emamipour@bam.ac.ir

مجتمع آموزش عالی بم

مدرس: بیژن امامی‌پور

مجتمع آموزش عالی بم (دانشگاه دولتی بم)

اعداد مختلط

هر عدد مختلط $z=a+bi$ که $i=\sqrt{-1}$ را می‌توان با یک نقطه (a,b) از صفحه دو بُعدی، موسوم به صفحه آرگان، در تناظر گرفت. بدین‌لحاظ، فُرم قطبی z به‌صورت $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ است که در آن r همان قدرمطلق z است، یعنی $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. همچنین زاویه بر حسب رادیان $0\leq\theta<2\pi$ شناسه یا آرگومان عدد z است که با توجه به رُبع یا مکانی از صفحه آرگان که نقطه (a,b) در آن قرار دارد از فرمول $\tan\theta=\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید. توجه شود که به a قسمت حقیقی و به b قسمت موهومی عدد مختلط $z=a+bi$ می‌گویند.

مثال۱

فُرم قطبی عدد مختلط $z=-1-\sqrt{3}i$ را بنویسید.

جواب:

واضح است که $r=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ و $\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=+\sqrt{3}$ که با توجه به آنکه نقطه $(-1,-\sqrt{3})$ در رُبع سوم مختصاتی قرار دارد، شناسه z بر حسب رادیان برابر با $\theta=\frac{4\pi}{3}$ است. بنابراین $z=-1-\sqrt{3}i=2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$.

در صورتی‌که از فرمول دِموآر $\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ استفاده کنیم، داریم:

$$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\mathrm{e}^{i\theta}\ .$$

از سوی دیگر، چون به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطه $\mathrm{e}^{in\theta}=(\mathrm{e}^{i\theta})^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ برقرار است. پس در به‌توان رساندن اعداد مختلط می‌توان از اتحاد زیر استفاده کرد:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)\ .$$

مثال۲

عدد $(-1-\sqrt{3}i)^{100}$ را به‌صورت قطبی و $a+bi$ بنویسید.

جواب:

$$\begin{aligned}(-1-\sqrt{3}i)^{100}&=\left[2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})\right]^{100}=2^{100}(\cos\frac{400\pi}{3}+i\sin\frac{400\pi}{3})\\&=2^{100}\left[\cos(133\pi+\frac{\pi}{3})+i\sin(133\pi+\frac{\pi}{3})\right]=2^{100}(-\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3})\\&=2^{100}(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=-(2^{99})-(2^{99})\sqrt{3}i\end{aligned}$$

emamipour@bam.ac.ir

ریشه‌های nـاُم عدد z را به نماد $(z)^{\frac{1}{n}}$ نمایش می‌دهیم و تعداد آنها n تا است که به روش زیر محاسبه می‌شوند:
ابتدا عدد $z=a+bi$ را به‌صورت قطبی $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ می‌نویسیم و سپس از فرمول

$$(z)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\Big[\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\Big].$$

با جای‌گذاری $k=0,1,\dots,n-1$، ریشه‌های nـاُم z را محاسبه می‌کنیم. توجه شود که در فرمول بالا منظور از $\sqrt[n]{r}$، ریشه nـاُم حقیقی مثبت r است.

نکته: ریشه‌های nـاُم عدد $z=a+bi$، رأس‌های یک nـضلعی منتظم به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{a^2+b^2}$ هستند.

مثال۳

ریشه‌های چهارم عدد $(-1-\sqrt{3}i)$ را به‌صورت قطبی و به‌صورت $a+bi$ بنویسید.

جواب:

با توجه به مثال ۱ داریم: $z=-1-\sqrt{3}i=2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$. بنابراین $r=2$ و $\theta=\frac{4\pi}{3}$.

اکنون با کمک فرمول ریشه‌ها، داریم:

$$(-1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}\Big[\cos(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4})+i\sin(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4})\Big]$$

$$k=0\Longrightarrow(-1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{4\pi}{12}+i\sin\frac{4\pi}{12})=\sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}i$$

$$k=1\Longrightarrow(-1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{10\pi}{12}+i\sin\frac{10\pi}{12})=\sqrt[4]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}i$$

$$k=2\Longrightarrow(-1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{16\pi}{12}+i\sin\frac{16\pi}{12})=\sqrt[4]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}i$$

$$k=3\Longrightarrow(-1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{22\pi}{12}+i\sin\frac{22\pi}{12})=\sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}i$$

مثال۴

همه ریشه‌های معادله $x^{۴}+۲=۰$ را پیدا کنید.

