

اختلال

امیر آقامحمدی

چکیده — در این مقاله با ارائه‌ی تعدادی مثال سعی می‌شود روش اختلال معرفی شود. در بخش اول مثال‌ها در حوزه‌ی معادله‌های جبری است. در بخش دوم مثال‌هایی در مورد استفاده از روش اختلال در حل معادله‌های دیفرانسیل آمده است.

تعداد مسائلی که می‌توان دقیق حل کرد نسبت به تعداد مسائلی که حل دقیق ندارند، یا به سادگی قابل حل نیستند، خیلی کم است. اختلال تکنیکی است که گاهی با استفاده از آن می‌توانیم اطلاعاتی، هر چند تقریبی، در مورد سیستم مورد نظرمان به دست آوریم. البته این تکنیک زمانی به درد می‌خورد که سیستم مورد نظر ما در نزدیکی سیستمی باشد که حل دقیق آن را بلدیم. منظور از نزدیکی هم آن است که معادله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم تنها در عبارت کوچکی با معادله‌ی حل‌پذیر اختلاف داشته باشد. در این جا بیش‌تر مثال‌هایی که می‌زنیم به روش دقیق هم قابل حل‌اند. حسن این کار این است که می‌توانیم جواب دقیق را با جواب تقریبی مقایسه کنیم. در برنامه‌ی رسمی آموزش فیزیک در دوره‌ی کارشناسی تقریباً تنها در درس مکانیک کوانتمی و آن هم در محاسبه‌ی اختلالی مقادیر ویژه‌ی یک عمل‌گر و یا احتمالاً در اختلال وابسته به زمان، روش اختلال مورد استفاده‌ی جدی قرار می‌گیرد. اما از روش اختلال در حل معادله‌های جبری، معادله‌ی دیفرانسیل، انتگرال‌گیری، و ... می‌توان استفاده کرد. روش اختلال زمانی به کار می‌آید که معادله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم به پارامتری مثل ϵ بستگی داشته باشد و این بستگی چنان باشد که بتوان در حالت $\epsilon = \epsilon_0$ مسئله را حل کرد. در روش اختلال فرض می‌کنیم که جواب مسئله را می‌توان بر حسب $\epsilon - \epsilon_0$ بسط داد. در این مقاله سعی می‌شود با مثال‌های مختلف این روش معرفی شود.

۱ معادله‌های جبری

مثال ۱ — معادله‌ی $x^2 = 1 + \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$) را در نظر بگیرید. جواب این معادله عبارت است از

$$x = \pm\sqrt{1 + \epsilon} \approx \pm\left(1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots\right). \quad (1)$$

حالا بیایید این معادله را با روش اختلال حل کنیم. اگر ϵ را صفر بگیریم، جواب معادله‌ی (1)، $x_0 = \pm 1$ است. جواب معادله‌ی (1) تابعی از ϵ است. فرض می‌کنیم این تابع بسط تیلوری هم‌گرا از ϵ داشته باشد.

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \quad (2)$$

این بسط را در معادله‌ی (1) جاگذاری می‌کنیم.

$$(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots)^2 = 1 + \epsilon \quad (3)$$

دو تابع $1 + \epsilon$ و $(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots)^2$ با هم برابرند پس بسط تیلور و یا در واقع ضرایب بسط تیلور آن‌ها هم با هم برابرند. پس ضرایب توان‌های مختلف ϵ در دو طرف رابطه‌ی (3) باید مساوی باشند.

$$\begin{aligned} \epsilon^0; \quad x_0^2 = 1 &\Rightarrow x_0 = \pm 1 \\ \epsilon^1; \quad 2x_0 x_1 = 1 &\Rightarrow x_1 = 1/(2x_0) = \pm 1/2 \\ \epsilon^2; \quad x_1^2 + 2x_0 x_2 = 0 &\Rightarrow x_2 = x_1^2/(2x_0) = \mp 1/8 \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

دو جواب به دست می‌آید:

$$x = \pm \left(1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots \right), \quad (5)$$

که همان جواب معادله‌ی (1) است که از بسط جواب دقیق به دست آورده بودیم. ϵ را 0.01 بگیریم. $x^2 = 1.01$ و جذر آن تا هشت رقم اعشار $x = 1.0049875$ می‌شود. با استفاده از روش اختلال و فقط تا مرتبه‌ی دوم ϵ به همین جواب می‌توان رسید. مثال ۲- مثال دیگری را در نظر بگیریم.

$$x^2 - (3 + 2\epsilon)x + 2 + \epsilon = 0. \quad (6)$$

در حد $\epsilon = 0$ جواب‌های این معادله $x_0 = 1, 2$ است. بسط (2) برای x را در معادله‌ی (6) جاگذاری می‌کنیم. ضرایب توان‌های مختلف ϵ صفر هستند.

$$\begin{aligned} \epsilon^0; \quad x_0^2 - 3x_0 + 2 = 1 &\Rightarrow x_0 = 1, 2 \\ \epsilon^1; \quad 2x_0 x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1 = 0 &\Rightarrow x_1 = \frac{2x_0 - 1}{2x_0 - 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2; & \quad x_1^2 + 2x_0x_2 - 3x_2 - 2x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2x_1 - x_1^2}{2x_0 - 3} \\ \dots & \quad \dots \end{aligned} \quad (7)$$

