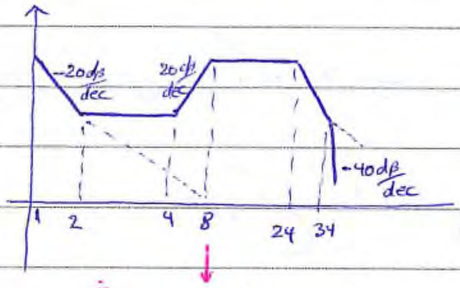
$u_2-u_1=-20\log\frac{w_2}{w_1}$

$0-10dB = -20\log K_v \longrightarrow K_v=\sqrt{10}$

اگر این نقطه 20dB بود $K_v=10$ می شد اما چون 10dB است از فرمول استفاده می کنیم

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) نمودار بود دامنه تابع تبدیل $G(s)=\dfrac{K(1+0.5s)(1+as)}{s(1+\frac{s}{8})(1+bs)(1+\frac{s}{34})}$ در شکل زیر داده شده. مقادیر K، a و b را محاسبه نمایید.



$G(s)$ به فرم ثابت زمانی است پس K همان K_v است.

خط مورد اول در شیب اولیه

نوع سیستم با توجه به شیب شروع اندازه یک می‌باشد.

$w_1 = K_v \longrightarrow \boxed{K_v = 8} = K$

با توجه به نقاط شکست و تغییر شیب نمودار در می‌یابیم که در فرکانس گوشه‌ی 4، صفر مرتبه‌ی اول داریم که مربوط به عامل $1+as$ می‌باشد و فرکانس گوشه‌اش 4 و در نتیجه $a=\frac{1}{4}$ است و همچنین در فرکانس $w=24$ یک قطب مرتبه اول مربوط به عامل $1+bs$ داریم که فرکانس گوشه‌ی آن 24 و در نتیجه $b=\frac{1}{24}$ است.

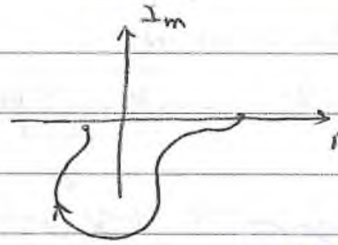
Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

نمودارهای قطبی:

تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$، تابعی مختلط است. در نمودارهای بود روی یک نمودار اندازه برحسب فرکانس و روی نمودار دیگر فاز برحسب فرکانس رسم می‌شد اما در نمودارهای قطبی روی یک نمودار قسمت حقیقی و موهومی تابع مختلط را رسم می‌کنیم.

نمودارهای بود $G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j\angle G(j\omega)}$

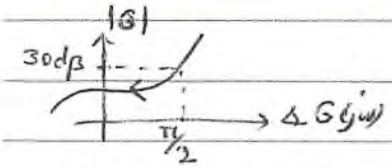
نمودارهای قطبی $G(j\omega) = Re\, G(j\omega) + j Im\, G(j\omega)$



نمودارهای قطبی را به سه صورت زیر می‌توان بیان کرد:

حالت اول) نمودار قطبی مکان هندسی نقاطی را نشان می‌دهد که بیانگر قسمت موهومی و حقیقی تابع $G(j\omega)$ با تغییرات ω (از ۰ تا ∞) است.

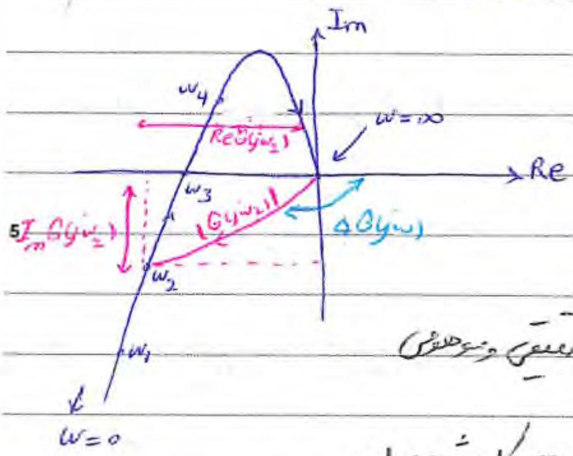
حالت دوم) نمودار قطبی، نمودار دامنه $G(j\omega)$ برحسب زاویه $G(j\omega)$ در مختصات قطبی است وقتی که ω از صفر تا بی‌نهایت تغییر می‌کند. مثلاً:



حالت سوم) نمودار قطبی نگاشت نیم‌محور موهومی مثبت بر صفحه $G(j\omega)$ می‌باشد.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) نمودار قطبی یک سیستم خاص در شکل زیر رسم شده است.



مثلاً در فرکانس های پایین $Re\{G(j\omega)\}$ یک مقدار مثبت محدود و قسمت $Im\{G(j\omega)\}$ ، $-\infty$ می باشد. همچنین در فرکانس های خیلی بالا سمت حقیقی و موهومی $G(j\omega)$ به مبدأ میل می کنند یعنی هم Re و هم Im کاهش می یابد.

در فرکانس ω_3 ، $Re\{G(j\omega)\}$ مقدار محدود و منفی دارد و $Im\{G(j\omega)\}$ صفر است.

مزیت عمده ی منحنی قطبی بررسی پایداری سیستم ها می باشد که نایکوئیست با استفاده از این منحنی ها (قطبی) پایداری سیستم ها را بررسی می کند به همین خاطر در خیلی جاها منحنی قطبی را منحنی نایکوئیست نیز می نامند.

رسم نمودار قطبی:

برای رسم نمودار قطبی (دقیق) باید دامنه ی ($|G(j\omega)|$) و فاز ($\angle G(j\omega)$) را به ازای فرکانس های مختلف از صفر تا بی نهایت داشته باشیم و این نقاط را به هم وصل کنیم تا نمودار قطبی حاصل شود. اما می توان به صورت تقریبی نمودار قطبی را با روش های زیر مشخص کرد.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

۱) تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ را از روی $G(s)$ مشخص می‌کنیم.

۲) دامنه و فاز $G(j\omega)$ را بدست می‌آوریم.

۳) درصورت نیاز قسمت حقیقی و موهومی $G(j\omega)$ را تعیین می‌کنیم.

۴) رفتار تابع تبدیل سینوسی را در فرکانس های پایین و بالا مشخص می‌کنیم. یعنی $G(j0)$ و $G(j\infty)$ را بدست می‌آوریم.

۵) نقاط برخورد نمودار قطبی را با محور حقیقی و موهومی از روابط زیر بدست می‌آوریم:

الف) نقطه برخورد با محور حقیقی

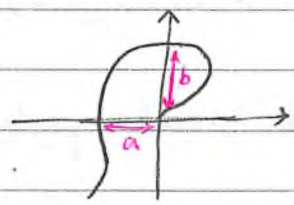
$Im\{G(j\omega)\}=0 \longrightarrow \omega_{\text{برخورد}}$ ✓

$Re\{G(j\omega)\}\Big|_{\omega_{\text{برخورد}}}=a$ → قسمت حقیقی که نمودار با محور حقیقی برخورد می‌کند.

ب) نقطه برخورد با محور موهومی $(j\omega)$

$Re\{G(j\omega)\}=0 \longrightarrow \omega_{\text{برخورد}}=$ ✓

$Im\{G(j\omega)\}\Big|_{\omega_{\text{برخورد}}}=b$ → قسمتی موهومی که با محور موهومی برخورد کرده است.



Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

نمودارهای قطبی عوامل مهم:

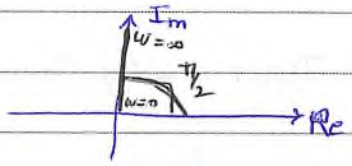
۱) نمودار قطبی عامل مشتق‌گیر و عامل انتگرال‌گیر

الف) عامل مشتق‌گیر:

$G(s)=s$

$G(j\omega)=j\omega$

$|G(j\omega)|=\omega \qquad \angle G(j\omega)=\frac{\pi}{2}$

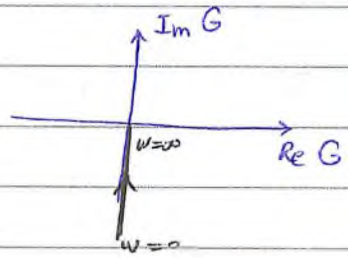


ب) عامل انتگرال‌گیر:

$G(s)=\frac{1}{s}$

$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=\frac{-j}{\omega}$

$|G(j\omega)|=\frac{1}{\omega} \qquad \angle G(j\omega)=-\frac{\pi}{2}$

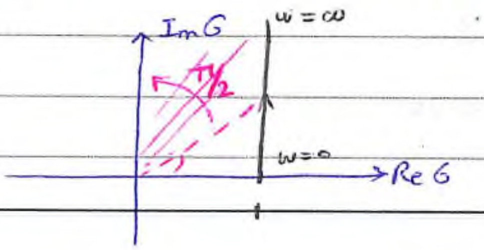


۲) نمودار قطبی عامل مرحله اول $(1+Ts)^{\pm 1}$

الف) عامل $(1+Ts)$

$G(s)=1+Ts \longrightarrow G(j\omega)=1+jT\omega$

$$|G(j\omega)|=\sqrt{1+(T\omega)^2}=\begin{cases}1 & T\omega\ll 1\\ T\omega & T\omega\gg 1\end{cases} \qquad \angle G(j\omega)=tg^{-1}\frac{T\omega}{1}=\begin{cases}0 & T\omega\ll 1\\ \frac{\pi}{2} & T\omega\gg 1\end{cases}$$

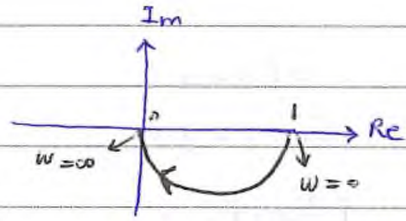


Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

ب) عامل $(1+Ts)^{-1}$

$$G(s)=\frac{1}{1+Ts} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{1+jT\omega}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}=\begin{cases}1 & T\omega\ll 1\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \omega=\frac{1}{T}\\ 0 & T\omega\gg 1\end{cases}$$



$$\angle G(j\omega)=-tg^{-1}T\omega=\begin{cases}0 & T\omega\ll 1\\ -\frac{\pi}{4} & \omega=\frac{1}{T}\\ -\frac{\pi}{2} & T\omega\gg 1\end{cases}$$

$G(j0^+)=1\angle 0-(\varepsilon^+)=1\angle -\varepsilon$

$G(j\infty)=0\angle 0-(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=0\angle -\frac{\pi}{2}+\varepsilon$

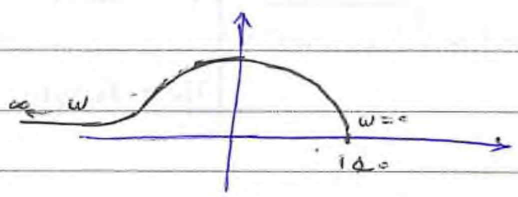
حال اینست قوس شکل ما در ناحیه سوم بیفتد اما چون زاویه ما $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ است پس حتماً در ناحیه چهارم میفتد. برای چک کردن می‌توان $\omega=\frac{1}{T}$ قرار داد و می‌بینیم که به ازای آن $|G(j\omega)|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\angle G(j\omega)=-\frac{\pi}{4}$ می‌شود که یعنی در ناحیه‌ی چهارم شکل ما واقع شده است.

توجه: همانطور که مشاهده کردید عامل $1+Ts$ نمودار قطبی به صورت یک خط عمودی موازی محور y است و عامل $\frac{1}{1+Ts}$ یک نیم دایره می‌باشد.

3) عامل مرتبه دوم

$$G(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$$

$$G(j\omega)=1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$$



$G(j0)=1\angle 0$

$G(j\infty)=\infty\angle\pi$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

قرار می‌گیرد.) به زبانی دیگر سیستم در مرز پایداری قرار می‌گیرد.

