فصل چهارم

مشتق چندمتغیره

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲

AvaEducation16.blog.ir
AvaEducation16@gmail.com
@AvaEducation16
@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

فهرست مطالب

پیشگفتار

این فایل شامل مطالب کلاس ریاضی ۲ دانشگاه است که در ترم‌های گذشته تدریس شده و در سایت teacher16.blog.ir ارائه شده بود. اکنون به جهت استفاده عمومی در دسترس مخاطبان خواهد بود. در انتهای فایل، تمریناتی جهت خود ارزیابی دانشجویان اضافه شده که حل آن‌ها بسیار توصیه می‌گردد. لازم به ذکر است فایل حل تمرینات در زمان مناسب در سایت قرار می‌گیرد. با آرزوی آنکه مطالب ارائه شده برای دانشجویان محترم مفید باشد.

۱ مقدمه

مشتق از یک تابع میزان تغییرات آن تابع نسبت به متغیر مورد مشتق را نشان می‌دهد. در توابع چند متغیره هر کدام از متغیرها می‌توانند باعث تغییر تابع گردند. بنابراین می‌توان به ازای هر کدام از متغیرها، مشتق را تعریف نمود. بسیاری از قضایا و تعاریف در مورد مشتق‌های چند متغیره مانند همان مشتق از توابع تک متغیره است، اما کمی گسترده‌تر. در ادامه به تعریف مشتق چند متغیره پرداخته می‌شود و موضوعات مربوط به این نوع مشتق ارائه می‌گردد.

۲ تعریف مشتق چند متغیره

تعریف مشتق برای تابع تک متغیره $f(x)$ به صورت زیر است:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

با تعمیم همین تعریف برای تابع دو متغیره $f(x,y)$ هم مشتق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

به بیانی دیگر می‌توان گفت هنگامی که از تابع f نسبت به یک متغیر مشتق گرفته می‌شود، فرض می‌شود متغیرهای دیگر ثابت هستند (مثل عدد ثابت با آن‌ها رفتار می‌شود).

نمایش مشتق به دو صورت عمده در مراجع وجود دارد:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

مشتق چندمتغیره را مشتق پاره‌ای یا مشتق جزئی[۱] هم می‌نامند.

مثال ۱ مشتق تابع $f(x,y) = 3x - 7y + 5x^2 - 6y^2 - xy^3$ را نسبت به x و y بدست آورید.

پاسخ: وقتی نسبت به x مشتق گرفته می‌شود، y ثابت فرض می‌شود و بالعکس.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 0 + 10x - 0 - y^3 = 3 + 10x - y^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 7 + 0 - 12y - x(3y^2) = -7 - 12y - 3xy^2$$

[۱] partial derivative

مثال ۲ مشتق تابع زیر را نسبت به x و y بدست آورید.

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 + y^4$$

پاسخ: وقتی نسبت به x مشتق گرفته می‌شود، y ثابت فرض می‌شود و بالعکس.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 4y^3$$

مثال ۳ حاصل $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در تابع دومتغیره $f(x, y) = x - \sin(yx^2 + xy^2)$ بدست آورید.

پاسخ: وقتی نسبت به x مشتق گرفته می‌شود، y ثابت فرض می‌شود و بالعکس.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - (2xy + y^2)\cos(yx^2 + xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2 + 2xy)\cos(yx^2 + xy^2)$$

۱.۲ مشتق توابع بیش از دو متغیره

اگر تابعی دارای متغیرهای بیشتر از دو باشد هم، قانون مشتق چند متغیره عوض نمی‌شود. هنگام مشتق گرفتن از تابع نسبت به یک متغیر، بقیه متغیرها ثابت در نظر گرفته می‌شوند.

مثال ۴ در توابع زیر $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ را بدست آورید.

الف- $f(x, y, z) = x^3y^2z + \dfrac{x^2}{yz}$ ب- $f(x, y, z) = \ln(xz + y - z^2)$

ج- $f(x, y, z) = \sin(2x + 3y - 4z)$ د- $f(x, y, z) = e^{xyz}\cos xyz$

ه- $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y + z}$ و- $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$

پاسخ:

الف-

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2z + \frac{2x}{yz}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz - \frac{x^2}{y^2z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^3y^2 - \frac{x^2}{yz^2}$$

ب-

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{xz + y - z^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xz + y - z^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x - 2z}{xz + y - z^2}$$

ج-

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\cos(2x + 3y - 4z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\cos(2x + 3y - 4z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -4\cos(2x + 3y - 4z)$$

د-

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xyz}\cos xyz - yze^{xyz}\sin xyz$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xyz}\cos xyz - xze^{xyz}\sin xyz$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xyz}\cos xyz - xye^{xyz}\sin xyz$$

ه-

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y+z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{(y+z)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{x}{(y+z)^2}$$

و-

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2-z^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2-z^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2-z^2}}$$

۲.۲ مشتق مراتب بالاتر در توابع چند متغیره

برای مشتق دوم، سوم یا ... از یک تابع، با توجه به متغیر مورد مشتق، باید به ترتیب از آن مشتق گرفت.

به عنوان مثال مشتق دوم نسبت به متغیر x به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

یعنی دو بار نسبت به x مشتق گرفته می‌شود.

نمایش مشتق، اول نسبت به y و سپس نسبت به x به صورت زیر است:

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial xy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ثابت می‌شود که وقتی توابع f_{xy} و f_{yx} پیوسته باشند، خواهیم داشت:

$$f_{xy}=f_{yx}$$

توجه: عبارت f_{xy} به هر دو صورت $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ یا $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۵ در توابع زیر $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ را بدست آورید.

الف- $f(x,y)=xe^y$ ب- $f(x,y)=\tan(2x-y)$

ج- $f(x,y)=\sqrt[5]{x^3+y^2}$ د- $f(x,y)=x\cos y$

پاسخ:

الف- ابتدا مشتق اول را نسبت به دو متغیر بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^y$$

برای یافتن مشتقات دوم باید از مشتق اول، یکبار دیگر مشتق گرفته شود:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^y\Big)=0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(xe^y\Big)=e^y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(e^y\Big)=e^y$$

در همین بخش می‌بینیم که $\frac{\partial^2 f}{\partial yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$. در مثال‌های دیگر تنها f_{xy} را بدست می‌آوریم.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(xe^y\Big)=xe^y$$

ب- ابتدا مشتق اول را نسبت به دو متغیر بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\Big(1+\tan^2(2x-y)\Big)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\Big(1+\tan^2(2x-y)\Big)$$

برای یافتن مشتقات دوم باید از مشتق اول، یکبار دیگر مشتق گرفته شود:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(2\Big(1+\tan^2(2x-y)\Big)\bigg)=8\tan(2x-y)\Big(1+\tan^2(2x-y)\Big)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(-\Big(1+\tan^2(2x-y)\Big)\bigg)=-4\tan(2x-y)\Big(1+\tan^2(2x-y)\Big)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\bigg(-\Big(1+\tan^2(2x-y)\Big)\bigg)=2\tan(2x-y)\Big(1+\tan^2(2x-y)\Big)$$

ج- ابتدا مشتق اول را نسبت به دو متغیر بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{5}(3x^2)(x^3+y^2)^{-\frac{4}{5}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{5}(2y)(x^3+y^2)^{-\frac{4}{5}}$$

برای یافتن مشتقات دوم باید از مشتق اول، یکبار دیگر مشتق گرفته شود:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3x^2}{5}(x^3+y^2)^{-\frac{4}{5}}\right) = \frac{6x}{5}(x^3+y^2)^{-\frac{4}{5}} - \frac{4}{5}(\frac{9}{5}x^4)(x^3+y^2)^{-\frac{9}{5}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{5}(x^3+y^2)^{-\frac{4}{5}}\right) = \frac{2y}{5}(-\frac{4}{5})(3x^2)(x^3+y^2)^{-\frac{9}{5}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{5}(x^3+y^2)^{-\frac{4}{5}}\right) = \frac{2}{5}(x^3+y^2)^{-\frac{4}{5}} - \frac{4}{5}\frac{4y^2}{5}(x^3+y^2)^{-\frac{9}{5}}$$

د- ابتدا مشتق اول را نسبت به دو متغیر بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y$$

برای یافتن مشتقات دوم باید از مشتق اول، یکبار دیگر مشتق گرفته شود:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\sin y\right) = -\sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-x\sin y\right) = -x\cos y$$

مثال ۶ حاصل $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 y}$ را در تابع $f(x,y) = x^2y^3 + x^5y$ بدست آورید.