از این جا دو جواب معادله ی (6) به دست می آیند:

$$\begin{aligned} x &= 1 - \epsilon + 3\epsilon^2 + \dots \\ x &= 2 + 3\epsilon - 3\epsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

در مثال های قبلی با اضافه شدن جمله ی اختلال مرتبه ی معادله و بنا بر این تعداد جواب ها عوض نمی شد. اما اگر با اضافه شدن جمله ی اختلال مرتبه ی معادله بالا رود برای $\epsilon \neq 0$ ممکن است جواب هایی به دست آید که در حد $\epsilon = 0$ نداشتیم. مثال ۳- معادله ی

$$\epsilon x^2 + x - 1 = 0. \quad (9)$$

به ازای $\epsilon = 0$ این معادله مرتبه ی یک است در حالی که برای $\epsilon \neq 0$ مرتبه ی دو می شود. تنها جواب این معادله در حد $\epsilon = 0$ ، $x_0 = 1$ است. بسط (2) برای x را در معادله ی (9) جاگذاری می کنیم.

$$\epsilon(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots)^2 + (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) - 1 = 0. \quad (10)$$

همه ی ضرایب ϵ در رابطه ی بالا صفر هستند.

$$\begin{aligned} \epsilon^0; & \quad x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \\ \epsilon^1; & \quad x_1 + x_0^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ \epsilon^2; & \quad 2x_0x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \\ \dots & \quad \dots \end{aligned} \quad (11)$$

معادله ی (9) دو جواب دارد، اما با این روش تنها یک جواب را به دست می آوریم. نتیجه ای که می توانیم بگیریم این است که با جاگذاری بسط تیلور (2) تنها همان جوابی را که در حد $\epsilon = 0$ داشتیم می توانیم به دست آوریم. به زبان دیگر هرگاه با اضافه شدن اختلال مرتبه ی معادله بالا برود ممکن است معادله جواب های دیگری داشته باشد اما این جواب های اضافی احتمالی را نمی توان به صورت بسط تیلور بر حسب ϵ نوشت. به اختلال هایی از این نوع اختلال تکین می گویند. بیایید بسط

$$x = \epsilon^\alpha (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots). \quad (12)$$

را برای x در نظر بگیریم. می‌توانیم X را نیز به صورت زیر تعریف کنیم.

$$X := x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots. \quad (13)$$

در این صورت $x = \epsilon^\alpha X$.

$$\epsilon^{2\alpha+1} (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots)^2 + \epsilon^\alpha (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) - 1 = 0. \quad (14)$$

کوچک‌ترین توان ϵ در پرانتز اول $2\alpha + 1$ و در پرانتز دوم α است. $\alpha = 0$ همانی است که قبلاً به دست آورده‌ایم. در آن مورد کوچکترین توان ϵ در پرانتز دوم رابطه‌ی (10) از مرتبه‌ی جمله‌ی آخر یعنی از مرتبه‌ی ϵ^0 است. حالت دیگر آن است که جمله‌ی اول و دوم رابطه‌ی (9) هم مرتبه باشند، یعنی آن که کوچک‌ترین توان ϵ در پرانتز اول با کوچک‌ترین توان ϵ در پرانتز دوم رابطه‌ی (14) هم مرتبه باشند.

$$2\alpha + 1 = \alpha \Rightarrow \alpha = -1. \quad (15)$$

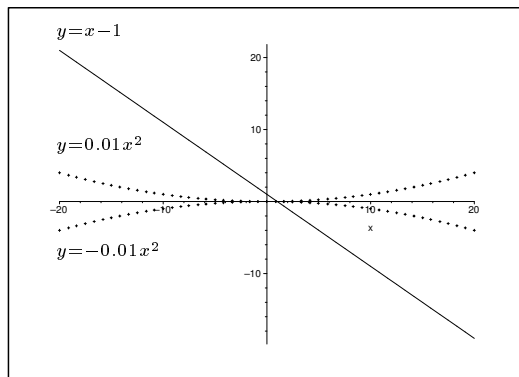
در این صورت X برحسب ϵ بسط تیلور ولی x برحسب ϵ بسط لوران¹ خواهد داشت. بسط لوران بسطی شبیه بسط تیلور است با این تفاوت که در بسط لوران توان‌های صحیح منفی از متغیر بسط نیز ظاهر می‌شوند. چنین بسطی برای x منجر به جواب زیر می‌شود.

$$x = -\frac{1}{\epsilon} - 1 + \epsilon + \dots \quad (16)$$

در حد $1 \ll \epsilon$ معادله‌ی (9) دو جواب دارد که یکی در نزدیکی 1 است. اندازه‌ی جواب دیگر خیلی بزرگ است.

