فصل ۶

تبدیل لاپلاس

در بسیاری از مسئله‌های عملی مهندسی با سیستم‌های مکانیکی یا الکتریکی مواجهیم که شامل جمله‌های غیرهمگن ناپیوسته یا ضربه‌ای هستند. استفاده از روشهای تشریح‌شده در فصل ۳ برای چنین مسئله‌هایی اغلب بسیار دشوار است. روش دیگری که به‌ویژه برای این مسئله‌ها مناسب است، بر اساس تبدیل لاپلاس بنا شده است. در این فصل نحوهٔ کارکرد این روش مهم را با تأکید بر مسئله‌هایی که نوعاً در کاربردهای مهندسی ظاهر می‌شوند تشریح می‌کنیم.

۱.۶ تعریف تبدیل لاپلاس

انتگرال‌های ناسره. چون تبدیل لاپلاس شامل یک انتگرال از صفر تا بینهایت است، داشتن اطلاعاتی دربارهٔ انتگرال‌های ناسره‌ای از این نوع هنگام بحث و بررسی خواص این تبدیل ضروری است و به همین دلیل، در این بخش مباحث مربوط به این انتگرال‌های ناسره را به اختصار مرور می‌کنیم. اگر با انتگرال‌های ناسره آشنایید، می‌توانید از مطالعهٔ این مرور مختصر صرف‌نظر کنید. از طرف دیگر، اگر تاکنون با انتگرال‌های ناسره سروکار نداشته‌اید، ممکن است لازم باشد که به یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال مراجعه کنید و جزئیات و مثالهای بیشتری را در آن ببینید.

انتگرال ناسره روی بازهٔ نامتناهی با حد انتگرال‌ها روی بازه‌های متناهی تعریف می‌شود، پس

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(t)dt \qquad (۱)$$

که در آن A عددی حقیقی و مثبت است. اگر انتگرال از a تا A به‌ازای هر $A > a$ موجود باشد و اگر وقتی $A \to \infty$ هم حد موجود باشد، می‌گوییم انتگرال ناسره **همگرا** به مقدار حد است. در غیر این‌صورت می‌گوییم که انتگرال **واگرا**ست و یا وجود ندارد. در مثالهای بعدی هر دو وضع را نشان داده‌ایم.

مثال ۱

فرض کنید $f(t) = e^{ct}, t \geq ۰$، که در آن c عددی حقیقی، ثابت و ناصفر است. در این‌صورت

$$\int_۰^\infty e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty}\int_۰^A e^{ct}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{e^{ct}}{c}\Big|_۰^A$$
$$= \lim_{A\to\infty}\frac{۱}{c}(e^{cA}-۱).$$

در نتیجه اگر $c<۰$، انتگرال ناسره به $-۱/c$ همگراست و اگر $c>۰$، واگراست. اگر $c=۰$، $f(t)$ تابعی ثابت با مقدار ۱ است و مجدداً انتگرال واگراست.

مثال ۲

فرض کنید به‌ازای $t \geq ۱$، $f(t)=۱/t$. در این‌صورت

$$\int_۱^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty}\int_۱^A\frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty}\ln A.$$

چون $\lim_{A\to\infty}\ln A=\infty$، انتگرال ناسره واگراست.

مثال ۳

فرض کنید به‌ازای $t\geq ۱$، $f(t)=t^{-p}$ که در آن p ثابتی حقیقی است و $p\neq ۱$ (حالت $p=۱$ را در مثال ۲ بررسی کردیم). در این‌صورت

$$\int_۱^\infty t^{-p}dt = \lim_{A\to\infty}\int_۱^A t^{-p}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{۱}{۱-p}(A^{۱-p}-۱).$$

وقتی $A\to\infty$، اگر $p>۱$ آنگاه $A^{۱-p}\to ۰$، اما اگر $p<۱$ آنگاه $A^{۱-p}\to\infty$. بنابراین $\int_۱^\infty t^{-p}dt$ به‌ازای $p>۱$ به $۱/(p-۱)$ همگراست، اما به‌ازای $p\leq ۱$ واگراست. این نتایج مشابه نتایج مربوط به سری نامتناهی $\sum_{n=۱}^\infty n^{-p}$ هستند.

قبل از بحث دربارهٔ امکان وجود $\int_a^\infty f(t)dt$ خوب است چند عبارت را تعریف کنیم. می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $\alpha\leq t\leq\beta$، **قطعه‌به‌قطعه پیوسته** است اگر بتوان این بازه را با تعداد متناهی نقطه مانند $\alpha=t_۰<t_۱<\cdots<t_n=\beta$ طوری افراز کرد که

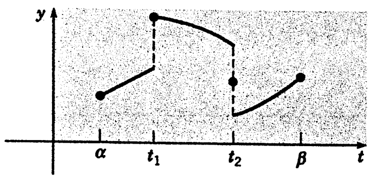
۱. در هر زیربازهٔ باز $t_{i-۱}<t<t_i$، f پیوسته است؛

۲. اگر از داخل هر زیربازه به هر یک از نقاط انتهایی آن نزدیک شویم، f به حدی متناهی میل می‌کند.

به‌عبارت دیگر، f روی $\alpha\leq t\leq\beta$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته است اگر جز در متناهی نقطهٔ ناپیوستگیِ پرشی پیوسته باشد. اگر f به‌ازای هر β که $\beta>\alpha$ روی $\alpha\leq t\leq\beta$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد، می‌گوییم f روی $t\geq\alpha$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته است. مثالی از تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته را در شکل ۱.۱.۶ نشان داده‌ایم.

انتگرال تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته روی بازه‌ای متناهی، برابر مجموع انتگرال‌ها روی زیربازه‌های افراز است؛ به‌عنوان مثال در مورد تابع $f(t)$ شکل ۱.۱.۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^{t_۱}f(t)dt+\int_{t_۱}^{t_۲}f(t)dt+\int_{t_۲}^\beta f(t)dt. \qquad (۲)$$



شکل ۱.۱.۶ تابع قطعه‌به‌قطعه پیوستهٔ $y=f(t)$.

به تابع نشان داده‌شده در شکل ۱.۱.۶ در نقاط انتهایی α و β و نقاط افراز $t_۱$ و $t_۲$ مقادیری داده‌ایم؛ اما تا آنجا که به انتگرال در معادلهٔ (۲) مربوط است، مهم نیست که $f(t)$ در این نقطه‌ها تعریف شده یا نه و یا در این نقاط چه مقداری به $f(t)$ داده شده است. مقدار انتگرال‌های معادلهٔ (۲) بدون توجه به این مقادیر ثابت باقی می‌ماند.

پس اگر f روی بازهٔ $a\leq t\leq A$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد، $\int_a^A f(t)dt$ موجود است. بنابراین اگر f به‌ازای $t\geq a$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد، $\int_a^A f(t)dt$ به‌ازای هر $A>a$ موجود است. اما همان‌طور که در مثالهای قبل دیدیم، پیوستگی قطعه‌به‌قطعه برای تخمین همگرایی انتگرال ناسرهٔ $\int_a^\infty f(t)dt$ کافی نیست.

اگر نتوان انتگرال f را به‌سادگی برحسب توابع مقدماتی حساب کرد، استفاده از تعریف همگرایی $\int_a^\infty f(t)dt$ دشوار است. معمولاً مناسب‌ترین راه بررسی همگرایی و یا واگرایی انتگرال ناسره استفاده از قضیهٔ مقایسهٔ زیر است که متناظر قضیهٔ مشابهی برای سریهای نامتناهی است.

قضیهٔ ۱.۱.۶ اگر تابع f به‌ازای $t\geq a$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد و اگر به‌ازای ثابت مثبتی مانند M وقتی $t\geq M$، $|f(t)|\leq g(t)$ و اگر $\int_M^\infty g(t)dt$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^\infty f(t)dt$ هم همگراست. از طرف دیگر اگر به‌ازای $t\geq M$، $f(t)\geq g(t)\geq ۰$ و $\int_M^\infty g(t)dt$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^\infty f(t)dt$ هم واگراست.

اثبات این حکم حساب دیفرانسیل و انتگرال را در اینجا نمی‌آوریم؛ اما مقایسهٔ مساحتهای داده‌شده با $\int_M^\infty g(t)dt$ و $\int_M^\infty |f(t)|dt$ آن را پذیرفتنی می‌کند. تابعهایی که معمولاً برای مقایسه به‌کار می‌آیند، e^{ct} و t^{-p} هستند که در مثالهای ۱، ۲ و ۳ آنها را بررسی کردیم.

تبدیل لاپلاس. دسته‌ای از ابزارهایی که برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مفیدند، **تبدیلهای انتگرالی** هستند. تبدیل انتگرالی رابطه‌ای به‌صورت

$$F(s)=\int_\alpha^\beta K(s,t)f(t)dt \qquad (۳)$$

است که در آن $K(s,t)$ تابعی مفروض است که به آن **هستهٔ** تبدیل می‌گوییم و حدود انتگرال، یعنی α و β، هم

داده شده‌اند. ممکن است که $\alpha = -\infty$، $\beta = \infty$ یا هر دو. رابطهٔ (۳) تابع f را به تابع F تبدیل می‌کند که به آن تبدیل f می‌گوییم.

در ریاضیات کاربردی چندین تبدیل انتگرالی مفید وجود دارند، اما در این فصل تنها تبدیل لاپلاس[1] را بررسی می‌کنیم. این تبدیل به‌صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $f(t)$ به‌ازای $t \geq 0$ داده شده باشد و f در شرایط معینی که کمی بعدتر بیان می‌کنیم صدق کند. در این‌صورت تبدیل لاپلاس f که آن را با $\mathcal{L}\{f(t)\}$ یا با $F(s)$ نشان می‌دهیم با معادلهٔ

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{۴}$$

به‌ازای هر s که این انتگرال ناسره همگرا باشد تعریف می‌شود. هستهٔ تبدیل لاپلاس $K(s,t) = e^{-st}$ است. چون جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت با تابع نمایی بیان می‌شوند، تبدیل لاپلاس بویژه برای چنین معادلاتی مفید است. ایدهٔ کلی استفاده از تبدیل لاپلاس برای حل معادلهٔ دیفرانسیل از این قرار است:

۱. با استفاده از رابطهٔ (۴)، مسئلهٔ مقدار اولیه را که برحسب تابع مجهول f در دامنهٔ tها داده‌شده به مسئلهٔ ساده‌تری (در حقیقت مسئله‌ای جبری) برای F در دامنهٔ sها تبدیل کنید.

۲. این مسئلهٔ جبری را حل کنید و F را بیابید.

۳. تابع مطلوب f را از تبدیل F آن بازیابی کنید. به این گام آخر «معکوس کردن تبدیل» می‌گوییم.

در حالت کلی ممکن است پارامتر s مختلط باشد و وقتی می‌توانیم از همهٔ قدرت تبدیل لاپلاس استفاده کنیم که $F(s)$ را تابعی از یک متغیر مختلط در نظر بگیریم. اما در مورد مسئله‌هایی که در اینجا بررسی می‌کنیم، کافی است که تنها مقادیر حقیقی s را در نظر بگیریم. تبدیل لاپلاس F برای تابع f موجود است اگر f در شرایط معینی که در قضیهٔ بعدی بیان می‌شود صدق کند.

قضیهٔ ۲.۱.۶ فرض کنید که

۱. به‌ازای هر عدد مثبت A، f در بازهٔ $0 \leq t \leq A$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته است.

۲. اگر $t \geq M$، $|f(t)| \leq Ke^{at}$. در این نامساوی K، a و M ثابتهای حقیقی‌اند و K و M لزوماً مثبت هستند.

در این‌صورت تبدیل لاپلاس $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ که به‌ازای $s > a$ با معادلهٔ (۴) تعریف شده موجود است.

برای اثبات این قضیه باید ثابت کنیم که انتگرال معادلهٔ (۴) به‌ازای $s > a$ همگراست. با جدا کردن انتگرال ناسره به دو قسمت نتیجه می‌شود

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^M e^{-st} f(t)dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t)dt. \tag{۵}$$

۱. تبدیل لاپلاس به ریاضیدان برجستهٔ فرانسوی پیر سیمون لاپلاس منسوب است که در ۱۷۸۲ میلادی رابطهٔ (۳) را بررسی کرد. اما روشهای تشریح‌شده در این فصل تا یک قرن و یا بیشتر پس از آن بسط نیافت. این روش را اصولاً به الیور هوی‌ساید (۱۸۵۰-۱۹۲۵م)، مهندس برق نوآور غیرمتعارف انگلیسی، مدیونیم که در بسط و کاربرد نظریهٔ الکترومغناطیس نقش مهمی داشت.

انتگرال اول طرف راست معادلهٔ (۵) طبق فرض (۱) قضیه موجود است؛ بنابراین وجود $F(s)$ بستگی به همگرایی انتگرال دوم دارد. طبق فرض (۲) به‌ازای $t \geq M$ می‌دانیم که

$$|e^{-st}f(t)| \leq Ke^{-st}e^{at} = Ke^{(a-s)t}$$

و بنابراین، طبق قضیهٔ ۱.۱.۶، $F(s)$ موجود است اگر $\int_M^\infty e^{(a-s)t}dt$ همگرا باشد. با رجوع به مثال ۱ و قرار دادن $a - s$ به‌جای c، می‌توان دید که این انتگرال آخری همگراست اگر $a - s < 0$، و این قضیهٔ ۲.۱.۶ را ثابت می‌کند.

تقریباً در همهٔ این فصل (جز در بخش ۵.۶) تنها با توابعی سروکار داریم که در شرایط قضیهٔ ۲.۱.۶ صدق می‌کنند. این تابعها را با ردهٔ توابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته **از مرتبهٔ نمایی** وقتی $t \to \infty$ توصیف می‌کنند. توجه کنید که توابعی موجودند که وقتی $t \to \infty$ از مرتبهٔ نمایی نیستند. تابعی از این نوع، $f(t) = e^{t^2}$ است. وقتی $t \to \infty$، این تابع از Ke^{at} سریعتر افزایش می‌یابد صرف‌نظر از اینکه ثابتهای K و a چقدر بزرگ‌اند. تبدیل لاپلاس بعضی از تابعهای مهم مقدماتی را در مثالهای زیر حساب می‌کنیم.

مثال ۴

فرض کنید $f(t) = 1$، $t \geq 0$. در این‌صورت، مانند مثال ۱،

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\lim_{A\to\infty} \frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^A$$

بنابراین

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$

مثال ۵

فرض کنید $f(t) = e^{at}$، $t \geq 0$. در این‌صورت، باز هم مانند مثال ۱،

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt$$

بنابراین

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a.$$

مثال ۶

فرض کنید

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ k, & t = 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

که در آن k ثابت است. در مسئله‌های مهندسی، $f(t)$ معمولاً ضربان واحد نیرو و یا ولتاژ را نشان می‌دهد. توجه کنید که f قطعه‌به‌قطعه پیوسته است. می‌توانیم بنویسیم

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^1 e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^1 = \frac{1-e^{-s}}{s}, \qquad s > 0.$$

توجه کنید که $\mathcal{L}\{f(t)\}$ به k، مقدار f در نقطهٔ ناپیوستگی، بستگی ندارد. حتی اگر $f(t)$ در این نقطه تعریف نشود، تبدیل لاپلاس f بدون تغییر باقی می‌ماند. پس تابعهای زیادی موجودند که تنها در یک نقطه متفاوت‌اند و تبدیل لاپلاس یکسانی دارند.

مثال ۷

فرض کنید به‌ازای $t \ge ۰$، $f(t) = \sin at$. در این‌صورت

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = F(s) = \int_۰^\infty e^{-st}\sin at\,dt, \qquad s > ۰.$$

چون

$$F(s) = \lim_{A\to\infty}\int_۰^A e^{-st}\sin at\,dt,$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء نتیجه می‌شود

$$F(s) = \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\bigg|_۰^A - \frac{s}{a}\int_۰^A e^{-st}\cos at\,dt\right]$$
$$= \frac{۱}{a} - \frac{s}{a}\int_۰^\infty e^{-st}\cos at\,dt.$$

با استفادهٔ مجدد از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء نتیجه می‌شود

$$F(s) = \frac{۱}{a} - \frac{s^۲}{a^۲}\int_۰^\infty e^{-st}\sin at\,dt$$
$$= \frac{۱}{a} - \frac{s^۲}{a^۲}F(s);$$

بنابراین

$$F(s) = \frac{a}{s^۲ + a^۲}, \qquad s > ۰.$$

اکنون فرض کنید که $f_۱$ و $f_۲$ دو تابع‌اند که تبدیلهای لاپلاس آنها به‌ترتیب به‌ازای $s > a_۱$ و $s > a_۲$ موجودند. در این‌صورت به‌ازای sهای بزرگ‌تر از ماکزیمم $a_۱$ و $a_۲$،

$$\mathcal{L}\{c_۱ f_۱(t) + c_۲ f_۲(t)\} = \int_۰^\infty e^{-st}[c_۱ f_۱(t) + c_۲ f_۲(t)]dt$$
$$= c_۱\int_۰^\infty e^{-st} f_۱(t)dt + c_۲\int_۰^\infty e^{-st} f_۲(t)dt;$$

بنابراین

$$\mathcal{L}\{c_۱ f_۱(t) + c_۲ f_۲(t)\} = c_۱\mathcal{L}\{f_۱(t)\} + c_۲\mathcal{L}\{f_۲(t)\}. \qquad (۶)$$

معادلهٔ (۶) بیان می‌کند که تبدیل لاپلاس عملگری خطی است و بعداً از این خاصیت فراوان استفاده می‌کنیم. مجموع را در معادلهٔ (۶) به‌سادگی می‌توان به تعدادی دلخواه از جملات تعمیم داد.

مثال ۸

تبدیل لاپلاس $f(t) = ۵e^{-۲t} - ۳\sin ۴t$، $t \ge ۰$ را بیابید.

با استفاده از معادلهٔ (۶) می‌توانیم بنویسیم

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = ۵\mathcal{L}\{e^{-۲t}\} - ۳\mathcal{L}\{\sin ۴t\}.$$

از مثالهای ۵ و ۶ نتیجه می‌شود

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{۵}{s+۲} - \frac{۱۲}{s^۲+۱۶}, \qquad s > ۰.$$

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۴، نمودار تابع داده‌شده را رسم کنید. در هر حالت تعیین کنید که f در بازهٔ $۰ \le t \le ۳$ پیوسته است، قطعه‌به‌قطعه پیوسته است و یا هیچ‌کدام.