سیستم حلقه‌بسته در مرز پایداری $\Rightarrow \underbrace{\Delta(s)}_{\text{حلقه‌بسته}} = 1 + GH(s)$

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 4 + K = 0$$

1) $K>0 \rightsquigarrow bc = ad \longrightarrow 3\times 2 = 4 + K \longrightarrow \boxed{K=2}$

روش دوم: محاسبه‌ی محل برخورد با محور حقیقی باید ۱- باشد.

$$GH(j\omega) = \frac{K}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 4} = \frac{K}{(4-3\omega^2) + (2\omega - \omega^3)j} \times \frac{(4-3\omega^2) - (2\omega-\omega^3)j}{(4-3\omega^2) - (2\omega-\omega^3)j}$$

$$Im\{G(j\omega)\} = 0 \longrightarrow \omega = 0, \sqrt{2}$$

$$Re\{G(j\omega)\}\Big|_{\omega=\sqrt{2}} = -1 \longrightarrow \frac{K(4-3\omega^2)}{(4-3\omega^2)^2 + (2\omega-\omega^3)^2}\Bigg|_{\omega=\sqrt{2}} = -1 \longrightarrow \boxed{K=2}$$

$$G(j\omega) = \frac{K[(4-3\omega^2) - (2\omega-\omega^3)]}{(4-3\omega^2)^2 + (2\omega-\omega^3)^2}$$

مثال) پایداری سیستم حلقه‌بسته با تابع تبدیل حلقه باز $GH(s) = \frac{K}{s(s-1)}$ را بررسی کنید. (با استفاده از روش دیاگرام نایکویست)

$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega-1)}$$

الف) $K>0$

$$G(j0^+) = \infty\angle 0 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi - \varepsilon\right) = \infty\angle -\frac{3\pi}{2} + \varepsilon = \infty\angle -269^\circ$$

$$G(j\infty) = 0\angle 0 - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = 0\angle -\pi - \varepsilon = 0\angle -181$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

با $|k|<1$ اتفاق می‌افتد.

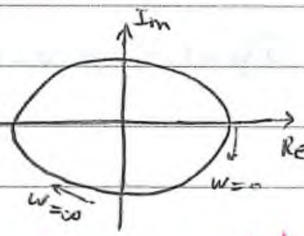
تعریف فرکانس تشدید: فرکانسی است که max اندازه نمودار فرکانسی نسبت به اندازه‌ی نمودار قطبی در فرکانس صفر ایجاد می‌شود.

فرکانس محل برخورد نمودار قطبی عامل $G(j\omega)=\frac{1}{1+2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j+(\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$ با محور موهومی فرکانس نوسانات نامیرا (ω_n) می‌باشد.

نمودار قطبی تاخیر انتقالی $e^{-j\omega T}$:

$$G(j\omega)=e^{-j\omega T}$$

$$\begin{cases}|G(j\omega)|=1\\ \angle G(j\omega)=-\omega T\end{cases}$$



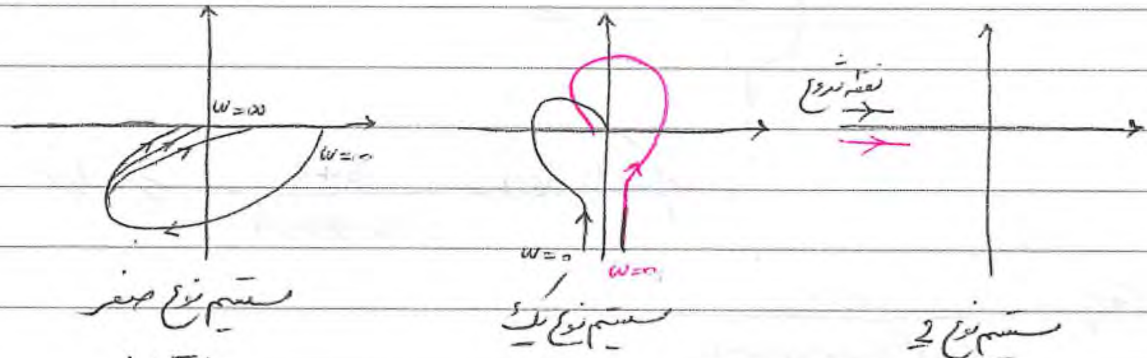
شکل کلی نمودارهای قطبی:

سیستم نوع صفر: در فرکانس‌های پایین با $\omega=0$ از روی محور حقیقی شروع می‌شود و اگر درجه‌ی مخرج بیشتر از صورت باشد در $\omega=\infty$ به مبدا می‌رسد.

سیستم نوع یک: نقطه‌ی شروع با فاز $-\frac{\pi}{2}$ بوده و اندازه ∞ و در فرکانس بی‌نهایت ($\omega=\infty$) به سمت مبدا میل می‌کند.

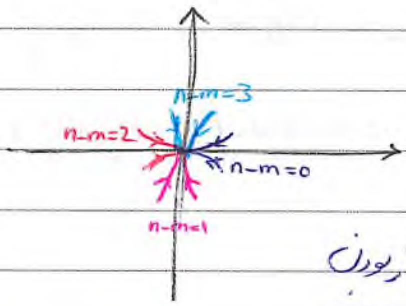
Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

سیستم نوع 2: در فرکانس های پایین $\frac{1}{(jw)^2}$ تاثیرگذار بوده و از فاز $-\pi$ و اندازه ی بی نهایت شروع شده و درصورتی که درجه مخرج از صورت بیشتر باشد در فرکانس های بالا به مبدا می رسد.



$$\frac{1+T_1 s}{(1+T_2 s)^2}$$

$n-m$ = درجه سیستم



نکته: زاویه ی ورود به مبدا در بی نهایت که در بالا نشان داده شده بود را درصورت min فاز بودن می توان از $n-m$ استفاده کرد، ولی درصورت نامینیمم فاز بودن باید فاز تابع تبدیل را به صورت تحلیلی در بی نهایت حساب کنیم.

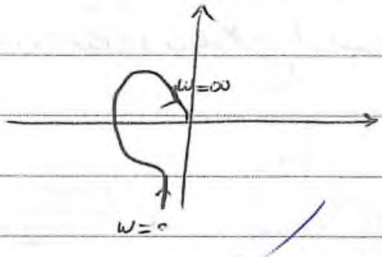
مثال) نمودار قطبی $G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ را رسم کنید.

$$G(jw)=\frac{1}{jw(jw+1)(jw+2)}$$

$$G(jw)\Big|_{w=0^+} = \infty \angle 0-\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon+\varepsilon\right) = -\frac{\pi}{2}-\varepsilon = -91^\circ$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

$$G(j\omega)\Big|_{\omega=\infty} = 0 \angle 0 - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = 0 \angle -\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \approx -269^\circ$$



مثال) نمودار قطبی $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+3)(s+2)}$ را رسم کنید.

$$G(j\omega) = \frac{j\omega+1}{(j\omega)^2(j\omega+3)(j\omega+2)}$$

$$G(j0^+) = \infty \angle \varepsilon_1 - (\pi + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \infty \angle tg^{-1} w - \left(\pi + tg^{-1}\frac{w}{2} + tg^{-1}\frac{w}{3}\right)$$

$\varepsilon_1 \boxed{>} \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ نمی‌توانیم تصمیم

$$= \infty \angle w - \left(\pi + \frac{w}{3} + \frac{w}{2}\right) = \infty \angle -\pi + 0^+$$

$$* \quad \boxed{\lim_{w \to 0} tg^{-1} w = w}$$

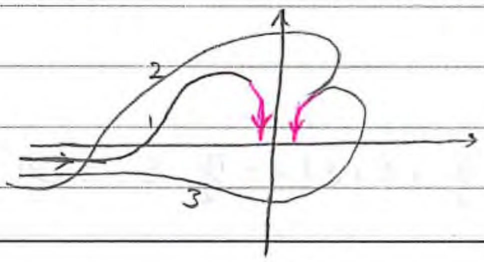
$$G(j\infty) = 0 \angle \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right) - \left(\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_2 + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_3\right)$$

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$

$$= 0 \angle tg^{-1} w - \left(\pi + tg^{-1}\frac{w}{3} + tg^{-1}\frac{w}{2}\right)$$

$(n-m) \times -\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$ $\qquad 0 \angle -\frac{3\pi}{2} + \varepsilon$ یا $-\frac{3\pi}{2} - \varepsilon$

نمی‌توانیم از این راه به نتیجه برسیم. باید نقطه برخورد بدست آوریم یا مقادیر زیر را باهم چک می‌کنیم



Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

با توجه به محاسبه‌ی زاویه‌ی شروع و زاویه‌ی انتها می‌توان چندین نمودار برای این نمودار قطبی در نظر گرفت چرا که زاویه‌ی انتهایی برابر $-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon$ یا $-\frac{3\pi}{2}-\varepsilon$ می‌باشد و برای انتخاب نمودار مورد نظر از نقاط برخورد با محور حقیقی و موهومی را بدست آوریم می‌توانیم یکی از نمودارهای 1 تا 3 را به عنوان نمودار قطبی این تابع معرفی کنیم.

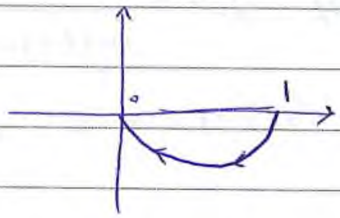
نمودار 1: فقط یک نقطه برخورد با محور حقیقی در سمت منفی دارد.

نمودار 2: محل برخورد با محور حقیقی منفی و محل برخورد با محور موهومی مثبت

نمودار 3: محل برخورد با محور حقیقی مثبت و محل برخورد با محور موهومی منفی

نمودار قطبی چند سیستم متداول:

1) $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega T_1}$



$G(j0^+)=1\angle 0-(\varepsilon^+)=1\angle -\varepsilon$

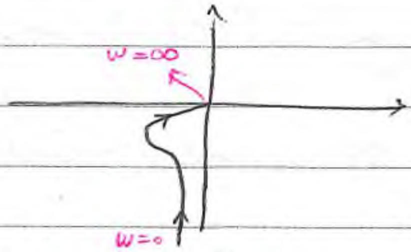
$G(j\infty)=0\angle 0-(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=0\angle -\frac{\pi}{2}+\varepsilon$

2) $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega(1+j\omega T_1)}$

$G(j0^+)=\infty\angle 0-(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)=\infty\angle -\frac{\pi}{2}-\varepsilon \Rightarrow \infty\angle -91$

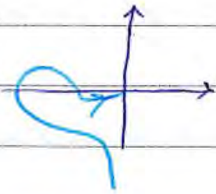
$G(j\infty)=0\angle 0-(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=0\angle -\pi+\varepsilon \Rightarrow 0\angle -179$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



این نمودار ما نخواهد شامل ناحیه‌ی دوم هم باشد یا با محور Re برخورد داشته باشد پس حتماً باید یک صفر در صورت G(s) داشته باشیم چون از یک مقداری به بعد فاز دوباره حالت افزایشی پیدا می‌کند (افزایش ـ کاهش ـ افزایش)

این نمودار نمی‌تواند درست باشد چون:



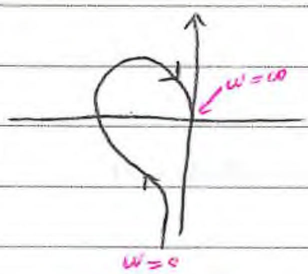
این نمودار قطبی هم در فرکانس صفر با $\infty \angle -91^\circ$ شروع می‌شود و در بی‌نهایت به $0 \angle -179$ ختم می‌شود ولی با کمی توجه می‌بینیم که از فرکانس ω_1 تا بی‌نهایت فاز در حال افزایش می‌باشد

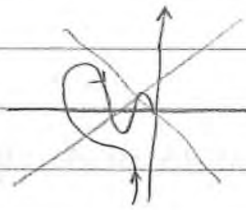
در حالی که تابع $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega T_1+1)}$ هیچ صفری ندارد تا فاز را افزایش بدهد.