برای به دست آوردن جواب کافی است که محل تقاطع سهمی $y = \epsilon x^2$ و خط $y = 1 - x$ را به دست آوریم. برای $\epsilon = 0.01$ این جواب حدود 101- است. با کوچک شدن ϵ ، تفرع سهمی کم‌تر می‌شود و نقطه‌ی تقاطع آن با خط $y = 1 - x$ ، یعنی جواب، به سمت $-\infty$ می‌رود. در $\epsilon = 0$ این جواب از بین می‌رود و با منفی شدن ϵ جواب از $+\infty$ شروع می‌کند به کوچک شدن. البته جواب دیگر به ازای $1 \ll \epsilon$ ، هم‌واره حول و حوش 1 باقی می‌ماند. در واقع با تغییر کوچکی در پارامتر مسئله، یعنی ϵ ، یکی از جواب‌های معادله از مقدار $-\infty$ به $+\infty$ تغییر می‌کند.

Laurent¹



شکلی 1

مثال‌هایی در فیزیک وجود دارند که در آن‌ها پدیده‌ی مشابهی رخ می‌دهد، مثلاً پدیده‌ی تبخیر. با تغییر پارامترِ دما به مقدارِ خیلی کوچک چگالی تغییرِ بسیار بزرگی (مثلاً برای آب تا 1000 برابر) دارد. فرض کنید خودمان را به چند جمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی محدود کنیم. مثلاً

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (17)$$

را در نظر بگیرید. a ، b ، و c اعداد ثابت حقیقی هستند. این معادله دو جواب دارد که ممکن است هر دو حقیقی و یا هر دو مختلط باشند. با مزدوج مختلط کردن معادله‌ی (17) به معادله‌ی زیر می‌رسیم.

$$a\bar{x}^2 + b\bar{x} + c = 0. \quad (18)$$

بنا بر این \bar{x} در همان معادله‌ای صدق می‌کند که x صدق می‌کرد. پس جواب‌های معادله‌ی (17) مزدوج مختلط هم هستند، یا هر دو حقیقی‌اند و یا اگر یکی مختلط بود جواب دوم هم مختلط است ولی مزدوج مختلط جواب اول. فرض کنید به ازای مقادیر خاصی از a جواب‌های معادله‌ی (17) حقیقی باشند با تغییر a ممکن است جواب‌های معادله‌ی (17) دیگری حقیقی نمانند. در آن صورت جواب‌های معادله مزدوج مختلط هم هستند. گاهی اوقات با اضافه شدن جمله‌ی اختلال مرتبه‌ی معادله تغییر نمی‌کند ولی تعداد جواب‌های معادله کم می‌شود. منظور تعداد جواب‌های حقیقی معادله است. اگر خودمان را به جواب‌های حقیقی محدود نکنیم، تعداد جواب‌ها عوض نمی‌شود، بلکه با تغییر پارامتر اختلال بعضی از جواب‌ها از محور حقیقی جدا شده و به صفحه‌ی مختلط می‌روند. فرض کنید به ازای مقداری از پارامتر اختلال جواب‌ها حقیقی باشند. با تغییر پارامتر اختلال ممکن

است جواب‌های حقیقی به هم نزدیک شده و وقتی جواب‌ها تبه‌گن شدند، مثلاً دوتایی (یا هر عدد زوج دیگری)، به صورت جواب‌های مزدوج مختلط به صفحه‌ی مختلط بروند. مثال ۴- معادله‌ی $x^2 + \epsilon = 0$ به ازای $\epsilon = 0$ یک جواب صفر دوگانه دارد. اگر ϵ به تدریج منفی شود، جواب‌های تبه‌گن روی محور حقیقی از هم جدا می‌شوند. اگر ϵ را دوباره به تدریج به سمت صفر ببریم این دو جواب حقیقی به هم نزدیک می‌شوند، تا در $\epsilon = 0$ جواب‌ها تبه‌گن شوند. با مثبت شدن ϵ این دو جواب به صورت دو جواب مزدوج مختلط $\pm i\sqrt{\epsilon}$ در می‌آیند.

در ابتدا که اختلال را تعریف کردیم، گفتیم که جمله‌ی اختلال باید جمله‌ی کوچکی باشد. اما سؤالی ممکن است مطرح شود: چه قدر کوچک؟
مثال ۵- معادله‌ی زیر

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-20) + \epsilon x^{19} = 0, \quad (19)$$

معادله‌ی ویلکینسون² است. به ازای $\epsilon = 0$ جواب‌های این معادله اعداد صحیح 1 تا 20 است. ببینیم ϵ چه قدر کوچک باشد تا بتوانیم از روش عادی اختلال استفاده کنیم. چون مرتبه‌ی چند جمله‌ای عوض نمی‌شود اختلال تکین نیست. بیایید ببینیم جواب $x_0 = k$ (مثلاً $x_0 = 16$) چه قدر عوض می‌شود. بسط زیر را در نظر بگیرید،

$$x = k + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots \quad (20)$$

این بسط را در معادله‌ی (19) جاگذاری می‌کنیم.

$$(k-1 + \epsilon x_1 + \cdots)(k-2 + \epsilon x_1 + \cdots)\cdots + \epsilon(k + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots)^{19} = 0 \quad (21)$$