پاسخ:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 y} = f_{xxy}$$

$$f_x = 2xy^3 + 5x^4y$$

$$f_{xx} = 2y^3 + 20x^3y$$

$$f_{xxy} = 6y^2 + 20x^3$$

۳.۲ تابع همگن

تابع f همگن از درجه α است هرگاه به ازای $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)$.

مثال ۷ درجه همگن بودن توابع زیر (در صورت وجود) را تعیین کنید.

الف- $f(x,y) = x^3 + 4x^2y$ ب- $f(x,y) = \sin\frac{x}{y} + \cos\frac{xy}{x^2+y^2}$

ج- $f(x,y) = \frac{\sqrt[5]{x^2-y^2}}{x}$ د- $f(x,y) = x^2 + xy^3$

ه- $f(x,y,z) = \ln(x^4y + x^2y^2z + xy^2z^2 + y^2z^3) - \ln(x^5 + y^5 + z^5)$

پاسخ:

الف- برای تعیین درجه همگن بودن تابع باید به جای متغیرهایی از قبیل x، λx قرار گیرد و سپس با فاکتورگیری تابعی ایجاد شود که از ضرب λ^α در تابع اصلی به وجود آید. در این صورت، مقدار α درجه همگن بودن تابع است.

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 + 4(\lambda x)^2(\lambda y) = \lambda^3(x^3 + 4x^2y) = \lambda^3 f(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 3$$

درجه همگن بودن تابع فوق 3 است

ب-

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sin\frac{\lambda x}{\lambda y}+\cos\frac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}=\lambda^0\left(\sin\frac{x}{y}+\cos\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha=0$$

درجه همگن بودن تابع فوق 0 است

ج-

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\sqrt[5]{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}}{\lambda x}=\frac{\lambda^{\frac{2}{5}}\sqrt[5]{x^2-y^2}}{\lambda x}=\lambda^{-\frac{3}{5}}f(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha=-\frac{3}{5}$$

درجه همگن بودن تابع فوق $-\frac{3}{5}$ است

د-

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda x)(\lambda y)^3=\lambda^2\left(x^2+\lambda^2xy^3\right)$$

در تابع فوق λ قابل جدا شدن از عبارت فوق نیست به طوری که فقط $f(x,y)$ را داشته باشیم. در نتیجه تابع فوق همگن نیست.

ه-

$$f(x,y,z)=\ln\frac{x^4y+x^2y^2z+xy^2z^2+y^2z^3}{x^5+y^5+z^5}$$

$$\begin{aligned}f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)&=\ln\frac{(\lambda x)^4(\lambda y)+(\lambda x)^2(\lambda y)^2(\lambda z)+(\lambda x)(\lambda y)^2(\lambda z)^2+(\lambda y)^2(\lambda z)^3}{(\lambda x)^5+(\lambda y)^5+(\lambda z)^5}\\&=\ln\frac{\lambda^5(x^4y+x^2y^2z+xy^2z^2+y^2z^3)}{\lambda^5(x^5+y^5+z^5)}\\&=\ln\frac{x^4y+x^2y^2z+xy^2z^2+y^2z^3}{x^5+y^5+z^5}\\&=f(x,y,z)\\&=\lambda^0f(x,y,z)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha=0$$

درجه همگن بودن تابع فوق 0 است

قضیه اویلر: برای تابع همگن f از درجه α داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha f(x,y)$$
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial xy}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\alpha(\alpha-1)f(x,y)$$

مثال ۸ اگر $f(x,y)=\sin\frac{x}{y}$ باشد، مقدار عبارت xf_x+yf_y را تعیین کنید.

پاسخ: دو روش برای حل این مسئله وجود دارد. در روش اول ابتدا مشتقات نسبت به x و y حساب می‌شود و عبارت خواسته شده را تشکیل می‌دهیم. در روش دوم با توجه به همگن بودن تابع از قضیه اویلر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$$
$$\Rightarrow\qquad xf_x+yf_y=x\Big(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\Big)+y\Big(-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\Big)=0$$

در روش دوم درجه همگن بودن تابع تعیین می‌شود و سپس از قضیه اویلر استفاده می‌گردد:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sin\frac{\lambda x}{\lambda y}=\sin\frac{x}{y}=\lambda^0 f(x,y)$$

درجه همگن بودن 0 است، بنابراین

$$xf_x+yf_y=\alpha f(x,y)=0$$

مثال ۹ اگر $f(x,y)=x\tan\frac{x}{y}+y\tan\frac{y}{x}$ باشد، مقدار عبارت $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$ را تعیین کنید.

پاسخ: ابتدا همگن بودن تابع را بررسی می‌کنیم تا در صورت وجود، از قضیه اویلر استفاده کنیم. اما اگر همگن نبود باید از روش اصلی عبارت داده شده را ساده کنیم.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x\tan\frac{\lambda x}{\lambda y}+\lambda y\tan\frac{\lambda y}{\lambda x}=\lambda(x\tan\frac{x}{y}+y\tan\frac{y}{x})=\lambda f(x,y)$$

درجه همگن بودن 1 است، بنابراین

$$xf_x+yf_y=\alpha f(x,y)=x\tan\frac{x}{y}+y\tan\frac{y}{x}$$

۳ قاعده زنجیری

از قاعده زنجیری[۲] برای محاسبه مشتق توابع چند متغیره به طوری که متغیرها هم تابعی از یک متغیر دیگر باشند استفاده می‌شود.

اگر $w = f(x, y)$ تابعی مشتق پذیر باشد و x و y هم توابعی مشتق‌پذیر از t باشند، آنگاه

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

نمایش مشتق در رابطه فوق گاهی با $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ و گاهی با $\frac{\partial}{\partial x}$ بوده است. در توابعی که تک متغیره هستند، مشتق نسبت به آن متغیر با $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ نمایش داده می‌شود. اما در توابع چند متغیره، مشتق نسبت به هر متغیر با $\frac{\partial}{\partial x}$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۰ اگر $w = x^2y^3$ که در آن $x(t) = \sin t$ و $y(t) = e^{-t}$ باشد، آنگاه در نقطه $t = \frac{\pi}{2}$، مقدار $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ را تعیین کنید.