جواب:

از $x^{۴}+۲=۰$ نتیجه می‌شود $x^{۴}=-۲$ و در نتیجه $x=(-۲)^{\frac{۱}{۴}}$. از این‌رو باید ریشه‌های چهارم (-۲) را پیدا کنیم. برای این‌کار ابتدا شکل قطبی عدد مختلط (-۲) را می‌نویسیم.

$$-۲=-۲+۰i \Longrightarrow a=-۲, b=۰$$

پس $r=\sqrt{(-۲)^{۲}+(۰)^{۲}}=۲$ و $\tan\theta=\frac{۰}{-۲}$ که با توجه به اینکه نقطه $(-۲,۰)$ روی محور طول‌های منفی قرار دارد، $\theta=\pi$ رادیان است. بنابراین

$$-۲=۲(\cos\pi+i\sin\pi)\ .$$

اکنون به سادگی می‌توان ریشه‌های چهارم (-۲) یا در واقع ریشه‌های چهارم $۲(\cos\pi+i\sin\pi)$ را پیدا کرد.

$$(-۲)^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۲}\Big[\cos(\frac{\pi+۲k\pi}{۴})+i\sin(\frac{\pi+۲k\pi}{۴})\Big]$$

$$k=۰\Longrightarrow(-۲)^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴})=\sqrt[۴]{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۴]{۸}}+\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۴]{۸}}i$$

$$k=۱\Longrightarrow(-۲)^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{۳\pi}{۴}+i\sin\frac{۳\pi}{۴})=\sqrt[۴]{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)=-\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۴]{۸}}+\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۴]{۸}}i$$

$$k=۲\Longrightarrow(-۲)^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{۵\pi}{۴}+i\sin\frac{۵\pi}{۴})=\sqrt[۴]{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)=-\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۴]{۸}}-\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۴]{۸}}i$$

$$k=۳\Longrightarrow(-۲)^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{۷\pi}{۴}+i\sin\frac{۷\pi}{۴})=\sqrt[۴]{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۴]{۸}}-\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۴]{۸}}i$$

مثال۵

عبارت $x^{۴}+۲$ را به حاصل‌ضرب دو عبارت درجه دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کنید.

جواب:

در مثال ۴ مشاهده شد که معادله $x^{۴}+۲=۰$ ریشه حقیقی ندارد و هر چهار ریشه آن مختلط (دو به دو مزدوج یکدیگر) هستند. بنابراین نمی‌توان آن را به عامل‌های خطی (درجه اول) با ضرایب حقیقی تجزیه کرد اما می‌توان عامل‌های خطی مزدوج را در یکدیگر ضرب کرد تا عامل درجه دوم با ضرایب حقیقی به‌دست آید. یعنی

$$x^{۴}+۲=\Big[\Big(x-\sqrt[۴]{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)\Big)\Big(x-\sqrt[۴]{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)\Big)\Big(x-\sqrt[۴]{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)\Big)\Big(x-\sqrt[۴]{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)\Big)\Big]$$

و در نتیجه

$$x^{۴}+۲=\Big[\Big(x-\sqrt[۴]{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)\Big)\Big(x-\sqrt[۴]{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)\Big)\Big]\Big[\Big(x-\sqrt[۴]{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)\Big)\Big(x-\sqrt[۴]{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}i)\Big)\Big]\ .$$

پس از ضرب و سپس ساده کردن، به نتیجه مطلوب می‌رسیم: $x^{۴}+۲=(x^{۲}-\sqrt[۴]{۸}x+\sqrt{۲})(x^{۲}+\sqrt[۴]{۸}x+\sqrt{۲})$.

معادله چندجمله‌ای جبری از درجه n

معادله چندجمه‌ای درجه n ذیل، که به‌صورت نزولی مرتب شده و ضریب بزرگترین درجه آن، یعنی a_n، عددی ناصفر است را در نظر بگیرید.