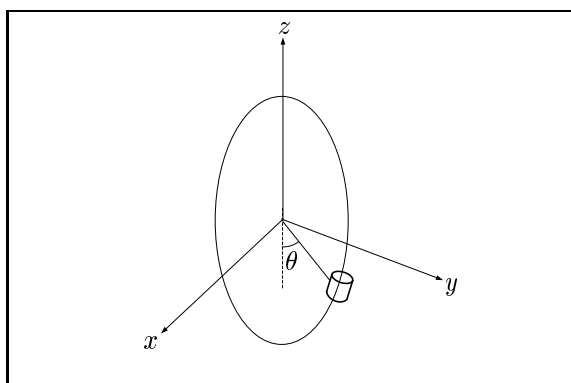
ضرایب مختلف ϵ صفرآند. مثلاً برای مرتبه‌های اول و دوم ϵ به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} (-1)^k x_1 [(k-1)! (20-k)!] + k^{19} &= 0 \\ (-1)^k x_2 [(k-1)! (20-k)!] + (-1)^k x_1^2 [(k-1)! (20-k)!] \sum_{n=1, n \neq k}^{20} \left(\frac{1}{k-n}\right) \\ + 19x_1 k^{18} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

برای $k = 16$

$$x_1 = -\frac{16^{19}}{15!4!} \approx -0.24 \times 10^{10}$$

Wilkinson²



شکلی 2

$$x_2 \approx 10^{18} \quad (23)$$

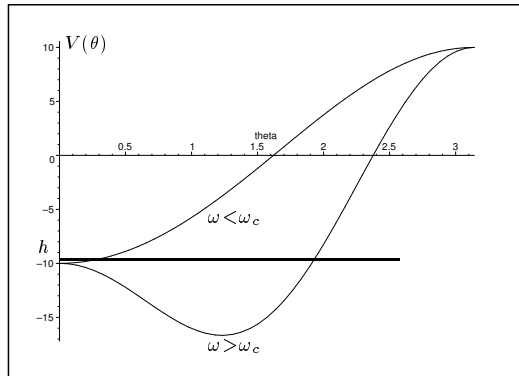
بنا بر این حتی برای $\epsilon = 10^{-9}$ هم روش اختلال جواب‌های خوبی نمی‌دهد. اگر مسئله را دقیق‌تر بررسی کنیم به ازای $\epsilon = 10^{-9}$ بعضی از جواب‌ها، مثلاً 1 و 2 تغییر چندانی نمی‌کنند ولی دیگر جوابی روی محور حقیقی و حول و حوش 16 وجود ندارد. این جواب با جواب 15 به صورت یک زوج جواب مزدوج مختلط در آمده‌اند. در صورتی که ϵ کوچک‌تر باشد همه‌ی جواب‌ها را می‌توان از روش اختلال در آورد. تا این‌جا چند مثال در مورد معادله‌های جبری زدیم. بیایید با استفاده از روش اختلال یک مسئله‌ی خاص در مکانیک را بررسی کنیم.

مثال 6- حلقه‌ای صلب به شعاع R را با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخانیم (شکلی 2 را ببینید). دانه‌ی تسبیحی را از این حلقه رد کرده‌ایم.

h که با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود، ثابت حرکت است.

$$\begin{aligned} h &:= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + V(\theta) \\ V(\theta) &:= -\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta - mgR \cos \theta. \end{aligned} \quad (24)$$

شکلی $V(\theta)$ بستگی به مقدار ω دارد. تعریف می‌کنیم $\omega_c := \sqrt{g/R}$. اگر $\omega < \omega_c$ باشد نقاط $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ نقاط تعادل هستند که اولی تعادل پایدار و دومی تعادل ناپایدار است. در صورتی که $\omega > \omega_c$ باشد سه نقطه‌ی تعادل وجود دارد. در نقاط $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ تعادل ناپایدار و در $\theta = \cos^{-1}(\omega_c/\omega)$ تعادل پایدار است. در این‌جا تعداد نقاط تعادل به طور ناپیوسته تغییر می‌کند.



شکل 3- $V(\theta)$ بر حسب θ

فرض کنید h کمی بزرگتر از $-mgR$ باشد.

$$h =: -mgR(1 - \epsilon) \quad (25)$$

می‌خواهیم نقاط بازگشت را به دست آوریم. از شکل هم پیداست که برای $\omega < \omega_c$ این زاویه نزدیک صفر و برای $\omega > \omega_c$ جوابی محدود و دور از صفر دارد. با تعریف $\lambda := (\omega/\omega_c)^2$ به صورت زیر در می‌آید.

$$2\lambda(1 - \epsilon) = \sin^2 \theta + 2\lambda \cos \theta. \quad (26)$$

بسطی به صورت زیر برای θ در نظر می‌گیریم،

$$\theta = \theta_0 + \epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \dots \quad (27)$$

با استفاده از

$$\begin{aligned} \sin(\theta_0 + \epsilon\theta_1) &\approx \sin \theta_0 + \epsilon\theta_1 \cos \theta_0 \\ \cos(\theta_0 + \epsilon\theta_1) &\approx \cos \theta_0 - \epsilon\theta_1 \sin \theta_0. \end{aligned} \quad (28)$$