پاسخ: ابتدا به کمک مشتق زنجیری رابطه مشتق برای تابع w تعیین می‌شود و سپس نقطه داده‌شده در آن جایگذاری می‌شود.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ &= (2xy^3)\cos t + 3x^2y^2(-e^{-t})\end{aligned}$$

$$t = \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad x = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad y = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -3e^{-\frac{3\pi}{2}}$$

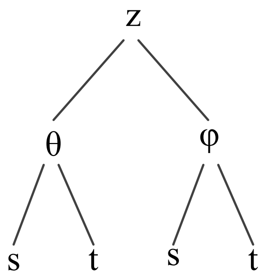
در برخی موارد که متغیرهای یک تابع، خود تابعی با بیش از یک متغیر هستند، می‌توان از یک نمودار به نام نمودار درختی برای محاسبه مشتق کمک گرفت. در مثال زیر این نمودار توضیح داده شده است.

مثال ۱۱ اگر $z = \sin\theta\cos\phi$ باشد، به طوری که $\theta = st^2$ و $\phi = s^2t$، آنگاه $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial t}$ را بدست آورید.

پاسخ: در نمودار درختی تمام ارتباطات بین توابع و متغیرها رسم می‌شود. این کار با اتصال خطوطی از توابع به متغیرها صورت می‌گیرد. با توجه به تابع داده شده، z تابعی از θ و ϕ است. همچنین θ نیز تابعی

[۲] Chain Rule

از s و t می‌باشد. برای ϕ نیز همین طور. با رسم نمودار درختی خواهیم داشت:



اکنون تمام مسیرهایی که از z به s منتهی می‌شود را برای تعیین عبارت $\frac{\partial z}{\partial s}$ مشخص می‌کنیم. در نتیجه مشتق خواسته شده به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial s} \\ &= (\cos\theta\cos\phi)(t^2) + (-\sin\theta\sin\phi)(2st)\end{aligned}$$

تمام مسیرهایی که از z به t منتهی می‌شود را برای تعیین عبارت $\frac{\partial z}{\partial t}$ مشخص می‌کنیم. در نتیجه مشتق خواسته شده به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= (\cos\theta\cos\phi)(2st) + (-\sin\theta\sin\phi)(s^2)\end{aligned}$$

مثال ۱۲ با استفاده از قاعده زنجیری مشتقات جزیی $\frac{\partial R}{\partial x}$ و $\frac{\partial R}{\partial y}$ را در نقطه $(x,y)=(1,1)$ بدست آورید.

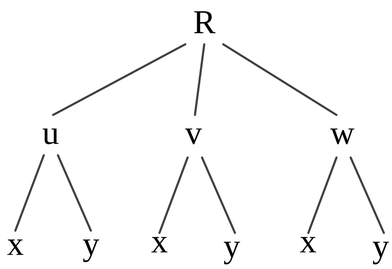
$$R=\ln(u^2+v^2+w^2), \qquad u=x+2y,\ v=2x-y,\ w=2xy$$

پاسخ: در نقطه مورد نظر مقادیر متغیرها به صورت زیر است:

$$u=3, \quad v=1, \quad w=2$$

با رسم نمودار درختی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{2u}{u^2+v^2+w^2}(1) + \frac{2v}{u^2+v^2+w^2}(2) + \frac{2w}{u^2+v^2+w^2}(2y) \\ &= \frac{2(3)}{3^2+1^2+2^2}(1) + \frac{2(1)}{3^2+1^2+2^2}(2) + \frac{2(2)}{3^2+1^2+2^2}(2) = \frac{9}{7}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y}&=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\\&=\frac{2u}{u^2+v^2+w^2}(2)+\frac{2v}{u^2+v^2+w^2}(-1)+\frac{2w}{u^2+v^2+w^2}(2x)\\&=\frac{2(3)}{3^2+1^2+2^2}(2)+\frac{2(1)}{3^2+1^2+2^2}(-1)+\frac{2(2)}{3^2+1^2+2^2}(2)=\frac{9}{7}\end{aligned}$$

۴ مشتق ضمنی

اگر y تابعی از x باشد و $F(x,y)=0$ تعریف شود، آنگاه با تعریف $w=F(u,v)$ که در آن $u(x)=x$ و $v(x)=y$ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

در رابطه فوق منظور از F_x و F_y به ترتیب $\frac{\partial F}{\partial x}$ و $\frac{\partial F}{\partial y}$ است.

با همین توصیف اگر داشته باشیم $F(x,y,z)=0$ و z تابعی از x و y باشد، آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

مثال ۱۳ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را در عبارت $yz=\ln(x+z)$ حساب کنید.

پاسخ: باید تمام عبارت در یک طرف تساوی و با هم نوشته شود.

$$yz-\ln(x+z)=0$$

سپس بر اساس رابطه مشتق ضمنی عمل شود:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-\frac{1}{x+z}}{y-\frac{1}{x+z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{z}{y-\frac{1}{x+z}}$$

مثال ۱۴ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در عبارت $x^2-z^2=y^3z^3-xyz^4$ حساب کنید.

پاسخ: باید تمام عبارت در یک طرف تساوی و با هم نوشته شود.

$$x^2-z^2-y^3z^3+xyz^4=0$$

سپس بر اساس رابطه مشتق ضمنی عمل شود:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x+yz^4}{-2z-3z^2y^3+4xyz^3}$$

۵ بردار گرادیان

بردار گرادیان برای تابع f در نقطه p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla f(p)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),\frac{\partial f}{\partial x_2}(p),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$$

در واقع گرادیان مشتق گرفتن از تک‌تک متغیرها و قرار دادن آن‌ها در یک بردار سطری است. در برخی مراجع از بردار ستونی برای نمایش بردار گرادیان تابع استفاده می‌شود.

مثال ۱۵ گرادیان توابع زیر بیابید

الف- $f(x,y)=x\sin y+x^2$ ب- $f(x,y)=\cos^2 y+\sin^2 x$

ج- $f(x,y,z)=e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ د- $f(x,y)=(xy)^2-\sin xy$

پاسخ: چون در این مثال نقطه خاصی مطرح نشده، گرادیان در حالت کلی و بر حسب x و y بدست می‌آید.

الف-

$$\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=(\sin y+2x,x\cos y)$$

ب-

$$\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=(2\cos x\sin x,-2\sin y\cos y)$$

ج-

$$\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=(\frac{xe^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{ze^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

د-

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (2xy^2 - y\cos xy, 2yx^2 - x\cos xy)$$

مثال ۱۶ بردار یکه گرادیان تابع $f(x,y) = x^2y - 2y^2$ را در نقطه $(-3,2)$ بدست آورید.

پاسخ: باید بردار گرادیان در نقطه داده شده بدست آید و سپس یکه گردد.

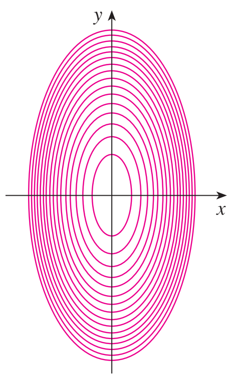
$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (2xy, x^2 - 4y) \overset{x=-3,\ y=2}{=} (-12, 1), \quad \Rightarrow \quad \hat{\nabla} f = \frac{1}{\sqrt{145}}(-12, 1)$$

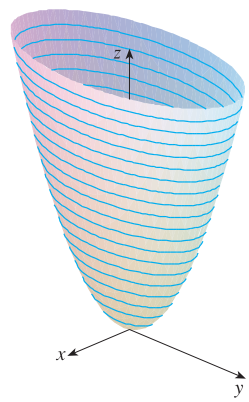
۶ تغییرات تابع با استفاده از بردار گرادیان

وقتی مقدار تغییر یک تابع در جهت خاصی مورد نظر باشد، مشتق سویی[۳] یا جهت‌دار مطرح می‌شود. در این حالت اگر تغییر مقادیر ورودی تابع در جهت بردار گرادیان و عمود بر سطوح تراز باشد، بیشترین افزایش در تابع رخ می‌دهد. در ادامه به معرفی دو مفهوم سطوح تراز و مشتق سویی پرداخته می‌شود.