3) $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$

$G(j0^+)=\infty \angle 0-(\frac{\pi}{2}+\varepsilon+\varepsilon)=\infty \angle -\frac{\pi}{2}-\varepsilon=\infty \angle -91$

$G(j\infty)=0 \angle 0-(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\varepsilon+\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=0 \angle -\frac{3\pi}{2}+\varepsilon=0 \angle -269$





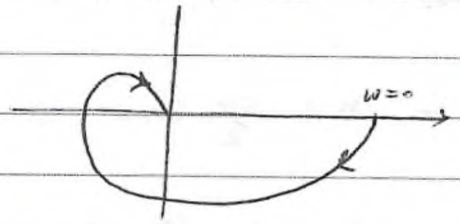
→ این شکل غلط است چون صفر در صورت نداریم.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

4) $G(j\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}$

$G(j0^+) = 1 \angle 0 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 1 \angle -\varepsilon$

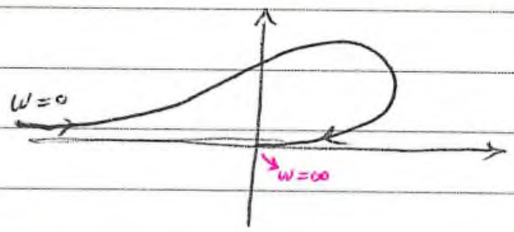
$G(j\infty) = 0 \angle 0 - \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon + \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = 0 \angle -\frac{3\pi}{2} + \varepsilon$



5) $G(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$

$G(j0^+) = \infty \angle 0 - (\pi + \varepsilon + \varepsilon) = \infty \angle -\pi - \varepsilon$

$G(j\infty) = 0 \angle 0 - \left(\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = 0 \angle -2\pi + \varepsilon$

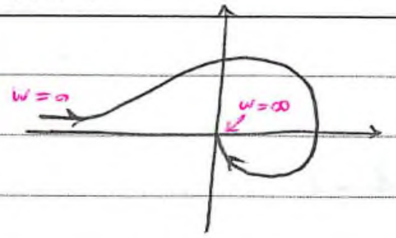


6) $G(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}$

$G(j0^+) = \infty \angle 0 - (\pi + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon) = \infty \angle -\pi - \varepsilon$

$G(j\infty) = 0 \angle 0 - \left(\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = 0 \angle \frac{-5\pi}{2} + \varepsilon$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



شروع = نوع سیستم

پایان = $(n-m)\times -\frac{\pi}{2}$

مثال) نمودار قطبی سیستم نامینیمم فاز زیر را رسم کنید.

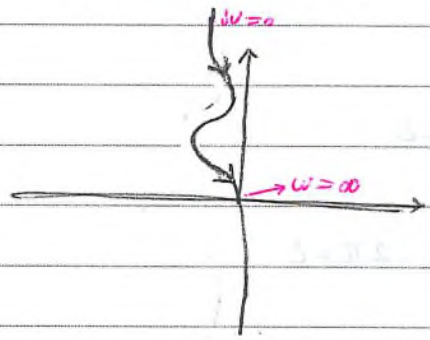
$$G(s)=\frac{1}{s(s-1)(s+3)}$$

$\boxed{\varepsilon_1>\varepsilon_2}$

$$G(j0^+)=\infty\angle 0-\left(\frac{\pi}{2}+\pi-\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)=\infty\angle -\frac{3\pi}{2}+\varepsilon$$

$$G(j\infty)=0\angle 0-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1+\frac{\pi}{2}-\varepsilon_2\right)=0\angle -\frac{3\pi}{2}+\varepsilon$$

$\varepsilon_2>\varepsilon_1$



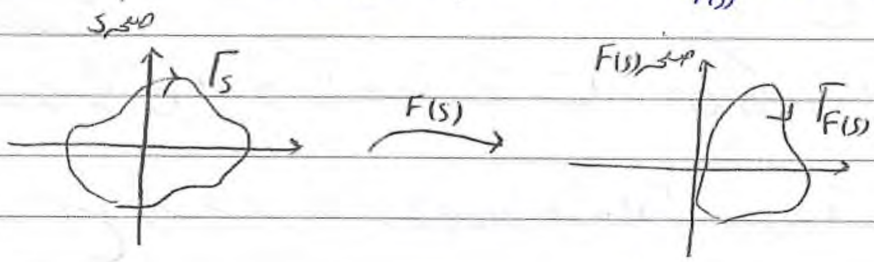
قطب نامینیمم فاز همانند صفر min فاز است.

صفر نامینیمم فاز همانند قطب min فاز است.

اصل آرگومان یا قضیه نگاشت:

فرض کنید $F(s)$ نسبت دو چند جمله‌ای برحسب s و Γ_s مسیر بسته دلخواهی در صفحه s باشد که از هیچ یک از قطب‌ها و یا صفرهای $F(s)$ نمی‌گذرد. این مسیر بسته Γ_s در صفحه‌ی s توسط نگاشت $F(s)$ به مسیر بسته‌ی $\Gamma_{F(s)}$ نگاشته می‌شود. مسیر بسته $\Gamma_{F(s)}$ به تعداد N دور مبدأ صفحه‌ی $F(s)$ را در همان جهت (جهت Γ_s) دور می‌زند که برابر است با $N=Z-P$ که Z تعداد صفرهای $F(s)$ که در مسیر بسته Γ_s قرار دارد و P تعداد قطب‌های $F(s)$ که در مسیر بسته Γ_s قرار دارد.

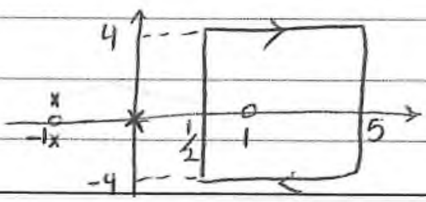
N = تعداد دورهایی که منحنی $\Gamma_{F(s)}$ در صفحه $F(s)$ مبدأ را دور می‌زند.



مثلاً) نگاشت منحنی زیر (مستطیلی) شکل در صفحه‌ی s با توجه به تابع $F(s)$ و تعداد صفر و قطب‌های $F(s)$ که در منحنی مستطیلی شکل در صفحه‌ی s قرار دارد، منحنی بسته‌ای خواهد بود که مبدأ را

۱ـ تعداد قطب‌های $F(s)$ داخل منحنی مستطیل ـ تعداد صفرهای $F(s)$ داخل منحنی مستطیل $= N$ بار دور می‌زند.

$$F(s) = \frac{s^2-1}{s(s^2+2s+1)}$$



Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

نایکوئیست :

معیار نایکوئیست می‌تواند پایداری مطلق و پایداری نسبی سیستم و درجه‌ی ناپایداری یک سیستم ناپایدار را مشخص کند.

در معیار نایکوئیست، پایداری مطلق سیستم حلقه‌بسته به روش ترسیمی و با توجه به نمودار نایکوئیست حلقه‌باز تعیین می‌شود و نیازی به تعیین قطب‌های حلقه بسته نیست.

با استفاده از معیار نایکوئیست می‌توان پایداری را از روی پاسخ فرکانسی سیستم عمده بررسی کرد.

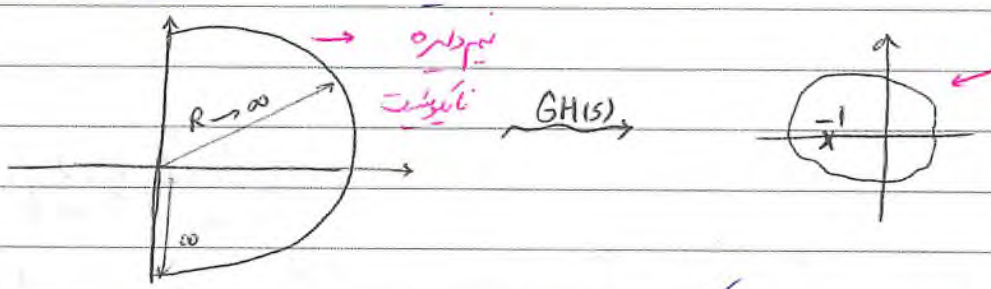
معیار نایکوئیست روش نیمه ترسیمی است که با بررسی خواص منحنی تابع تبدیل حلقه $GH(s)$ پایداری در حوزه‌ی فرکانس پایداری یک سیستم حلقه بسته را مشخص می‌کند و به بیانی دیگر معیار پایداری نایکوئیست پاسخ فرکانسی تابع حلقه‌باز را ($GH(s)$) به تعداد قطب‌های حلقه بسته سیستم در سمت راست محور ساز مرتبط می‌کند.

معیار پایداری نایکوئیست رابطه‌ی پاسخ فرکانسی حلقه‌باز ($GH(s)$) با تعداد صفرها و قطب‌های موجود در نیمه‌ی راست صفحه‌ای که معادله‌ی $1+GH(s)=0$ که همان معادله‌ی مشخصه‌ی حلقه بسته می‌باشد، مشخص می‌کند.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

در معیار پایداری نایکوییست با تابع حلقه $GH(s)$ و منحنی نگاشت یافته سر و کار داریم و می‌خواهیم در مورد تعداد قطب‌های حلقه بسته $1+GH(s)$ در سمت راست محور $j\omega$ تحقیق کنیم.

برای اینکه تئوری نگاشت را برای $1+GH(s)$ استفاده کنیم، می‌توان گفت مبدأ به -1 انتقال یافته است. همچنین برای تشخیص اینکه $1+GH$ قطب در سمت راست محور $j\omega$ دارد، منحنی بی‌نهایت نایکوییست به صورت نیم دایره در سمت راست محور $j\omega$ در نظر می‌گیریم و نگاشت آن را با تابع حلقه $GH(s)$ می‌یابیم.



و از رابطه $N = Z - P$ استفاده می‌کنیم تا تعداد قطب‌های سمت راست $1+GH(s)$ را با توجه به تعداد دورزدن‌های منحنی نگاشت یافته حول -1 را پیدا کنیم که:

$N =$ تعداد دورهای منحنی نگاشت شده حول -1

$Z =$ تعداد قطب‌های حلقه بسته سمت راست $j\omega$

$P =$ تعداد قطب‌های حلقه باز $GH(s)$ سمت راست $j\omega$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

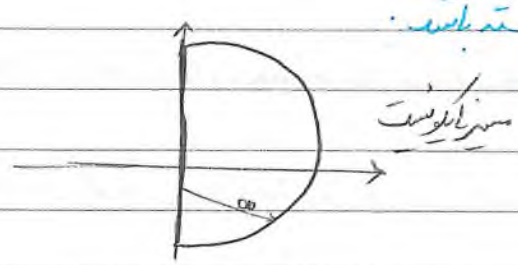
نتیجه گیری : پس برای یافتن تعداد قطب های ناپایدار حلقه بسته، پس از رسم دیاگرام نایکوئیست توسط نگاشت کردن نیم دایره نایکوئیست، تعداد دوران های منحنی نایکوئیست را با توجه به جهت دوران حول ۱- ، N می نامیم. همچنین تعداد قطب های ناپایدار حلقه باز $GH(s)$ را می شماریم که این قطب ها باید درون نیم دایره نایکوئیست قرار داشته باشند. حال می توان گفت:

$Z = N + P$ که اگر $Z = 0$ باشد، سیستم پایدار و در غیر این صورت سیستم حلقه بسته ناپایدار می شود.

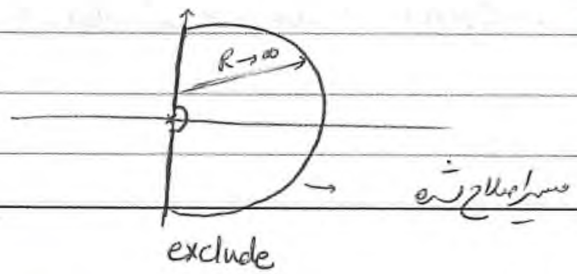
رسم دیاگرام نایکوئیست :

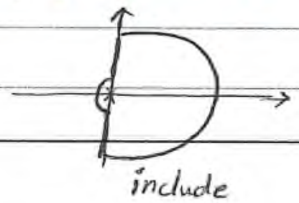
شرط استفاده از قضیه ی نگاشت این است که روی مسیر نیم دایره ی بزرگ صفر و قطب وجود نداشته باشد. پس با توجه به تابع حلقه ی $GH(s)$ می توان نیم دایره های (بزرگ) زیر را در نظر گرفت.