و جاگذاری در رابطه (24) از صفر قرار دادن ضرایب ϵ^0 و ϵ^1 به روابط زیر می‌رسیم،

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_0 + 2\lambda \cos \theta_0 &= 2\lambda \\ 2\theta_1 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - 2\theta_1 \lambda \sin \theta_0 &= -2\lambda. \end{aligned} \quad (29)$$

۸

به سادگی می‌توان دید که برای $\lambda < 1$ ، θ_0 دو جواب دارد. یکی $\cos \theta_0 = 1$ و دیگری $\cos \theta_0 = 2\lambda - 1$. ولی برای $\lambda > 1$ ، $\cos \theta_0 = 1$ تنها جواب است. به ازای $\cos \theta_0 = 1$ معادله دوم (29)، برای θ_1 جوابی ندارد. پس بسط تیلور (27) برای $\lambda > 1$ جواب خوبی نیست. برای این حالت، از شکل هم پیداست که θ باید خیلی کوچک باشد. برای θ کوچک (26) به صورت زیر در می‌آید،

$$2\lambda(1 - \epsilon) = \theta^2 + 2\lambda\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda - 1}}\epsilon^{1/2} = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}). \quad (30)$$

بنا بر این برای $\lambda > 1$ بسط θ بر حسب ϵ بسط تیلور نیست و از $\epsilon^{1/2}$ شروع می‌شود. البته همان‌طور که دیدیم همیشه هم جواب یک بسط چندجمله‌ای بر حسب ϵ نیست. مثالی ۷- معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$x^2 - 2\epsilon x - \epsilon = 0. \quad (31)$$

با جاگذاری بسط (2) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \epsilon^0; & \quad x_0^2 = 0 \\ \epsilon^1; & \quad 2x_0x_1 = 2x_0. \end{aligned} \quad (32)$$

از این معادلات x را نمی‌توان به دست آورد. بیاید از بسط توانی زیر برای x استفاده کنیم.

$$x = \epsilon^\alpha + \epsilon^\beta x_1 + \epsilon^\gamma x_2 + \dots, \quad \alpha < \beta < \gamma < \dots \quad (33)$$

$x_0 \neq 0$ می‌گیریم، در واقع ضریب اولین جمله‌ی غیرصفر در بسط بر حسب ϵ را x_0 می‌گیریم. در این صورت داریم

$$(\epsilon^\alpha x_0 + \epsilon^\beta x_1 + \epsilon^\gamma x_2 + \dots)^2 - 2\epsilon(\epsilon^\alpha x_0 + \epsilon^\beta x_1 + \epsilon^\gamma x_2 + \dots) - \epsilon = 0 \quad (34)$$

کوچک‌ترین توان ϵ در پرانتز اول $\epsilon^{2\alpha}$ و در پرانتز دوم $\epsilon^{\alpha+1}$ و جمله‌ی آخر ϵ است. دست کم یکی از جملات پرانتزهای اول و دوم باید از مرتبه‌ی ϵ باشد. اگر $2\alpha < \alpha + 1$ (یعنی $\alpha < 1$) باشد، اولین جمله‌ی پرانتز اول از مرتبه‌ی ϵ است. در این صورت $\alpha = 1/2$. اگر $2\alpha > \alpha + 1$ (یعنی $\alpha > 1$) باشد، اولین جمله‌ی پرانتز دوم از مرتبه‌ی ϵ است. در این صورت $\alpha = 0$ که با $\alpha > 1$ سازگار نیست. البته ممکن است کوچک‌ترین توان پرانتزهای

اول و دوم هم‌رتبه باشند و در ضمن رتبه‌ی این جملات از یک که رتبه‌ی ϵ در جمله‌ی آخر است کوچک‌تر باشد. در این صورت $2\alpha = \alpha + 1 < 1$ می‌شود که جواب ندارد. پس $\alpha = 1/2$.

$$x = \epsilon^{1/2}x_0 + \epsilon^\beta x_1 + \epsilon^\gamma x_2 + \dots \quad (35)$$

با جاگذاری این بسط در (31) نتیجه می‌شود،

$$\begin{aligned} x_0^2 = 1 &\Rightarrow x_0^2 = 1 \\ 2\epsilon^{\beta+1/2}x_0x_1 - 2\epsilon^{3/2}x_0 = 0 &\Rightarrow x_1 = 1, \quad \beta = 1. \end{aligned} \quad (36)$$

جواب معادله‌ی (31) خواهد شد،

$$x = \pm\epsilon^{1/2} + \epsilon. \quad (37)$$

معادله‌ی (31) را دقیق هم می‌شود حل کرد و جواب آن عبارت است از

$$x = \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon} \approx \pm\epsilon^{1/2} + \epsilon \pm \frac{1}{2}\epsilon^{3/2}. \quad (38)$$

گاهی با مسائلی روبه‌رو می‌شویم که علاوه بر پارامتر کوچک ϵ پارامترهای دیگری نیز در مسئله وجود دارد. برای مقادیری از این پارامترها یک بسط و برای مقادیر دیگری از پارامترها بسط دیگری از ϵ جواب مسئله است. مثالی ۸- معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$(x-1)(x-\tau) = -\epsilon x. \quad (39)$$