۱. $f(t) = \begin{cases} t^۲, & ۰ \le t \le ۱ \\ ۲+t, & ۱ < t \le ۲ \\ ۶-t, & ۲ < t \le ۳ \end{cases}$

۲. $f(t) = \begin{cases} t^۲, & ۰ \le t \le ۱ \\ (t-۱)^{-۱}, & ۱ < t \le ۲ \\ ۱, & ۲ < t \le ۳ \end{cases}$

۳. $f(t) = \begin{cases} t^۲, & ۰ \le t \le ۱ \\ ۱, & ۱ < t \le ۲ \\ ۳-t^۲/۲, & ۲ < t \le ۳ \end{cases}$

۴. $f(t) = \begin{cases} t^۳, & ۰ \le t \le ۱ \\ ۳-t, & ۱ < t \le ۲ \\ ۱, & ۲ < t \le ۳ \end{cases}$

۵. تبدیل لاپلاس هر یک از تابعهای زیر را حساب کنید.

الف) $f(t) = t$

ب) $f(t) = t^۲$

ج) $f(t) = t^n$، که در آن n عددی صحیح و مثبت است.

۶. تبدیل لاپلاس $f(t) = \cos at$ را که در آن a عددی حقیقی و مثبت است، حساب کنید.

یادآوری می‌کنیم که $\cosh bt = (e^{bt} + e^{-bt})/۲$ و $\sinh bt = (e^{bt} - e^{-bt})/۲$. در هر یک از مسئله‌های ۷ تا ۱۰، تبدیل لاپلاس تابع داده‌شده را بیابید، a و b ثابتهای حقیقی هستند.

۷. $f(t) = \sinh bt$

۸. $f(t) = \cosh bt$

۹. $f(t) = e^{at}\cosh bt$

۱۰. $f(t) = e^{at}\sinh bt$

در هر یک از مسئله‌های ۱۱ تا ۱۴، به‌خاطر داشته باشید که $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/۲$ و $\sin bt = (e^{ibt} - e^{-ibt})/۲i$. با این فرض که فرمولهای مقدماتی انتگرال‌گیری را برای این حالت هم می‌توان به‌کار گرفت، تبدیل لاپلاس تابع داده‌شده را به‌دست بیاورید؛ a و b ثابتهایی حقیقی هستند.

۱۱. $f(t) = \cos bt$

۱۲. $f(t) = \sin bt$

۱۳. $f(t) = e^{at}\sin bt$

۱۴. $f(t) = e^{at}\cos bt$

در هر یک از مسئله‌های ۱۵ تا ۲۰، با استفاده از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء تبدیل لاپلاس تابع داده‌شده را بیابید؛ n عددی صحیح و مثبت و a ثابتی حقیقی است.

۱۵. $f(t)=te^{at}$

۱۶. $f(t)=t\sin at$

۱۷. $f(t)=t\cosh at$

۱۸. $f(t)=t^n e^{at}$

۱۹. $f(t)=t^2\sinh at$

۲۰. $f(t)=t^2\sin at$

در هر یک از مسئله‌های ۲۱ تا ۲۴ تعیین کنید که انتگرال داده‌شده همگراست و یا واگرا.

۲۱. $\int_0^\infty (t^2+1)^{-1}dt$

۲۲. $\int_0^\infty t^2 e^{-t}dt$

۲۳. $\int_1^\infty t^{-1}e^t dt$

۲۴. $\int_0^\infty e^{-t}\cos t\,dt$

۲۵. فرض کنید f و f' به‌ازای $t\ge 0$ پیوسته باشند و وقتی $t\to\infty$ از مرتبهٔ نمایی باشند. با استفاده از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء ثابت کنید که اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ آنگاه $\lim_{s\to\infty}F(s)=0$. نتیجه تحت شرایط ضعیف‌تری ــ مانند شرایط قضیهٔ ۲.۱.۶ ــ هم صحیح است.

۲۶. **تابع گاما.** تابع گاما که آن را با $\Gamma(p)$ نشان می‌دهیم، با انتگرال

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx \qquad \text{(i)}$$

تعریف می‌شود. انتگرال وقتی $x\to\infty$ به‌ازای هر p همگراست. انتگرال به‌ازای $p<0$ هم ناسره است، زیرا وقتی $x\to 0$ تابع تحت انتگرال بی‌کران می‌شود. اما می‌توان ثابت کرد که انتگرال در $x=0$ به‌ازای $p>-1$ همگراست.

الف) فرض کنید $p>0$ و ثابت کنید

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

ب) ثابت کنید $\Gamma(1)=1$.

ج) ثابت کنید به‌ازای عدد صحیح و مثبت n،

$$\Gamma(n+1)=n!$$

چون $\Gamma(p)$ وقتی p عددی صحیح نیست هم تعریف شده است، این تابع تعمیمی از تابع فاکتوریل به‌ازای مقادیر غیرصحیح متغیر مستقل است. توجه کنید که تعریف $0!=1$ هم سازگار است.

د) ثابت کنید که به‌ازای $p>0$،

$$p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)=\frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}.$$

اگر $\Gamma(p)$ در بازه‌ای با طول واحد مثل $0<p\le 1$ معلوم باشد، $\Gamma(p)$ را می‌توان به‌ازای همهٔ مقادیر مثبت p تعیین کرد. می‌توان نشان داد که $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. $\Gamma(3/2)$ و $\Gamma(11/2)$ را بیابید.

۲۷. تبدیل لاپلاس t^p را، که در آن $p>-1$، در نظر بگیرید.

الف) با رجوع به مسئلهٔ ۲۶ ثابت کنید

$$\mathcal{L}\{t^p\}=\int_0^\infty e^{-st}t^p\,dt=\frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx$$
$$=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},\qquad s>0.$$

ب) فرض کنید p در قسمت (الف) عدد صحیح n باشد؛ ثابت کنید

$$\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}},\qquad s>0.$$

ج) ثابت کنید

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}=\frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx,\qquad s>0.$$

می‌توان نشان داد که

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

بنابراین

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}=\sqrt{\pi/s},\qquad s>0.$$

د) ثابت کنید که

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\}=\frac{\sqrt{\pi}}{(2s^{3/2})},\qquad s>0.$$

۲.۶ جواب مسئله‌های مقدار اولیه

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس، مسئله‌های مقدار اولیهٔ خطی با ضرایب ثابت را حل کرد. کارایی تبدیل لاپلاس در این زمینه، اساساً به این دلیل است که تبدیل f' به‌طور ساده‌ای به تبدیل f مرتبط است. این ارتباط را در قضیهٔ زیر بیان کرده‌ایم.

قضیهٔ ۱.۲.۶ فرض کنید که بر هر بازهٔ $0\le t\le A$، f پیوسته و f' قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد. علاوه بر این فرض کنید ثابتهای K، a و M موجود باشند که به‌ازای $t\ge M$، $|f(t)|\le Ke^{at}$. در این‌صورت $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ به‌ازای هر s که $s>a$ موجود است و

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0). \qquad (1)$$

برای اثبات این قضیه، انتگرال

$$\int_0^A e^{-st}f'(t)\,dt$$

را در نظر می‌گیریم. اگر f' ناپیوستگی‌ای در بازهٔ $0 \le t \le A$ داشته باشد، نقاط ناپیوستگی را با t_1، t_2، $\ldots$، t_n نشان می‌دهیم و انتگرال را به‌صورت

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t)dt$$

می‌نویسیم. با انتگرال‌گیری از هر یک از جمله‌های طرف راست نتیجه می‌شود

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st}f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st}f(t)\Big|_{t_n}^{A}$$
$$+ s\left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f(t)dt\right].$$

چون f پیوسته است، وضع جمله‌های تحت انتگرال در t_1، t_2، $\ldots$، t_n اهمیتی ندارد. از ترکیب این انتگرال‌ها نتیجه می‌شود

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = e^{-sA}f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)dt.$$

به‌ازای $A \ge M$، می‌دانیم که $|f(A)| \le Ke^{aA}$، در نتیجه $|e^{-sA}f(A)| \le Ke^{-(s-a)A}$. بنابراین به‌ازای $s > a$، وقتی $A \to \infty$، $e^{-sA}f(A) \to 0$. بنابراین به‌ازای $s > a$،

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

که حکم قضیه را ثابت می‌کند.

اگر f' و f'' هم در شرایط f و f' در قضیهٔ ۱.۲.۶ صدق کنند، نتیجه می‌شود که تبدیل لاپلاس f'' هم به‌ازای $s > a$ موجود است و با رابطهٔ

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \qquad (2)$$

داده می‌شود. درواقع، اگر f و مشتقات آن در شرایط مناسبی صدق کنند، با به‌کارگیری متوالی این قضیه می‌توان عبارتی برای تبدیل مشتق nام f، $f^{(n)}$، به‌دست آورد. حاصل کار را در نتیجهٔ زیر آورده‌ایم.

نتیجهٔ ۲.۲.۶ فرض کنید f، f'، $\ldots$، $f^{(n-1)}$ بر هر بازهٔ $0 \le t \le A$ پیوسته باشند و $f^{(n)}$ قطعه به قطعه پیوسته باشد. علاوه بر این فرض کنید ثابتهای K، a و M موجود باشند که به‌ازای $t \ge M$، $|f(t)| \le Ke^{at}$، $|f'(t)| \le Ke^{at}$، $\ldots$، $|f^{(n-1)}(t)| \le Ke^{at}$. در این‌صورت $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ به‌ازای هر s که $s > a$ موجود است و

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \qquad (3)$$

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس مسئله‌های مقدار اولیه را حل کرد. مفیدترین زمینه‌های کاربرد این روش مسئله‌های شامل معادله‌های دیفرانسیل غیرهمگن هستند؛ اما با بررسی چند معادلهٔ همگن که کمی ساده‌تر هستند شروع می‌کنیم.

مثال ۱

معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad (4)$$

و شرایط اولیهٔ

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \qquad (5)$$

را در نظر بگیرید. این مسئله به‌سادگی با روشهای بخش ۱.۳ حل می‌شود: معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0 \qquad (6)$$

و در نتیجه جواب عمومی معادلهٔ (۴) عبارت است از

$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}. \qquad (7)$$

برای برآورده شدن شرایط اولیهٔ (۵) باید $c_1 + c_2 = 1$ و $-c_1 + 2c_2 = 0$؛ بنابراین $c_1 = 2/3$ و $c_2 = 1/3$ و در نتیجه، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۴) و (۵) عبارت است از

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}. \qquad (8)$$

اکنون همین مسئله را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل می‌کنیم. برای انجام این کار باید فرض کنیم که مسئله جوابی مانند $y = \phi(t)$ دارد که به همراه دو مشتق اولش در شرایط نتیجهٔ ۲.۲.۶ صدق می‌کند. سپس با محاسبهٔ تبدیل لاپلاس معادلهٔ دیفرانسیل (۴) نتیجه می‌شود

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0 \qquad (9)$$

که در آن از خاصیت خطی‌بودن تبدیل لاپلاس برای نوشتن حاصل تبدیل یک جمع به‌صورت جمع جداگانهٔ تبدیلها استفاده کرده‌ایم. با استفاده از نتیجهٔ ۲.۲.۶ برای $\mathcal{L}\{y''\}$ و $\mathcal{L}\{y'\}$، معادلهٔ (۹) تبدیل می‌شود به

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

یا

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1-s)y(0) - y'(0) = 0 \qquad (10)$$

که در آن $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. با قرار دادن $y(0)$ و $y'(0)$ از شرایط اولیهٔ (۵) در معادلهٔ (۱۰) و سپس حل آن برحسب $Y(s)$ نتیجه می‌شود

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}; \qquad (11)$$

بنابراین عبارتی برای تبدیل لاپلاس جواب $y = \phi(t)$ مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده به‌دست آورده‌ایم. برای تعیین ϕ، باید تابعی را بیابیم که تبدیل لاپلاس آن، یعنی $Y(s)$، در معادلهٔ (۱۱) داده شده است. ساده‌ترین نحوهٔ انجام این امر تجزیهٔ طرف راست

معادلهٔ (۱۱) به‌صورت کسرهای جزئی است؛ پس می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1} \\ &= \frac{a(s+1)+b(s-2)}{(s-2)(s+1)} \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که در آن a و b باید تعیین شوند. با مساوی قرار دادن صورت عبارتهای دوم و چهارم معادلهٔ (۱۲) نتیجه می‌شود

$$s-1 = a(s+1)+b(s-2).$$

این معادله باید به‌ازای هر s برقرار باشد؛ پس اگر قرار بدهیم $s=2$، نتیجه می‌شود که $a=1/3$. به همین ترتیب اگر قرار بدهیم $s=-1$، نتیجه می‌شود که $b=2/3$. با قرار دادن این مقادیر a و b در معادلهٔ (۱۲)، نتیجه می‌شود

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2}+\frac{2/3}{s+1}. \qquad (۱۳)$$

درنهایت، اگر از نتیجهٔ مثال ۵ بخش ۱.۶ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که تبدیل $\frac{1}{3}e^{2t}$ برابر $\frac{1}{3}(s-2)^{-1}$ است و تبدیل $\frac{2}{3}e^{-t}$ برابر $\frac{2}{3}(s+1)^{-1}$ است. بنابراین با استفاده از خطی‌بودن تبدیل لاپلاس، حاصل تبدیل

$$y=\phi(t)=\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}$$

همان (۱۳) است و بنابراین، همین y جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۴) و (۵) است. توجه کنید که همان‌طور که در ابتدا فرض کردیم، این تابع در شرایط نتیجهٔ ۲.۲.۶ صدق می‌کند. این همان جوابی است که قبلاً به‌دست آورده بودیم.

همین روند را می‌توان برای معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم کلی با ضرایب ثابت، یعنی

$$ay''+by'+cy=f(t) \qquad (۱۴)$$

هم به‌کار گرفت. با فرض اینکه $y=\phi(t)$ به‌ازای $n=2$ در شرایط نتیجهٔ ۲.۲.۶ صدق می‌کند، می‌توانیم تبدیل معادلهٔ (۱۴) را محاسبه کنیم و بنویسیم

$$a[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+b[sY(s)-y(0)]+cY(s)=F(s) \qquad (۱۵)$$

که در آن $F(s)$ تبدیل $f(t)$ است. با حل معادلهٔ (۱۵) برحسب $Y(s)$ نتیجه می‌شود

$$Y(s)=\frac{(as+b)y(0)+ay'(0)}{as^2+bs+c}+\frac{F(s)}{as^2+bs+c}. \qquad (۱۶)$$

به این ترتیب، مسئله حل می‌شود اگر بتوانیم تابع $y=\phi(t)$ را طوری بیابیم که تبدیل آن $Y(s)$ باشد.

حتی در همین ابتدای بحث می‌توانیم به بعضی از ویژگیهای اساسی روش تبدیل اشاره کنیم. پیش از هر چیز، تبدیل $Y(s)$ تابع مجهول $y=\phi(t)$ با حل معادلهٔ جبری به‌جای معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست می‌آید، مانند معادلهٔ (۱۰) به‌جای معادلهٔ (۴) مثال ۱ یا معادلهٔ کلی (۱۵) به‌جای معادلهٔ (۱۴). این کلید کارایی تبدیل لاپلاس در حل

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت است ــــ مسئله از معادلهٔ دیفرانسیل به معادلهٔ جبری ساده می‌شود. دیگر اینکه جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده به‌طور خودکار به‌دست می‌آید، بنابراین مسئلهٔ تعیین ضرایب مناسب برای ثابتهای دلخواه جواب عمومی پیش نمی‌آید. علاوه بر این، همان‌طور که در معادلهٔ (۱۵) دیدیم، می‌توان معادلات غیرهمگن را دقیقاً مانند معادلات همگن بررسی کرد و لازم نیست که ابتدا معادلهٔ همگن متناظر را حل کنیم. دست آخر، این روش را می‌توانیم به همین نحو برای معادله‌های مرتبهٔ بالاتر به‌کار ببریم و فقط کافی است فرض کنیم به‌ازای مقدار مناسبی از n جواب در شرایط نتیجه صدق می‌کند.

توجه کنید که چندجمله‌ای as^2+bs+c در مخرج طرف راست معادلهٔ (۱۶)، دقیقاً چندجمله‌ای مشخصهٔ معادلهٔ (۱۴) است. چون برای تجزیهٔ $Y(s)$ به کسرهای ساده به منظور تعیین $\phi(t)$ باید این چندجمله‌ای را تجزیه کنیم، استفاده از تبدیل لاپلاس مستلزم یافتن ریشه‌های معادلهٔ مشخصه است. برای معادله‌هایی از مرتبهٔ بالاتر از دو، این کار ممکن است مستلزم تقریبهای عددی باشد، به‌ویژه اگر ریشه‌ها گنگ و یا مختلط باشند.

مشکل اصلی‌ای که در مواجه با حل مسئله‌های مقدار اولیه با روش تبدیل رخ می‌دهد، مسئلهٔ تعیین $y=\phi(t)$ است که تبدیلش $Y(s)$ است؛ به $\phi(t)$ تبدیل معکوس $Y(s)$ می‌گوییم و روند یافتن $\phi(t)$ از $Y(s)$ به معکوس کردن تبدیل معروف است. در ضمن، از نماد $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ برای نمایش تبدیل معکوس $Y(s)$ استفاده می‌کنیم. برای تبدیل معکوس لاپلاس فرمولی کلی وجود دارد؛ اما استفاده از آن نیازمند آشنایی با توابع مختلط است و ما در این کتاب به آن نمی‌پردازیم. با این حال، بدون متغیرهای مختلط هم می‌توانیم بعضی از خواص مهم تبدیل لاپلاس را بررسی کنیم و بسیاری از مسئله‌های جالب را حل کنیم.

هنگام حل مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۴) و (۵) به این نپرداختیم که تابعهایی غیر از تابع داده‌شده با معادلهٔ (۸) هم وجود دارند که تبدیلشان همان (۱۳) باشد یا نه. از قضیهٔ ۱.۲.۳ می‌دانیم که مسئلهٔ مقدار اولیه جواب دیگری ندارد، و می‌توان نشان داد که اگر f و g تابعهایی پیوسته با تبدیل لاپلاس یکسان باشند، f و g یکی هستند. از طرف دیگر اگر f و g قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشند، ممکن است در یک یا چند نقطهٔ ناپیوستگی متفاوت باشند در حالی که تبدیل لاپلاس آنها یکی است؛ مثال ۶ در بخش ۱.۶ را ببینید. این یکتا نبودن معکوس لاپلاس برای تابعهای قطعه‌به‌قطعه پیوسته، اهمیت عملی ندارد.