I) اگر $GH(s)$ صفر و قطبی روی محور $j\omega$ نداشته باشد:



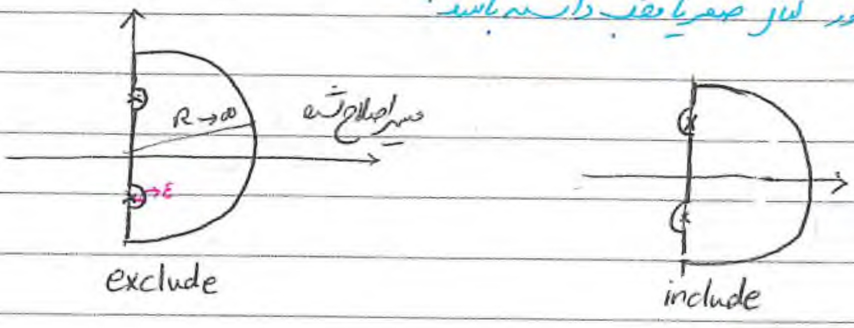
II) اگر یک قطب یا یک صفر در مبدأ باشد:





Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

b) $GH(s)$ روی محور $j\omega$ صفر یا قطب داشته باشد:



نحوه‌ی رسم دیاگرام نایکوئیست (تئوری):

پیش از وارد شدن به این بحث باید بر روی رسم نمودار قطبی کاملاً مسلط باشیم:

1) نگاشت مسیر نایکوئیست را از فرکانس $\omega=0^+$ تا $\omega=\infty$ رسم می‌کنیم. البته مانند داشته‌ها نیازی نیست مسیرهای حذف شده را نگاشت دهیم. فقط کافی است نمودار قطبی را برای $(GH(s))$ تابع تبدیل حلقه باز رسم کنیم.

2) از آنجایی که مسیر نایکوئیست (نیم دایره بزرگ) نسبت به محور حقیقی متقارن می‌باشد، نمودار قطبی (قرینه) رسم شده را نسبت به محور حقیقی رسم می‌کنیم که نگاشت مسیر نایکوئیست از $\omega=-\infty$ تا $\omega=0^-$ می‌باشد.

3) با توجه به تعداد قطب‌های $GH(s)$ (در مبدأ) در مسیر نایکوئیست منحنی نایکوئیست را از 0^- تا 0^+ کامل می‌کنیم.

یعنی برای کامل کردن منحنی از 0^- تا 0^+ به تعداد قطب‌های (در مبدأ)، در جهت ساعتگرد نیم دور

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

می‌رسیم و 0^- را به 0^+ متصل می‌کنیم.

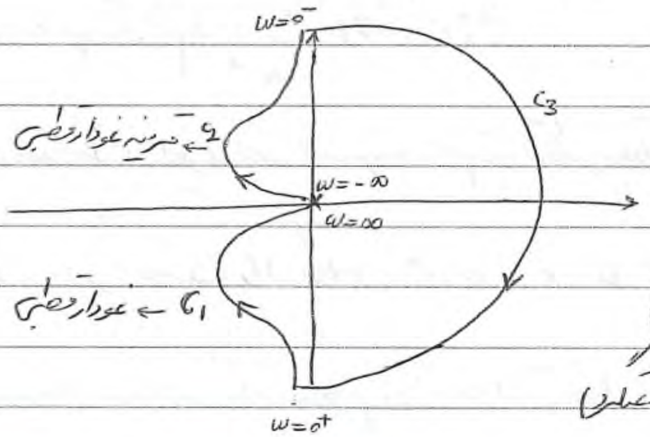
مثال) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌ی زیر را رسم کنید.

$$GH(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}$$

$$\omega \to 0^+ : \infty \angle 0-(90+\varepsilon^+) = \infty \angle -91$$

$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T)}$$

$$\omega \to \infty : 0 \angle 0-(90+90-\varepsilon^+) = 0 \angle -179$$



به تعداد قطب‌های موجود در مبدا
در مسیر نایکوئیست نیم دایره می‌زنیم
تا از 0^- به 0^+ برسیم. (در جهت ساعتگرد)

نکته: برای توابع تبدیل حلقه باز $GH(s)$ دارای عوامل $\frac{1}{s^N}$ وقتی نقطه‌ی s روی نیم دایره‌ای به شعاع ε در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کند $GH(s)$ روی دایره‌ای به شعاع ∞، N نیم دایره در جهت ساعتگرد طی خواهد کرد.

مثال) نمودار نایکوئیست سیستم زیر را برای مسیرهای include و exclude رسم کنید.

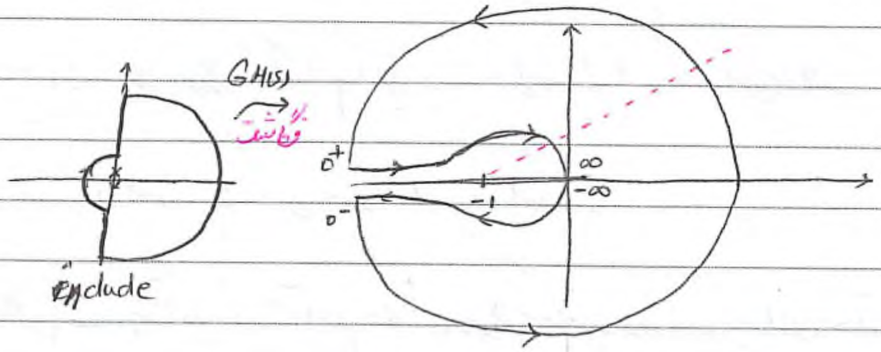
$$GH(s) = \frac{K}{s^2(1+Ts)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(1+j\omega T)}$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

$GH(j0^+) = \infty \angle 0 - (180 + \varepsilon^+) = \infty \angle -181$

$GH(j\infty) = 0 \angle 0 - (180 + 90 - \varepsilon) = 0 \angle -269$

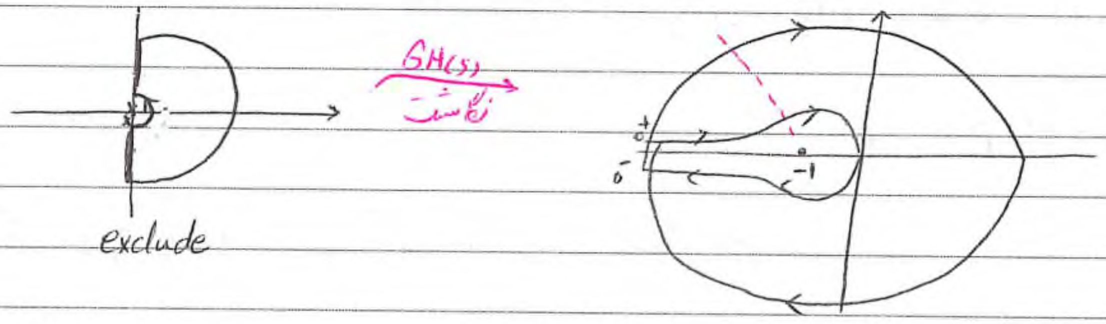


$N = Z - P \Rightarrow Z = N + P = 0 + 2 = 2 \neq 0$ ⟸ سیستم ناپایدار

N در جهت ساعتگرد ← مثبت

N در جهت پادساعتگرد ← منفی

حالت exclude :



بررسی پایداری : $N = 2 \leadsto Z = P + N = 0 + 2 = 2$ ؛ $Z \neq 0$ ← ناپایدار

2 قطب ناپایدار حلقه بسته

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

P تعداد قطب های حلقه باز $GH(s)$ درون مسیر نایکوئیست تعریف شده و چون مسیر را exclude

گرفتیم هیچ قطبی درون مسیر نیست $\Leftarrow P=0$

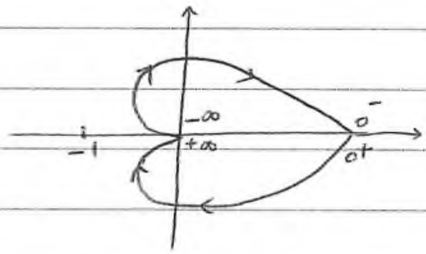
N تعداد دوران دیاگرام نایکوئیست حول نقطه ۱- که در این حالت $N=2$ است چراکه

دو دور در جهت ساعتگرد حول ۱- زده است.

مثال) منحنی نایکوئیست تابع حلقه‌ی زیر را رسم کنید و در مورد پایداری حلقه بسته بحث کنید.

$$GH(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$GH(j\omega)=\frac{K}{(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega)}$$



$$GH(j0^+)=K\angle -2\varepsilon$$

$$GH(j\infty)=0\angle 0-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon+\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=0\angle -179$$

$$Z=N+P=0+0=0$$

اگر T_1 و $T_2>0$ باشد $\Leftarrow$ قطب حلقه باز سمت راست نداریم.

سیستم با شرط K و T_1 و $T_2>0$ همواره پایدار است.

نکته ۸) برای این نکته توجه داشته باشید که نمی‌توان گفت هر وقت تابع حلقه باز $GH(s)$ قطب سمت راست

محور را داشته باشد سیستم ناپایدار است چراکه ممکن است منحنی نایکوئیست در جهت

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

پادساعتگرد $(N<0)$ نقطهٔ -1 را دور بزند به گونه‌ای که $Z=N+P$ ، $N=-P$ باشد $\Leftarrow Z=0$
یعنی تعداد دور پادساعتگرد به تعداد قطب‌های ناپایدار حلقه باز $GH(s)$ باشد، سیستم حلقه بسته پایدار می‌شود.

تعیین محدوده پایداری K از روی منحنی نایکوئیست:

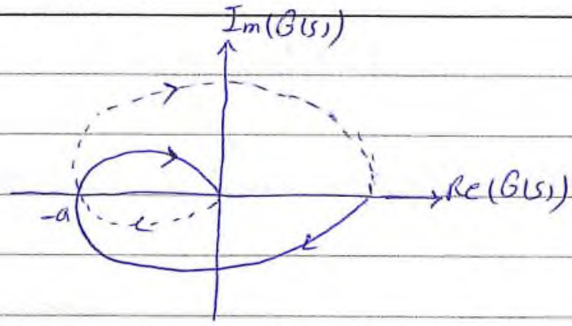
جهت بررسی پایداری با توجه به پارامتر K در تابع تبدیل حلقه باز $KGH(s)$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

1) می‌توان منحنی نایکوئیست را از روی $GH(s)$ رسم کرد و به دلیل ضرب شدن پارامتر K منحنی نایکوئیست را K برابر بزرگ کرد و شرایط دور زدن نقطهٔ -1 را با توجه به تعداد قطب‌های ناپایدار حلقه باز $GH(s)$ بررسی کرد.

2) می‌توان به جای K برابر کردن منحنی نایکوئیست نقطهٔ -1 را به نقطهٔ $-\frac{1}{K}$ تغییر داد و پایداری را بررسی کرد.

مثال) نمودار نایکوئیست یک سیستم با تابع تبدیل حلقه باز min فاز $G(s)$ به صورت زیر می‌باشد محدودهٔ پایداری سیستم را با توجه به پارامتر a محاسبه کنید.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



چون $G(s)$، min فاز است پس صفر و قطب ناپایدار ندارد $\Leftarrow P=0$

$Z=N+\underset{0}{P}=0 \Rightarrow$ نباید ۱- را دور بزند

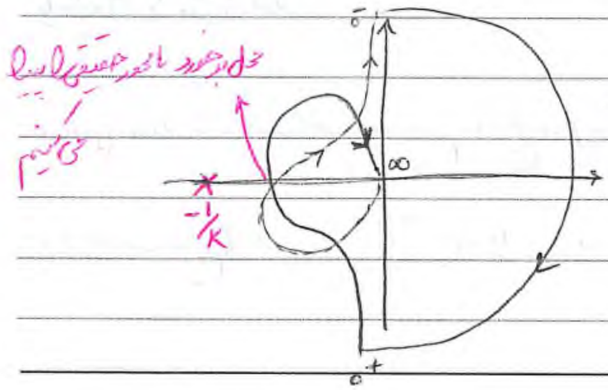
$-a>-1 \rightsquigarrow \boxed{a<1}$

تذکر: اگر در صورت سؤال به exclude یا include بودن مسیر نایکوئیست (نیم دایره‌ی بزرگ) اشاره‌ای نکرده، پیش فرض را exclude می‌گیریم.

مثال) منحنی نایکوئیست $GH(s)=\dfrac{K}{S(T_1S+1)(T_2S+1)}$ را رسم کرده و پایداری آن را بررسی کنید.

$G(j0^+)=\infty\angle 0-(\frac{\pi}{2}+\varepsilon+\varepsilon)=\infty\angle -91$

$G(j\infty)=0\angle 0-(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\varepsilon+\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\cong -269$



$P=0$
$\hookrightarrow N=0$

پس $-\frac{1}{K}$ بیرون از منحنی نایکوئیست باشد

$\Leftarrow$ K باید خیلی کم باشد

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

محاسبه‌ی محل برخورد :

① ابتدا باید Im و Re آن را به راحتی مشخص کنیم

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)}$$

② سپس قسمت Im = 0 قرار داده

③ ω بدست آمده از Im = 0 را در قسمت Re قرار می‌دهیم تا اندازه محل برخورد بدست آید.