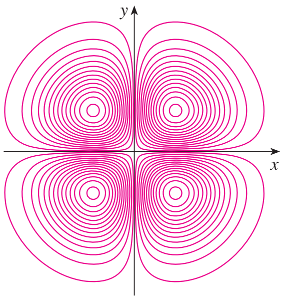
۱.۶ سطوح تراز یک منحنی

سطوح تراز یک تابع بخشی از نمودار است که در آن مقدار تابع یکسان بوده است. در شکل‌های زیر چند نمونه از منحنی‌ها و سطوح تراز آن‌ها نمایش داده شده است.

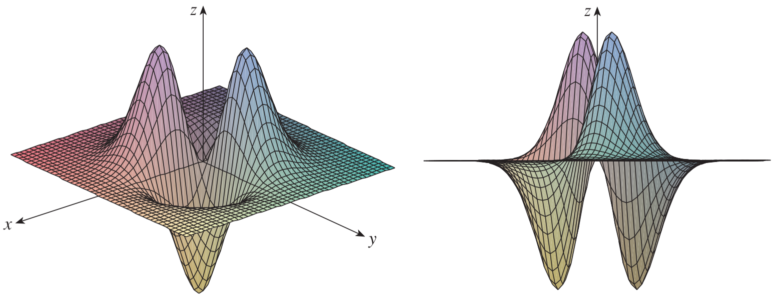




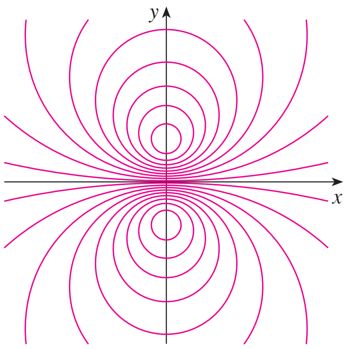
[۳] Directional derivative



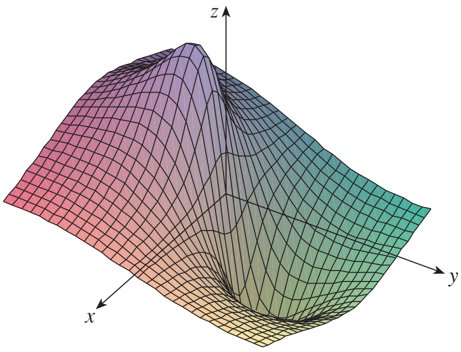
(a) Level curves of $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(b) Two views of $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

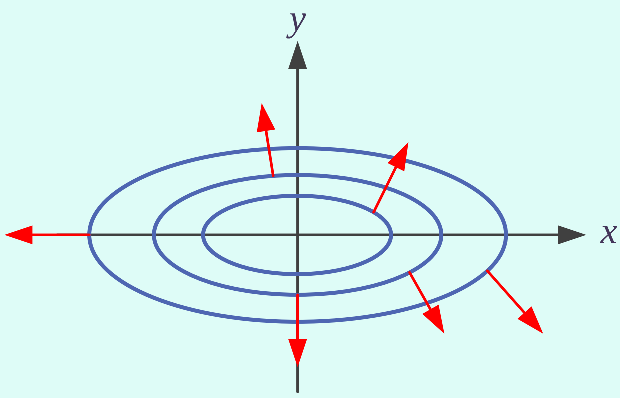


(c) Level curves of $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$



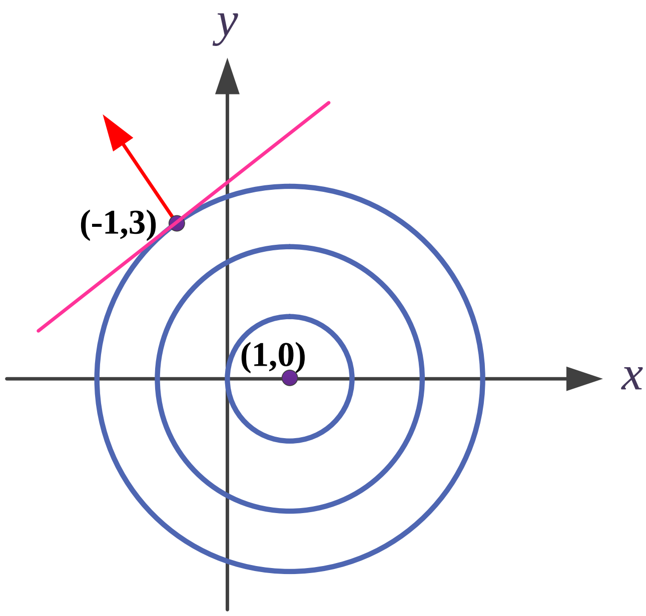
(d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

نکته: جهت بردار گرادیان همواره عمود بر سطوح تراز یک تابع است. در شکل زیر سطوح تراز تابع $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ نمایش داده شده است. همچنین بردار گرادیان در چند نقطه نشان داده شده که بر سطح تراز عمود است.



مثال ۱۷ بردار یکه‌ای را تعیین کنید که بر منحنی تراز تابع $f(x,y) = \sqrt{x^2-2x+y^2}$ در نقطه $(-1,3)$ عمود باشد.

پاسخ: منحنی داده‌شده یک مخروط رو به بالا است. سطوح تراز این مخروط دایروی هستند. به شکل زیر توجه کنید.



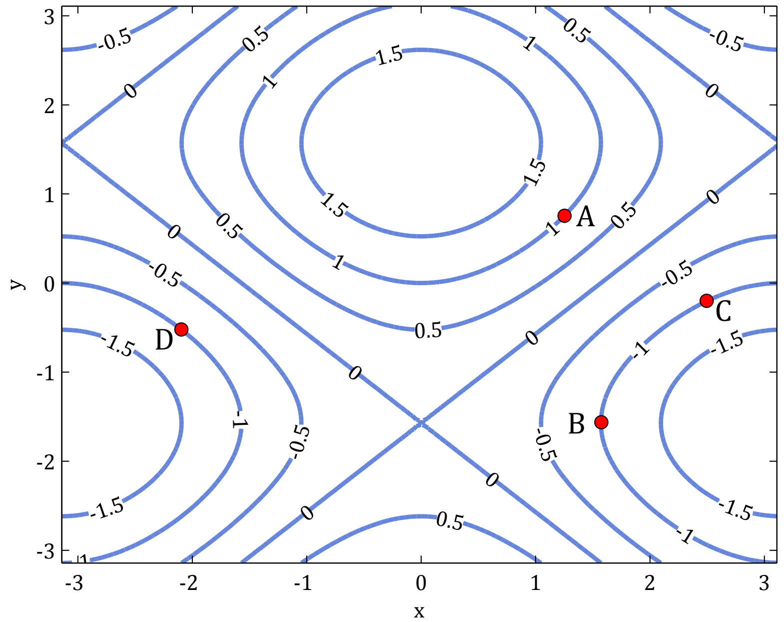
بر اساس شکل ارائه شده در سطوح تراز، گرادیان تابع در نقطه خاص برداری است که بر سطوح تراز عمود است. در نتیجه پاسخ این مثال بردار گرادیان در آن نقطه است. در ضمن از شکل مشخص است که پاسخ بدست آمده باید در جهت منفی محور x و مثبت محور y مولفه داشته باشد.