پس اساساً تناظری یک‌به‌یک بین تابعها و تبدیل لاپلاسشان موجود است. به این ترتیب، به‌نظر می‌رسد که مناسب است جدولی مانند جدول ۱.۲.۶ تهیه کنیم که شامل تبدیلهای تابعهایی باشد که اغلب با آنها مواجه می‌شویم. درایه‌های ستون دوم جدول ۱.۲.۶ تبدیل تابعهای ستون اول هستند و شاید مهم‌تر از این، تابعهای ستون اول تبدیلهای معکوس تابعهای ستون دوم هستند. پس به‌عنوان مثال اگر تبدیل جواب معادلهٔ دیفرانسیلی معلوم باشد، خود جواب را معمولاً می‌توان تنها با نگاهی به جدول پیدا کرد. بعضی از درایه‌های جدول ۱.۲.۶ را در مثالها و یا در مسئله‌های بخش ۱.۶ دیدیم و بقیه را در ادامهٔ این فصل خواهیم دید. ستون سوم جدول به جایی اشاره می‌کند که نحوهٔ به‌دست آوردن تبدیل را می‌توان آنجا یافت. جدول ۱.۲.۶ برای مثالها و مسئله‌های این کتاب کافی است، اما جدولهای بسیار بزرگ‌تری هم وجود دارند (فهرست مراجع را در انتهای فصل ببینید). تبدیلها و معکوس تبدیلها را می‌توان با استفاده از سیستم‌های جبری رایانه‌ای به‌سادگی به‌دست آورد.

در بسیاری از موارد، تبدیل لاپلاس $F(s)$ را می‌توان به‌صورت مجموع چند جمله بیان کرد؛ یعنی

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s). \qquad (۱۷)$$

جدول ۶.۲.۱ تبدیلهای لاپلاس مقدماتی

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	یادداشتها
۱.	1	$\frac{1}{s},\ s > 0$	بخش ۶.۱؛ مثال ۴
۲.	e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$	بخش ۶.۱؛ مثال ۵
۳.	t^n، $n =$ عدد صحیح مثبت	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$	بخش ۶.۱؛ مسئلهٔ ۲۷
۴.	t^p، $p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},\ s > 0$	بخش ۶.۱؛ مسئلهٔ ۲۷
۵.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$	بخش ۶.۱؛ مثال ۷
۶.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$	بخش ۶.۱؛ مسئلهٔ ۶
۷.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$	بخش ۶.۱؛ مسئلهٔ ۸
۸.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$	بخش ۶.۱؛ مسئلهٔ ۸
۹.	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$	بخش ۶.۱؛ مسئلهٔ ۱۳
۱۰.	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$	بخش ۶.۱؛ مسئلهٔ ۱۴
۱۱.	$t^n e^{at}$، $n =$ عدد صحیح مثبت	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > a$	بخش ۶.۱؛ مسئلهٔ ۱۸
۱۲.	$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s},\ s > 0$	بخش ۶.۳
۱۳.	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	بخش ۶.۳
۱۴.	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	بخش ۶.۳
۱۵.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right),\ c > 0$	بخش ۶.۳؛ مسئلهٔ ۲۵
۱۶.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	بخش ۶.۶
۱۷.	$\delta(t-c)$	e^{-cs}	بخش ۶.۵
۱۸.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	بخش ۶.۲
۱۹.	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	بخش ۶.۲؛ مسئلهٔ ۲۸

فرض کنید که $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}$، ...، $f_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$. در این‌صورت، تبدیل لاپلاس تابع

$$f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$$

همان $F(s)$ است. با استفاده از خاصیت یکتایی‌ای که ذکر کردیم، هیچ تابع پیوستهٔ دیگری با همان تبدیل موجود نیست؛ پس

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\} \qquad (18)$$

که یعنی تبدیل معکوس لاپلاس هم عملگری خطی است.

در بسیاری از مسئله‌ها می‌توانیم از این خاصیت استفاده کنیم و تبدیل داده‌شده را به‌صورت مجموع تابعهایی که تبدیلهای معکوس آنها از پیش معلوم‌اند و یا می‌توان آنها را در جدول یافت بنویسیم. بسط به کسرهای جزئی در این زمینه مفید است و حکم کلی‌ای را که در بسیاری از حالتها کاراست در مسئلهٔ ۳۸ آورده‌ایم. بعضی دیگر از خواص مفید تبدیلهای لاپلاس را در ادامهٔ این فصل می‌آوریم.

برای روشن‌تر شدن روش حل مسئله‌های مقدار اولیه با استفاده از تبدیل لاپلاس و تجزیه به کسرهای جزئی مثالهای زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲

جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + y = \sin 2t \qquad (19)$$

به‌دست بیاورید که در شرایط اولیهٔ

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \qquad (20)$$

صدق کند.

فرض می‌کنیم که این مسئلهٔ مقدار اولیه جوابی به‌صورت $y = \phi(t)$ دارد که با دو مشتق اولش در شرایط نتیجهٔ ۶.۲.۲ صدق می‌کند. بنابراین با محاسبهٔ تبدیل لاپلاس معادلهٔ دیفرانسیل نتیجه می‌شود

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{(s^2+4)}$$

که در آن تبدیل $\sin 2t$ از سطر ۵ جدول ۶.۲.۱ به‌دست آمده است. با قرار دادن $y(0)$ و $y'(0)$ از شرایط اولیه و حل این معادله نسبت به $Y(s)$، نتیجه می‌شود

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)}. \qquad (21)$$

با تجزیهٔ $Y(s)$ به کسرهای جزئی، به

$$Y(s) = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4} = \frac{(as+b)(s^2+4) + (cs+d)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)} \qquad (22)$$

می‌رسیم. با بسط صورت طرف راست معادلهٔ (۲۲) و مساوی قرار دادن آن با صورت معادلهٔ (۲۱) به‌ازای هر s، نتیجه می‌شود

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (a+c)s^3 + (b+d)s^2 + (4a+c) + (4b+d)$$

و با مقایسهٔ ضرایب جمله‌های هم‌توان s نتیجه می‌شود

$$a + c = 2, \qquad b + d = 1,$$
$$4a + c = 8, \qquad 4b + d = 6;$$

در نتیجه، $a = 2$، $c = 0$، $b = 5/3$ و $d = -2/3$، بنابراین

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{5/3}{s^2+1} - \frac{2/3}{s^2+4}. \qquad (23)$$

با استفاده از سطرهای ۵ و ۶ جدول ۱.۲.۶، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده عبارت است از

$$y=\phi(t)=2\cos t+\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t. \qquad (24)$$

مثال ۳

جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y^{(4)}-y=0, \qquad (25)$$

$$y(0)=0, \quad y'(0)=1, \quad y''(0)=0, \quad y'''(0)=0 \qquad (26)$$

را به‌دست بیاورید.

در این مسئله لازم است که فرض کنیم که جواب $y=\phi(t)$ به‌ازای $n=4$ در شرایط نتیجهٔ ۲.۲.۶ صدق می‌کند. تبدیل لاپلاس معادلهٔ (۲۵) عبارت است از

$$s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)-Y(s)=0;$$

پس با استفاده از شرایط اولیهٔ (۲۶) و حل آن نسبت به $Y(s)$ نتیجه می‌شود

$$Y(s)=\frac{s^2}{s^4-1}. \qquad (27)$$

تجزیهٔ $Y(s)$ به کسرهای جزئی عبارت است از

$$Y(s)=\frac{as+b}{s^2-1}+\frac{cs+d}{s^2+1}$$

و نتیجه می‌شود که به‌ازای هر s،

$$(as+b)(s^2+1)+(cs+d)(s^2-1)=s^2. \qquad (28)$$

با قرار دادن $s=1$ و $s=-1$ در معادلهٔ (۲۸) به جفت معادلهٔ

$$2(a+b)=1, \qquad 2(-a+b)=1$$

می‌رسیم و بنابراین $a=0$ و $b=1/2$. اگر در معادلهٔ (۲۸) قرار بدهیم $s=0$ آنگاه $b-d=0$ و بنابراین $d=1/2$. درنهایت با مساوی قرار دادن ضرایب جمله‌های مرتبهٔ سوم در دو طرف معادله (۲۸) نتیجه می‌شود $a+c=0$، بنابراین $c=0$. پس

$$Y(s)=\frac{1/2}{s^2-1}+\frac{1/2}{s^2+1} \qquad (29)$$

و از سطرهای ۷ و ۵ جدول ۱.۲.۶ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۵) و (۲۶) عبارت است از

$$y=\phi(t)=\frac{\sinh t+\sin t}{2}. \qquad (30)$$

مهم‌ترین کاربرد مقدماتی تبدیل لاپلاس در مطالعهٔ ارتعاشات مکانیکی و تحلیل مدارهای الکتریکی است که معادله‌های آنها را در بخش ۷.۳ به‌دست آوردیم. معادلهٔ حرکت دستگاه فنر-وزنه عبارت است از

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+\gamma\frac{du}{dt}+ku=F(t) \qquad (31)$$

که در آن m جرم، γ ضریب میرایی، k ثابت فنر و $F(t)$ نیروی خارجی واردشده است. معادلهٔ توصیف‌کنندهٔ مداری الکتریکی شامل القاگر L، مقاومت R و خازن C (مدار LRC) عبارت است از

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t) \qquad (32)$$

که در آن $Q(t)$ بار روی خازن و $E(t)$ ولتاژ اعمال شده است. چون $I(t)=dQ(t)/dt$ می‌توان از معادلهٔ (۳۲) مشتق گرفت و نوشت

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE}{dt}(t). \qquad (33)$$

باید شرایط اولیهٔ مناسب هم برای u، Q یا I در نظر گرفته شود.

قبلاً در بخش ۷.۳ دیدیم که معادلهٔ (۳۱) برای دستگاه فنر-وزنه و معادلهٔ (۳۲) یا (۳۳) برای مدار الکتریکی از نظر ریاضی دقیقاً یکسان هستند و تنها ثابتها و متغیرهای ظاهرشده در آنها را باید به شیوه‌های متفاوتی تفسیر کرد. مسئله‌های فیزیکی دیگری هم هستند که منجر به همین معادلهٔ دیفرانسیل می‌شوند. پس با حل مسئلهٔ ریاضی، می‌توانیم جواب را مطابق مسئلهٔ فیزیکی‌ای که به آن علاقه‌مندیم تفسیر کنیم.

در مسئله‌هایی که در انتهای این بخش و بخش‌های بعدی آورده‌ایم، چندین مسئلهٔ مقدار اولیه برای معادله‌های دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت وجود دارند که بسیاری از آنها را می‌توان مدل دستگاه فیزیکی مشخصی دانست، ولی معمولاً به صراحت به این نکته اشاره نخواهیم کرد.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۰، تبدیل معکوس تابع داده‌شده را بیابید.

۱. $F(s)=\dfrac{5}{s^2+4}$

۲. $F(s)=\dfrac{4}{(s-1)^3}$

۳. $F(s)=\dfrac{2}{s^2+3s-4}$

۴. $F(s)=\dfrac{3s}{s^2-s-6}$

۵. $F(s)=\dfrac{2s-3}{s^2-4}$

۶. $F(s)=\dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$

۷. $F(s)=\dfrac{2s+1}{s^2-2s+2}$

۸. $F(s)=\dfrac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$

۹. $F(s)=\dfrac{3-4s}{s^2+4s+5}$

۱۰. $F(s)=\dfrac{2s-3}{s^2+2s+10}$

در هر یک از مسئله‌های ۱۱ تا ۲۳، برای حل مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده از تبدیل لاپلاس استفاده کنید.

۱۱. $y''-y'-6y=0$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=-1$

۱۲. $y''-2y'+2y=0$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$

۱۳. $y''+3y'+2y=0$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=0$

۱۴. $y''-4y'+4y=0$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=1$

۱۵. $y''-2y'+4y=0$؛ $y(0)=2$، $y'(0)=0$

۱۶. $y''+2y'+5y=0$؛ $y(0)=2$، $y'(0)=-2$

۱۷. $y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=0$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$، $y''(0)=0$، $y'''(0)=1$

۱۸. $y^{(4)}-4y=0$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=0$، $y''(0)=-2$، $y'''(0)=0$

۱۹. $y^{(4)}-y=0$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=0$، $y''(0)=1$، $y'''(0)=0$

۲۰. $y''+\omega^2 y=\cos 2t$، $\omega^2\neq 4$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=0$

۲۱. $y''+2y'+y=4e^{-t}$؛ $y(0)=2$، $y'(0)=-1$

۲۲. $y''-2y'+2y=e^{-t}$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$

۲۳. $y''-2y'+2y=\cos t$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=0$

در هر یک از مسئله‌های ۲۴ تا ۲۶، تبدیل لاپلاس $Y(s)=\mathcal{L}\{y\}$ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را بیابید. یک روش تعیین تبدیل معکوس را در بخش ۳.۶ آورده‌ایم.

۲۴. $$y''+4y=\begin{cases}1, & 0\le t<\pi,\\ 0, & \pi\le t<\infty;\end{cases}\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$$

۲۵. $$y''+y=\begin{cases}t, & 0\le t<1,\\ 0, & 1\le t<\infty;\end{cases}\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

۲۶. $$y''+4y=\begin{cases}t^2, & 0\le t<1,\\ 1, & 1\le t<\infty;\end{cases}\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

۲۷. تبدیل لاپلاس توابع معین را می‌توان به‌راحتی با استفاده از بسط تیلورشان به‌دست آورد.

الف) با استفاده از سری تیلور $\sin t$، یعنی

$$\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

و فرض اینکه تبدیل لاپلاس این سری را می‌توان جمله به جمله محاسبه کرد، تحقیق کنید که

$$\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1},\qquad s>1.$$

ب) فرض کنید

$$f(t)=\begin{cases}(\sin t)/t, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

سری تیلور f را حول $t=0$ بیابید. با فرض اینکه تبدیل لاپلاس این تابع را می‌توان جمله به جمله محاسبه کرد، تحقیق کنید که

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\arctan\left(\frac{1}{s}\right),\qquad s>1.$$

ج) تابع بسل نوع اول و مرتبهٔ صفر، J_0، سری تیلوری به‌شکل

$$J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

(بخش ۷.۵ را ببینید) دارد. با فرض اینکه تبدیل لاپلاس سری بالا را می‌توان جمله به جمله محاسبه کرد، تحقیق کنید که

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\}=(s^2+1)^{-1/2},\qquad s>1.$$

و

$$\mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\}=s^{-1}e^{-1/(4s)},\qquad s>0.$$

در مسئله‌های ۲۸ تا ۳۶، به مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس می‌پردازیم.

۲۸. فرض کنید

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt.$$

می‌توان نشان داد که اگر f در شرایط قضیهٔ ۲.۱.۶ صدق کند، مشتق‌گیری از عبارت زیر انتگرال نسبت به پارامتر s به‌ازای هر s که $s>a$ مجاز است.

الف) ثابت کنید $F'(s)=\mathcal{L}\{-tf(t)\}$.

ب) ثابت کنید $F^{(n)}(s)=\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$؛ بنابراین مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس متناظر ضرب تابع اصلی در $-t$ است.

در هر یک از مسئله‌های ۲۹ تا ۳۴، از نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۸ برای یافتن تبدیل لاپلاس تابع داده‌شده استفاده کنید؛ a و b اعداد حقیقی هستند و n عددی صحیح و مثبت است.

۲۹. $f(t)=t^2e^{at}$ ۳۰. $f(t)=t^2\sin bt$

۳۱. $f(t)=t^n$ ۳۲. $f(t)=t^ne^{at}$

۳۳. $f(t)=te^{at}\sin bt$ ۳۴. $f(t)=te^{at}\cos bt$

۳۵. معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر، یعنی

$$ty''+y'+ty=0$$

را در نظر بگیرید. از بخش ۴.۵ می‌دانیم که $t=0$ نقطهٔ تکین منظم این معادله است و بنابراین جوابها ممکن است وقتی $t\to 0$ بی‌کران شوند. با این حال، می‌خواهیم ببینیم جوابهایی موجودند که در $t=0$ کراندار باقی بمانند و در آنجا مشتق کراندار داشته باشند یا نه. با فرض اینکه چنین جوابی موجود است و برابر $y=\phi(t)$ است، فرض کنید $Y(s)=\mathcal{L}\{\phi(t)\}$.

الف) ثابت کنید $Y(s)$ در معادلهٔ

$$(۱+s^۲)Y'(s)+sY(s)=۰$$

صدق می‌کند.

ب) ثابت کنید $Y(s)=c(۱+s^۲)^{-۱/۲}$ که در آن c ثابتی دلخواه است.

ج) با نوشتن $(۱+s^۲)^{-۱/۲}=s^{-۱}(۱+s^{-۲})^{-۱/۲}$ و بسط آن به‌صورت سری دوجمله‌ای که به‌ازای $s>۱$ معتبر است و با فرض اینکه می‌توانیم جمله به جملهٔ تبدیل معکوس را حساب کنیم، ثابت کنید

$$y=c\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n t^{۲n}}{۲^{۲n}(n!)^۲}=cJ_۰(t)$$

که در آن $J_۰$ تابع بسل نوع اول و مرتبهٔ صفر است. توجه کنید که $J_۰(۰)=۱$ و $J_۰$ در $t=۰$ از هر مرتبه‌ای مشتق‌های متناهی دارد. در بخش ۷.۵ نشان دادیم که جواب دوم این معادله وقتی $t\to ۰$ بی‌کران می‌شود.

۳۶. برای هر یک از مسئله‌های مقدار اولیهٔ داده‌شده از نتایج مسئلهٔ ۲۸ برای یافتن معادلهٔ دیفرانسیلی که $Y(s)=\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ در آن صدق می‌کند استفاده کنید که در آن $y=\phi(t)$ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده است.

الف) $y''-ty=۰$؛ $y(۰)=۱$، $y'(۰)=۰$ (معادلهٔ ایری)

ب) $(۱-t^۲)y''-۲ty'+\alpha(\alpha+۱)y=۰$؛ $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۱$ (معادلهٔ لژاندر)

توجه کنید که معادلهٔ دیفرانسیل برای $Y(s)$ در قسمت (الف) از مرتبهٔ اول و در قسمت (ب) از مرتبهٔ دوم است. این امر به این دلیل است که t در قسمت (الف) با نمای ۱ و در قسمت (ب) با نمای ۲ ظاهر می‌شود. این نشان می‌دهد که تبدیل لاپلاس در حل معادله‌های دیفرانسیل با ضرایب متغیر مفید نیست، مگر اینکه ضرایب حداکثر تابعهایی خطی از متغیر مستقل باشند.