با فرض این که جواب بسط تیلوری از ϵ باشد به جواب زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} x &= \tau + \frac{\epsilon\tau}{1-\tau} + \frac{\epsilon^2\tau}{(1-\tau)^3} + \dots \\ x &= 1 - \frac{\epsilon}{1-\tau} - \frac{\epsilon^2\tau}{(1-\tau)^3} + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

البته این جواب‌ها در حد $\tau \rightarrow 1$ به درد نمی‌خورند. اگر τ آن قدر به 1 نزدیک شود که جملات مختلف هم‌رتبه شوند این بسط را باید کنار گذاشت. مثلاً اگر جمله‌های دوم و سوم هم مرتبه باشند

$$\frac{\epsilon\tau}{1-\tau} = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^2\tau}{(1-\tau)^3}\right), \quad \Rightarrow \quad 1-\tau = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \quad (41)$$

با تعریف $\sigma\epsilon^{1/2} := 1-\tau$ رابطه‌ی (39) به صورت زیر در می‌آید.

$$(x-1)(x-1+\epsilon^{1/2}\sigma) = -\epsilon x. \quad (42)$$

x جواب این معادله را می‌توان به صورت بسط تیلوری از $\epsilon^{1/2}$ نوشت.

$$x = 1 - \frac{\epsilon^{1/2}}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4}) + \dots \quad (43)$$

۲ معادله‌های دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیلی را نیز مشابه معادله‌های جبری گاهی می‌توان به روش اختلالی حل کرد.

مثال ۹- بیابید سقوط آزاد ذره‌ای به جرم m در حضور مقاومت هوا را بررسی کنیم. فرض کنید نیروی مقاومت هوا متناسب با سرعت باشد. اگر مقاومت هوا کوچک باشد می‌توان مسئله را به روش اختلال حل کرد. بیابید اول معنی کوچک بودن مقاومت هوا را روشن کنیم. معادله نیوتن و شرط اولیه برای چنین ذره‌ای هست:

$$m\ddot{x} = mg - bv, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (44)$$

مقاومت هوای کوچک یعنی این که $|bv| \ll mg$ یا $|v| \ll mg/b$. بنا بر این هم‌واره به ازای هر b ای می‌توان سرعتی پیدا کرد که چنین شرطی را برآورده کند. $\epsilon := b/m$ می‌گیریم. ϵ بعددار است پس در بسط

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots, \quad (45)$$

x_1, x_2 و \dots بُعد طول ندارند. با جاگذاری این بسط در معادله نیوتن و شرط‌های اولیه

$$\begin{aligned} (\ddot{x}_0 + \epsilon\ddot{x}_1 + \epsilon^2\ddot{x}_2 + \dots) &= g - \epsilon(\dot{x}_0 + \epsilon\dot{x}_1 + \epsilon^2\dot{x}_2 + \dots) \\ \dot{x}_0(0) + \epsilon\dot{x}_1(0) + \epsilon^2\dot{x}_2(0) + \dots &= v_0 \\ x_0(0) + \epsilon x_1(0) + \epsilon^2 x_2(0) + \dots &= 0, \end{aligned} \quad (46)$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\epsilon^0; \quad \ddot{x}_0 = g \quad \dot{x}_0(0) = v_0, \quad x_0(0) = 0 \\
\epsilon^1; \quad \ddot{x}_1 = -\dot{x}_0 \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_1(0) = 0 \\
\epsilon^2; \quad \ddot{x}_2 = -\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2(0) = 0, \quad x_2(0) = 0 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned} \tag{47}$$

با حل این معادله‌ها $x(t)$ به دست می‌آید.

$$x(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{2} - \frac{bgt^3}{6m} - \frac{bv_0 t^2}{2m} + \frac{b^2 gt^4}{24m^2} + \frac{b^2 v_0 t^3}{6m^2} + \cdots \tag{48}$$

معادله‌ی (44) را می‌شود دقیق هم حل کرد.

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{mg}{b} - \left(\frac{mg}{b} - v_0\right)e^{-bt/m} \\
x(t) &= \frac{mgt}{b} + \frac{m}{b} \left(\frac{mg}{b} - v_0\right)(e^{-bt/m} - 1).
\end{aligned} \tag{49}$$

اگر این جواب را بر حسب b/m بسط دهیم به همان جوابی که از روش اختلال به دست آوردیم، می‌رسیم.