$$\vec{v} = \nabla f = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2-2x+y^2}}\right) \overset{(-1,3)}{=} \left(\frac{-2}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

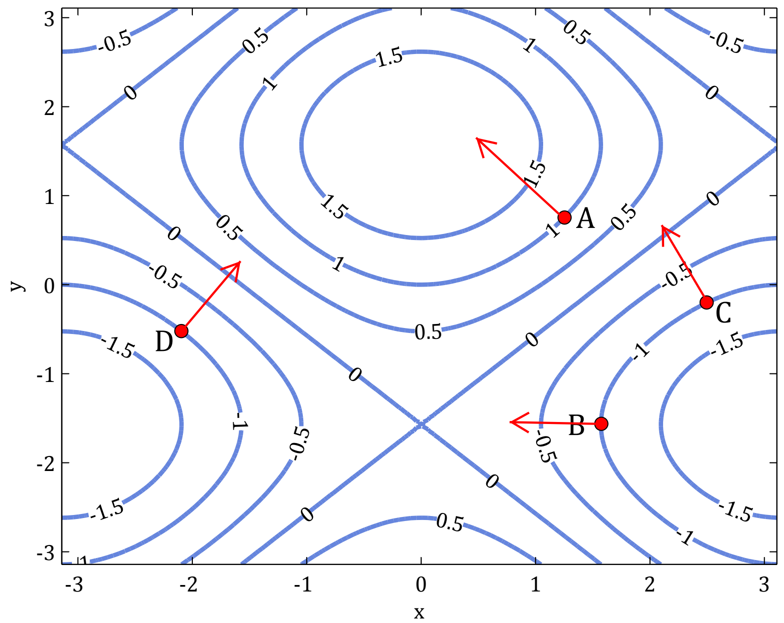
البته باید توجه داشت که بردار یکه خواسته شده است و باید بردار جدید یکه شود:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

مثال ۱۸ سطوح تراز یک تابع در شکل زیر نشان داده شده است. به طور تقریبی جهت بردار گرادیان را در نقاط A، B، C و D نشان دهید.



پاسخ: چون راستای گرادیان عمود بر سطوح تراز تابع و در جهت افزایش است، خواهیم داشت:



۲.۶ مشتق سویی بردار گرادیان

مشتق سویی بردار گرادیان تابع f در نقطه p و در جهت بردار یکه $\hat{u}$ به هر کدام از صورت‌های زیر نمایش داده می‌شود:

$$\frac{\partial f}{\partial u}f(p), \qquad D_u f(p)$$

تعریف مشتق سویی بردار گرادیان تابع f در نقطه p و در جهت بردار یکه $\hat{u}$ به صورت زیر است:

$$D_u f(p) = \nabla f(p).\hat{u}$$

اگر $\hat{u} = (1,0) = \hat{i}$ باشد، مشتق جهتی $\frac{\partial f}{\partial x}$ است.

اگر $\hat{u} = (0,1) = \hat{j}$ باشد، مشتق جهتی $\frac{\partial f}{\partial y}$ است.

نکته: بیشترین افزایش یک تابع در جهت بردار گرادیان آن است.

مثال ۱۹ مشتق جهت دار تابع $f(x,y) = e^x \tan y + 2x^2 y$ را در نقطه $(0, \frac{\pi}{4})$ و در جهت بردار $\vec{u} = \hat{i} - \hat{j}$ بدست آورید.

پاسخ:

$$\nabla f = (e^x \tan y + 4xy, e^x(1+\tan^2 y) + 2x^2) \overset{(0,\frac{\pi}{4})}{=} (1,2)$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

$$D_u f(0, \frac{\pi}{4}) = \hat{u}.\nabla f = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال ۲۰ مشتق سویی (جهت‌دار) تابع $\phi(x,y,z) = xy^2 + yz^3$ را در نقطه $(-2,-1,1)$ و در جهت بردار $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ بدست آورید.

پاسخ:

$$\nabla \phi = (y^2, 2yx + z^3, 3yz^2) \overset{(-2,-1,1)}{=} (1,5,-3)$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$$

$$D_u \phi(-2,-1,1) = \hat{u}.\nabla \phi = \frac{5}{3}$$

مثال ۲۱ بیشترین افزایش تابع $\phi(x,y,z) = x\sin z - y\cos z$ در مبدا به کدام جهت است؟

پاسخ: بیشترین افزایش یک تابع در جهت گرادیان آن است:

$$\nabla\phi = (\sin z, -\cos z, x\cos z + y\sin z) \overset{(0,0,0)}{=} (0,-1,0)$$

بردار فوق نشان می‌دهد که اگر تغییرات متغیرهای x، y و z در جهت تعیین شده باشند، مقدار تابع ϕ دارای بیشترین رشد خواهد بود.

مثال ۲۲ مشتق جهتی تابع $f(x,y)$ در نقطه $P(1,2)$ و در جهت نقاط $(2,2)$ و $(1,1)$ به ترتیب 2 و -2 است. مشتق این تابع در نقطه P و در جهت نقطه $(4,6)$ را بدست آورید.

پاسخ: رابطه مشتق جهتی در حالت کلی به صورت زیر است:

$$D_u f(p) = \nabla f(p).\hat{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2$$

در مسئله داده شده بردار u برای نقطه اول $u = (1,0)$ است. چون جهت آن از نقطه $(1,2)$ به $(2,2)$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 = 2, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2$$

بردار u برای نقطه دوم $u = (0,-1)$ است. چون جهت آن از نقطه $(1,2)$ به $(1,1)$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 = -2, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2$$

برداری که خواسته مسئله است از نقطه $(1,2)$ به $(4,6)$ متصل شده است:

$$\vec{u} = (4,6) - (1,2) = (3,4), \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = \frac{1}{5}(3,4)$$

مشتق جهت‌دار در این سوال به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 = (2)(\frac{3}{5}) + (2)(\frac{4}{5}) = \frac{14}{5}$$

۷ مقدار بهینه تابع چندمتغیره

برای محاسبه مقادیر بهینه در حالت تک متغیره عموماً مشتق برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه نقاط بیشینه و کمینه نسبی بدست می‌آمد. در حالت چندمتغیره گرادیان برابر با صفر قرار داده می‌شود و این نقاط تعیین می‌شوند. بنابراین نقاط بیشینه و کمینه نسبی برای تابع دو متغیره هنگامی رخ می‌دهند

که

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۲۳ کمینه مقدار توابع زیر را بدست آورید.

الف-

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 8y$$

ب-

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3x + \frac{5}{4}$$

پاسخ: گرادیان برابر با صفر قرار داده می‌شود:

الف-

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x - 2y - 4 \\ 4y - 2x + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ y = -2$$

با جایگذاری در تابع داریم:

$$\min f(x, y) = f(0, -2) = -8$$

ب-

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 3 \\ 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2},\ y = 0$$

با جایگذاری در تابع داریم:

$$\min f(x, y) = f(\frac{3}{2}, 0) = -1$$

۱.۷ آزمون مشتق دوم برای تعیین بیشینه یا کمینه نسبی

برابر قرار دادن بردار گرادیان با صفر تنها به یافتن نقطه اکسترمم منجر می‌شود و در مورد بیشینه یا کمینه نسبی بودن بحثی نمی‌کند. نیاز به مشتق دوم برای تعیین بیشینه یا کمینه بودن نقطه مورد نظر می‌باشد. سه روش در این بخش ارائه می‌شود که با توجه به صورت سوال، می‌توان از آن برای تعیین وضعیت نقطه

اکسترمم استفاده نمود.