۳۷. فرض کنید که

$$g(t)=\int_۰^t f(\tau)d\tau.$$

اگر $G(s)$ و $F(s)$ به‌ترتیب تبدیلهای لاپلاس $g(t)$ و $f(t)$ باشند، ثابت کنید

$$G(s)=\frac{F(s)}{s}.$$

۳۸. در این مسئله نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از تجزیه به کسرهای جزئی برای محاسبهٔ تبدیلهای معکوس استفاده کرد. فرض کنید

$$F(s)=P(s)/Q(s)$$

که در آن $Q(s)$ چندجمله‌ای از درجهٔ n با صفرهای متمایز $r_۱$، ...، r_n است و $P(s)$ چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر از n است. در این حالت می‌توان نشان داد که $P(s)/Q(s)$ را می‌توان به شکل

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_۱}{s-r_۱}+\cdots+\frac{A_n}{s-r_n} \qquad \text{(i)}$$

به کسرهای جزئی تجزیه کرد که در آن ضرایب $A_۱$، ...، A_n باید تعیین شوند.

الف) ثابت کنید

$$A_k=\frac{P(r_k)}{Q'(r_k)},\qquad k=۱,\ldots,n. \qquad \text{(ii)}$$

راهنمایی: یک راه برای انجام این کار این است که معادلهٔ (i) را در $s-r_k$ ضرب کنید و سپس وقتی $s\to r_k$ حد بگیرید.

ب) ثابت کنید

$$\mathcal{L}^{-۱}\{F(s)\}=\sum_{k=۱}^{n}\frac{P(r_k)}{Q'(r_k)}e^{r_k t}. \qquad \text{(iii)}$$

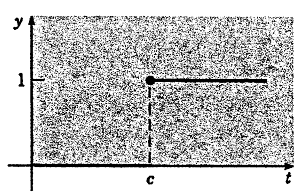
۳.۶ تابعهای پله‌ای

در بخش ۲.۶ روند کلی حل مسئله‌های مقدار اولیه را با استفاده از تبدیل لاپلاس طرح کردیم. بعضی از مهم‌ترین کاربردهای مقدماتی جالب روش تبدیل، به‌دست آوردن جواب معادله‌های دیفرانسیل خطی با تابع نیروی ناپیوسته و یا واداشته است. معادله‌هایی از این نوع اغلب در تحلیل شارش جریان در مدار الکتریکی یا ارتعاشات سیستم‌های مکانیکی ظاهر می‌شوند. در این بخش و بخش‌های بعدی بعضی از خواص دیگر تبدیل لاپلاس را می‌آوریم که در به‌دست آوردن جواب چنین مسئله‌هایی مفیدند. فرض می‌کنیم که همهٔ تابعهای ظاهرشده در ذیل قطعه‌به‌قطعه پیوسته و از مرتبهٔ نمایی هستند، که تبدیل لاپلاس آنها حداقل به‌ازای s به اندازهٔ کافی بزرگ موجود باشد مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

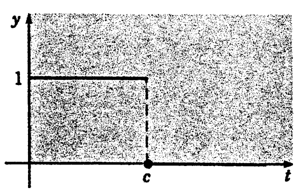
برای بررسی تابعهای با ناپیوستگی پرشی، معرفی تابعی که به **تابع پله‌ای یکه** یا **تابع هوی‌ساید** مشهور است مفید است. این تابع را با u_c نشان می‌دهیم و با

$$u_c(t)=\begin{cases}۰, & t<c,\\ ۱, & t\geq c,\end{cases}\qquad c\geq ۰ \qquad (۱)$$

تعریف می‌کنیم. نمودار $y=u_c(t)$ را در شکل ۱.۳.۶ نشان داده‌ایم. کم و بیش به دلخواه u_c را در $t=c$ برابر ۱ تعریف کرده‌ایم، با این حال، برای تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته مانند u_c، یادآوری می‌کنیم که معمولاً مقدار آن در نقطهٔ ناپیوستگی اهمیت ندارد. پله ممکن است منفی هم باشد؛ به‌عنوان مثال در شکل ۲.۳.۶، نمودار $y=۱-u_c(t)$ را آورده‌ایم.



شکل ۱.۳.۶ $y=u_c(t)$



شکل ۲.۳.۶ $y=۱-u_c(t)$

مثال ۱

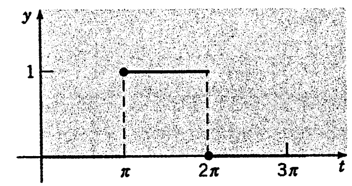
نمودار $y = h(t)$ را رسم کنید که در آن

$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t), \qquad t \geq 0.$$

از تعریف $u_c(t)$ در معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود که

$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1 - 0 = 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 1 - 1 = 0, & 2\pi \leq t < \infty \end{cases}$$

پس نمودار معادلهٔ $y = h(t)$ به‌صورتی است که در شکل ۳.۳.۶ نشان داده‌ایم. این تابع را می‌توان ضربانی مستطیلی در نظر گرفت.



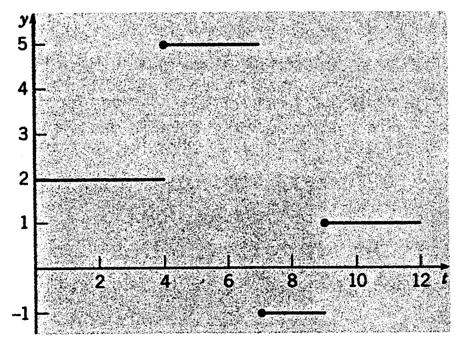
شکل ۳.۳.۶ نمودار $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$.

مثال ۲

تابع

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 4 \\ 5, & 4 \leq t < 7 \\ -1, & 7 \leq t < 9 \\ 1, & t \geq 9 \end{cases} \qquad (۲)$$

را در نظر بگیرید که نمودار آن را در شکل ۴.۳.۶ نشان داده‌ایم. $f(t)$ را برحسب $u_c(t)$ بیان کنید.



شکل ۴.۳.۶ نمودار تابع معادلهٔ ۲

با تابع $f_1(t) = 2$ شروع می‌کنیم که روی $[0, 4)$ بر $f(t)$ منطبق است. برای ایجاد پرشی به اندازهٔ سه واحد در $t = 4$، $3u_4(t)$ را به $f_1(t)$ اضافه می‌کنیم؛ پس

$$f_2(t) = 2 + 3u_4(t)$$

که روی $[0, 7)$ بر $f(t)$ منطبق است. پرش منفی به اندازهٔ ۶ واحد در $t = 7$ متناظر اضافه کردن $-6u_7(t)$ است؛ پس

$$f_3(t) = 2 + 3u_4(t) - 6u_7(t).$$

درنهایت برای ایجاد پرشی به اندازهٔ ۲ واحد در $t = 9$ باید $2u_9(t)$ را اضافه کنیم؛ پس

$$f(t) = 2 + 3u_4(t) - 6u_7(t) + 2u_9(t). \qquad (۳)$$

تبدیل لاپلاس $u_c(t)$ به‌سادگی معلوم می‌شود:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)dt = \int_c^\infty e^{-st}dt$$
$$= \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0. \qquad (۴)$$

برای تابع مفروض f که به‌ازای $t \geq 0$ تعریف شده، گاهی می‌خواهیم تابع متناظر g را که با

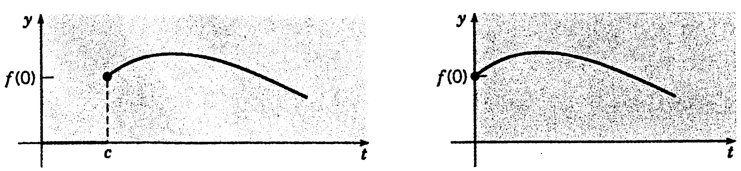
$$y = g(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ f(t-c), & t \geq c \end{cases}$$

تعریف شده در نظر بگیریم که انتقالی از f به فاصلهٔ c در جهت مثبت tها است؛ شکل ۵.۳.۶ را ببینید. برحسب تابع پله‌ای واحد می‌توانیم $g(t)$ را به‌صورت

$$g(t) = u_c(t)f(t-c)$$

بنویسیم.

تابع پله‌ای یکه به‌ویژه در استفاده از تبدیل مفید است، چون رابطهٔ زیر بین تبدیل $f(t)$ و انتقال $u_c(t)f(t-c)$ آن وجود دارد.



(الف) (ب)

شکل ۵.۳.۶ انتقال تابع داده‌شده. (الف) $y = f(t)$؛ (ب) $y = u_c(t)f(t-c)$.

قضیهٔ ۱.۳.۶ اگر $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ به‌ازای $s > a \geq 0$ موجود باشد و اگر c ثابتی مثبت باشد،

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s), \qquad s > a. \tag{5}$$

برعکس اگر $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$،

$$u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}. \tag{6}$$

قضیهٔ ۱.۳.۶ به‌سادگی بیان می‌کند که انتقال $f(t)$ به فاصلهٔ c در جهت مثبت tها متناظر ضرب $F(s)$ در e^{-cs} است. برای اثبات قضیهٔ ۱.۳.۶ کافی است که تبدیل $u_c(t)f(t-c)$ را محاسبه کنیم:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt$$
$$= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt.$$

با معرفی متغیر جدید $\xi = t - c$ نتیجه می‌شود

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-(\xi+c)s}f(\xi)d\xi = e^{-cs}\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)d\xi$$
$$= e^{-cs}F(s).$$

پس معادلهٔ (۵) برقرار است؛ معادلهٔ (۶) با محاسبهٔ معکوس تبدیل از دو طرف معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود.

مثال سادهٔ کاربرد این قضیه، $f(t) = 1$ است. یادآوری می‌کنیم که $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$؛ پس بلافاصله از معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود که $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = e^{-cs}/s$. این نتیجه با نتیجهٔ معادلهٔ (۴) سازگار است. مثالهای ۳ و ۴ چگونگی استفادهٔ قضیهٔ ۱.۳.۶ را در محاسبهٔ تبدیلها و معکوس تبدیلها بیشتر نشان می‌دهند.

مثال ۳

اگر تابع f به‌صورت

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi/4 \\ \sin t + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4 \end{cases}$$

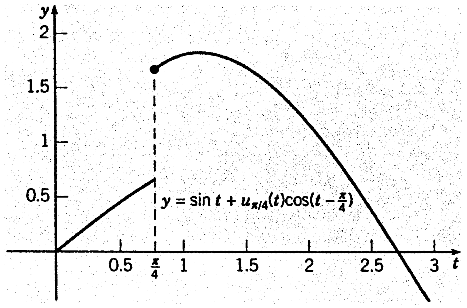
تعریف شده باشد، $\mathcal{L}\{f(t)\}$ را بیابید. نمودار $y = f(t)$ را در شکل ۶.۳.۶ نشان داده‌ایم.

توجه کنید که $f(t) = \sin t + g(t)$، که در آن

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/4 \\ \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4 \end{cases}$$

پس

$$g(t) = u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4)$$



شکل ۶.۳.۶ نمودار تابع مثال ۳.

و

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4)\}$$
$$= \mathcal{L}\{\sin t\} + e^{-\pi s/4}\mathcal{L}\{\cos t\}.$$

با استفاده از تبدیلهای $\sin t$ و $\cos t$ نتیجه می‌شود

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s/4}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1 + se^{-\pi s/4}}{s^2+1}.$$

این روش را با محاسبهٔ مستقیم $\mathcal{L}\{f(t)\}$ از تعریف مقایسه کنید.

مثال ۴

تبدیل معکوس

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}$$

را به‌دست بیاورید.

از خطی بودن تبدیل معکوس نتیجه می‌شود

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$$
$$= t - u_2(t)(t-2).$$

تابع f را نیز می‌توان به‌صورت

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & t \geq 2 \end{cases}$$

نوشت.

قضیهٔ بعدی خاصیت بسیار مهم دیگری از تبدیل لاپلاس را نشان می‌دهد که به نحوی متناظر خاصیت ارائه‌شده در قضیهٔ ۱.۳.۶ است.

قضیهٔ ۲.۳.۶ اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ بهازای $s>a\geq 0$ موجود باشد و اگر c ثابت باشد،

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}=F(s-c),\qquad s>a+c. \qquad (7)$$

برعکس اگر $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$،

$$e^{ct}f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}. \qquad (8)$$

طبق قضیهٔ ۲.۳.۶، ضریب e^{ct} در $f(t)$ منجر به انتقال تبدیل $F(s)$ به اندازهٔ c در جهت مثبت tها می‌شود و برعکس. برای اثبات این قضیه، $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)dt$$
$$=F(s-c)$$

که همان معادلهٔ (۷) است. محدودیت $s>a+c$ از این نکته نتیجه می‌شود که طبق فرض (ii) قضیهٔ ۲.۱.۶، $|f(t)|\leq Ke^{at}$؛ بنابراین $|e^{ct}f(t)|\leq Ke^{(a+c)t}$. معادلهٔ (۸) با محاسبهٔ تبدیل معکوس معادلهٔ (۷) به‌دست می‌آید و اثبات کامل می‌شود.

کاربرد اصلی قضیهٔ ۲.۳.۶ محاسبهٔ تبدیل معکوسهای معینی است از نوعی که در مثال ۵ خواهیم دید.

مثال ۵

تبدیل معکوس

$$G(s)=\frac{1}{s^2-4s+5}$$

را به‌دست بیاورید.

با کامل کردن مربع در مخرج، می‌توانیم بنویسیم

$$G(s)=\frac{1}{(s-2)^2+1}=F(s-2)$$

که در آن $F(s)=(s^2+1)^{-1}$. چون $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\sin t$، از قضیهٔ ۲.۳.۶ نتیجه می‌شود که

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=e^{2t}\sin t.$$

نتایج این بخش اغلب در حل معادله‌های دیفرانسیل ــ به‌خصوص آنها که تابع نیروی ناپیوسته دارند ــ مفیدند. بخش بعد را به مثالهایی برای این امر اختصاص داده‌ایم.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۶، نمودار تابع داده‌شده را روی بازهٔ $t\geq 0$ رسم کنید.

۱. $g(t)=u_1(t)+3u_3(t)-6u_4(t)$

۲. $g(t)=(t-3)u_2(t)-(t-2)u_3(t)$

۳. $g(t)=f(t-\pi)u_\pi(t)$ که در آن $f(t)=t^2$

۴. $g(t)=f(t-3)u_3(t)$ که در آن $f(t)=\sin t$

۵. $g(t)=(t-1)u_1(t)-2(t-2)u_2(t)+(t-3)u_3(t)$

۶. $g(t)=f(t-1)u_2(t)$ که در آن $f(t)=2t$

در هر یک از مسئله‌های ۷ تا ۱۲،

الف) نمودار تابع داده‌شده را رسم کنید.

ب) $f(t)$ را برحسب تابع پله‌ای یکهٔ $u_c(t)$ بیان کنید.

۷. $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leq t<3\\ -2, & 3\leq t<5\\ 2, & 5\leq t<7\\ 1, & t\geq 7\end{cases}$

۸. $f(t)=\begin{cases}2, & 0\leq t<1\\ -1, & 1\leq t<2\\ 2, & 2\leq t<3\\ -1, & 3\leq t<4\\ 0, & t\geq 4\end{cases}$

۹. $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leq t<2\\ 3e^{-(t-2)}, & t\geq 2\end{cases}$

۱۰. $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0\leq t<2\\ 1, & t\geq 2\end{cases}$

۱۱. $f(t)=\begin{cases}t, & 0\leq t<1\\ t-1, & 1\leq t<2\\ t-2, & 2\leq t<3\\ 0, & t\geq 3\end{cases}$

۱۲. $f(t)=\begin{cases}t, & 0\leq t<2\\ 2, & 2\leq t<5\\ 7-t, & 5\leq t<7\\ 0, & t\geq 7\end{cases}$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ تا ۱۸، تبدیل لاپلاس تابع داده‌شده را به‌دست بیاورید.

۱۳. $f(t)=\begin{cases}0, & t<2\\ (t-2)^3, & t\geq 2\end{cases}$

۱۴. $f(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ t^2-2t+2, & t\geq 1\end{cases}$

۱۵. $f(t)=\begin{cases}0, & t<\pi\\ t-\pi, & \pi\leq t<2\pi\\ 0, & t\geq 2\pi\end{cases}$

۱۶. $f(t)=(t-3)u_2(t)-(t-2)u_3(t)$

۱۷. $f(t)=u_1(t)+2u_3(t)-6u_4(t)$

۱۸. $f(t)=t-u_1(t)(t-1)$، $t\geq 0$

در هر یک از مسئله‌های ۱۹ تا ۲۴، تبدیل معکوس لاپلاس تابع داده‌شده را به‌دست بیاورید.

۱۹. $F(s)=\dfrac{3!}{(s-2)^4}$

۲۰. $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$

۲۱. $F(s)=\dfrac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$

۲۲. $F(s)=\dfrac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}$

۲۳. $F(s)=\dfrac{2e^{-2s}}{s^2-4}$

۲۴. $F(s)=\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$

۲۵. فرض کنید $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ به‌ازای $s>a\geq ۰$ موجود باشد.

الف) ثابت کنید که اگر c ثابتی مثبت باشد،

$$\mathcal{L}\{f(ct)\}=\frac{۱}{c}F\left(\frac{s}{c}\right),\qquad s>ca.$$

ب) ثابت کنید که اگر k ثابتی مثبت باشد،

$$\mathcal{L}^{-۱}\{F(ks)\}=\frac{۱}{k}f\left(\frac{t}{k}\right).$$

ج) ثابت کنید که اگر a و b ثابت باشند و $a>۰$،

$$\mathcal{L}^{-۱}\{F(as+b)\}=\frac{۱}{a}e^{-bt/a}f\left(\frac{t}{a}\right).$$

در هر یک از مسئله‌های ۲۶ تا ۲۹، با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۲۵، تبدیل معکوس لاپلاس تابع داده‌شده را به‌دست بیاورید.