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۱ x + a_۰ = ۰ \qquad (*)$$

نکته ۱: معادله $(*)$ دقیقاً n ریشه دارد.
نکته ۲: ممکن است همه ریشه‌های $(*)$ حقیقی نباشد و ریشه‌های مختلط نیز داشته باشد.
نکته ۳: ممکن است تعداد ریشه‌های متمایز $(*)$ از n کمتر باشد. پس برخی از ریشه‌ها تکرار شده‌اند و ریشه‌های چندگانه دارد.
نکته ۴: فرض کنید همه ضریب‌های $a_۰$ تا a_n معادله $(*)$ عددهای حقیقی باشند. اگر $z = a + bi$ ریشه مختلط معادله $(*)$ باشد، آنگاه مزدوج z، یعنی $\bar{z} = a - bi$، نیز ریشه آن معادله است. در نتیجه چنین معادله‌ای، یا اصلاً ریشه مختلط ندارد یا تعداد ریشه‌های مختلط آن عددی زوج است.

توجه: در ادامه هرجا گفته شد معادله $(*)$، فرض بر آن است که همه ضریب‌های آن، یعنی $a_۰$ تا a_n، عددهای صحیح هستند.
اگر برخی ضریب‌های معادله $(*)$، کسر گویا باشد، طرفین معادله را در کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج کسرها ضرب می‌کنیم تا همه ضرایب جدید، عدد صحیح شوند.

گزینه‌های ممکن برای ریشه‌های گویای معادله $(*)$

نکته: اگر معادله $(*)$ ریشه گویا داشته باشد باید در بین عددهای گویای

$$\pm\frac{\text{مقسوم‌علیه‌های } a_۰}{\text{مقسوم‌علیه‌های } a_n} \quad \text{یا به‌صورت ساده‌تر} \quad \pm\frac{\text{مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت}}{\text{مقسوم‌علیه‌های ضریب بزرگترین درجه}}$$

آنها را جستجو کنیم. پس این کسرها تنها کاندیداها (گزینه‌های ممکن)، به‌عنوان ریشه گویا هستند و با جانشانی وضعیت ریشه‌شدن آنها را مشخص می‌کنیم. اگر با جانشانی، هیچ‌کدام ریشه معادله $(*)$ نشدند، نتیجه می‌گیریم که معادله $(*)$ ریشه گویا ندارد.

مثال۶
ریشه‌های گویای معادله $x^۴ + x^۳ - ۷x^۲ - x + ۶ = ۰$ را پیدا کنید.

جواب:
گزینه‌های ممکن: $\pm\frac{\text{مقسوم‌علیه‌های ۶}}{\text{مقسوم‌علیه‌های ۱}}$

تنها مقسوم‌علیه ۱، عدد ۱ است پس در واقع گزینه‌های ممکن به‌صورت مقسوم‌علیه‌های ± ۶ هستند.
با جانشانی مقسوم‌علیه‌های ± ۶، یعنی $\pm ۶, \pm ۳, \pm ۲, \pm ۱$، در معادله داده شده، درمی‌یابیم که فقط $-۳, +۲, -۱, +۱$ ریشه‌های‌گویای معادله هستند.
توجه کنید که چون درجه معادله، ۴ است پس این معادله فقط چهار ریشه دارد. از طرفی دیدیم که عددهای $-۳, +۲, -۱, +۱$ ریشه‌های معادله هستند پس معادله هیچ ریشه دیگری غیر از اینها ندارد چون اگر داشته باشد، آنگاه تعداشان از درجه معادله بیشتر می‌شود و طبق نکته‌های قبلی، این امکان ندارد.

تجزیه عبارت چندجمله‌ای با ضرایب صحیح به عامل‌های حقیقی با استفاده از تقسیم طولانی

نکته ۱: اگر β_1 تا β_n همه ریشه‌های معادله $(*)$ معلوم و همگی حقیقی باشند، آنگاه تجزیه $(*)$ به‌صورت زیر است:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = \alpha(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)\,.$$

مثال۷

عبارت چندجمله‌ای $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ را به عامل‌های حقیقی تجزیه کنید.