دترمینان ماتریس مشتق دوم تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

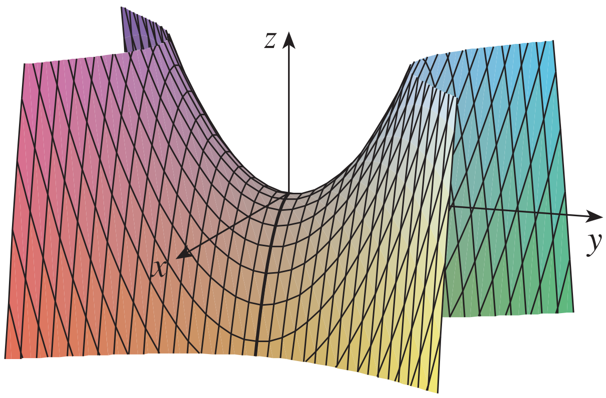
$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

روش اول آزمون ماتریس D:

- اگر $D > 0$ و $f_{xx} > 0$ نقطه (x_0, y_0) کمینه نسبی است.
- اگر $D > 0$ و $f_{xx} < 0$ نقطه (x_0, y_0) بیشینه نسبی است.
- اگر $D < 0$ تابع نقطه اکسترمم ندارد و نقطه (x_0, y_0) زین-اسبی[۴] است.

نقطه زین-اسبی در واقع نوعی نقطه است که همزمان برای یک مسیر بیشینه و برای یک مسیر دیگر کمینه است.

مثالی از این نقطه در شکل زیر نمایش داده شده است. در این شکل مبدا برای آن تابع یک نقطه زین-اسبی است.



مثال ۲۴ تعیین کنید در تابع زیر نقاط اکسترمم چه وضعیتی دارند؟

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

[۴] Saddle point

پاسخ: گرادیان برابر با صفر قرار داده می‌شود تا نقاط اکسترمم تعیین شوند و سپس از آزمون مشتق دوم استفاده می‌شود:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3 - 4y \\ 4y^3 - 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad y = x^3, \quad \Rightarrow \quad x^9 - x = 0, \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ \pm 1$$

سه نقطه اکسترمم به صورت زیر هستند:

$$(0,0), \quad (1,1), \quad (-1,-1)$$

ماتریس دترمینان مشتق دوم را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$D = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

برای نقطه $(0,0)$ داریم:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

این نقطه زین-اسبی است.

برای نقطه $(1,1)$ داریم:

$$D = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128 > 0,\ f_{xx} = 12 > 0$$

این نقطه کمینه نسبی است.

برای نقطه $(-1,-1)$ داریم:

$$D = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128 > 0,\ f_{xx} = 12 > 0$$

این نقطه کمینه نسبی است.

روش دوم آزمون مقدار ویژه‌های ماتریس H: ماتریس H همان ماتریس مشتق دوم است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

- اگر همه مقادیر ویژه ماتریس H مثبت بودند، نقطه (x_0, y_0) کمینه نسبی است.

- اگر همه مقادیر ویژه ماتریس H منفی بودند، نقطه (x_0, y_0) بیشینه نسبی است.

- اگر همه یکی از مقادیر ویژه ماتریس H منفی و دیگری مثبت بود، نقطه (x_0, y_0) زین-اسبی است.

مثال ۲۵ وضعیت نقاط اکسترمم در تابع زیر را تعیین کنید؟

$$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^4$$

پاسخ: گرادیان برابر با صفر قرار داده می‌شود تا نقاط اکسترمم تعیین شوند و سپس از آزمون مشتق دوم استفاده می‌شود:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x - y \\ -x + 4y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Rightarrow \ y = 4x, \ \Rightarrow \ -x + 4(4x)^3 = 0, \quad \Rightarrow \quad x = 0, \ \pm\frac{1}{16}$$

سه نقطه اکسترمم به صورت زیر هستند:

$$(0, 0), \quad (\frac{1}{16}, \frac{1}{4}), \quad (-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4})$$

ماتریس مشتق دوم را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

برای نقطه $(0, 0)$ داریم:

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(H - \lambda I) = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{5}$$

چون یکی از مقادیر ویژه مثبت و دیگری منفی است، این نقطه زین-اسبی است.

برای نقطه $(\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$ داریم:

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\det(H - \lambda I) = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{19}{8} \pm \sqrt{(\frac{19}{8})^2 - 3}, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.75, \ 4$$

چون هر دو مقدار ویژه مثبت هستند، این نقطه کمینه نسبی است.

برای نقطه $(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4})$ نیز شرایط فوق برقرار است و این نقطه نیز کمینه نسبی می‌باشد.

روش سوم آزمون مقدار دترمینان و اثر ماتریس H:

- اگر $\det H > 0$ و $trH > 0$، نقطه (x_0, y_0) کمینه نسبی است.
- اگر $\det H > 0$ و $trH < 0$، نقطه (x_0, y_0) بیشینه نسبی است.
- اگر $\det H < 0$، نقطه (x_0, y_0) زین-اسبی است.

مثال ۲۶ وضعیت اکسترمم را در تابع زیر تعیین کنید.

$$f(x,y) = -2x^2 + y^2 - 8x$$

پاسخ: گرادیان برابر با صفر قرار داده می‌شود تا نقاط اکسترمم تعیین شود و سپس از آزمون مشتق دوم استفاده می‌شود:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} -4x - 8 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Rightarrow \; x = -2, \; y = 0$$

این تابع یک اکسترمم دارد. ماتریس مشتق دوم را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$H = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

در نقطه $(-2, 0)$ داریم:

$$\det H = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0, \qquad trH = -2 < 0$$

چون دترمینان منفی شده، نقطه مورد نظر زین-اسبی است و اصلا نیازی به محاسبه اثر ماتریس نبود.

نکته: هنگامی که نقطه بهینه مطلق در یک فضای محدود خواسته شود، علاوه بر نقاط گرادیان برابر با صفر، باید روی مرزها هم مقدار بهینه بررسی شود. در نهایت بیشینه یا کمینه مطلق با جایگذاری نقاط در تابع اصلی تعیین می‌شوند.

مثال ۲۷ مقدار بیشینه و کمینه تابع $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ را در فضای داخل دایره و مرز آن به رابطه $x^2 + y^2 = 1$ تعیین کنید.

پاسخ:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Rightarrow \ x = \frac{1}{2}, \ y = 0$$

این نقطه اکسترمم داخل فضای داده شده است و بعداً مورد بررسی قرار می‌گیرد. اما با توجه به مرز دایره، باید مقدار بهینه روی مرز هم تعیین شود. از معادله دایره داریم:

$$y^2 = 1 - x^2$$

با جایگذاری در تابع داریم:

$$f = -x^2 - x + 2$$

مقدار بهینه تابع فوق در $x = -\frac{1}{2}$ روی می‌دهد. در این نقطه $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. پس سه نقطه وجود دارند که باید بررسی شوند:

$$(\frac{1}{2}, 0), \quad (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

در جدول زیر این نقاط با مقادیرشان نمایش داده شده‌اند:

(x_0, y_0)	$(\frac{1}{2}, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
f	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$

در نتیجه بیشینه و کمینه تابع داده شده تعیین می‌گردد:

$$\min f = -\frac{1}{4}, \qquad \max f = \frac{9}{4}$$

۲.۷ ضرایب لاگرانژ

مقدار بهینه تابع گاهی با وجود چند شرط باید محقق شود؛ به این معنا که یک بهینه‌سازی تحت یک یا چند شرط اجرا می‌شود. دیگر با برابر صفر قرار دادن گرادیان، نقطه بهینه بدست نمی‌آید. نقطه بهینه باید در شروط بهینه‌سازی هم صدق کند. در این موارد از پارامتری به نام ضریب لاگرانژ برای حل بهینه‌سازی استفاده می‌شود.