۲۶. $F(s)=\dfrac{۲^{n+۱}n!}{s^{n+۱}}$

۲۷. $F(s)=\dfrac{۲s+۱}{۴s^۲+۴s+۵}$

۲۸. $F(s)=\dfrac{۱}{۹s^۲-۱۲s+۳}$

۲۹. $F(s)=\dfrac{e^۲e^{-۴s}}{۲s-۱}$

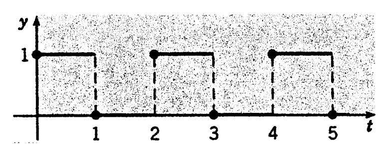
در هر یک از مسئله‌های ۳۰ تا ۳۳، تبدیل لاپلاس تابع داده‌شده را به‌دست بیاورید. در مسئلهٔ ۳۳ فرض کنید که انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری نامتناهی مجاز است.

۳۰. $f(t)=\begin{cases}۱, & ۰\leq t<۱\\ ۰, & t\geq ۱\end{cases}$

۳۱. $f(t)=\begin{cases}۱, & ۰\leq t<۱\\ ۰, & ۱\leq t<۲\\ ۱, & ۲\leq t<۳\\ ۰, & t\geq ۳\end{cases}$

۳۲. $f(t)=۱-u_۱(t)+\cdots+u_{۲n}(t)-u_{۲n+۱}(t)=۱+\sum_{k=۱}^{۲n+۱}(-۱)^k u_k(t)$

۳۳. $f(t)=۱+\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^k u_k(t)$، شکل ۷.۳.۶ را ببینید.



شکل ۷.۳.۶ موج مربعی.

۳۴. فرض کنید f به‌ازای هر $t\geq ۰$ و به‌ازای ثابت مثبت T در $f(t+T)=f(t)$ صدق کند؛ می‌گوییم f متناوب با دورهٔ تناوب T روی $۰\leq t<\infty$ است. ثابت کنید

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_۰^T e^{-st}f(t)dt}{۱-e^{-sT}}.$$

در هر یک از مسئله‌های ۳۵ تا ۳۸، از نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۴ برای یافتن تبدیل لاپلاس تابع داده‌شده استفاده کنید.

۳۵. $f(t)=\begin{cases}۱, & ۰\leq t<۱\\ ۰, & ۱\leq t<۲\end{cases}$

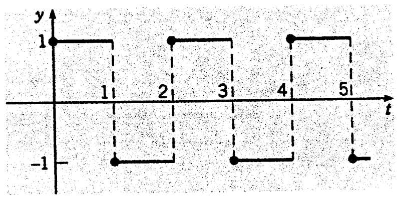
$f(t+۲)=f(t)$

با مسئلهٔ ۳۳ مقایسه کنید.

۳۶. $f(t)=\begin{cases}۱, & ۰\leq t<۱\\ -۱, & ۱\leq t<۲\end{cases}$

$f(t+۲)=f(t)$

شکل ۸.۳.۶ را ببینید.



شکل ۸.۳.۶ موج مربعی.

۳۷. $f(t)=t,\quad ۰\leq t<۱;$

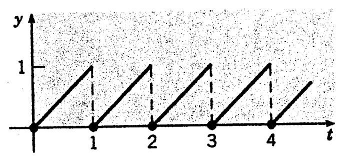
$f(t+۱)=f(t)$

شکل ۹.۳.۶ را ببینید.

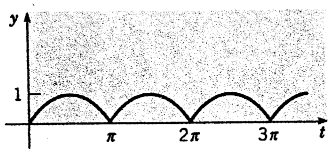
۳۸. $f(t)=\sin t,\quad ۰\leq t<\pi;$

$f(t+\pi)=f(t)$

شکل ۱۰.۳.۶ را ببینید.



شکل ۹.۳.۶ موج اره‌ای.



شکل ۱۰.۳.۶ موج سینوسی اصلاح‌شده.

۳۹. الف) اگر $f(t)=۱-u_۱(t)$، $\mathcal{L}\{f(t)\}$ را بیابید؛ نتیجه را با مسئلهٔ ۳۰ مقایسه کنید. نمودار $y=f(t)$ را رسم کنید.

ب) فرض کنید $g(t)=\int_۰^t f(\xi)d\xi$، که در آن f تابع تعریف‌شده در (الف) است. نمودار $y=g(t)$ را رسم کنید و $\mathcal{L}\{g(t)\}$ را به‌دست بیاورید.

ج) فرض کنید $h(t)=g(t)-u_۱(t)g(t-۱)$ که در آن g در قسمت (ب) تعریف‌شده است. نمودار $y=h(t)$ را رسم کنید و $\mathcal{L}\{h(t)\}$ را به‌دست بیاورید.

۴۰. تابع p را که با

$$p(t)=\begin{cases}t, & ۰\leq t<۱\\ ۲-t, & ۱\leq t<۲\end{cases}$$

$$p(t+۲)=p(t)$$

تعریف شده در نظر بگیرید.

الف) نمودار $y = p(t)$ را رسم کنید.

ب) $\mathcal{L}\{p(t)\}$ را با توجه به اینکه p توسیع تناوبی تابع h در مسئلهٔ ۳۹ (ج) است و مسئلهٔ ۳۴ پیدا کنید.

ج) $\mathcal{L}\{p(t)\}$ را با توجه به اینکه

$$p(t) = \int_0^t f(t)dt$$

که در آن f تابع تعریف‌شده در مسئلهٔ ۳۶ است و استفاده از قضیهٔ ۱.۲.۶ بیابید.

۴.۶ معادلات دیفرانسیل با تابع نیروی ناپیوسته

در این بخش به چند مثال می‌پردازیم که در آنها جملهٔ غیرهمگن، یا تابع نیرو، ناپیوسته است.

مثال ۱

جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$2y'' + y' + 2y = g(t) \tag{1}$$

را که در آن

$$g(t) = u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 1, & 5 \le t < 20 \\ 0, & 0 \le t < 5, \quad t \ge 20 \end{cases} \tag{2}$$

به‌دست بیاورید. فرض کنید که شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{3}$$

این مسئله مدل شارژ خازن در مدار سادهٔ الکتریکی‌ای با پالس ولتاژ واحد به‌ازای $5 \le t < 20$ است. به‌طور معادل، y می‌تواند عکس‌العمل نوسانگر میرایی تحت نیروی اعمال شدهٔ $g(t)$ باشد. تبدیل لاپلاس معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$2s^2Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \mathcal{L}\{u_5(t)\} - \mathcal{L}\{u_{20}(t)\}$$
$$= \frac{(e^{-5s} - e^{-20s})}{s}.$$

با قرار دادن شرایط اولیهٔ (۳) و حل برحسب $Y(s)$ نتیجه می‌شود

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)}. \tag{4}$$

برای یافتن $y = \phi(t)$، بهتر است که $Y(s)$ را به‌صورت

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-20s})H(s) \tag{5}$$

بنویسیم که در آن

$$H(s) = \frac{1}{s(2s^2 + s + 2)}. \tag{6}$$

در این‌صورت، اگر $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$،

$$y = \phi(t) = u_5(t)h(t-5) - u_{20}(t)h(t-20). \tag{7}$$

توجه کنید که از قضیهٔ ۱.۳.۶ برای نوشتن تبدیلهای معکوس $e^{-5s}H(s)$ و $e^{-20s}H(s)$ استفاده کرده‌ایم. درنهایت، برای تعیین $h(t)$ از تجزیهٔ $H(s)$ به کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود

$$H(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{2s^2 + s + 2}. \tag{8}$$

با تعیین ضرایب به‌دست می‌آید که $a = 1/2$، $b = -1$ و $c = -1/2$. پس

$$H(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{s + 1/2}{2s^2 + s + 2}$$
$$= \frac{1/2}{s} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(s + 1/4) + 1/4}{(s + 1/4)^2 + 15/16} \tag{9}$$

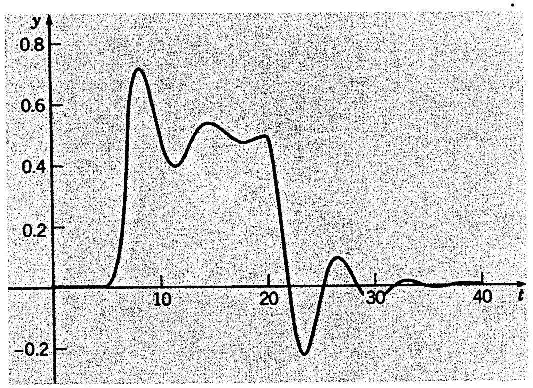
که با رجوع به سطرهای ۹ و ۱۰ جدول ۱.۲.۶ نتیجه می‌شود

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[e^{-t/4}\cos\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right)e^{-t/4}\sin\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right)\right]. \tag{10}$$

در شکل ۱.۴.۶ نمودار $y = \phi(t)$ از معادله‌های (۷) و (۱۰) نشان می‌دهد که جواب شامل سه بخش متمایز است. به‌ازای $0 < t < 5$ معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$2y'' + y' + 2y = 0 \tag{11}$$

و شرایط اولیه طبق معادلهٔ (۳) داده شده‌اند. چون شرایط اولیه انرژی‌ای به سیستم وارد نمی‌کنند و هیچ نیروی خارجی‌ای وجود ندارد، سیستم در سکون باقی می‌ماند؛ یعنی به‌ازای $0 < t < 5$، $y = 0$. این را می‌توان با حل معادلهٔ (۱۱) تحت



شکل ۱.۴.۶ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱)، (۲)، (۳).

شرایط اولیهٔ (۳) تأیید کرد. بویژه با محاسبهٔ جواب و مشتق آن در $t = ۵$ (یا دقیق‌تر، وقتی t از پایین به ۵ میل کند) نتیجه می‌شود

$$y(۵) = ۰, \quad y'(۵) = ۰. \qquad (۱۲)$$

اگر $t > ۵$، معادلهٔ دیفرانسیل تبدیل می‌شود به

$$۲y'' + y' + ۲y = ۱ \qquad (۱۳)$$

که جواب آن مجموع یک ثابت (پاسخ به تابع ثابت نیرو) و یک نوسان میرا (جواب معادلهٔ همگن متناظر) است. نمودار شکل ۱.۴.۶ در بازهٔ $۵ \le t \le ۲۰$ این رفتار را به‌وضوح نشان می‌دهد. برای این بخش جواب می‌توان با حل معادلهٔ دیفرانسیل (۱۳) تحت شرایط اولیهٔ (۱۲) عبارتی یافت. درنهایت به‌ازای $t > ۲۰$ معادلهٔ دیفرانسیل مجدداً همان معادلهٔ (۱۱) می‌شود و شرایط اولیه با محاسبهٔ جواب معادله‌های (۱۳) و (۱۲) و مشتق آن در $t = ۲۰$ به‌دست می‌آیند. این مقادیر عبارت‌اند از

$$y(۲۰) \cong ۰٫۵۰۱۶۲, \quad y'(۲۰) \cong ۰٫۰۱۱۲۵. \qquad (۱۴)$$

مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۱) و (۱۴) شامل نیروی خارجی‌ای نیست، بنابراین همان‌طورکه در شکل ۱.۴.۶ می‌توان دید، جواب آن نوسان میرایی حول $y = ۰$ است.

هرچند شاید تصور جواب نشان داده‌شده در شکل ۱.۴.۶ به‌صورت ترکیبی از جوابهای سه مسئلهٔ مقدار اولیه در سه بازهٔ جداگانه مفید باشد، یافتن جواب با حل این سه مسئلهٔ جداگانه کسل‌کننده است. روش تبدیل لاپلاس روشی مناسب‌تر و ظریف‌تر برای این مسئله و مسئله‌های مشابهی که تابع نیروی ناپیوسته دارند به‌دست می‌دهد.

اثر ناپیوستگی تابع نیرو را می‌توان با بررسی دقیق‌تر جواب $\phi(t)$ در مثال ۱ دید. طبق قضیهٔ وجود و یکتایی ۱.۲.۳، جواب ϕ و دو مشتق اول آن جز احتمالاً در نقاط $t = ۵$ و $t = ۲۰$ که g در آنها ناپیوسته است، پیوسته هستند. این را می‌توان بلافاصله از معادلهٔ (۷) دید. همچنین می‌توان با محاسبهٔ مستقیم از معادلهٔ (۷) نشان داد که ϕ و ϕ' حتی در $t = ۵$ و $t = ۲۰$ پیوسته هستند. اما اگر ϕ'' را محاسبه کنیم می‌بینیم که

$$\lim_{t \to ۵-} \phi''(t) = ۰, \quad \lim_{t \to ۵+} \phi''(t) = ۱/۲;$$

در نتیجه $\phi''(t)$ در $t = ۵$ پرشی به اندازهٔ ۱/۲ دارد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که $\phi''(t)$ در $t = ۲۰$ پرشی به اندازهٔ ۱/۲− دارد. پس پرش در جملهٔ نیروی $g(t)$ در این نقطه‌ها با پرش در جملهٔ با بالاترین مرتبهٔ $۲y''$ در طرف چپ معادله مساوی شده است.

اکنون معادلهٔ کلی مرتبهٔ دوم خطی

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (۱۵)$$

را در نظر بگیرید که در آن p و q در بازه‌ای مثل $\alpha < t < \beta$ پیوسته هستند، اما g در آنجا قطعه‌به‌قطعه پیوسته است. اگر $y = \psi(t)$ جواب معادلهٔ ۱۵ باشد، ψ و ψ' بر $\alpha < t < \beta$ پیوسته هستند، اما ψ'' در همان نقاطی که g ناپیوسته است ناپیوستگی پرشی دارد. برای معادله‌های از مرتبهٔ بالاتر هم همین موضوع برقرار است. بالاترین درجهٔ مشتق جواب که در معادله ظاهر می‌شود در همان نقاطی که تابع نیرو ناپیوسته است ناپیوستگی پرشی دارد، اما خود جواب و مشتقات مرتبهٔ پایین‌تر آن حتی در آن نقطه‌ها هم پیوسته هستند.

مثال ۲

ماهیت کیفی جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' + ۴y = g(t), \qquad (۱۶)$$

$$y(۰) = ۰, \quad y'(۰) = ۰ \qquad (۱۷)$$

را که در آن

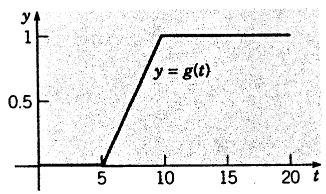
$$g(t) = \begin{cases} ۰, & ۰ \le t < ۵ \\ (t-۵)/۵, & ۵ \le t < ۱۰ \\ ۱, & t \ge ۱۰ \end{cases} \qquad (۱۸)$$

توصیف کنید و سپس جواب را بیابید.

در این مثال تابع نیرو نموداری دارد که در شکل ۲.۴.۶ نشان داده شده است و به شیب بار معروف است. به‌سادگی می‌توان جملهٔ عمومی جواب را پیدا کرد. به‌ازای $t < ۵$ جواب همان $y = ۰$ است. از طرف دیگر، به‌ازای $t > ۱۰$ جواب به شکل

$$y = c_۱ \cos ۲t + c_۲ \sin ۲t + \frac{۱}{۴} \qquad (۱۹)$$

است. ثابت ۱/۴ جواب خاص معادلهٔ غیرهمگن است و دو جملهٔ دیگر آن جواب عمومی معادلهٔ همگن متناظرند. پس جواب (۱۹) تنها نوسان همسازی حول $y = ۱/۴$ است. به همین ترتیب، در بازهٔ میانی $۵ < t < ۱۰$، جواب نوسانی حول یک تابع خطی معین است. در مسئله‌های مهندسی ممکن است بخواهیم دامنهٔ نهایی جواب نوسانی مانا را پیدا کنیم.



شکل ۲.۴.۶ شیب بار؛ $y = g(t)$ در معادلهٔ (۱۸).

برای حل مسئله، می‌توانیم بنویسیم

$$g(t) = \frac{[u_۵(t)(t-۵) - u_{۱۰}(t)(t-۱۰)]}{۵} \qquad (۲۰)$$

که به‌سادگی می‌توانید درستی آن را تحقیق کنید. سپس تبدیل لاپلاس معادله را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از شرایط اولیه نتیجه می‌شود

$$(s^۲+۴)Y(s) = \frac{(e^{-۵s} - e^{-۱۰s})}{۵s^۲}$$

یا

$$Y(s) = \frac{(e^{-۵s} - e^{-۱۰s})H(s)}{۵} \qquad (۲۱)$$

که در آن

$$H(s) = \frac{۱}{s^۲(s^۲+۴)}; \qquad (۲۲)$$

پس جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۶)، (۱۷)، (۱۸) عبارت است از

$$y=\phi(t)=\frac{[u_5(t)h(t-5)-u_{10}(t)h(t-10)]}{5} \qquad (۲۳)$$

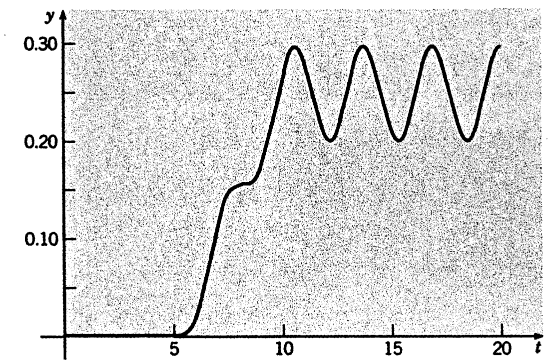
که در آن $h(t)$ تبدیل معکوس $H(s)$ است. تجزیهٔ $H(s)$ به کسرهای جزئی عبارت است از

$$H(s)=\frac{1/4}{s^2}-\frac{1/4}{s^2+4}; \qquad (۲۴)$$

بنابراین از سطرهای ۳ و ۵ جدول ۱.۲.۶ نتیجه می‌شود که

$$h(t)=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t. \qquad (۲۵)$$

نمودار $y=\phi(t)$ را در شکل ۳.۴.۶ نشان داده‌ایم. توجه کنید که شکل کیفی جواب همان‌طور است که قبلاً به آن اشاره کردیم. برای یافتن دامنهٔ نهایی نوسان مانا، کافی است که یکی از نقاط ماکزیمم و یا مینیمم را به‌ازای $t>10$ مشخص کنیم. با صفر قرار دادن مشتق جواب (۲۳)، متوجه می‌شویم که اولین ماکزیمم تقریباً در $(10.642, 0.2979)$ قرار دارد، بنابراین دامنهٔ نوسان تقریباً 0.0479 است.



شکل ۳.۴.۶ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۶)، (۱۷)، (۱۸).

توجه کنید که در این مثال تابع نیروی g پیوسته است، اما g' در $t=5$ و $t=10$ ناپیوسته است؛ در نتیجه جواب ϕ و دو مشتق اول آن همه‌جا پیوسته هستند، اما ϕ''' در $t=5$ و $t=10$ ناپیوسته است تا بر ناپیوستگی g' در این نقطه‌ها منطبق شود.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۳،

الف) جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را بیابید.