جواب:

در مثال قبلی دیدیم که ریشه‌های معادله درجه چهارم $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ همگی حقیقی و به‌صورت $-3, +2, -1, +1$ هستند. بنابراین

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)\,.$$

نکته ۲: اگر حداقل یک ریشه حقیقی از معادله $(*)$ مانند β_1 معلوم باشد، آنگاه عبارت چندجمله‌ای $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ بر $(x-\beta_1)$ بخش‌پذیر است و با تقسیم طولانی خارج‌قسمت آن را پیدا می‌کنیم و $q_1(x)$ می‌نامیم. بنابراین

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x-\beta_1)q_1(x)\,.$$

اکنون با فرض آنکه β_2 ریشه‌ای حقیقی از $q_1(x)$ است، به‌طورمشابه $q_1(x)$ را بر $(x-\beta_2)$ تقسیم طولانی می‌کنیم تا تجزیه‌ای از $q_1(x)$ به‌دست آید. یعنی $q_1(x) = (x-\beta_2)q_2(x)$. در نتیجه $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x-\beta_1)(x-\beta_2)q_2(x)$، یعنی اگر β_1 و β_2 ریشه‌های حقیقی معادله $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ باشند، آنگاه عبارت $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ بر $(x-\beta_1)(x-\beta_2)$ بخش‌پذیر است و در واقع

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x-\beta_1)(x-\beta_2)q_2(x)\,.$$

این روند را تا زمانی ادامه می‌دهیم که همه ریشه‌های آخرین خارج‌قسمت با نام $q_k(x)$، عددهایی مختلط شوند و در واقع آخرین خارج‌قسمت که ریشه‌های آن همگی مختلط هستند را تجزیه نمی‌کنیم.
بدین‌صورت عبارت

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_k)q_k(x),$$

به‌صورت حاصل‌ضرب خارج‌قسمت‌های متوالی با ضرایب حقیقی نوشته می‌شود و تجزیه به عامل‌های حقیقی کامل می‌شود.

مثال۸

عبارت چندجمله‌ای $6x^4 - x^3 - 9x^2 - x - 15$ را به عامل‌های حقیقی تجزیه کنید.

جواب:

ابتدا معادله $6x^4 - x^3 - 9x^2 - x - 15 = 0$ را تشکیل داده و گزینه‌های ممکن برای ریشه‌های گویای این معادله را به‌صورت $\pm\frac{\text{مقسوم‌علیه‌های ۱۵}}{\text{مقسوم‌علیه‌های ۶}}$ به‌دست می‌آوریم. با جانشانی آنها، درمی‌یابیم که فقط $\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}$ ریشه‌های گویای معادله هستند. بنابراین عبارت $6x^4 - x^3 - 9x^2 - x - 15$ بر $(x-\frac{5}{3})(x+\frac{3}{2})$ یعنی بر $\frac{1}{6}(2x+3)(3x-5)$ بخش‌پذیر است و پس از انجام تقسیم طولانی داریم:

$$6x^4 - x^3 - 9x^2 - x - 15 = \frac{1}{6}(2x+3)(3x-5)(x^2+1)\,.$$

توجه شود چون آخرین خارج‌قسمت، یعنی (x^2+1)، ریشه حقیقی ندارد پس روند تقسیم طولانی در همین‌جا متوقف شده است و عبارت به عامل‌های حقیقی تجزیه شده است.

emamipour@bam.ac.ir

مثال۹

عبارت چندجمله‌ای $x^۶ + \frac{۱}{۶}x^۵ - \frac{۵}{۲}x^۴ + ۲x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۵$ را به عامل‌های حقیقی تجزیه کنید.

جواب:

ابتدا معادله $x^۶ + \frac{۱}{۶}x^۵ - \frac{۵}{۲}x^۴ + ۲x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۵ = ۰$ را تشکیل داده و طرفین را در عدد ۶ (ک.م.م مخرج کسرها) ضرب می‌کنیم تا به معادله $۶(x^۶ + \frac{۱}{۶}x^۵ - \frac{۵}{۲}x^۴ + ۲x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۵) = ۶x^۶ + x^۵ - ۱۵x^۴ + ۱۲x^۲ + ۲x - ۳۰ = ۰$ که ضرایب صحیح دارد، دست یابیم.