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)} \times \frac{j(1-T_1 j\omega)(1-T_2 j\omega)}{j(1-T_1 j\omega)(1-T_2 j\omega)} = \frac{-j(1-T_1 j\omega)(1-T_2 j\omega)}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$= \frac{-j(1-T_1T_2\omega^2-2T_1T_2 j\omega)}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)} \Rightarrow \begin{cases} Re\{G(s)\} = \dfrac{-2T_1T_2\omega}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)} \\ Im\{G(s)\} = \dfrac{T_1T_2\omega^2-1}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)} \end{cases}$$

$$Im=0 \longrightarrow T_1T_2\,\omega^2-1=0 \longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{T_1T_2}}}$$

فرکانس برخورد

محل برخورد $Re\{G(s)\}\Big|_{\omega=\sqrt{\frac{1}{T_1T_2}}} = -a$

مقدار a از بالا بدست می‌آید $\longrightarrow$ $-\frac{1}{K} < -a$: شرط پایداری برای دور زدن

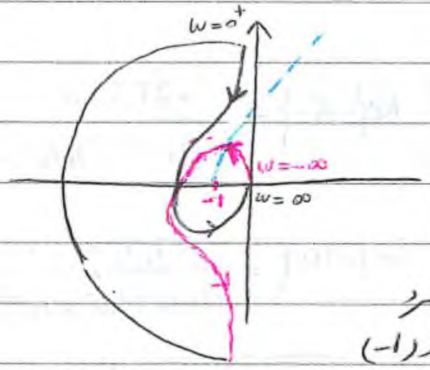
Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) تابع تبدیل حلقه باز (K>1) $G(s)=\frac{K(s+3)}{s(s-1)}$ را در نظر بگیرید و دیاگرام نایکوییست آن را رسم کنید و پایداری آن را با توجه به دیاگرام نایکوییست بررسی کنید.

$$GH(j\omega)=\frac{K(j\omega+3)}{j\omega(j\omega-1)}$$

$$GH(j0^+)=\infty\angle 0^+-\left(\frac{\pi}{2}+\pi-\varepsilon\right)=\infty\angle-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon=\infty\angle-269$$

$$GH(j\infty)=0\angle\frac{\pi}{2}-\varepsilon-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=0\angle-\frac{\pi}{2}-2\varepsilon=0\angle-91$$



K>1

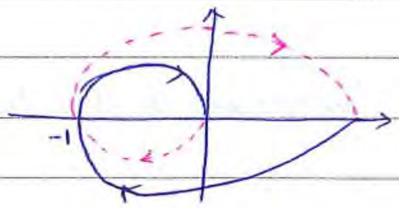
$N=Z-P$

$Z=N+P=-1+1=0$

یک دور پادساعتگرد دور (-1) می‌زند

قطب ناپایدار

مثال) تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $GH(s)=\frac{K}{s^3+3s^2+2s+4}$ می‌باشد. به ازای چه مقادیر مثبتی از K دیاگرام نایکوییست آن مطابق شکل زیر خواهد بود؟



با بررسی پایداری حلقه باز ⟸ $P=0$

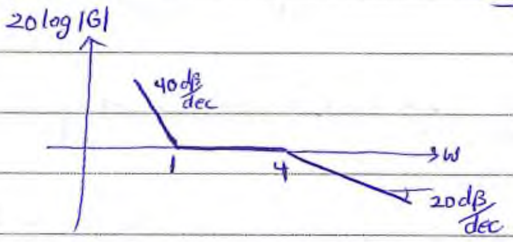
برای اینکه سیستم پایدار باشد باید $Z=N+P=0$ پس باید

(-1) را دور نزند. یعنی در دیاگرام نایکوییست بالا با افزایش K سیستم ناپایدار می‌شود. (-1) داخل منحنی

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) نمودار بود یک تابع تبدیل به صورت زیر می باشد. هیچ قطبی در سمت راست صفحه s ندارد.

تغییرات فاز سیستم را از $w=0$ تا ∞ بدست آورید.



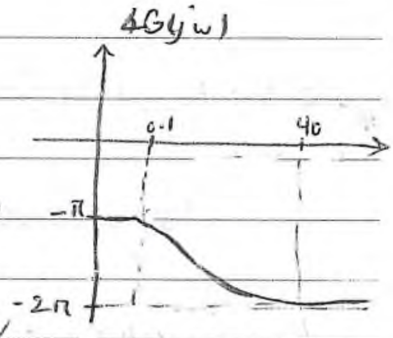
$$G(s)=\frac{k(1\pm s)^2}{s^2(1+\frac{s}{4})}$$

الف) حالت نامینیمم فاز

$$G(jw)=\frac{k(1-jw)^2}{(jw)^2(1+\frac{jw}{4})}$$

$$\angle G(jw)\Big|_{w=0} = 2\varepsilon^- - \left((2\times\tfrac{\pi}{2})+\varepsilon^+\right) = -\pi$$

$$\angle G(jw)\Big|_{w=\infty} = \left(-\tfrac{\pi}{2}+\varepsilon^+\right) - \left(2\times\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon^+\right) = -360$$

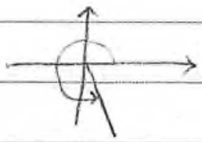


زاویه‌ها را بین 0 تا π در نظر بگیریم

نکته) برای تشخیص فاز یک عامل خطی به صورت نظری نقطه‌ی خطی را به صورت تقریبی در نظر می‌گیریم

و فاز بردار رسم شده را با نقطه به صورت زاویه‌ای بین 0 تا π از خط اندازه بدست می‌آوریم

$\angle\ 1-jw$



$-\frac{\pi}{2}+\varepsilon^+$

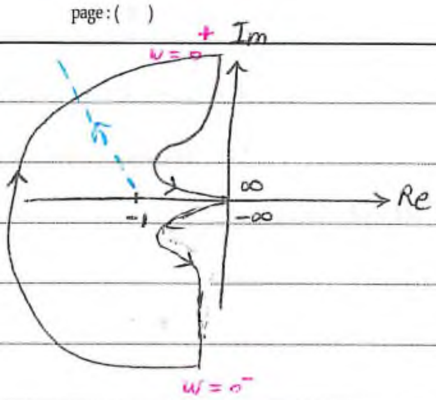
$\cancel{\frac{3\pi}{2}+\varepsilon^+}$

$\angle\ -1-jw$

$-\frac{\pi}{2}-\varepsilon^+$

$\cancel{+\frac{3\pi}{2}-\varepsilon^+}$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



$Z = N + P = 1 + 1 = 2 \neq 0$

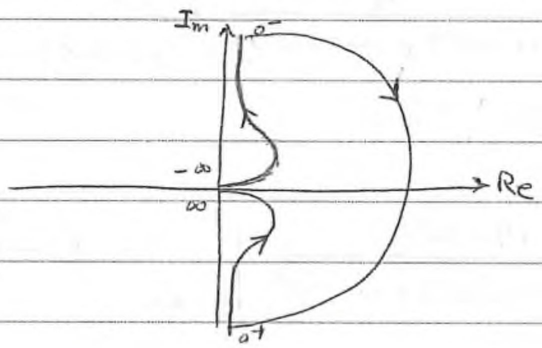
ساعتگرد ← +1

2 قطب ناپایدار

ب) $K < 0$

$G(j0^+) = \infty \measuredangle \pi - (\frac{\pi}{2} + \pi - \varepsilon) = \infty \measuredangle -\frac{\pi}{2} + \varepsilon = \infty \measuredangle -89^\circ$

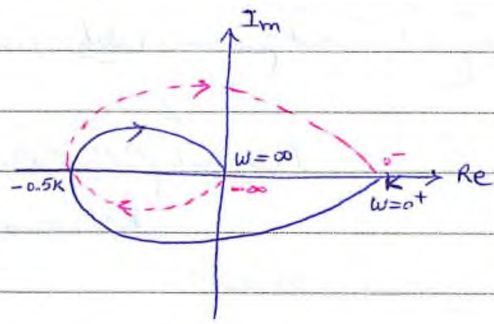
$G(j\infty) = 0 \measuredangle \pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \varepsilon) = 0 \measuredangle -\varepsilon = 0 \measuredangle -1^\circ$



$Z = N + P = 0 + 1 = 1$

1 قطب ناپایدار

مثال) دیاگرام نایکوئیست سیستم min فازی در شکل الف و ب رسم شده است. محدوده‌ی پایداری سیستم را تعیین کنید.



الف) $Z = N + P$

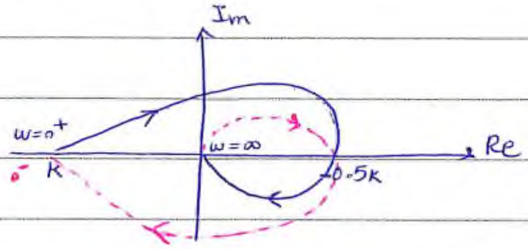
حلقه باز min فاز $\Leftarrow P = 0$

N باید صفر باشد تا $Z = 0$ شود ← برای دور نشدن دیاگرام نایکوئیست K از نیز ناپایداری $K = 2$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

باید کمتر باشد یعنی $\boxed{K<2}$ $K<2$ یا $K<-1$

ب)



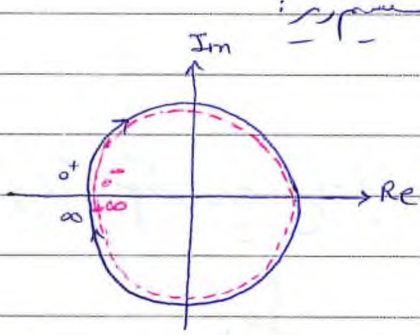
پس از کامل کردن دیاگرام شروع به تحلیل می‌کنیم.

$$Z = N + P \to 0$$

$$\left.\begin{array}{l} K > -1 \\ -0.5K < -1 \longrightarrow K > 2 \end{array}\right\} K > -1 \text{ یا } K > 2$$

نکته: در بعضی از سیستم‌ها عبور از قطب نسبت به محور حقیقی کاملاً متقارن است (از 0^+ تا ∞) یعنی برای دیاگرام نایکوئیست در سیستم تقارن شکل از ($-\infty$ تا 0^-) کافی است عینِ عبور از قطب را کنار آن رسم کنیم مانند سیستم زیر:

$$GH(s) = \frac{K(s^2+1)}{(s+1)^2}$$

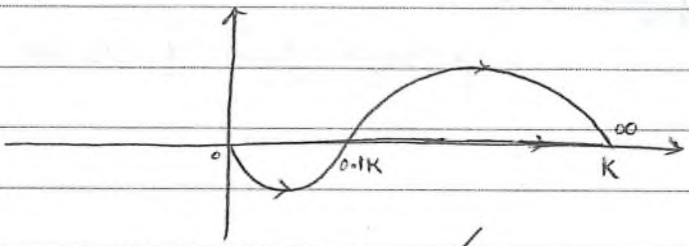


مثال) دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز در شکل زیر برای مقادیر مثبت K رسم شده است. محدوده پایداری سیستم حلقه بسته را تعیین کنید.

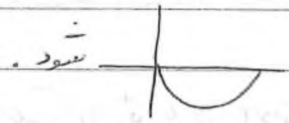
Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

$$KG(s) = \frac{Ks(s+1)}{(s-1)(s+10)}$$

$$G(j0^+) = 0\angle\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1\right) - \left(\pi - \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right) = 0\angle -\frac{\pi}{2} + \varepsilon = 0\angle -89$$



چون S در صورت داریم پس از یک جایی به بعد فاز کم می‌شود پس شکل ما نمی‌تواند به صورت

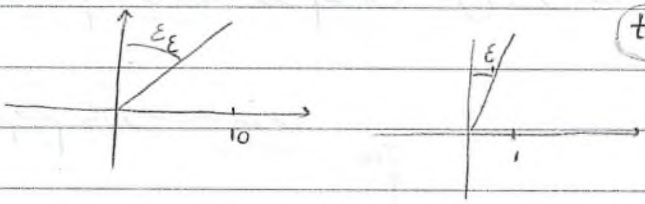


شود.