ما تا این جا برای استفاده از روش اختلال بسطی که برای جواب حدس می‌زدیم را در معادله جاگذاری می‌کردیم و ضرایب توان‌های مختلف ϵ را صفر می‌گذاشتیم. یک راه معادل این است که جمله‌ی اختلال را مثلاً به سمت راست معادله ببریم. فرض کنید جمله‌ی اختلال بسط تیلوری بر حسب ϵ و x داشته باشد.

$$f(x) = \epsilon g_1(x) + \epsilon^2 g_2(x) + \cdots \tag{50}$$

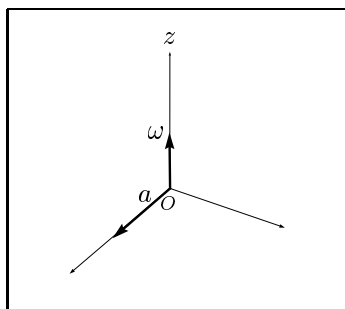
با صفر گذاشتن جمله‌ی اختلال جواب مرتبه‌ی صفر به دست می‌آید.

$$f(x_0) = 0. \tag{51}$$

اگر جمله‌ی مرتبه‌ی صفر را در سمت راست جاگذاری کنیم معادله‌ای به دست می‌آید که می‌توانیم از آن جواب مرتبه‌ی یک را به دست آوریم.

$$f(x_0 + \epsilon x_1) = \epsilon g_1(x_0 + \epsilon x_1) + \epsilon^2 g_2(x_0 + \epsilon x_1) + \cdots \tag{52}$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، می‌توانیم با داشتن جواب مرتبه‌ی k می‌توانیم جواب مرتبه $k+1$ را به دست آوریم. به این روش، روش تکرار می‌گویند.



شکل 4

مثال ۱۰ - صفحه‌ی بزرگی حول محور z که بر صفحه عمود است و از نقطه‌ی O می‌گذرد، با سرعت زاویه‌ی ثابت ω دوران می‌کند. جسم کوچکی به جرم m را روی این سطح و در فاصله‌ی a از نقطه‌ی O قرار می‌دهیم. ضریب اصطکاک ذره با صفحه μ است. بردار مکان ذره را تا مرتبه‌ی دوم μ به دست آورید. تا این مرتبه جسم به مبدأ نزدیک می‌شود و یا از آن دور می‌شود؟

اندازه‌ی نیروی اصطکاک μmg و جهت آن عکس جهت سرعت نسبی جسم نسبت به صفحه است. سرعت نسبی جسم نسبت به صفحه $\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ است. بنا بر این نیروی اصطکاک عبارت است از

$$\mathbf{f} = -\mu mg \frac{\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|}. \quad (53)$$

شتاب جسم نیز عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mu g \frac{\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|}. \quad (54)$$

شرایط اولیه نیز $\mathbf{r}(0) = \hat{\mathbf{i}}a$ و $\mathbf{v}(0) = 0$ است. چون سمت راست رابطه‌ی بالا یک ضریب μ دارد برای آن که سرعت را تا مرتبه‌ی اول به دست آوریم کافی است که سمت راست رابطه‌ی بالا را تا مرتبه‌ی صفرم قرار دهیم. در این صورت

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mu g \frac{\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}a}{|\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}a|}. \quad (55)$$

از حل این معادله می‌توان سرعت تا مرتبه‌ی اول، \mathbf{v}_1 ، و مکان تا مرتبه‌ی اول، \mathbf{r}_1 ، به دست آورد.

$$\mathbf{v}_1 = \mu g t \hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{r}_1 = a \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2} \mu g t^2 \hat{\mathbf{j}}. \quad (56)$$

به همین ترتیب با جای گذاری مقادیر مکان و سرعت تا مرتبه ی اول می توان سرعت و مکان را تا مرتبه ی دوم به دست آورد.

$$\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mu g \frac{(\omega a - \mu g t) \hat{\mathbf{j}} - 1/2 \mu g t^2 \omega \hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{(\omega a - \mu g t)^2 + 1/4 \mu^2 g^2 t^4 \omega^2}}. \quad (57)$$

چون صورت کسر ضریب μ دارد و ما می خواهیم نتیجه تا مرتبه ی دوم درست باشد کافی است مخارج کسر را تا مرتبه ی اول نگه داریم. با صرف نظر از جمله های بالاتر از مرتبه ی دو داریم.

$$\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mu g \left[\frac{(\omega a - \mu g t) \hat{\mathbf{j}}}{(\omega a - \mu g t)} - \frac{1/2 \mu g t^2 \omega \hat{\mathbf{i}}}{\omega a} \right]. \quad (58)$$

در جمله ی آخر چون μ^2 داریم کافی است مخارج را تا مرتبه ی صفرم نگه داریم. پس از ساده کردن و انتگرال گیری، سرعت و مکان تا مرتبه ی دوم به دست می آید.

$$\mathbf{v}_2 = \mu g t \hat{\mathbf{j}} - \frac{\mu^2 g^2 t^3}{6a} \hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2} \mu g t^2 \hat{\mathbf{j}} + \left(a - \frac{\mu^2 g^2 t^4}{24a} \right) \hat{\mathbf{i}}. \quad (59)$$

فاصله ی ذره تا مبدأ تا مرتبه ی دوم μ عبارت است از

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{6} \mu^2 g^2 t^4 + a^2} > a \quad (60)$$

پس ذره تا این مرتبه از مبدأ دور می شود.

فرض کنید تابع $V(x)$ در نقطه ی x_0 کمینه است. اگر $V(x)$ را حول نقطه ی x_0 بسط دهیم.