ب) نمودار جواب و تابع نیرو را رسم کنید و توضیح بدهید که چه ربطی به هم دارند.

۱. $y''+y=f(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$؛ $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<3\pi\\ 0, & 3\pi\le t<\infty\end{cases}$

۲. $y''+2y'+2y=h(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$؛ $h(t)=\begin{cases}2, & \pi\le t<2\pi\\ 0, & 0\le t<\pi,\ t\ge 2\pi\end{cases}$

۳. $y''+4y=\sin t-u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=0$

۴. $y''+4y=\cos t+u_{\pi}(t)\cos(t-\pi)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=0$

۵. $y''+3y'+2y=f(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=0$؛ $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<10\\ 0, & t\ge 10\end{cases}$

۶. $y''+y=u_{3\pi}(t)$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=0$

۷. $y''+3y'+2y=u_2(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$

۸. $y''+y'+\frac{5}{4}y=t-u_{\pi/2}(t)(t-\pi/2)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=0$

۹. $y''+y=g(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$؛ $g(t)=\begin{cases}t/2, & 0\le t<6\\ 3, & t\ge 6\end{cases}$

۱۰. $y''+y'+\frac{5}{4}y=g(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=0$؛ $g(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t<\pi\\ 0, & t\ge \pi\end{cases}$

۱۱. $y''+4y=u_{\pi}(t)-u_{3\pi}(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=0$

۱۲. $y^{(4)}+5y''+4y=1-u_{\pi}(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=0$، $y''(0)=0$، $y'''(0)=0$

۱۳. $y^{(4)}-y=u_1(t)-u_2(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=0$، $y''(0)=0$، $y'''(0)=0$

۱۴. عبارتی شامل $u_c(t)$ برای تابعی مثل f بیابید که مقدار آن از صفر در $t=t_0$ با شیب ثابت به مقدار h در $t=t_0+k$ برسد.

۱۵. عبارتی شامل $u_c(t)$ برای تابعی مثل g بیابید که مقدار آن از صفر در $t=t_0$ با شیب ثابت به مقدار h در $t=t_0+k$ برسد و سپس با شیب ثابت مقدار آن در $t=t_0+2k$ به صفر برسد.

۱۶. یک دستگاه معین فنر-وزنه در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$u''+\frac{1}{4}u'+u=kg(t), \qquad u(0)=0, \qquad u'(0)=0$$

صدق می‌کند که در آن $g(t)=u_{3/2}(t)-u_{5/2}(t)$ و $k>0$ پارامتر است.

الف) نمودار $g(t)$ را رسم کنید. توجه کنید که $g(t)$ پالسی با اندازهٔ واحد است که در واحد زمان گسترش می‌یابد.

ب) مسئلهٔ مقدار اولیه را حل کنید.

ج) جواب را به‌ازای $k=1/2$، $k=1$ و $k=2$ رسم کنید. ویژگیهای اصلی جواب و چگونگی بستگی آن به k را تشریح کنید.

د) تا دو رقم اعشار دقت، کوچک‌ترین مقدار k را بیابید که به‌ازای آن جواب $u(t)$ به ۲ می‌رسد.

ه) فرض کنید $k=2$. زمان τ را طوری بیابید که پس از آن به‌ازای $t>\tau$، $|u(t)|<0.1$.

۱۷. مسئلهٔ مثال ۲ این بخش را با جایگزینی تابع نیروی دادهٔ شدهٔ $g(t)$ با

$$f(t)=\frac{[u_5(t)(t-5)-u_{5+k}(t)(t-5-k)]}{k}$$

اصلاح کنید.

الف) نمودار $f(t)$ را رسم کنید و چگونگی بستگی آن به k را تشریح کنید. به‌ازای کدام مقدار k، $f(t)$ با $g(t)$ در مثال یکسان است؟

ب) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+4y=f(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

را حل کنید.

ج) جواب قسمت (ب) به k بستگی دارد، اما به‌ازای tهای به اندازهٔ کافی بزرگ، جواب همواره نوسان همساز ساده‌ای حول $y=1/4$ است. سعی کنید که حدس بزنید این نوسان نهایی چگونه به k بستگی دارد. سپس نتیجه را با رسم جواب به‌ازای چند مقدار k تأیید کنید.

۱۸. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+\frac{1}{3}y'+4y=f_k(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

را در نظر بگیرید که در آن $0<k<4$ و

$$f_k(t)=\begin{cases}1/2k, & 4-k\le t<4+k\\ 0, & 0\le t<4-k,\quad t\ge 4+k\end{cases}$$

الف) نمودار $f_k(t)$ را رسم کنید. توجه کنید که ناحیهٔ تحت نمودار مستقل از k است. اگر $f_k(t)$ نیرو را نمایش بدهد، این موضوع یعنی اندازهٔ نیرو و بازهٔ زمانی‌ای که نیرو در آن عمل می‌کند به k بستگی ندارد.

ب) $f_k(t)$ را برحسب تابع پله‌ای یکه بنویسید و سپس مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را حل کنید.

ج) نمودار جواب را به‌ازای $k=2$، $k=1$ و $k=1/2$ رسم کنید. چگونگی بستگی جواب به k را تشریح کنید.

تشدید و ضربان. در بخش ۸.۳ دیدیم که در نوسانگر همساز غیرمیرا (مانند دستگاه فنر-وزنه) با جملهٔ نیروی سینوسی، تشدید اتفاق می‌افتد اگر بسامد جملهٔ نیرو مانند بسامد طبیعی باشد. اگر بسامد نیرو کمی متفاوت از بسامد طبیعی باشد، در دستگاه ضربان رخ می‌دهد. در مسئله‌های ۱۹ تا ۲۳، اثر بعضی از تابعهای نیروی تناوبی غیرسینوسی را بررسی می‌کنیم.

۱۹. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+y=f(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

را در نظر بگیرید که در آن

$$f(t)=u_0(t)+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t).$$

الف) نمودار $f(t)$ را روی بازه‌ای مانند $0\le t\le 6\pi$ رسم کنید.

ب) جواب مسئلهٔ مقدار اولیه را بیابید.

ج) فرض کنید $n=15$ و نمودار جواب را به‌ازای $0\le t\le 60$ رسم کنید. جواب را توصیف کنید و توضیح بدهید که چرا جواب به این‌صورت رفتار می‌کند.

د) چگونگی تغییر جواب را با افزایش n بررسی کنید. وقتی $n\to\infty$ چه اتفاقی می‌افتد؟

۲۰. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+0.1y'+y=f(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

را در نظر بگیرید که در آن $f(t)$ مانند مسئلهٔ ۱۹ است.

الف) نمودار جواب را رسم کنید. n را به اندازهٔ کافی بزرگ و بازهٔ زمانی t را به اندازهٔ کافی طولانی انتخاب کنید تا بخش گذرای جواب قابل چشم‌پوشی بشود و جواب تعادلی به‌وضوح معلوم شود.

ب) دامنه و بسامد بخش تعادلی جواب را تخمین بزنید.

ج) نتایج بخش (ب) را با نتایج بخش ۸.۳ برای نوسانگرهای سینوسی واداشته مقایسه کنید.

۲۱. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+y=g(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

را در نظر بگیرید که در آن

$$g(t)=u_0(t)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t).$$

الف) نمودار $g(t)$ را روی بازه‌ای مانند $0\le t\le 6\pi$ رسم کنید. نمودار را با نمودار $f(t)$ در مسئلهٔ ۱۹ (الف) مقایسه کنید.

ب) جواب مسئلهٔ مقدار اولیه را بیابید.

ج) فرض کنید $n=15$ و نمودار جواب را به‌ازای $0\le t\le 60$ رسم کنید. جواب را توصیف کنید و توضیح بدهید که چرا رفتار آن چنین است. آن را با جواب مسئلهٔ ۱۹ مقایسه کنید.

د) تحقیق کنید که با اضافه شدن n، جواب چگونه تغییر می‌کند. اگر $n\to\infty$ چه می‌شود؟

۲۲. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+0.1y'+y=g(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

را در نظر بگیرید که در آن $g(t)$ مانند مسئلهٔ ۲۱ است.

الف) نمودار جواب را رسم کنید. n را به اندازهٔ کافی بزرگ و بازهٔ t را به اندازهٔ کافی طولانی انتخاب کنید که بخش گذرای جواب قابل چشم‌پوشی بشود و جواب تعادلی به‌وضوح معلوم شود.

ب) دامنه و بسامد قسمت تعادلی جواب را تخمین بزنید.

ج) نتایج بخش (ب) را با نتایج مسئلهٔ ۲۰ و بخش ۸.۳ برای نوسانگرهای سینوسی واداشته مقایسه کنید.

۲۳. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+y=h(t), \qquad y(0)=0, \qquad y'(0)=0$$

را در نظر بگیرید که در آن

$$f(t)=u_0(t)+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{11k/4}(t).$$

توجه کنید که این مسئله همان مسئلهٔ ۱۹ است که در آن بسامد جملهٔ نیرو کمی افزایش یافته است.

الف) جواب مسئلهٔ مقدار اولیه را به‌دست بیاورید.

ب) فرض کنید $n \geq 33$ و نمودار جواب را به‌ازای $0 \leq t \leq 90$ یا طولانی‌تر رسم کنید. نمودار باید به‌وضوح ضربان قابل تشخیصی را نشان بدهد.

ج) با استفاده از نمودار قسمت (ب) «دورهٔ تناوب آهسته» و «دورهٔ تناوب سریع» این نوسانگر را تخمین بزنید.

د) در بخش ۸.۳ نشان دادیم که «بسامد آهستهٔ» نوسانگر واداشتهٔ سینوسی برابر است با $|\omega-\omega_0|/2$ که در آن ω_0 بسامد طبیعی دستگاه است و ω بسامد نیرو است. به همین ترتیب، «بسامد سریع» $(\omega+\omega_0)/2$ است. با استفاده از این عبارتها، دورهٔ تناوب سریع و «دورهٔ تناوب آهسته» را برای نوسانگر این مسئله محاسبه کنید. نتیجه را با تخمینهای بخش (ج) مقایسه کنید.

۵.۶ تابع ضربه

گاهی با پدیده‌هایی سروکار داریم که به‌طور ناگهانی رخ می‌دهند؛ به‌عنوان مثال، ولتاژ یا نیروهایی با اندازهٔ بزرگ که در بازه‌های زمانی کوتاه عمل می‌کنند از این نوع‌اند. چنین مسئله‌هایی اغلب منجر به معادله‌هایی به شکل

$$ay''+by'+cy=g(t) \tag{1}$$

می‌شوند که در آن $g(t)$ در بازهٔ زمانی کوتاهی مانند $t_0-\tau<t<t_0+\tau$ بزرگ است و در غیر این‌صورت صفر است. انتگرال $I(\tau)$ که با

$$I(\tau)=\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)dt \tag{2}$$

تعریف می‌شود، یا چون در خارج بازهٔ $(t_0-\tau, t_0+\tau)$، $g(t)=0$، می‌توان آن را به‌صورت

$$I(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt \tag{3}$$

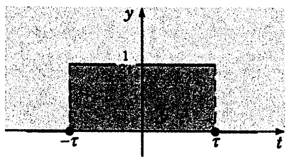
نوشت، اندازهٔ قدرت تابع نیرو است. در دستگاه مکانیکی‌ای که $g(t)$ نیروی آن است، $I(\tau)$ کل ضربهٔ نیروی $g(t)$ روی بازهٔ زمانی $(t_0-\tau, t_0+\tau)$ است. به همین ترتیب، اگر y جریان یک مدار الکتریکی و $g(t)$ مشتق ولتاژ نسبت به زمان باشد، $I(\tau)$ کل ولتاژ وارد شده در طول بازهٔ $(t_0-\tau, t_0+\tau)$ را نشان می‌دهد.

به‌ویژه فرض کنید که t_0 صفر است و $g(t)$ با

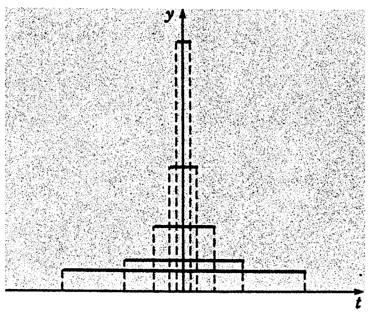
$$g(t)=d_\tau(t)=\begin{cases} 1/2\tau, & -\tau<t<\tau \\ 0, & t\leq -\tau \text{ یا } t\geq \tau \end{cases} \tag{4}$$

تعریف شده که در آن τ ثابت مثبت کوچکی است (شکل ۱.۵.۶ را ببینید). از معادلهٔ (۲) یا (۳) بلافاصله نتیجه می‌شود که در این حالت، تا زمانی که $\tau \neq 0$، مستقل از مقدار τ، $I(\tau)=1$. اکنون با فرض اینکه تابع نیروی d_τ در بازه‌های زمانی کوتاه و کوتاه‌تر عمل می‌کند آن را به‌صورت ایده‌آلش در نظر می‌گیریم، یعنی همان‌طور که در شکل ۲.۵.۶ می‌توان دید، الزام می‌کنیم که $\tau \to 0$. به این ترتیب نتیجه می‌شود

$$\lim_{\tau\to 0} d_\tau(t)=0, \qquad t\neq 0. \tag{5}$$



شکل ۱.۵.۶ نمودار $y=d_\tau(t)$.



شکل ۲.۵.۶ نمودار $y=d_\tau(t)$ وقتی $\tau \to 0$.

به‌علاوه، چون به‌ازای هر $\tau \neq 0$، $I(\tau)=1$، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\tau\to 0} I(\tau)=1. \tag{6}$$

از معادله‌های (۵) و (۶) برای تعریف **تابع ضربهٔ یکهٔ** ایده‌آل شدهٔ δ استفاده می‌کنیم. این تابع در $t=0$ ضربه‌ای با اندازهٔ واحد وارد کرده، اما به‌ازای مقادیر ناصفر t برابر صفر است. یعنی «تابع» δ با

$$\delta(t)=0, \qquad t\neq 0; \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \tag{8}$$

تعریف می‌شود. هیچ تابع عادی از نوعی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال بررسی می‌شود وجود ندارد که در هر دو معادلهٔ (۷) و (۸) صدق کند. «تابع» δ که با این معادله‌ها تعریف شده است، مثالی از چیزهایی است که به تابعهای تعمیم‌یافته معروف‌اند؛ معمولاً به این تابع **تابع دلتای دیراک**[1] می‌گوییم. چون $\delta(t)$ متناظر ضربهٔ واحدی در $t=0$ است، ضربهٔ واحد در نقطهٔ دلخواه $t=t_0$ با $\delta(t-t_0)$ مشخص می‌شود. از معادله‌های (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که

$$\delta(t-t_0)=0, \qquad t\neq t_0; \tag{۹}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1. \tag{۱۰}$$

تابع دلتا در شرایط قضیهٔ ۲.۱.۶ صدق نمی‌کند؛ اما می‌توان به‌طور صوری تبدیل لاپلاس آن را تعریف کرد. چون $\delta(t)$ به‌صورت حد $d_\tau(t)$ وقتی $\tau\to 0$ تعریف شده است، طبیعی است که تبدیل لاپلاس δ را هم به‌صورت حد تبدیل d_τ تعریف کنیم. به‌ویژه فرض می‌کنیم که $t_0>0$ و $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}$ را با معادلهٔ

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=\lim_{\tau\to 0}\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} \tag{۱۱}$$

تعریف می‌کنیم. برای محاسبهٔ حد معادلهٔ (۱۱)، ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $\tau<t_0$، که اگر $\tau\to 0$ درنهایت چنین خواهد شد، باید $t_0-\tau>0$. چون $d_\tau(t-t_0)$ فقط در بازهٔ $t_0-\tau$ تا $t_0+\tau$ ناصفر است، نتیجه می‌شود

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}d_\tau(t-t_0)\,dt$$
$$=\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}e^{-st}d_\tau(t-t_0)\,dt.$$

با قرار دادن $d_\tau(t-t_0)$ از معادلهٔ (۴) نتیجه می‌شود

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}=\frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}e^{-st}\,dt=-\frac{1}{2s\tau}e^{-st}\Big|_{t=t_0-\tau}^{t=t_0+\tau}$$
$$=\frac{1}{2s\tau}e^{-st_0}\left(e^{s\tau}-e^{-s\tau}\right)$$

یا

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}=\frac{\sinh s\tau}{s\tau}e^{-st_0}, \tag{۱۲}$$

۱. پاول اِی. اِم. دیراک (۱۹۰۲-۱۹۸۴م) ریاضی‌فیزیکدان انگلیسی، دکترایش را در ۱۹۲۶ میلادی از کمبریج گرفت و تا ۱۹۶۹ استاد ریاضیات آنجا بود. او در ۱۹۳۳ میلادی (به همراه اروین شرودینگر) جایزهٔ نوبل را برای کارهای بنیادیش در مکانیک کوانتم دریافت کرد. مهم‌ترین دستاوردش معادلهٔ نسبیتی برای الکترون بود که در ۱۹۲۸ میلادی منتشر شد. او با استفاده از این معادله وجود «ضد الکترون» یا پوزیترون را پیش‌بینی کرد که در ۱۹۳۲ میلادی برای اولین‌بار مشاهده شد. پس از بازنشستگی از کمبریج، دیراک به آمریکا رفت و در دانشگاه فلوریدا استاد پژوهشی شد.

وقتی $\tau\to 0$، نسبت $(\sinh s\tau)/s\tau$ مبهم است، اما حد آن را می‌توان با قاعدهٔ هوپیتال محاسبه کرد که برابر است با

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\sinh s\tau}{s\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{s\cosh s\tau}{s}=1;$$

بنابراین از معادلهٔ (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}. \tag{۱۳}$$

معادلهٔ (۱۳) $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}$ را به‌ازای هر $t_0>0$ تعریف می‌کند. این نتیجه را با میل دادن t_0 به صفر در طرف راست معادلهٔ (۱۳) تعمیم می‌دهیم تا t_0 بتواند مقدار صفر را اختیار کند؛ پس

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=\lim_{t_0\to 0}e^{-st_0}=1. \tag{۱۴}$$

به همین ترتیب می‌توان انتگرال حاصلضرب تابع دلتا و هر تابع پیوسته مانند f را تعریف کرد. می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=\lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt. \tag{۱۵}$$

با استفاده از تعریف (۴) برای $d_\tau(t)$ و قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها نتیجه می‌شود

$$\int_{-\infty}^{\infty}d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt=\frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}f(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau\cdot f(t^*)=f(t^*)$$

که در آن $t_0-\tau<t^*<t_0+\tau$. بنابراین وقتی $\tau\to 0$، $t^*\to t_0$ و از معادلهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=f(t_0). \tag{۱۶}$$

در مثال زیر استفاده از تابع دلتا را در حل مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای با تابع نیروی ضربه‌ای نشان داده‌ایم.