گزینه‌های ممکن برای ریشه‌های گویای معادله

$$۶x^۶ + x^۵ - ۱۵x^۴ + ۱۲x^۲ + ۲x - ۳۰ = ۰ \,,$$

را به‌صورت $\pm\frac{\text{مقسوم‌علیه‌های ۳۰}}{\text{مقسوم‌علیه‌های ۶}}$ به‌دست می‌آوریم. با جانشانی آنها، مشاهده می‌شود که فقط $-\frac{۵}{۳}, \frac{۳}{۲}$ ریشه‌های گویای معادله

$$۶x^۶ + x^۵ - ۱۵x^۴ + ۱۲x^۲ + ۲x - ۳۰ = ۰$$

هستند.

بنابراین عبارت $۶x^۶ + x^۵ - ۱۵x^۴ + ۱۲x^۲ + ۲x - ۳۰$ بر $(x - \frac{۳}{۲})(x + \frac{۵}{۳})$ یعنی بر $\frac{۱}{۶}(۲x - ۳)(۳x + ۵)$ بخش‌پذیر است و با تقسیم طولانی داریم:

$$۶x^۶ + x^۵ - ۱۵x^۴ + ۱۲x^۲ + ۲x - ۳۰ = \frac{۱}{۶}(۲x - ۳)(۳x + ۵)(۶x^۴ + ۱۲) \,.$$

توجه شود چون آخرین خارج‌قسمت، یعنی $(۶x^۴ + ۱۲)$، ریشه حقیقی ندارد ($x^۴ = -۲$ برای اعداد حقیقی امکان ندارد) پس روند تقسیم طولانی در همین‌جا متوقف شده است. در نتیجه

$$۶(x^۶ + \frac{۱}{۶}x^۵ - \frac{۵}{۲}x^۴ + ۲x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۵) = \frac{۱}{۶}(۲x - ۳)(۳x + ۵)(۶x^۴ + ۱۲) \,,$$

$$x^۶ + \frac{۱}{۶}x^۵ - \frac{۵}{۲}x^۴ + ۲x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۵ = \frac{۱}{۳۶}(۲x - ۳)(۳x + ۵)(۶x^۴ + ۱۲) \,,$$

$$x^۶ + \frac{۱}{۶}x^۵ - \frac{۵}{۲}x^۴ + ۲x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۵ = \frac{۱}{۳۶}(۲x - ۳)(۳x + ۵)(۶)(x^۴ + ۲) = \frac{۱}{۶}(۲x - ۳)(۳x + ۵)(x^۴ + ۲) \,.$$

پس عبارت اصلی به عامل‌های حقیقی ذیل تجزیه می‌شود.

$$x^۶ + \frac{۱}{۶}x^۵ - \frac{۵}{۲}x^۴ + ۲x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۵ = \frac{۱}{۶}(۲x - ۳)(۳x + ۵)(x^۴ + ۲) = (x - \frac{۳}{۲})(x + \frac{۵}{۳})(x^۴ + ۲) \,.$$

از سوی دیگر، بنابر مثال ۵ می‌توان نوشت: $x^۴ + ۲ = (x^۲ - \sqrt[۴]{۸}x + \sqrt{۲})(x^۲ + \sqrt[۴]{۸}x + \sqrt{۲})$. بنابراین

$$x^۶ + \frac{۱}{۶}x^۵ - \frac{۵}{۲}x^۴ + ۲x^۲ + \frac{۱}{۳}x - ۵ = (x - \frac{۳}{۲})(x + \frac{۵}{۳})(x^۲ - \sqrt[۴]{۸}x + \sqrt{۲})(x^۲ + \sqrt[۴]{۸}x + \sqrt{۲}) \,.$$

یافتن ریشه‌های معادله $(*)$

روش استاندارد یافتن ریشه‌های معادله $(*)$ آن است که آن را تا حد امکان به عامل‌های حقیقی تجزیه کنیم.
نکته ۱: یکی از روش‌های تجزیه، حدس زدن ریشه‌های گویای معادله $(*)$ و سپس استفاده از تقسیم طولانی است و اگر عامل با ریشه مختلط داشتیم، با استفاده از فرمول ریشه nــ اُم، آنها را نیز پیدا می‌کنیم.
نکته ۲: اگر معادله ریشه گویا نداشته باشد، ممکن است تجزیه $(*)$ کار ساده‌ای نباشد و مجبور به استفاده از روش‌های عددی برای یافتن تقریبی ریشه‌ها باشیم که ما به این حالت نمی‌پردازیم.