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 V''(x_0) + \frac{1}{3!} (x - x_0)^3 V'''(x_0) + \dots \quad (61)$$

برای سادگی مبدأ مختصات را در x_0 می گذاریم. در این جا خودمان را به حالتی که جمله ی مرتبه ی دو بر حسب x غیر صفر است محدود می کنیم. در صورتی که x به اندازه ی کافی به 0 نزدیک باشد می توان از جمله های مرتبه ی دوم به بالا صرف نظر کرد. فرض کنید که $V(x)$ تابع پتانسیل برای نیرویی باشد، مسئله تبدیل به مسئله ی نوسان گر هم آهنگ می شود و نیرو عبارت است از

$$m\ddot{x} = -kx, \quad k > 0. \quad (62)$$

در تقریبِ بعدی می‌توانیم جمله‌های بعدی را نگه داریم. فرض کنید جمله‌ی مرتبه‌ی دوم صفر باشد.

$$m\ddot{x} = -kx + \beta x^3. \quad (63)$$

این معادله، معادله‌ی حرکت یک نوسانگر غیرهم‌آهنگ است. هر چند حرکت دوره‌ای است ولی هم‌آهنگ نیست.

مثال ۱۱- نوسانگر غیرهم‌آهنگی را در نظر بگیرید.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon x^3. \quad (64)$$

در مرتبه‌ی صفر ϵ ،

$$x_0(t) = A \cos \omega_0 t, \quad (65)$$

و در مرتبه‌ی بعدی

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^3 \quad (66)$$

انتظار داریم جواب مسئله دوره‌ای باشد، ولی طرف راست رابطه‌ی بالا متناظر با یک نیروی واداشته جمله‌ای با همان فرکانس طبیعی سیستم دارد. اتفاقی که می‌افتد این است که تشدید رخ می‌دهد، جواب بزرگ می‌شود و جواب دیگر دوره‌ای نیست. در واقع اگر جواب را با یک جواب هم‌آهنگ تقریب بزنیم می‌بینیم که جواب دوره‌ای نیست. اما می‌دانیم که جواب مسئله دوره‌ای است. در این جا نیز روش اختلال عادی جواب درست نمی‌دهد. در واقع نشان می‌دهیم که فرکانس طبیعی سیستم که مربوط به حرکت هم‌آهنگ در مرتبه‌ی صفر است عوض می‌شود. به این کار بازه‌نچارش گفته می‌شود. یعنی مسئله را می‌توان با یک نوسانگر هم‌آهنگ تقریب زد ولی با فرکانسی غیر از ω_0 . بسط زیر را برای فرکانس در نظر بگیرید

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \epsilon \Omega_1. \quad (67)$$

با جاگذاری این بسط و بسط تا مرتبه‌ی اول x در (64) نتیجه می‌شود:

$$\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + (\omega^2 + \epsilon \Omega_1)(x_0 + \epsilon x_1) = \epsilon (x_0 + \epsilon x_1)^3. \quad (68)$$

معادله‌های حاکم بر x_0 و x_1 عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \epsilon^0; \quad \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\ \epsilon^1; \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + \Omega_1 x_0 &= x_0^3 \end{aligned} \quad (69)$$

x_0 حرکتش کماکان هم آهنگ است، ولی با فرکانس ω به جای فرکانس ω_0 .

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -\Omega_1 A \cos \omega t + A^3 \cos^3 \omega t \\ &= A^3 \left[-\frac{\Omega_1}{A^2} \cos(\omega t) + \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) \right]. \end{aligned} \quad (70)$$

برای آن که تشدید رخ ندهد و حرکت دوره‌ای بماند باید ضریب $\cos(\omega t)$ صفر باشد،

$$\Omega_1 = \frac{3}{4} A^2. \quad (71)$$

که با توجه به (67) می‌شود

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \frac{3}{4} \epsilon A^2. \quad (72)$$

دقت کنید که برای نوسان‌گر هم آهنگ فرکانس مستقل از دامنه است ولی برای نوسان‌گر غیرهم آهنگ فرکانس به دامنه بستگی دارد.

در این جا با اضافه شدن اختلال نوسان‌گر هم آهنگی با فرکانس ω_0 به نوسان‌گری ناهم آهنگ تبدیل می‌شود. البته این نوسان‌گر یک حرکت دوره‌ای دارد و اگر بخواهیم آن را با یک نوسان‌گر هم آهنگ تقریب بزنیم، فرکانس آن نوسان‌گر ω است. حرکت آونگ مثالی از نوسان‌گر غیرهم آهنگ است. طول آونگ را l می‌گیریم. وقتی دامنه حرکت آونگ آن قدر کم نباشد که بتوان از جمله‌ی غیرهم آهنگ صرف‌نظر کرد

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \approx -\frac{g}{l} \left(\theta - \frac{1}{6} \theta^3 + \dots \right). \quad (73)$$

برای این آونگ $\epsilon = g/(6l)$. اگر دامنه حرکت را θ_0 بگیریم، فرکانس حرکت از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \epsilon \Omega_1 = \frac{g}{l} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right). \quad (74)$$

- [1] Nayfeh, Ali. H.; Introduction to Perturbation.
- [2] Bender, Carl. M., Orszag, Steven. A.; Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.