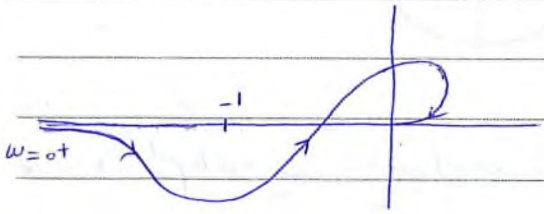
$$G(j\infty) = K\angle\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\varepsilon_1\right) - \left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2+\frac{\pi}{2}-\varepsilon_3\right)$$

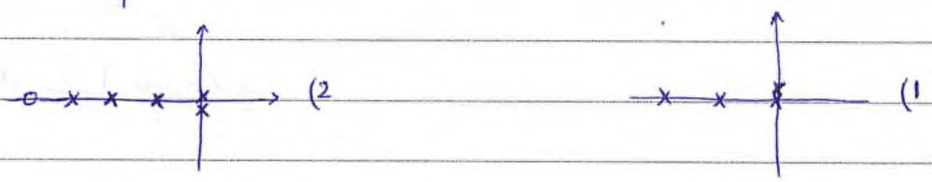
$$= K\angle -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = K\angle\varepsilon_3$$

$tg^{-1}\frac{1}{10}$

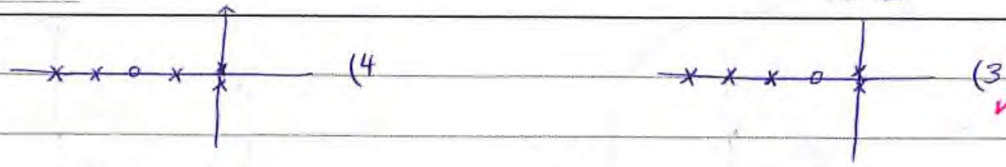


(کنکور ۹۰) کدام توپولوژی صفر و قطب برای سیستمی با دیاگرام قطبی زیر صحیح می‌باشد؟





Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com



(4 (3

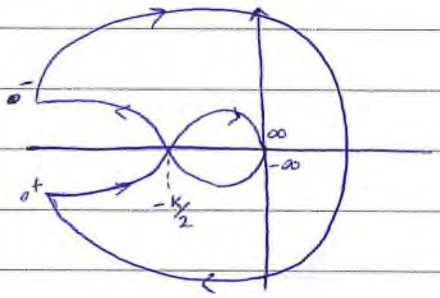
چون در قسمتی از نمودار فاز افزایش پیدا کرده در نتیجه حتماً صفر داشته‌ایم و چون در ابتدا افزایش فاز داشته‌ایم پس صفرها در ابتدای شکل بوده است در نتیجه گزینه 3 صحیح می‌باشد.

با توجه به مدارهای رسم شده به نمودار قطبی در فرکانس‌های مختلف از 0^+ تا ∞ مشاهده می‌کنیم که در فرکانس‌های پایین (شروع نمودار قطبی) در حال افزایش فاز می‌باشیم پس سیستم حلقه باز باید شامل صفر باشد پس گزینه 1 رد می‌شود. بعد از فرکانس‌های اولیه فاز در حال کم شدن پیش می‌رود که مربوط به اثر قطب‌ها می‌باشد. چون در ابتدا فاز افزایش یافته پس فرکانس گوشه مربوط به صفرها زودتر از قطب‌ها می‌باشد یعنی صفر باید به مبدأ نزدیکتر باشد پس گزینه‌ی 3 صحیح می‌باشد.

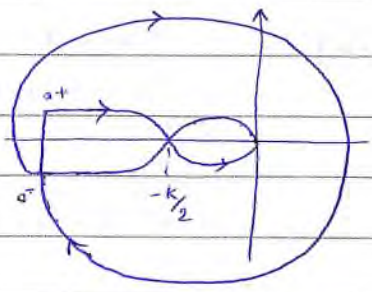
برق 89) تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت $KGH(s) = \dfrac{K(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)}$ است.

نمودار نایکوئیست این سیستم کدام است؟

1)

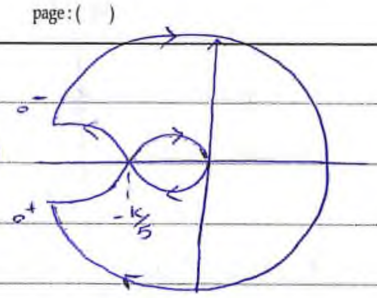


2)

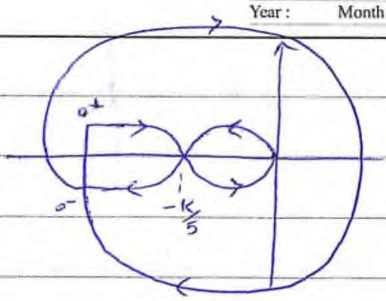


Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

3)



4)



$$\angle G(j\omega) = (\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon_1) - (\pi + \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon_2 + \tfrac{\pi}{2} - \varepsilon_3) = -\tfrac{3\pi}{2} - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

با توجه به فاز در فرکانس بی نهایت فقط ترسیم‌های 1 و 3 قابل قبول هستند و تفاوت ترسیم‌های 1 و 3 در محل برخورد با محور حقیقی می باشند.

روش اول : $GH(j\omega)$ را تشکیل داده و محل برخورد را با محور حقیقی محاسبه می‌کنیم

در محل برخورد $\angle G(j\omega) = \pi \Rightarrow tg^{-1}\omega - \pi - tg^{-1}\frac{\omega}{2} - tg^{-1}\frac{\omega}{3} = -\pi$

$\rightarrow tg^{-1}\omega = tg^{-1}\frac{\omega}{2} + tg^{-1}\frac{\omega}{3} \xrightarrow{tg} \omega \neq \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{3}$ × اشتباه رایج

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\omega = \frac{\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{3}}{1 - \frac{\omega}{2}\cdot\frac{\omega}{3}} \Rightarrow \boxed{\omega = 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+1)}{(j\omega)^2(j\omega+2)(j\omega+3)}$$

$$|G(j1)| = \frac{k\sqrt{1^2+1^2}}{1^2(\sqrt{1^2+1^2})(\sqrt{1^2+2^2})} \rightsquigarrow |G(j1)| = \frac{K}{5}$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

روش دوم: با استفاده از بررسی پایداری

با توجه به گزینه‌های 1 و 3 نقطه‌ی $-K/2$ و $-K/5$ در دور زدن -1 تأثیرگذار می‌باشند. ما می‌توانیم به عنوان مثال K را 4 در نظر بگیریم. در این حالت گزینه‌ی 1 نقطه -1 را 2 بار در جهت ساعتگرد دور زده پس:

$Z=N+P \Rightarrow Z=2+0=2 \neq 0$ ناپایدار

و گزینه‌ی 3 به ازای $K=4$، -1 را دور نمی‌زند یعنی:

$Z=N+P=0+0=0$ پایدار

در نتیجه سیستم حلقه بسته پایدار است.

حال K را در تابع حلقه بسته 4 در نظر می‌گیریم و $\Delta(s)=1+KGH(s)$ را تشکیل می‌دهیم و پایداری را بررسی می‌کنیم اگر پایدار بود گزینه‌ی 3 و اگر ناپایدار بود گزینه‌ی 1 را انتخاب می‌کنیم.

$\Delta(s)=1+KGH(s)\Big|_{K=4} = s^2(s+2)(s+3)+4(s+1)$ $\rightsquigarrow$ پایدار است.

نمودارهای لگاریتم دامنه برحسب فاز:

یک روش جایگزین برای منحنی‌های قطبی و منحنی‌های بود در نمایش پاسخ فرکانسی منحنی لگاریتم دامنه برحسب فاز می‌باشد.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

مزایای لگاریتم اندازه برحسب فاز:

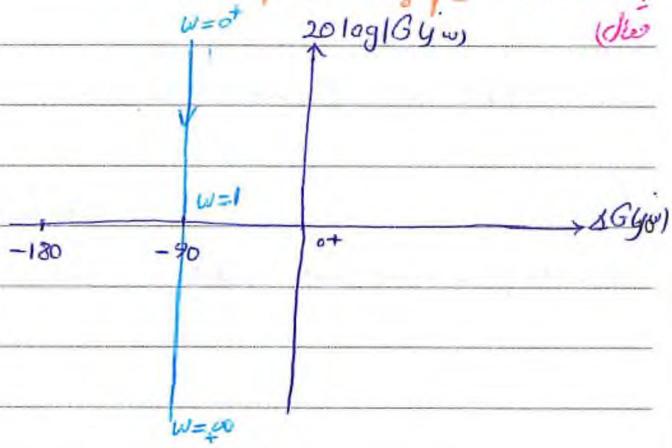
فرکانس های عبور بهره و فاز، حاشیه بهره و حاشیه فاز را می توان به طور واضح روی منحنی لگ برحسب فاز مشخص کرد. بنابراین پایداری نسبی سیستم را می توان سریعاً مشخص داد.

نمودار لگاریتم چند سیستم متداول

(مثال)

1) $G(s) = \frac{1}{s} \rightsquigarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

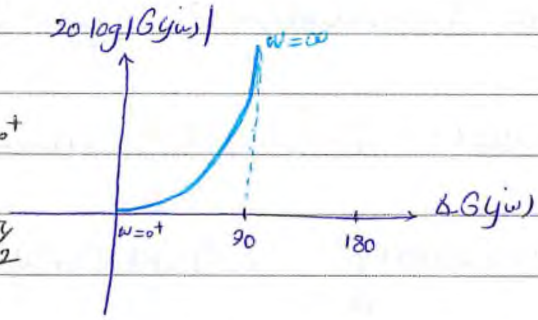
$20\log 0 = -\infty$



2) $G(j\omega) = 1 + j\omega T$

$G(j0^+) = 1\angle 0^+ \rightarrow 20\log G(j0^+) = 0\angle 0^+$

$G(j\infty) = \infty\angle \frac{\pi}{2} \rightarrow 20\log G(j\infty) = \infty\angle\frac{\pi}{2}$



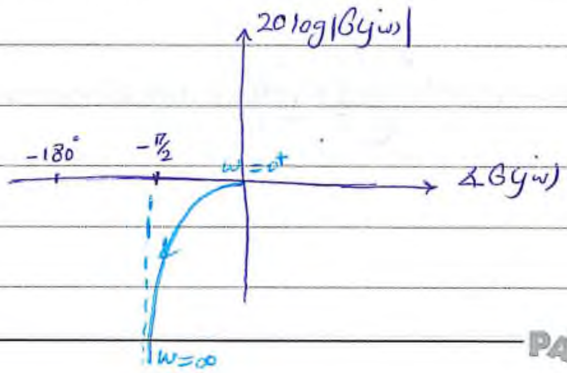
3) $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$

$G(j0^+) = 1\angle 0-\varepsilon$

$\rightarrow 20\log G(j0^+) = 0\angle -\varepsilon$

$G(j\infty) = 0\angle 0-(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$

$20\log G(j\infty) = -\infty\angle -\frac{\pi}{2}$



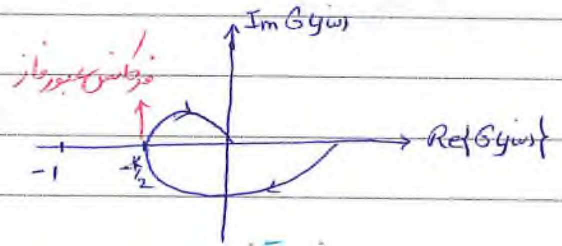
Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

حاشیه فاز و حاشیه بهره:

حاشیه یا حد بهره: اگر تابع تبدیل حلقه باز پایدار باشد $(p=0)$ نمودار قطبی نباید نقطه 1- را دور نزند تا سیستم حلقه بسته پایدار باشد. (برای پایداری $Z = N + p = 0$ باشد.)

باید صفر باشد تا حلقه بسته پایدار باشد

مثلاً به طور نمونه در نمودار قطبی نمونه زیر می توان حد بهره را بدون داشتن روابط حد بهره و حد فاز تشخیص داد.



نمودار قطبی $KG(j\omega)$

با فرض پایداری $G(j\omega)$ برای پایداری سیستم حلقه بسته نمودار قطبی نباید 1- را دور بزند. یعنی می توان گفت $-K/2 > -1$ باشد یا $K<2$ که به این معناست که بیشترین بهره ای که می توان به حلقه باز اعمال نمود تا حلقه بسته پایدار بماند 2 است که همان حد بهره نام دارد.