اکنون همه مطالب قبلی را در مثال ذیل بیان می‌کنیم که به‌نوعی تکرار مثال‌ها و توضیح‌های قبل است.

مثال ۱۰
ریشه‌های معادله $x^6+\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{2}x^4+2x^2+\frac{1}{3}x-5=0$ را پیدا کنید.

جواب:
ابتدا ضرایب معادله را با ضرب طرفین در ک.م.م مخرج کسرها به ضرایب صحیح تبدیل می‌کنیم.

$$6(x^6+\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{2}x^4+2x^2+\frac{1}{3}x-5)=6x^6+x^5-15x^4+12x^2+2x-30=0$$

گزینه‌های ممکن برای ریشه‌های گویای این معادله را به‌صورت $\pm\frac{\text{مقسوم‌علیه‌های } 30}{\text{مقسوم‌علیه‌های } 6}$ به‌دست می‌آوریم. با جانشانی آنها، مشاهده می‌شود که فقط $-\frac{5}{3}, \frac{3}{2}$ ریشه‌های گویای معادله

$$6x^6+x^5-15x^4+12x^2+2x-30=0$$

هستند. بنابراین عبارت $6x^6+x^5-15x^4+12x^2+2x-30$ بر $(x-\frac{3}{2})(x+\frac{5}{3})$ یعنی بر $\frac{1}{6}(2x-3)(3x+5)$ بخش‌پذیر است و با تقسیم طولانی داریم:

$$6x^6+x^5-15x^4+12x^2+2x-30=\frac{1}{6}(2x-3)(3x+5)(6x^4+12)\,.$$

توجه شود چون آخرین خارج‌قسمت، یعنی $(6x^4+12)$، ریشه حقیقی ندارد ($x^4=-2$ برای اعداد حقیقی امکان ندارد) پس روند تقسیم طولانی در همین‌جا متوقف شده است. در نتیجه

$$6(x^6+\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{2}x^4+2x^2+\frac{1}{3}x-5)=\frac{1}{6}(2x-3)(3x+5)(6x^4+12)\,,$$
$$x^6+\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{2}x^4+2x^2+\frac{1}{3}x-5=\frac{1}{36}(2x-3)(3x+5)(6x^4+12)\,.$$

پس عبارت اصلی به عامل‌های حقیقی ذیل تجزیه می‌شود.

$$x^6+\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{2}x^4+2x^2+\frac{1}{3}x-5=\frac{1}{6}(2x-3)(3x+5)(x^4+2)=(x-\frac{3}{2})(x+\frac{5}{3})(x^4+2)\,.$$

اکنون واضح است که ریشه‌های حقیقی این معادله به‌صورت $x=\frac{3}{2}$ و $x=-\frac{5}{3}$ هستند. و ریشه‌های مختلط از معادله $x^4+2=0$ به‌دست می‌آیند که در مثال ۴ قبلاً محاسبه شده‌اند.
بنابراین معادله درجه ۶ داده شده دارای ۶ ریشه ذیل است که دوتای آنها حقیقی و چهارتای آنها مختلط هستند. همچنین ریشه‌های مختلط، دوبه‌دو مزدوج یکدیگر هستند.

$$x_1=\frac{3}{2},\ x_2=-\frac{5}{3},\ x_3=\sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i),\ x_4=\sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i),\ x_5=\sqrt[4]{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i),\ x_6=\sqrt[4]{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)\,.$$

emamipour@bam.ac.ir

تجزیه کسر گویا به کسرهای جزئی

ابتدا بر اساس روش‌های بالا، مخرج کسر را تا حد امکان به عامل‌های حقیقی با درجه حداکثر ۲ تجزیه می‌کنیم. سپس به تعداد عامل‌های مخرج (با شمارش تکرار و چندگانگی‌ها) کسر جزئی قرار می‌دهیم و در مخرج هر کسر جزئی، یکی از عامل‌های تجزیه‌شده مخرج کسر اصلی راقرار می‌دهیم. اگر عامل تکراری داشته باشیم از توان یک آن عامل شروع می‌کنیم تا به توان عامل تجزیه برسیم. سپس برای کسرهای جزئی که مخرج آنها ریشه حقیقی داشته باشد، پارامتر ثابت a در صورت آن کسر جزئی قرار می‌دهیم و برای کسرهای جزئی که مخرج آن کسر جزئی ریشه مختلط داشته باشد، در حالت کلی یک عبارت جبری کامل با یک درجه کمتر از درجه مخرج در صورت آن کسر جزئی قرار می‌دهیم توجه شود که اگر درجه عبارت دارای ریشه مختلط عدد ۲ باشد، در صورت آن کسر، $ax+b$ قرار می‌دهیم. در پایان، مخرج مشترک‌گیری را برای کسرهای جزئی انجام می‌دهیم و با متحد قرار دادن صورت کسر اصلی و صورت کسر مخرج مشترک گرفته شده (پس از دسته‌بندی آن)، ضرایب صورت‌های کسرهای جزئی را محاسبه می‌کنیم.