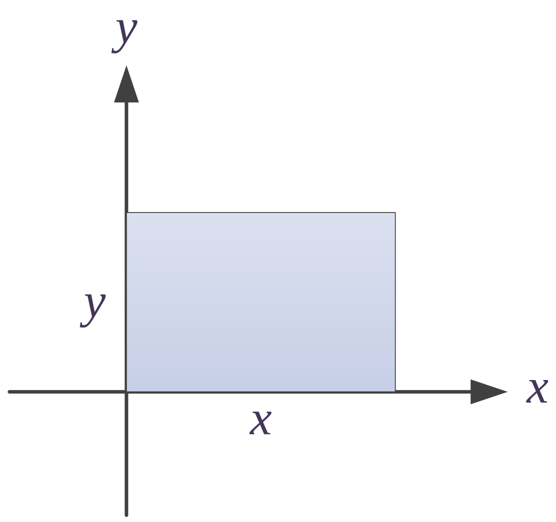
برای تعیین مقدار بهینه تابع $f(x,y)$ هنگامی که $g(x,y)=0$ است، باید معادله زیر حل شود:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

مثال ۲۸ بیشترین مقدار مساحت یک مستطیل هنگامی که محیط آن 1600 متر باشد را تعیین کنید.

پاسخ: برای یک مستطیل به طول x و عرض y، مقدار محیط به صورت زیر است:

$$2x + 2y = 1600$$



از طرفی رابطه مساحت

$$A = xy$$

می‌باشد. باید بهینه‌سازی برای تابع A با شرط محیط ثابت حل شود.

$$\begin{aligned} &\textit{maximize} \quad xy \\ &\textit{subject to} \quad x + y = 800 \end{aligned}$$

در این مسئله $f = xy$ و $g = x + y - 800$ می‌باشد.

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \lambda = x,\ \lambda = y$$

با جایگذاری در شرط داریم:

$$x + y - 800 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda + \lambda - 800 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 400$$

نقطه بهینه با توجه به محاسبه فوق $x = 400,\ \ y = 400$ می‌باشد.

$$\max A = 160000$$

مثال ۲۹ مقادیر بهینه را با توجه به شروط موجود تعیین کنید.

الف-

$$f(x,y) = x^2 - y^2; \qquad 2x + y = 1$$

ب-

$$f(x,y) = 3x + y; \qquad x^2 + y^2 = 10$$

ج-

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

پاسخ:

الف- چون بهینه‌سازی با شرط داده شده باید از روش ضرایب لاگرانژ استفاده نمود.

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \lambda, \quad y = -\frac{\lambda}{2}$$

با جایگذاری این مقادیر در شرط بهینه‌سازی خواهیم داشت:

$$2\lambda + (-\frac{\lambda}{2}) = 1, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

نقطه بهینه $x = \frac{2}{3},\ y = -\frac{1}{3}$ می‌باشد.

ب- چون بهینه‌سازی با شرط داده شده باید از روش ضرایب لاگرانژ استفاده نمود.

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda x = \frac{3}{2}, \quad \lambda y = \frac{1}{2}$$

از رابطه فوق

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}$$

با جایگذاری این مقادیر در شرط بهینه‌سازی خواهیم داشت:

$$(\frac{3}{2\lambda})^2+(\frac{1}{2\lambda})^2=10, \quad \Rightarrow \quad \frac{9+1}{4\lambda^2}=10, \quad \Rightarrow \quad \lambda^2=\frac{1}{4}, \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm\frac{1}{2}$$

با این مقدار λ، مقادیر x و y به صورت زیر هستند:

$$\lambda=\frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad x=3,\ y=1$$

$$\lambda=-\frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad x=-3,\ y=-1$$

با جایگذاری این نقاط در تابع f خواهیم داشت:

$$f(3,1)=10, \quad f(-3,-1)=-10$$

که به ترتیب مقادیر بیشینه و کمینه تابع فوق هستند.

نکته: برای تعیین بیشینه یا کمینه بودن نقاط باید از سه آزمون مطرح شده در جزوه استفاده نمود. هر سه روش بر مبنای تعیین علامت ماتریس مشتق دوم هستند. البته در مسئله فوق به دلیل آنکه تابع از درجه یک است ماتریس مشتق دوم آن صفر می‌شود و باید از روی جایگذاری نقاط و مشاهده مقدار، تصمیم به بیشینه یا کمینه بودن آن‌ها گرفت.

ج- چون بهینه‌سازی با شرط داده شده باید از روش ضرایب لاگرانژ استفاده نمود.

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}4x^3\\4y^3\\4z^3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}2x\\2y\\2z\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{1}{2}\lambda, \quad y^2=\frac{1}{2}\lambda, \quad z^2=\frac{1}{2}\lambda$$

در رابطه فوق فرض شده است که $x,y,z\neq 0$ با جایگذاری این مقادیر در شرط بهینه‌سازی خواهیم داشت:

$$(\frac{1}{2}\lambda)+(\frac{1}{2}\lambda)+(\frac{1}{2}\lambda)=3, \quad \Rightarrow \quad \lambda=2$$

$$\lambda=2, \quad \Rightarrow \quad x=\pm1,\ y=\pm1,\ z=\pm1$$

با جایگذاری این نقاط در تابع اصلی مقدار کمینه تابع فارغ از علامت آن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\min f(x,y,z)=3$$

به این دلیل مقدار بدست آمده کمینه است که مثلا می‌توان نقطه دیگری یافت که شرط را برآورده می‌کند، اما مقدار تابع در این نقطه بیشتر است. به عنوان مثال نقطه $(\sqrt{3},0,0)$ منجر به مقدار 9 می‌شود.

نکته: اگر دو شرط برای بهینه‌سازی وجود داشته باشد، باید از دو ضریب لاگرانژ استفاده نمود و معادله زیر باید حل شود:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \\ g_1 = 0, \quad g_2 = 0 \end{cases}$$

مثال ۳۰ مقدار بیشینه و کمینه $f(x,y,z) = -x+y+z$ را با توجه به شروط $x^2+y^2=1$ و $x+y+z=1$ تعیین کنید.

پاسخ:

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

از سطر سوم معادله فوق $\lambda_2 = 1$ بدست می‌آید. از سطرهای اول و دوم داریم:

$$x = -\frac{1}{\lambda_1}, \quad y = 0$$

با جایگذاری این مقادیر در شرط اول $\lambda_1 = \pm 1$ بدست می‌آید. در نتیجه فعلاً متغیرهای $x=\pm 1,\ y=0$ بدست آمده‌اند. با جایگذاری در شرط سوم نقاط اکسترمم به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$(1,0,0), \quad (-1,0,2)$$

در جدول زیر به ازای نقاط اکسترمم، مقادیر تابع مشخص شده است.