نحوه محاسبه ی حد بهره:

فرکانس عبور فاز (ω_p): فرکانسی که در آن زاویه ی تابع تبدیل $GH(j\omega)$ برابر 180- می شود را فرکانس عبور فاز می نامند.

$$\angle GH(j\omega_p) = -\pi$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

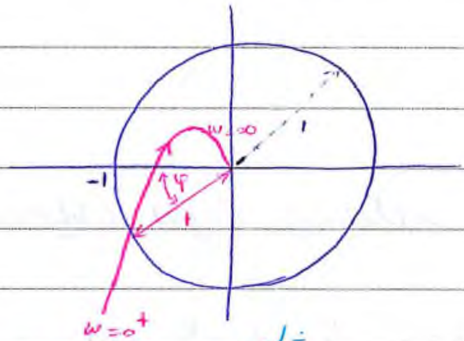
رابطه‌ی بالا بیان می‌کند که در فرکانس عبور فاز هرچقدر اندازه $|GH(j\omega_p)| < 1$ باشد، پایداری بیشتر است.

حد بهره $G_M = \dfrac{1}{|GH(j\omega_p)|}$

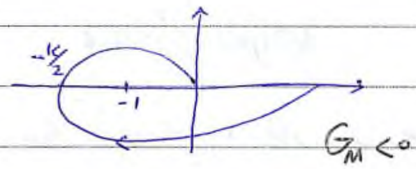
$\angle GH(j\omega_p) = -\pi \rightsquigarrow \omega_p = \checkmark$

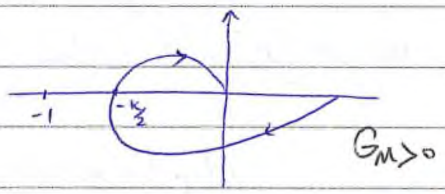
$$G_{M_{dB}} = 20\log\frac{1}{|GH(j\omega_p)|} = -20\log|GH(j\omega_p)|$$

حد فاز



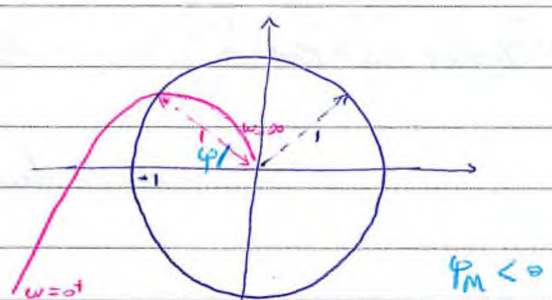
شکل ۱





توضیح شکل ۱

به طور کلی می‌توان گفت در این سیستم به اندازه φ درجه می‌توان فاز منفی به سیستم اعمال کرد تا باز هم پایدار بماند (۱- را دور نزند)



شکل 2

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

در نمودار قطبی نقطه ۱- را دور زده و سیستم ناپایدار است. برای پایدارسازی باید فاز مثبت به سیستم اعمال کنیم یا تأخیر سیستم را کم کنیم به عبارت دیگر به اندازه φ فاز مثبت به سیستم اعمال کنیم تا در مرز ناپایداری قرار گیرد.

محاسبه‌ی حدفاز:

فرکانس عبور بهره: فرکانسی که در آن اندازه‌ی تابع تبدیل حلقه باز (یا GH) برابر یک یا صفر دسی‌بل باشد، را فرکانس عبور بهره یا w_g می‌گویند.

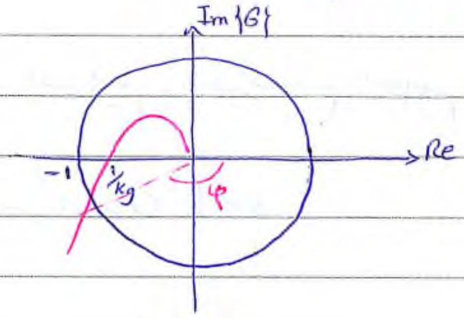
$$\begin{cases} |G(jw_g)| = 1 \longrightarrow w_g = \checkmark \\ \varphi_M = \angle G(jw_g) + \pi \begin{cases} > 0 \longrightarrow \text{پایدار است} \\ < 0 \longrightarrow \text{ناپایدار است} \end{cases} \end{cases}$$

نکته: حدبهره و حدفاز هرکدام می‌توانند مثبت یا منفی باشند.

نکته: حدبهره و حدفاز هردو معیاری از پایداری نسبی هستند ولی هیچ یک از حدفاز و حد بهره به تنهایی نمی‌تواند پایداری نسبی را به حد کافی مشخص کند.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

حدبهره و حدفاز روی نمودارهای نایکوئیست، بود و نمودار اندازه برحسب فاز :

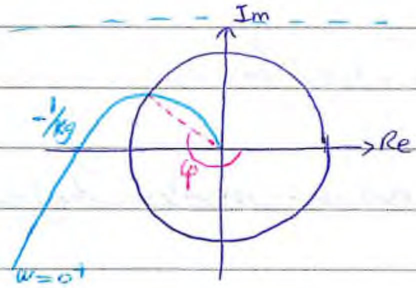


حدفاز $\varphi_M > 0 \longrightarrow \varphi_M = \pi + \varphi$

$-\pi <$ خودش منفی است < 0

حدبهره $G_M = \dfrac{1}{1/k_g} > 0$

پایدار است



$\varphi_M = \varphi + \pi < 0$ ← حدفاز منفی است

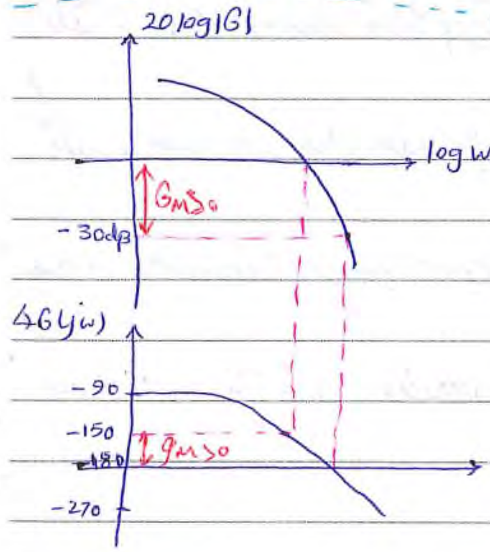
$G_M = \dfrac{1}{1/k_g} = k_g < 1$ حدبهره

$G_{M_{dB}} < 0$

$$G_M = \frac{1}{|G(j\omega_p)|} \longrightarrow G_{M_{dB}} = 20\log\frac{1}{|G(j\omega_p)|} = -20\log|G(j\omega_p)|$$

$\log < 1$

ناپایدار



$\varphi_M = \pi + (-150) = 30^\circ > 0$

$G_M > 1 \equiv G_{M_{dB}} > 0$ حدبهره مثبت

$G_M < 1 \equiv G_{M_{dB}} < 0$ حدبهره منفی

$G_{M_{dB}} > 0$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

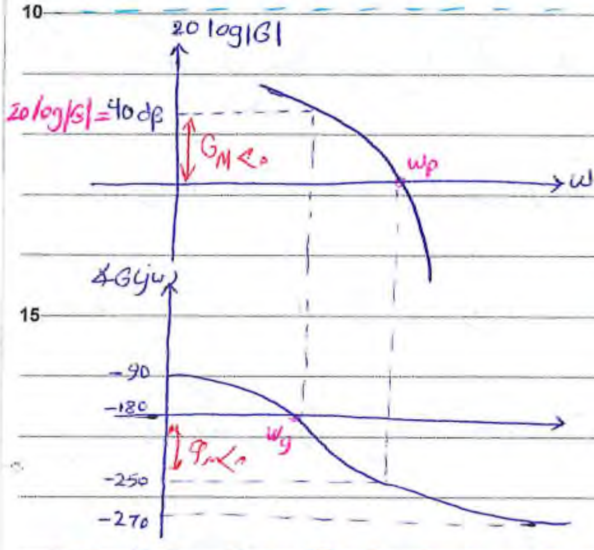
محاسبه‌ی حد بهره: فرض می‌کنیم که فاز $-\pi$ می‌شود را تشخیص داده و اندازه $G(j\omega)$ را

باید حساب کنیم که در این سیستم در فاز $-\pi$ اندازه $-30d\beta$ است یعنی

$$-30d\beta = +20\log|G(j\omega_p)|$$

$$G_{M_{d\beta}} = -20\log|G(j\omega_p)| = -(-30d\beta) = 30d\beta$$

$$\boxed{G_{M_{d\beta}} = -20\log|G(j\omega_p)|}$$

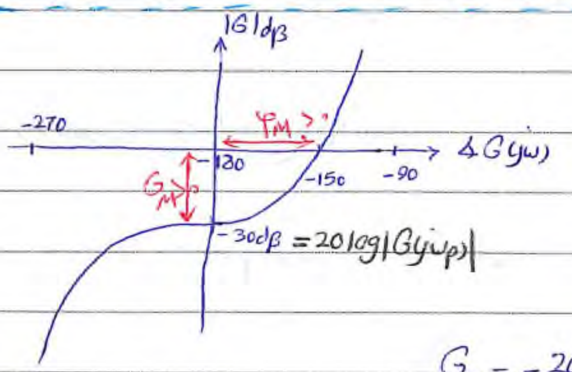


برای حد فاز می‌رویم کجا یک است (اندازه یک شده)

برای حد بهره می‌رویم کجا $-\pi$ (فاز) داریم.

$\varphi_M = -250 + 180 = -120$ حد فاز

$G_M = -20\log|G(j\omega_p)| = -40d\beta$ حد بهره



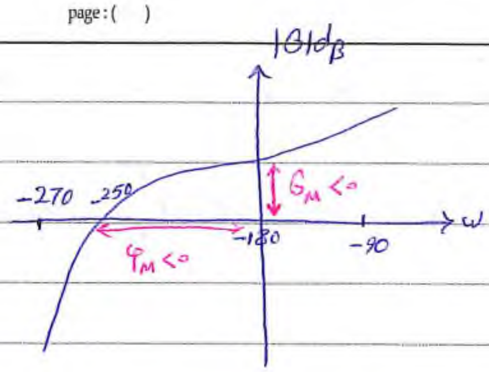
حد فاز $\measuredangle G(j\omega_g) = -150$ → فاز در فرکانسی که اندازه یک (0dβ) شده

$$\varphi_M = -150 + \pi = 30^\circ > 0$$

$$G_M = -20\log|G(j\omega_p)| = 30d\beta$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

جلسه 17 ← 10/8



نکته: برای پایدار بودن سیستم حلقه بسته به شرط پایداری حلقه باز باید هم حد بهره و هم حد فاز مثبت باشد.

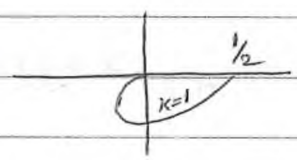
نکته: اگر تابع حلقه باز ناپایدار باشد با توجه به پایداری حلقه بسته $Z=N+P$ که باید $Z=0$ شود می‌توان گفت $P\neq 0$ است (حلقه باز ناپایدار است) پس برای پایداری حلقه بسته دیاگرام نایکوئیست باید -1 را دور بزند که به معنای حد فاز و حد بهره‌ی منفی می‌باشد.

به عبارت دیگر شرط پایداری حلقه بسته سیستم حلقه باز ناپایدار حد فاز و حد بهره‌ی منفی می‌باشد.

نکته: حد بهره‌ی سیستم های مرتبه اول و مرتبه دوم بی‌نهایت است چرا که نمودار قطبی سمت منفی محور حقیقی را قطع نمی‌کند.

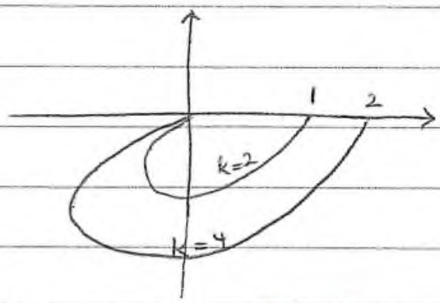
توجه: در سیستم مرتبه 2 حد فاز بی‌نهایت نیست.

$$G(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$$



Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

شکل را هرچقدر K برابر بزرگ کنیم، ۱- را دور می‌زند یعنی حد بهره بی‌نهایت است.