مثال۱۱

کسر گویای ذیل را به کسرهای جزئی تجزیه کنید.

$$\frac{5x^3-x+2}{x^6+\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{2}x^4+2x^2+\frac{1}{3}x-5}$$

جواب:

ابتدا مخرج کسر، یعنی $x^6+\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{2}x^4+2x^2+\frac{1}{3}x-5$ را با توجه به مثال ۹ به صورت ذیل به عامل‌های حقیقی تجزیه می‌کنیم.

$$x^6+\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{2}x^4+2x^2+\frac{1}{3}x-5=(x-\frac{3}{2})(x+\frac{5}{3})(x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})\,.$$

مشاهده می‌شود که چهار عامل حقیقی $(x-\frac{3}{2})$ و $(x+\frac{5}{3})$ و $(x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})$ و $(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})$ که هیچ تکرار و چندگانگی‌ای ندارند، در تجزیه‌شده مخرج کسر اصلی وجود دارد. از این‌رو برای کسر گویای داده شده، چهار کسر جزئی (در ابتدا بدون صورت کسر) در نظر می‌گیریم که مخرج هر کدام، یکی از عامل‌های تجزیه به‌دست آمده باشد.

$$\frac{5x^3-x+2}{(x-\frac{3}{2})(x+\frac{5}{3})(x^2+\sqrt[4]{8}x-\sqrt{2})(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})}=\frac{}{(x-\frac{3}{2})}+\frac{}{(x+\frac{5}{3})}+\frac{}{(x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})}+\frac{}{(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})}\,.$$

اکنون به دلیل آنکه مخرج کسرهای جزئی اول و دوم ریشه حقیقی دارند، در صورت هر کدام یک پارامتر ثابت، مثلاً برای یکی a و برای دیگری b قرار می‌دهیم. همچنین از آنجا که مخرج کسر جزئی سوم و چهارم ریشه مختلط دارد و درجه آنها دو است، پس در صورت کسر جزئی سوم و چهارم عبارت درجه سوم کامل $cx+d$ و $rx+s$ را قرار می‌دهیم. بنابراین

$$\frac{5x^3-x+2}{(x-\frac{3}{2})(x+\frac{5}{3})(x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})}=\frac{a}{(x-\frac{3}{2})}+\frac{b}{(x+\frac{5}{3})}+\frac{cx+d}{(x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})}+\frac{rx+s}{(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})}\,.$$

اکنون بین چهار کسر جزئي سمت راست، مخرج مشترک می‌گیریم و سمت راست را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{a(x+\frac{5}{3})(x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})+b(x-\frac{3}{2})(x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})+(cx+d)(x-\frac{3}{2})(x+\frac{5}{3})(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})+(rx+s)(x-\frac{3}{2})(x+\frac{5}{3})(x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})}{(x-\frac{3}{2})(x+\frac{5}{3})(x^2-\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt[4]{8}x+\sqrt{2})}\,.$$