مثال ۱

جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$2y''+y'+2y=\delta(t-5) \tag{۱۷}$$

$$y(0)=0, \qquad y'(0)=0 \tag{۱۸}$$

را به‌دست بیاورید.

این مسئلهٔ مقدار اولیه در مطالعهٔ همان مدار الکتریکی یا نوسانگر مکانیکی‌ای ظاهر می‌شود که در مثال ۱ بخش ۴.۶ دیدیم. تنها تفاوت، جملهٔ نیرو است.

برای حل مسئلهٔ داده‌شده، تبدیل لاپلاس معادلهٔ دیفرانسیل را حساب می‌کنیم و از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم و به

$$(2s^2+s+2)Y(s)=e^{-5s}$$

می‌رسیم. پس

$$Y(s) = \frac{e^{-۵s}}{۲s^۲+s+۲} = \frac{e^{-۵s}}{۲}\,\frac{۱}{(s+۱/۴)^۲+۱۵/۱۶}. \qquad (۱۹)$$

طبق قضیهٔ ۲.۳.۶ و یا از سطر ۹ جدول ۱.۲.۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{(s+۱/۴)^۲+۱۵/۱۶}\right\} = \frac{۴}{\sqrt{۱۵}}e^{-t/۴}\sin\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}t; \qquad (۲۰)$$

بنابراین از قضیهٔ ۱.۳.۶ نتیجه می‌شود

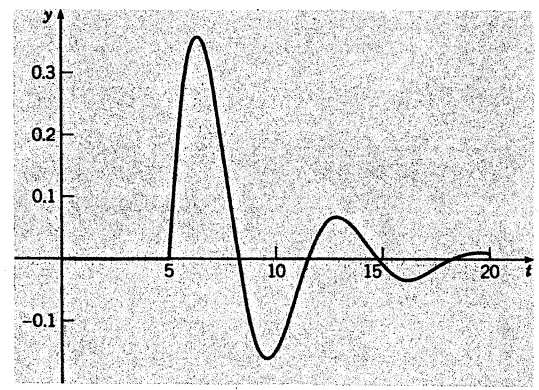
$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{۲}{\sqrt{۱۵}}u_۵(t)e^{-(t-۵)/۴}\sin\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}(t-۵) \qquad (۲۱)$$

که جواب صوری مسئلهٔ داده‌شده است. می‌توانیم y را به‌صورت

$$y = \begin{cases} ۰, & t<۵ \\ \frac{۲}{\sqrt{۱۵}}e^{-(t-۵)/۴}\sin\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}(t-۵), & t\geq ۵ \end{cases} \qquad (۲۲)$$

هم بنویسیم.

نمودار معادلهٔ (۲۲) را در شکل ۳.۵.۶ نشان داده‌ایم. چون شرایط اولیه در $t=۰$ همگن هستند و تا $t=۵$ نیروی محرک خارجی وجود ندارد، در بازهٔ $۰<t<۵$ پاسخی وجود ندارد. ضربه در $t=۵$ نوسان میرایی تولید می‌کند که تا بینهایت باقی می‌ماند. پاسخ با وجود تکینگی تابع نیرو در $t=۵$ در آن نقطه پیوسته است؛ اما مشتق اول جواب در $t=۵$ ناپیوستگی پرشی دارد و مشتق دوم در آن نقطه ناپیوستگی بینهایت دارد. با توجه به معادلهٔ دیفرانسیل (۱۷) این امر ضروری است، چون تکینگی در یک طرف معادله باید با تکینگی متناظر در طرف دیگر متعادل شود.



شکل ۳.۵.۶ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۱۷) و (۱۸).

استفاده از تابع دلتا در بررسی مسئله‌هایی با نیروی ضربه معمولاً محاسبات ریاضی را به‌طور قابل توجهی ساده می‌کند. اما اگر تحریک واقعی بر بازهٔ کوتاه اما غیرصفر ادامه پیدا کند، با مدل کردن تحریک به‌صورت تحریک

ناگهانی خطایی رخ می‌دهد. این خطا ممکن است قابل چشم‌پوشی باشد، اما در مسئله‌های عملی نباید آن را بدون بررسی کنار بگذاریم. در مسئلهٔ ۱۶ از شما خواسته‌ایم این مسئله را برای یک نوسانگر ساده بررسی کنید.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۲،

الف) جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را بیابید.

ب) نمودار جواب را رسم کنید.

۱. $y''+۲y'+۲y=\delta(t-\pi)$؛ $y(۰)=۱$، $y'(۰)=۰$

۲. $y''+۴y=\delta(t-\pi)-\delta(t-۳\pi)$؛ $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۰$

۳. $y''+۳y'+۲y=\delta(t-۵)+u_{۱۰}(t)$؛ $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۱/۲$،

۴. $y''-y=-۵\delta(t-۳)$؛ $y(۰)=۱$، $y'(۰)=۰$

۵. $y''+۲y'+۳y=\sin t+\delta(t-۳\pi)$؛ $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۰$

۶. $y''+۴y=\delta(t-۲\pi)$؛ $y(۰)=۱/۲$، $y'(۰)=۰$

۷. $y''+y=\delta(t-۲\pi)\cos t$؛ $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۱$

۸. $y''+۴y=۲\delta(t-\pi/۴)$؛ $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۰$

۹. $y''+y=u_{\pi/۲}(t)+۲\delta(t-۳\pi/۲)-u_{۲\pi}(t)$؛ $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۰$

۱۰. $۲y''+y'+۴y=\delta(t-\pi/۶)\sin t$؛ $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۰$

۱۱. $y''+۲y'+۲y=\cos t+۳\delta(t-\pi/۲)$؛ $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۰$

۱۲. $y^{(۴)}-y=\delta(t-۱)$؛ $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۰$، $y''(۰)=۰$، $y'''(۰)=۰$

۱۳. مجدداً دستگاه مثال ۱ این بخش را در نظر بگیرید که در آن نوسان در $t=۵$ با ضربهٔ واحد تحریک می‌شود. فرض کنید می‌خواهیم دستگاه بعد از دقیقاً یک دور به حالت سکون برسد ــ یعنی وقتی پاسخ برای بار اول به حالت تعادلی رسید در جهت مثبت حرکت کند.

الف) ضربهٔ $k\delta(t-t_۰)$ را که باید برای رسیدن به این هدف به دستگاه وارد شود تعیین کنید. توجه کنید که k اندازهٔ ضربه و $t_۰$ زمان اِعمال آن است.

ب) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ حاصله را حل کنید و نمودار آن را رسم کنید که رفتاری را که از آن انتظار داریم تأیید کند.

۱۴. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+\gamma y'+y=\delta(t-۱),\qquad y(۰)=۰,\qquad y'(۰)=۰$$

را، که در آن γ ضریب میرایی (یا مقاومت) است، در نظر بگیرید.

الف) فرض کنید $\gamma=۱/۲$، جواب مسئلهٔ مقدار اولیه را پیدا کنید و نمودار آن را رسم کنید.

ب) زمان $t_۱$ را طوری بیابید که در آن جواب مقدار ماکزیمم خود را اختیار کند. همچنین مقدار ماکزیمم جواب را تعیین کنید و آن را $y_۱$ بنامید.

ج) فرض کنید $\gamma = 1/4$ و قسمت‌های (الف) و (ب) را تکرار کنید.

د) معین کنید که با کاهش γ، t_1 و y_1 چگونه تغییر می‌کنند. مقادیر t_1 و y_1 هنگامی که $\gamma = 0$ چقدر است؟

۱۵. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' + \gamma y' + y = k\delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

را در نظر بگیرید که در آن k اندازهٔ ضربه در $t = 1$ و γ ضریب میرایی (یا مقاومت) است.

الف) فرض کنید $\gamma = 1/2$. مقدار k را طوری بیابید که به‌ازای آن مقدار ماکزیمم پاسخ برابر ۲ باشد؛ این مقدار را k_1 بنامید.

ب) بخش (الف) را به‌ازای $\gamma = 1/4$ تکرار کنید.

ج) چگونگی تغییر k_1 را با کاهش γ تعیین کنید. وقتی $\gamma = 0$، مقدار k_1 چقدر است؟

۱۶. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' + y = f_k(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

را در نظر بگیرید که در آن $f_k(t) = [u_{4-k}(t) - u_{4+k}(t)]/2k$ و $0 < k \le 1$.

الف) جواب $y = \phi(t,k)$ برای مسئلهٔ مقدار اولیه را بیابید.

ب) $\lim\limits_{k\to 0} \phi(t,k)$ جواب به‌دست آمده در قسمت (الف) را محاسبه کنید.

ج) توجه کنید که $\lim\limits_{k\to 0} f_k(t) = \delta(t-4)$. جواب $\phi_0(t)$ برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را که در آن $f_k(t)$ با $\delta(t-4)$ جایگزین شده است پیدا کنید. آیا درست است که $\phi_0(t) = \lim\limits_{k\to 0} \phi(t,k)$؟

د) $\phi(t, 1/2)$، $\phi(t, 1/4)$ و $\phi_0(t)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. رابطهٔ بین $\phi(t,k)$ و $\phi_0(t)$ را تشریح کنید.

در مسئله‌های ۱۷ تا ۲۲، به بررسی اثر دنباله‌ای از ضربه‌ها روی نوسانگر غیرمیرا می‌پردازیم. فرض کنید که

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

برای $f(t)$هایی که خواهیم داد،

الف) سعی کنید که بدون حل معادله، ماهیت جواب را پیش‌بینی کنید.

ب) پیش‌بینی خود را با یافتن جواب و رسم آن آزمایش کنید.

ج) پس از اتمام دنبالهٔ ضربه‌ها چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

۱۷. $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{20} \delta(t - k\pi)$

۱۸. $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{20} (-1)^{k+1}\delta(t - k\pi)$

۱۹. $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{20} (-1)^{k+1}\delta(t - k\pi/2)$

۲۰. $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{20} \delta(t - k\pi/2)$

۲۱. $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{15} \delta[t - (2k-1)\pi]$

۲۲. $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{40} (-1)^{k+1}\delta(t - 11k/4)$

۲۳. موقعیت یک نوسانگر معین با میرایی ضعیف در مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' + 0{,}1y' + y = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1}\delta(t - k\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

صدق می‌کند. توجه کنید که جز جملهٔ میرایی، این مسئله همان مسئلهٔ ۱۸ است.

الف) سعی کنید که بدون حل معادله، ماهیت جواب را پیش‌بینی کنید.

ب) پیش‌بینی خود را با یافتن جواب و رسم آن آزمایش کنید.

ج) پس از اتمام دنبالهٔ ضربه‌ها چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

۲۴. برای نوسانگری که در

$$y'' + 0{,}1y' + y = \sum_{k=1}^{15} \delta[t - (2k-1)\pi], \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

صدق می‌کند خواسته‌های مسئلهٔ ۲۳ را انجام بدهید. توجه کنید جز جملهٔ میرایی، این مسئله همان مسئلهٔ ۲۱ است.

۲۵. الف) با روش تغییر پارامترها ثابت کنید جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'' + 2y' + 2y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

عبارت است از

$$y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) \sin(t-\tau)\, d\tau.$$

ب) ثابت کنید که اگر $f(t) = \delta(t-\pi)$، جواب بخش (الف) به‌صورت

$$y = u_\pi(t) e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi)$$

ساده می‌شود.

ج) با استفاده از تبدیل لاپلاس، مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را با $f(t) = \delta(t-\pi)$ حل کنید. آیا جواب با نتیجهٔ به‌دست آمده در (ب) تطابق دارد؟

۶.۶ انتگرال پیچش

گاهی ممکن است تابع $H(s)$ حاصلضرب دو تبدیل لاپلاس $F(s)$ و $G(s)$ باشد که به‌ترتیب متناظر تابعهای شناخته شدهٔ f و g هستند. در این حالت ممکن است تصور شود که $H(s)$ تبدیل حاصلضرب f و g است. اما این درست نیست، به‌عبارت دیگر، تبدیل لاپلاس با حاصلضرب عادی جابه‌جا نمی‌شود. اما همان‌طورکه در قضیهٔ بعد خواهیم دید، اگر «حاصلضرب تعمیم‌یافته»ای به‌صورتی مناسب تعریف شود، وضع تغییر می‌کند.

قضیهٔ ۱.۶.۶ اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ و $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}$ به‌ازای $s>a\geq 0$ موجود باشند آنگاه

$$H(s)=F(s)G(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}, \qquad s>a \qquad (1)$$

که در آن

$$h(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \qquad (2)$$

به تابع h پیچش دو تابع f و g می‌گوییم و به انتگرال‌های معادلهٔ (۲) انتگرال‌های پیچش می‌گوییم.

تساوی دو انتگرال معادلهٔ (۲) با تغییر متغیر $\xi=t-\tau$ در انتگرال اول به‌دست می‌آید. قبل از اینکه این قضیه را ثابت کنیم، چند نکته دربارهٔ انتگرال پیچش مطرح می‌کنیم. طبق این قضیه، حاصل تبدیل لاپلاس پیچش دو تابع (و نه تبدیل لاپلاس حاصلضرب معمولی آنها) برابر است با حاصلضرب تبدیلها. معمولاً، با نوشتن

$$h(t)=(f*g)(t) \qquad (3)$$

تأکید می‌کنیم که انتگرال پیچش را می‌توان «حاصلضرب تعمیم‌یافته» دانست. نماد $(f*g)(t)$ هم برای نمایش اولین انتگرال ظاهرشده در معادلهٔ (۲) بکار می‌رود.

پیچش $f*g$ بسیاری از خواص ضرب عادی را دارد. به‌عنوان مثال، نسبتاً به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که

$$f*g=g*f \qquad \text{(قانون جابه‌جایی)} \qquad (4)$$

$$f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2 \qquad \text{(قانون پخش‌پذیری)} \qquad (5)$$

$$(f*g)*h=f*(g*h) \qquad \text{(قانون انجمنی)} \qquad (6)$$

$$f*0=0*f=0 \qquad (7)$$

در معادلهٔ (۷) صفرها نشانگر عدد صفر نیستند؛ بلکه تابعی را نشان می‌دهند که مقدارش به‌ازای هر t صفر است. اثبات این خواص در تمرینها به‌عهدهٔ شما گذاشته شده است.

اما انتگرال پیچش فاقد بعضی از خواص حاصلضرب عادی است. به‌عنوان مثال، در حالت کلی $f*1$ برابر f نیست. برای دیدن این موضوع، توجه کنید که

$$(f*1)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\cdot 1 d\tau=\int_0^t f(t-\tau)d\tau.$$

اگر $f(t)=\cos t$ آنگاه

$$\begin{aligned}(f*1)(t)&=\int_0^1 \cos(t-\tau)d\tau=-\sin(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\\&=-\sin 0+\sin t\\&=\sin t.\end{aligned}$$

واضح است که در این حالت $(f*1)(t)\neq f(t)$. به همین ترتیب، ممکن است درست نباشد که $f*f$ نامنفی است (مسئلهٔ ۳ را ببینید).

انتگرال‌های پیچش در مسئله‌های مختلفی که در آنها رفتار دستگاه در زمان t علاوه بر وضعش در زمان t به گذشته‌اش هم وابسته است ظاهر می‌شوند. گاهی به دستگاههایی از این نوع سیستم‌های موروثی می‌گویند که در زمینه‌های متنوعی همچون انتقال نوترون، کشش سطحی، کشسانی و دینامیک جمعیتها رخ می‌دهند.

اکنون به اثبات قضیهٔ ۱.۶.۶ برمی‌گردیم. ابتدا توجه کنید که اگر

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)d\xi$$

و

$$G(s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)d\tau$$

آنگاه

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)d\xi\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)d\tau. \qquad (8)$$

چون تابع تحت انتگرال در انتگرال اول به متغیر انتگرال‌گیری انتگرال دوم بستگی ندارد، $F(s)G(s)$ را می‌توانیم به‌صورت انتگرال مکرر

$$\begin{aligned}F(s)G(s)&=\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)\left[\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)d\xi\right]d\tau\\&=\int_0^\infty g(\tau)\left[\int_0^\infty e^{-s(\xi+\tau)}f(\xi)d\xi\right]d\tau \qquad (9)\end{aligned}$$

بنویسیم. انتگرال اخیر را می‌توان با تغییر متغیر به شکل ساده‌تری نوشت. فرض کنید به‌ازای τ ثابت، $\xi=t-\tau$؛ در این‌صورت $d\xi=dt$ و به‌علاوه، $\xi=0$ متناظر $t=\tau$ و $\xi=\infty$ متناظر $t=\infty$ است. پس انتگرال نسبت به ξ در معادلهٔ (۹) به انتگرالی نسبت به t تبدیل می‌شود:

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty g(\tau)\left[\int_\tau^\infty e^{-st}f(t-\tau)dt\right]d\tau \qquad (10)$$

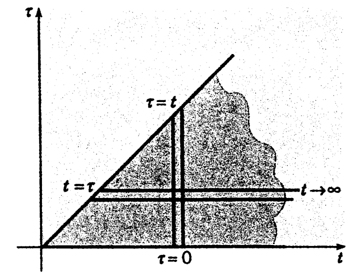
انتگرال مکرر طرف راست معادلهٔ (۱۰) روی ناحیهٔ سایه‌خورده در صفحهٔ $t\tau$ در شکل ۱.۶.۶ که تا بینهایت گسترش یافته گرفته می‌شود. با فرض اینکه می‌توانیم ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم، درنهایت نتیجه می‌شود

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]dt \qquad (11)$$

یا

$$\begin{aligned}F(s)G(s)&=\int_0^\infty e^{-st}h(t)dt\\&=\mathcal{L}\{h(t)\} \qquad (12)\end{aligned}$$

که در آن $h(t)$ با معادلهٔ (۲) تعریف شده است. این اثبات قضیهٔ ۱.۶.۶ را کامل می‌کند.



شکل ۱.۶.۶ ناحیهٔ انتگرال‌گیری در $F(s)G(s)$.