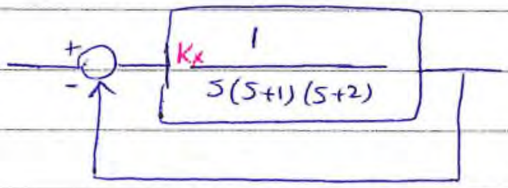


روش محاسبه‌ی حد بهره با استفاده از پایداری حلقه بسته:

برای بدست آوردن حد بهره در سیستم‌های بدون تأخیر خودمان متغیر K در تابع تبدیل حلقه باز ضرب می‌کنیم و حدود پایداری را با توجه به روابط گفته شده در فصول قبلی محاسبه می‌کنیم.

کران بالای شرط پایداری با توجه به مقدار K حد بهره می‌باشد.

مثال) حد بهره‌ی سیستم زیر را بدست آورید.



روش اول: (تستی)

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

$$\left.\begin{array}{l} K>0 \\ 3\times 2 > K \end{array}\right\} \Rightarrow 0<K<\underset{\text{حد بهره}}{\underbrace{6}}$$

روش دوم:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle G(j\omega) = 0 - \left(\frac{\pi}{2} + tg^{-1}\omega + tg^{-1}\frac{\omega}{2}\right) \\ \angle G(j\omega) = -\pi \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - tg^{-1}\omega - tg^{-1}\frac{\omega}{2} = -\pi$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

$$\Rightarrow tg^{-1}\omega + tg^{-1}\frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{tg می‌گیریم}} \frac{\omega+\frac{\omega}{2}}{1-\omega\times\frac{\omega}{2}} = \infty \rightarrow \boxed{\omega_p=\sqrt{2}\ rad/s}$$

فرکانس عبور فاز

$$|G(j\omega_p)| = \frac{1}{\omega\left(\sqrt{\omega^2+1}\right)\left(\sqrt{\omega^2+2^2}\right)}$$

$$G_M = \frac{1}{|G(j\omega_p)|} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}\times\sqrt{6})}} = \sqrt{36} = 6$$

همان طور که مشاهده گردید روش پایداری روث هرویتز برای محاسبه‌ی حد بهره حجم محاسبات را به شدت کاهش می‌دهد.

مثال) حد بهره سیستمی با تابع تبدیل $GH(s)=\frac{1}{s^2+3s+4}$ را محاسبه کنید.

روش سوم: با کمک روث هرویتز

خودمان ضرب می‌کنیم

$$\Delta(s) = 1+KGH(s) = s^2+3s+4+K$$

$4+K>0 \rightarrow K>-4$ پس کران بالا ندارند پس حد بهره بی‌نهایت می‌باشد

مثال) تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $\frac{k}{s(s+1)}$ می‌باشد. اگر حد فاز سیستم 30 درجه باشد مقدار K را بدست آورید.

$$\varphi_M = 30^\circ = \pi + \angle G(j\omega_g) \longrightarrow \boxed{\angle G(j\omega_g) = -150^\circ}$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

$$\to 0-\left(\frac{\pi}{2}+tg^{-1}w_g\right)=-150^\circ \rightsquigarrow tg^{-1}w_g=60 \rightsquigarrow \boxed{w_g=\sqrt{3}}$$

$$|G(jw_g)|=1 \longrightarrow \left.\frac{k}{w\sqrt{w^2+1}}\right|_{w_g}=1 \rightsquigarrow \frac{k}{\sqrt{3}\,\sqrt{4}}=1 \longrightarrow \boxed{k=2\sqrt{3}}$$

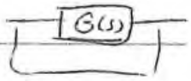
مثال) تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم با فیدبک واحد منفی به صورت زیر است. حد فاز سیستم چقدر است؟

$$T(s)=\frac{2\sqrt{3}}{s^2+s+2\sqrt{3}}$$

توصیه: حد فاز و حد بهره از روی تابع تبدیل حلقه باز محاسبه می‌شوند پس قبل از محاسبه‌ی حد فاز تابع تبدیل حلقه بسته را به حلقه باز تبدیل می‌کنیم.

دو روش برای تبدیل حلقه بسته به حلقه باز داریم:

① $G(s)=\dfrac{T(s)}{1-T(s)}$ ② $G(s)=\dfrac{\text{صورت}}{\text{مخرج}-\text{صورت}}$



$$G(s)=\frac{2\sqrt{3}}{s^2+s}=\frac{2\sqrt{3}}{s(s+1)} \rightsquigarrow G(jw)=\frac{2\sqrt{3}}{jw\,(jw+1)}$$

$$|G(jw)|=1 \longrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{w\sqrt{w^2+1}}=1 \rightsquigarrow 12=w_g^2(w_g^2+1) \rightsquigarrow \boxed{w_g=\sqrt{3}}$$

$$\angle G(jw)=0-(90+tg^{-1}w_g)=-90-tg^{-1}\sqrt{3}=-150$$

$$\varphi_M=\pi+\angle G(jw_g) \Rightarrow \boxed{\varphi_M=30}$$

در این سؤال اگر حد بهره را می‌خواست از روش تستی باید $T(s)$ را به حلقه باز تبدیل کرده و سپس K را در آن ضرب می‌کردیم و بعد از روش تستی روث هرویتز استفاده می‌کردیم.

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) تابع تبدیل حلقه باز سیستمی بصورت $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(s+5)}$ می باشد. مقدار K را چنان تعیین کنید که حد بهره‌ی سیستم 40 dB شود.

حد بهره ← فرکانس عبور فاز

حد فاز ← فرکانس عبور بهره

محاسبه‌ی فرکانس عبور فاز:

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+5)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle G(j\omega)=0-\left(90+tg^{-1}\omega+tg^{-1}\frac{\omega}{5}\right)\\ \angle G(j\omega)=-180\end{array}\right\}\longrightarrow tg^{-1}\omega+tg^{-1}\frac{\omega}{5}=90$$

tg می‌گیریم

$$\longrightarrow \frac{\omega+\frac{\omega}{5}}{1-\omega\times\frac{\omega}{5}}=\infty\longrightarrow \boxed{\omega_p=\sqrt{5}}$$

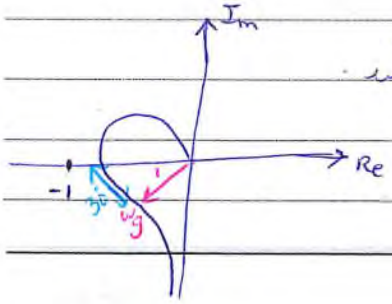
$$G_M=\frac{1}{|G(j\omega_p)|}\leadsto G_{M_{dB}}=20\log\left|\frac{1}{G(j\omega_p)}\right|=-20\log|G(j\omega_p)|$$

$$\leadsto -20\log|G(j\omega_p)|=40\leadsto \boxed{|G(j\omega_p)|=0.01}$$

$$\leadsto \frac{k}{\sqrt{5}\left(\sqrt{(\sqrt{5})^2+1}\right)\left(\sqrt{(\sqrt{5})^2+25}\right)}=0.01\leadsto \boxed{k=0.3}$$

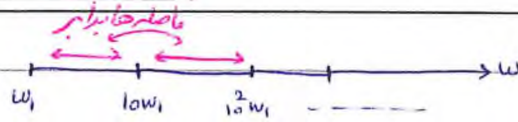
تاثیر عامل تأخیر در حد فاز:

فرض کنید نمودار قطبی حلقه باز $G(j\omega)$ بصورت زیر می باشد

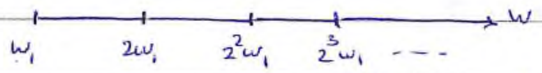


Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

فاصله فرکانسی ω_1 تا $10\omega_1$ ← دهه



فاصله فرکانسی ω_1 تا $2\omega_1$ ← اکتاو



توجه: در مقیاس لگاریتمی فاصله‌ی دهه فرکانسی با یکدیگر برابر است. یعنی فاصله 0.1 تا 1 با فاصله 10 تا 100 برابر است. در اکتاو نیز فاصله‌ی 1 تا 2 با فاصله‌ی 8 تا 16 باهم برابرند.

روابط نسبت های فرکانسی برحسب دهه:

1) $u = \log_{10} w \longleftrightarrow w = 10^u$

2) $u_2 - u_1 = \log_{10} w_2 - \log_{10} w_1 = \log \frac{w_2}{w_1}$

3) تعداد دهه‌ها $= 10 \log_{10} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)$

روابط نسبت های فرکانسی برحسب اکتاو:

1) $u = \log_2 w \longleftrightarrow w = 2^u$

2) $u_2 - u_1 = \log \left(\frac{w_2}{w_1} \right)$

تعداد اکتاو: $\log_2 \left(\frac{w_2}{w_1} \right)$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

حال اگر نمودار قطبی $e^{-2s}G(s)$ را بخواهیم مشاهده کنیم:

$e^{-2s}G(s) \longrightarrow e^{-2j\omega}G(j\omega)$

که باعث چرخش نمودار قطبی در جهت منفی مثلثاتی می‌شود (مقدار زاویه‌ی چرخش به ω بستگی دارد.)

سؤالی که مطرح می‌شود این است که $\underbrace{\text{عامل}}_{\text{مقدار آن}}$ تأخیر e^{-Ts} چقدر باشد تا سیستم پایدار بماند.

$e^{-Ts} \xrightarrow{\text{چرخش}} e^{-Tj\omega}$

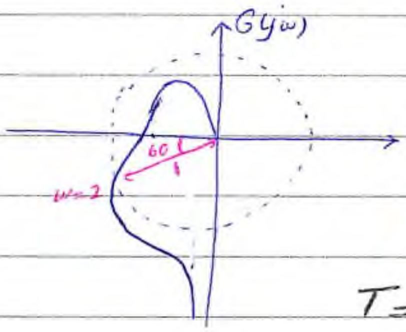
$\angle e^{-Tj\omega} = -T\omega$ فاز منفی به نمودار قطبی می‌دهد. $T\omega_g+\pi=\varphi_M$

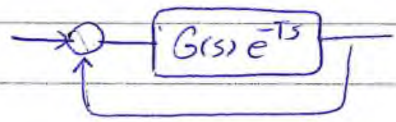
$T\omega_g = \varphi_M \longrightarrow \boxed{T=\frac{\varphi_M}{\omega_g}} \longrightarrow$ برحسب رادیان

که این مقدار باعث چرخش در جهت منفی می‌شود و به مرز ناپایداری می‌رسد (یعنی 1- را قطع می‌کند)

در مثال صفحه‌ی قبل اگر $\omega_g=10$ و $\varphi_M=\pi/6$ باشد $\Leftarrow$ $T=\frac{\pi}{60}$

مثال) در سیستم زیر نمودار قطبی حلقه باز $G(s)$ رسم شده است. حداکثر مقدار T که سیستم پایدار می‌ماند را محاسبه کنید.



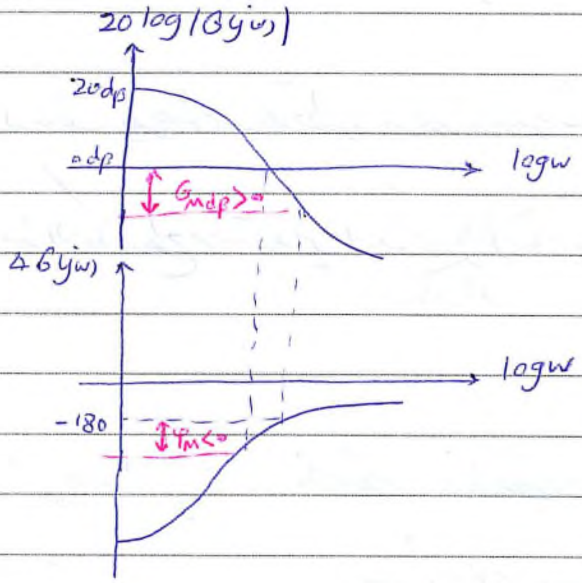


رادیان

$$T=\frac{\varphi_M}{\omega_g}=\frac{\pi/3}{2}=\frac{\pi}{6}$$

Eng.TAVASOLI
hadi.tavasoli@gmail.com

مثال) دیاگرام بود سیستم حلقه باز ناپایداری به صورت زیر می باشد. در مورد پایداری آن بحث کنید.



$G_{M_{dB}} > 0$
$\varphi_M < 0$
} → سیستم ناپایدار