حاصل‌ضرب‌های موجود در صورت کسر (خط قبلی) را انجام داده و پس از ساده کردن، آن را دسته‌بندی می‌کنیم و با صورت کسر سمت چپ، متحد قرار می‌دهیم:

$$5x^3-x+2\equiv(a+b+c+r)x^5+\left(\frac{5a}{3}-\frac{3b}{2}+(2^{3/4}+\frac{1}{6})c+d+(-2^{3/4}+\frac{1}{6})r+s\right)x^4+\left((\sqrt{2}-\frac{5}{2}+\frac{1}{3\sqrt[4]{2}})c+(2^{3/4}+\frac{1}{6})d+(\sqrt{2}-\frac{5}{2}-\frac{1}{3\sqrt[4]{2}})r+(-2^{3/4}+\frac{1}{6})s\right)x^3+$$

$$+\left((-\frac{5}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}})c+(\frac{1}{3\sqrt[4]{2}}+\sqrt{2}-\frac{5}{2})d+(\frac{5}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}})r+(\sqrt{2}-\frac{5}{2}-\frac{1}{3\sqrt[4]{2}})s\right)x^2+\left(a+b-\frac{5}{\sqrt{2}}c+(-\frac{5}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}})r+(\frac{5}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}})s\right)x+(\frac{5a}{3}-\frac{3b}{2}-\frac{5d}{\sqrt{2}}-\frac{5s}{\sqrt{2}})$$

و بعد از حل شش معادله خطی با شش مجهول زیر می‌توان پارامترهای a,b,c,d,r,s را یافت.

$$a+b+c+r=5,\ \frac{5a}{3}-\frac{3b}{2}+(2^{3/4}+\frac{1}{6})c+d+(-2^{3/4}+\frac{1}{6})r+s=0,\ (\sqrt{2}-\frac{5}{2}+\frac{1}{3\sqrt[4]{2}})c+(2^{3/4}+\frac{1}{6})d+(\sqrt{2}-\frac{5}{2}-\frac{1}{3\sqrt[4]{2}})r+(-2^{3/4}+\frac{1}{6})s=0,$$

$$(-\frac{5}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}})c+(\frac{1}{3\sqrt[4]{2}}+\sqrt{2}-\frac{5}{2})d+(\frac{5}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}})r+(\sqrt{2}-\frac{5}{2}-\frac{1}{3\sqrt[4]{2}})s=0,\ a+b-\frac{5}{\sqrt{2}}c+(-\frac{5}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}})r+(\frac{5}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}})s=-1,\ \frac{5a}{3}-\frac{3b}{2}-\frac{5d}{\sqrt{2}}-\frac{5s}{\sqrt{2}}=2$$

و در نتیجه:

$$a=\frac{1668}{1843},\ b=\frac{4734}{6707},$$

$$c=-\frac{3\left(350452020\sqrt{2}+45454849\sqrt[4]{2}+83208289\ 2^{3/4}+2184328774\right)}{68482\left(21861\sqrt{2}+90\sqrt[4]{2}+14574\ 2^{3/4}+117182\right)},$$

$$d=\frac{3\left(2656660007628\sqrt{2}-48324280777031\sqrt[4]{2}+5005982649501\ 2^{3/4}+10958367934414\right)}{34241\left(-5608768478\sqrt{2}-1852455024\sqrt[4]{2}+1421830071\ 2^{3/4}+2889232866\right)},$$

$$r=-\frac{3\left(-193257002652338\sqrt{2}-8285233654500863\sqrt[4]{2}+7293982737503486\ 2^{3/4}+21642060881353401\right)}{68482\left(-82723733239\sqrt{2}-362875821285\sqrt[4]{2}+269140423134\ 2^{3/4}+1277214228648\right)},$$

$$s=\frac{3\left(122813249779761906\sqrt{2}-54948716449212950\sqrt[4]{2}+120854338831748253\ 2^{3/4}+295334832831228770\right)}{68482\left(5525861052514\sqrt{2}-18795337608435\sqrt[4]{2}+971715575451\ 2^{3/4}-9351426922668\right)}.$$

و بنابراین

$$a=\frac{1668}{1843},\ b=\frac{4734}{6707},\ c=\frac{3\left(\sqrt{29325666\sqrt{2}-29274608}-36772\right)}{136964},\ d=\frac{3\left(\sqrt{10089337\sqrt{2}+105241464}-3539\right)}{34241\sqrt{2}},$$

$$r=-\frac{3\left(\sqrt{29325666\sqrt{2}-29274608}+36772\right)}{136964},\ s=-\frac{3\left(\sqrt{10089337\sqrt{2}+105241464}+3539\right)}{34241\sqrt{2}}.$$

توجه شود که محاسبات چند مرحله آخر با نرم‌افزار Mathematica انجام شده است.

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

مجتمع آموزش عالی بم