مثال ۱

تبدیل معکوس عبارت

$$H(s)=\frac{a}{s^۲(s^۲+a^۲)} \tag{۱۳}$$

را بیابید.

می‌توانیم $H(s)$ را حاصلضرب $s^{-۲}$ و $a/(s^۲+a^۲)$ ببینیم، که طبق سطرهای ۳ و ۵ جدول ۱.۲.۶ به‌ترتیب تبدیلهای t و $\sin at$ هستند. بنابراین طبق قضیهٔ ۱.۶.۶ تبدیل معکوس $H(s)$ عبارت است از

$$h(t)=\int_۰^t (t-\tau)\sin a\tau\, d\tau=\frac{at-\sin at}{a^۲}. \tag{۱۴}$$

می‌توانید تحقیق کنید که اگر $h(t)$ به‌صورت معادل

$$h(t)=\int_۰^t \tau \sin a(t-\tau)\, d\tau$$

نوشته شود هم همین نتیجه به‌دست می‌آید، که معادلهٔ (۲) را در این حالت تأیید می‌کند. البته $h(t)$ را می‌توان با تجزیه به کسرهای جزئی هم به‌دست آورد.

مثال ۲

جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y''+۴y=g(t) \tag{۱۵}$$

$$y(۰)=۳,\quad y'(۰)=-۱ \tag{۱۶}$$

را به‌دست بیاورید.

با محاسبهٔ تبدیل لاپلاس معادلهٔ دیفرانسیل و استفاده از شرایط اولیه نتیجه می‌شود

$$s^۲Y(s)-۳s+۱+۴Y(s)=G(s)$$

یا

$$Y(s)=\frac{۳s-۱}{s^۲+۴}+\frac{G(s)}{s^۲+۴}. \tag{۱۷}$$

توجه کنید که جمله‌های اول و دوم طرف راست معادلهٔ (۱۷) به‌ترتیب شامل وابستگی $Y(s)$، شرط اولیه و تابع نیرو هستند.

بهتر است که $Y(s)$ را به شکل

$$Y(s)=۳\frac{s}{s^۲+۴}-\frac{۱}{۲}\frac{۲}{s^۲+۴}+\frac{۱}{۲}\frac{۲}{s^۲+۴}G(s) \tag{۱۸}$$

بنویسیم؛ پس با استفاده از سطرهای ۵ و ۶ جدول ۱.۲.۶ و قضیهٔ ۱.۶.۶ نتیجه می‌شود

$$y=۳\cos ۲t-\frac{۱}{۲}\sin ۲t+\frac{۱}{۲}\int_۰^t \sin ۲(t-\tau)g(\tau)\,d\tau. \tag{۱۹}$$

اگر تابع نیروی مشخص g داده شود، انتگرال معادلهٔ (۱۹) را می‌توان (در صورت لزوم به‌صورت عددی) محاسبه کرد.

مثال ۲ قدرت انتگرال پیچش را به‌عنوان ابزاری برای نوشتن جواب مسئلهٔ مقدار اولیه برحسب انتگرال نشان می‌دهد. در حقیقت در مسئله‌های کلی‌تر هم می‌توان به همان نحو پیش رفت. مسئلهٔ شامل معادلهٔ دیفرانسیل

$$ay''+by'+cy=g(t) \tag{۲۰}$$

را که در آن a، b و c ثابت‌اند و g تابعی مفروض است با شرایط اولیهٔ

$$y(۰)=y_۰,\quad y'(۰)=y'_۰ \tag{۲۱}$$

در نظر بگیرید. روش تبدیل نکات مهمی را دربارهٔ ساختار جواب هر مسئله‌ای از این دست مشخص می‌کند.

معمولاً به مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۲۰)، (۲۱) مسئلهٔ ورودی-خروجی می‌گوییم. ضرایب a، b و c خواص سیستم فیزیکی را توصیف می‌کنند و $g(t)$ ورودی سیستم است. مقادیر $y_۰$ و $y'_۰$ حالت اولیه هستند و جواب y خروجی در زمان t است.

با محاسبهٔ تبدیل لاپلاس معادلهٔ (۲۰) و استفاده از شرایط اولیهٔ (۲۱) نتیجه می‌شود

$$(as^۲+bs+c)Y(s)-(as+b)y_۰-ay'_۰=G(s).$$

اگر فرض کنیم

$$\Phi(s)=\frac{(as+b)y_۰+ay'_۰}{as^۲+bs+c},\qquad \Psi(s)=\frac{G(s)}{as^۲+bs+c} \tag{۲۲}$$

آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$Y(s)=\Phi(s)+\Psi(s); \tag{۲۳}$$

در نتیجه

$$y=\phi(t)+\psi(t) \tag{۲۴}$$

که در آن $\phi(t)=\mathcal{L}^{-۱}\{\Phi(s)\}$ و $\psi(t)=\mathcal{L}^{-۱}\{\Psi(s)\}$. توجه کنید که $\phi(t)$ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$ay''+by'+cy=۰,\qquad y(۰)=y_۰,\qquad y'(۰)=y'_۰ \tag{۲۵}$$

است که با قرار دادن $g(t)$ برابر صفر از معادله‌های (۲۰) و (۲۱) به‌دست می‌آید. به همین ترتیب $\psi(t)$ جواب:

$$ay''+by'+cy=g(t), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0 \qquad (26)$$

است که در آن مقادیر اولیهٔ y_0 و y'_0 صفر فرض شده‌اند.

به محض داده شدن مقادیر مشخص به a، b و c، می‌توانیم $\phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ را با استفاده از جدول ۱.۲.۶ احتمالاً با یک انتقال و با تجزیه به کسرهای جزئی به‌دست بیاوریم. برای به‌دست آوردن $\psi(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$، بهتر است که $\Psi(s)$ را به‌صورت

$$\Psi(s)=H(s)G(s) \qquad (27)$$

بنویسیم که در آن $H(s)=(as^2+bs+c)^{-1}$. به تابع H **تابع انتقال**[1] می‌گوییم. تابع انتقال تنها به خواص سیستم تحت بررسی بستگی دارد؛ یعنی $H(s)$ کاملاً با ضریبهای a، b و c تعیین می‌شود. از طرف دیگر $G(s)$ فقط به تحریک خارجی $g(t)$ اعمال شده به دستگاه بستگی دارد. طبق قضیهٔ پیچش می‌توانیم بنویسیم

$$\psi(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)G(s)\}=\int_0^t h(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad (28)$$

که در آن $h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ و $g(t)$ تابع نیروی داده‌شده است.

برای درک بهتر اهمیت $h(t)$، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $G(s)=1$ که در نتیجه $g(t)=\delta(t)$ و $\Psi(s)=H(s)$. این یعنی $y=h(t)$ جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$ay''+by'+cy=\delta(t), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0 \qquad (29)$$

است که با قرار دادن $g(t)$ برابر $\delta(t)$ در معادلهٔ (۲۶) به‌دست آمده است. پس $h(t)$ پاسخ دستگاه به ضربهٔ واحد اعمال‌شده در $t=0$ است و طبیعی است که آن را **پاسخ ضربهٔ دستگاه** بنامیم. معادلهٔ (۲۸) بیان می‌کند که $\psi(t)$ پیچش پاسخ ضربه و تابع نیرو است.

با رجوع به مثال ۲ می‌بینیم که در آن حالت، تابع انتقال برابر $H(s)=1/(s^2+4)$ و پاسخ ضربهٔ $h(t)=(\sin 2t)/2$ است. همچنین دو جملهٔ اول طرف راست معادلهٔ (۱۹) تابع $\phi(t)$ را تشکیل می‌دهند که جواب معادلهٔ همگن متناظر است که در شرایط اولیه صدق می‌کند.

مسئله‌ها

۱. خواص جابه‌جایی، پخشی و شرکت‌پذیری انتگرال پیچش را ثابت کنید.

الف) $f*g=g*f$

ب) $f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2$

ج) $f*(g*h)=(f*g)*h$

۲. مثالی متفاوت از آنچه که در متن دیدیم بیابید که نشان بدهد $(1*f)(t)$ لزوماً برابر $f(t)$ نیست.

۱. این نام به این دلیل انتخاب شده که $H(s)$ نسبت تبدیلهای خروجی و ورودی مسئلهٔ ۲۶ است.

۳. با استفاده از مثال $f(t)=\sin t$، ثابت کنید $f*f$ لزوماً نامنفی نیست.

در هر یک از مسئله‌های ۴ تا ۷، تبدیل لاپلاس تابع داده‌شده را بیابید.

۴. $f(t)=\int_0^t (t-\tau)^2\cos 2\tau\, d\tau$

۵. $f(t)=\int_0^t (t-\tau)e^{\tau}\, d\tau$

۶. $f(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin\tau\, d\tau$

۷. $f(t)=\int_0^t \sin(t-\tau)\cos\tau\, d\tau$

در هر یک از مسئله‌های ۸ تا ۱۱، تبدیل معکوس تابع داده‌شده را با استفاده از قضیهٔ پیچش بیابید.

۸. $F(s)=\dfrac{1}{s^4(s^2+1)}$

۹. $F(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s^2+9)}$

۱۰. $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$

۱۱. $F(s)=\dfrac{G(s)}{s^2+4}$

۱۲. الف) اگر $f(t)=t^m$ و $g(t)=t^n$ که در آن m و n اعداد صحیح مثبت هستند، ثابت کنید

$$f*g=t^{m+n+1}\int_0^1 u^m(1-u)^n du.$$

ب) با استفاده از قضیهٔ پیچش ثابت کنید

$$\int_0^1 u^m(1-u)^n du=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

ج) نتیجهٔ قسمت (ب) را به حالتی تعمیم بدهید که در آن m و n اعداد مثبت و نه لزوماً صحیح هستند.

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ تا ۲۰، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را برحسب انتگرال پیچش بیان کنید.

۱۳. $y''+\omega^2 y=g(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$

۱۴. $y''+2y'+2y=\sin\alpha t$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=0$

۱۵. $4y''+4y'+17y=g(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$

۱۶. $y''+y'+\frac{5}{4}y=1-u_\pi(t)$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=-1$

۱۷. $y''+2y'+y=g(t)$؛ $y(0)=2$، $y'(0)=-3$

۱۸. $y''+3y'+2y=\cos\alpha t$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=0$

۱۹. $y^{(4)}+5y''+4y=g(t)$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=0$، $y''(0)=0$، $y'''(0)=0$

۲۰. $y^{(4)}-y=g(t)$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=0$، $y''(0)=0$، $y'''(0)=0$

۲۱. معادلهٔ

$$\phi(t)+\int_0^t k(t-\xi)\phi(\xi)d\xi=f(t)$$

را در نظر بگیرید که در آن f و k تابعهایی معلوم هستند و ϕ باید تعیین شود. چون تابع مجهول ϕ تحت انتگرال ظاهر می‌شود، معادلهٔ داده‌شده را **معادلهٔ انتگرالی** می‌گویند؛ این معادله خاص به خانواده‌ای از معادله‌های انتگرالی

متعلق است که به معادلات انتگرالی ولترا معروف است. تبدیل لاپلاس معادلهٔ انتگرالی داده‌شده را محاسبه کنید و عبارتی برای $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ برحسب تبدیلهای $\mathcal{L}\{f(t)\}$ و $\mathcal{L}\{k(t)\}$ از تابعهای مفروض f و k به‌دست بیاورید. تبدیل معکوس $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ جواب معادلهٔ انتگرالی اولیه است.

۲۲. معادلهٔ انتگرالی ولترا را در نظر بگیرید (مسئلهٔ ۲۱ را ببینید):

$$\phi(t)+\int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)d\xi = \sin 2t. \qquad \text{(i)}$$

الف) معادلهٔ انتگرالی (i) را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

ب) با دوبار مشتق گرفتن از معادلهٔ (i)، ثابت کنید $\phi(t)$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\phi''(t)+\phi(t) = -4\sin 2t$$

صدق می‌کند. همچنین ثابت کنید که شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$\phi(0)=0, \quad \phi'(0)=2.$$

ج) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ قسمت (ب) را حل کنید و تحقیق کنید که جواب همان جواب قسمت (الف) است.

در هر یک از مسئله‌های ۲۳ تا ۲۵،

الف) معادلهٔ انتگرالی ولترا را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

ب) معادلهٔ انتگرال را به مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای مانند مسئلهٔ ۲۲ (ب) تبدیل کنید.

ج) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ قسمت (ب) را حل کنید و تحقیق کنید که جواب مانند جواب قسمت (الف) است.

۲۳. $\phi(t)+2\int_0^t \cos(t-\xi)\phi(\xi)d\xi = e^{-t}$

۲۴. $\phi(t)-\int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)d\xi = 1$

۲۵. $\phi(t)+\int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)d\xi = 1$

به همین ترتیب، معادله‌هایی هستند که به **معادلات انتگرال-دیفرانسیل** معروف‌اند که در آنها هم مشتق و هم انتگرال تابع مجهول ظاهر می‌شود. در هر یک از مسئله‌های ۲۶ تا ۲۸،

الف) معادلهٔ انتگرال-دیفرانسیل داده‌شده را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

ب) با مشتق‌گیری به دفعات کافی از معادلهٔ انتگرال-دیفرانسیل داده‌شده، آن را به مسئلهٔ مقدار اولیه تبدیل کنید.

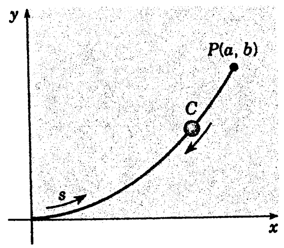
ج) مسئلهٔ مقدار اولیهٔ قسمت (ب) را حل کنید و تحقیق کنید که جواب همان جواب قسمت (الف) است.

۲۶. $\phi'(t)+\int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)d\xi = t$، $\phi(0)=0$

۲۷. $\phi'(t)+\phi(t)=\int_0^t \sin(t-\xi)\phi(\xi)d\xi$، $\phi(0)=1$

۲۸. $\phi'(t)-\frac{1}{2}\int_0^t (t-\xi)^2\phi(\xi)d\xi = -t$، $\phi(0)=1$

۲۹. **تاوتوکرون (منحنی هم‌زمانی)**. یکی از مسئله‌های جالب تاریخ ریاضیات، یافتن تاوتوکرون[1] است: منحنی‌ای که در طول آن، ذره روی منحنی آزادانه و تنها تحت نیروی جاذبه به پایین سُر می‌خورد و صرف‌نظر از نقطهٔ شروع، در زمان ثابتی روی منحنی به پایین منحنی می‌رسد. این مسئله در ساختن ساعت پاندولی‌ای ظاهر شد که دورهٔ تناوب آن مستقل از دامنهٔ نوسانش باشد. این منحنی را کریستین هویخنس (۱۶۲۹-۱۶۹۵م) در ۱۶۷۳ میلادی با روشهای هندسی کشف کرد و بعدها لایب‌نیتز و ژاکوب برنولی با روشهای تحلیلی آن را پیدا کردند. جواب برنولی (در ۱۶۹۰م) یکی از اولین مواردی است که در آن به‌طور صریح معادلهٔ دیفرانسیل حل شده است. شکل هندسی منحنی را در شکل ۲.۶.۶ نشان داده‌ایم.



شکل ۲.۶.۶ منحنی هم‌زمانی (تاوتوکرون)

نقطهٔ شروع $P(a,b)$ با منحنی C به نقطهٔ انتهایی $(0,0)$ متصل شده است. طول قوس s از مبدأ اندازه گرفته می‌شود و $f(y)$ نرخ تغییر s نسبت به y را نشان می‌دهد:

$$f(y)=\frac{ds}{dy}=\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(i)}$$

در این صورت، از اصل بقای انرژی نتیجه می‌شود که زمان $T(b)$ موردنیاز برای سُرخوردن ذره از P به مبدأ عبارت است از

$$T(b)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}dy. \qquad \text{(ii)}$$

الف) فرض کنید که به‌ازای هر b، $T(b)=T_0$ ثابت است. با محاسبهٔ تبدیل لاپلاس معادلهٔ (ii) در این حالت و استفاده از قضیهٔ پیچش ثابت کنید

$$F(s)=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\,\frac{T_0}{\sqrt{s}} \qquad \text{(iii)}$$

و سپس ثابت کنید

$$f(y)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\,\frac{T_0}{\sqrt{y}}. \qquad \text{(iv)}$$

راهنمایی: مسئلهٔ ۲۷ بخش ۱.۶ را ببینید.

۱. کلمهٔ «tautochrone» از کلمهٔ یونانی *tauto* به معنی «همان» و *chronos* به معنی زمان تشکیل شده است.

ب) با ترکیب معادله‌های (i) و (iv) ثابت کنید

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{۲\alpha - y}{y}} \qquad \text{(v)}$$

که در آن $\alpha = gT_۰^۲/\pi^۲$.

ج) با قرار دادن $y = ۲\alpha \sin^۲(\theta/۲)$ معادلهٔ (v) را حل کنید و ثابت کنید

$$x = \alpha(\theta + \sin\theta), \qquad y = \alpha(۱ - \cos\theta). \qquad \text{(vi)}$$

معادله‌های (vi) همان معادله‌های پارامتری چرخزاد هستند؛ پس منحنی هم‌زمانی قطعه‌ای از چرخزاد است.

مراجع

کتابهای زیر شامل اطلاعات بیشتری در مورد تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن هستند.

Churchill, R. V., *Operational Mathematics* (3rd ed.) (New York: McGraw-Hill, 1971).

Doetsch, G., *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Trans- form* (trans. W. Nader) (New York: Springer, 1974).

Kaplan, W., *Operational Methods for Linear Systems* (Reading, MA: Addison- Wesley, 1962).

Kuhfittig, P. K. F., *Introduction to the Laplace Transform* (New York: Plenum, 1978).

Miles, J. W., *Integral Transforms in Applied Mathematics* (London: Cambridge University Press, 1971).

Rainville, E. D., *The Laplace Transform: An Introduction* (New York: Macmillan, 1963).

هر یک از این کتابها جدولی از تبدیلات دارند. می‌توانید به جدولهای مفصل زیر هم مراجعه کنید:

Erdelyi, A. (ed.), *Tables of Integral Transforms* (Vol. 1) (New York: McGraw-Hill, 1954).

Roberts, G. E., and Kaufman, H., *Table of Laplace Transforms* (Philadelphia: Saunders, 1966).

بحث بیشتر دربارهٔ توابع تعمیم‌یافته را می‌توان در کتاب زیر یافت:

Lighthill, M. J., *Fourier Analysis and Generalized Functions* (London: Cambridge University Press, 1958).