(x_0,y_0,z_0)	$(1,0,0)$	$(-1,0,2)$
f	-1	3

$$\Rightarrow \quad \max f = 3, \quad \min f = -1$$

مثال ۳۱ مقدار بیشینه و کمینه $f(x,y,z) = xyz$ را با توجه به شرط $x^2+2y^2+3z^2=6$ تعیین کنید.

پاسخ: چون بهینه‌سازی با شرط داده شده باید از روش ضرایب لاگرانژ استفاده نمود.

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad yz = 2\lambda x, \quad xz = 4\lambda y, \quad xy = 6\lambda z$$

اگر هر کدام از متغیرها صفر شوند، به معنای آن است که بقیه هم باید صفر باشند که این موضوع با شرط داده شده در تناقض است. در نتیجه فرض می‌شود $x, y, z \neq 0$. با برابر قرار دادن مقادیر λ از هر سه معادله داریم:

$$\frac{yz}{2x} = \frac{xz}{4y} = \frac{xy}{6z}$$

از معادلات فوق بدست می‌آید:

$$x^2 = 2y^2, \quad y^2 = \frac{3}{2}z^2, \quad x^2 = 3z^2$$

با جایگذاری در شرط داریم:

$$3z^2 + 2(\frac{3}{2}z^2) + 3z^2 = 6, \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

با این مقدار برای متغیرهای دیگر هم داریم:

$$x = \pm\sqrt{2}, \quad y = \pm 1$$

بنابراین هشت نقطه اکسترمم بدست می‌آید که عبارتند از

تعداد نقطه	x	y	z
1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
2	$\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
3	$\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
4	$\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
5	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
6	$-\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
7	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
8	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$

با جایگذاری این نقاط در تابع اصلی بیشینه مقدار $\frac{2}{\sqrt{3}}$ و کمینه مقدار $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ بدست می‌آید.

مثال ۳۲ مقدار بیشینه و کمینه تابع با ضابطه $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ را با توجه به شرط $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ تعیین کنید.

پاسخ: از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌شود.

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_n \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{2\lambda}$$

$$(\frac{1}{2\lambda})^2 + (\frac{1}{2\lambda})^2 + \cdots + (\frac{1}{2\lambda})^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{4\lambda^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{n}}{2}$$

مقدار متغیرها به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

مقدار بیشینه و کمینه تابع داده شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\max f = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$$\min f = -\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{n}} = -\frac{n}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n}$$

مثال ۳۳ کمترین فاصله نمودار $z^2 = x + 2y - 3$ را نسبت به مبدأ مختصات بیابید.

پاسخ: منظور از این مسئله، کمینه مقدار تابع فاصله نقطه (x, y, z) از مبدأ است. می‌دانیم فاصله این نقطه از مبدأ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

برای آسان شدن محاسبه، می‌توان مقدار D^2 را بهینه کرد که آن را f می‌نامیم. شرط مسئله این است که این نقطه باید روی نمودار $z^2 = x + 2y - 3$ واقع باشد. پس مسئله تبدیل به بهینه‌سازی تابع $f = x^2 + y^2 + z^2$ با توجه به شرط $g = x + 2y - 3 - z^2 = 0$ قابل حل است. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ:

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2z \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\lambda}{2}, \ y = \lambda, \ (1+\lambda)z = 0$$

در معادله سوم دو حالت متصور است. اول آنکه $\lambda = -1$ باشد و دوم آنکه $\lambda \neq -1$. برای حالت اول خواهیم داشت:

$$x = -\frac{1}{2},\ y = -1, \quad \Rightarrow \quad z^2 = x + 2y - 3 = -5.5$$

چون این عبارت غیرقابل قبول است حالت اول رد می‌شود. برای حالت دوم داریم:

$$\lambda \neq -1 \quad \Rightarrow \quad z = 0,\ x = \frac{\lambda}{2},\ y = \lambda$$

با جایگذاری عبارت‌های فوق در شرط:

$$z^2 = x + 2y - 3, \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\lambda}{2} + 2\lambda - 3, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{6}{5}$$

پس نقطه کمینه به صورت زیر خواهد بود:

$$x = \frac{3}{5},\ y = \frac{6}{5},\ z = 0$$

مقدار کمینه فاصله از مبدأ به صورت زیر است:

$$\min D = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{6}{5})^2 + (0)^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

مثال ۳۴ کوتاهترین فاصله بین دو نمودار $y = x^2$ و $y = -x - 1$ را بدست آورید.

پاسخ: نقطه روی سهمی را (x_1, x_1^2) و نقطه روی خط را $(x_2, -x_2 - 1)$ در نظر می‌گیریم. آنگاه فاصله بین این دو نقطه به صورت $D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ در می‌آید. از آنجایی که این عبارت همواره مثبت است، برای سادگی محاسبه می‌توان به جای D، D^2 را که از این به بعد با L نشان داده می‌شود، بهینه نمود. از طرفی چون $y_1 = x_1^2$ و $y_2 = -x_2 - 1$ در نتیجه

$$L = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 + x_2 + 1)^2$$

با برابر قرار دادن گرادیان با صفر خواهیم داشت:

$$\nabla L = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2) + 2(2x_1)(x_1^2 + x_2 + 1) \\ -2(x_1 - x_2) + 2(x_1^2 + x_2 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

رابطه فوق منجر به دستگاه دومعادله-دومجهول زیر می‌شود:

$$\begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 - x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

با ضرب $-2x_1$ در سطر دوم $(*)$ و جمع با سطر اول عبارت زیر بدست می‌آید:

$$(x_1 - x_2)(2x_1 + 1) = 0, \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2, \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

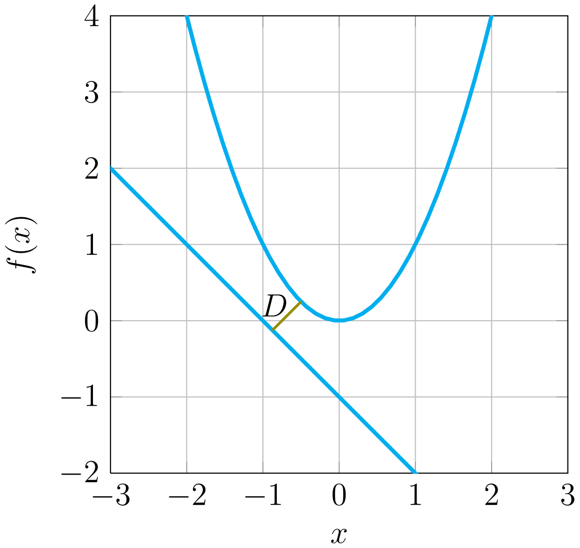
اگر جواب $x_1 = x_2$ در سطر دوم $(*)$ جایگذاری شود، جواب حقیقی ندارد، پس غیرقابل قبول است. اما با جایگذاری $x_1 = -\frac{1}{2}$ در سطر دوم $(*)$ خواهیم داشت

$$x_2 = -\frac{7}{8}$$

در نتیجه نقطه روی سهمی $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ و نقطه روی خط $(-\frac{7}{8}, -\frac{1}{8})$ بدست می‌آید که فاصله بین این دو جواب مسئله است.

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(-\frac{1}{2} + \frac{7}{8})^2 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{8})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

در شکل زیر دو نمودار و کمینه فاصله بین این دو نشان داده شده است.



۸ تمرین

۱. در توابع زیر $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ را بدست آورید.

الف- $f(x,y) = \ln(xy - y^2)$ ب- $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

۲. در توابع زیر $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ را بدست آورید.

الف- $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[5]{5x^3 - xy^2}}{x^2+5y^2}$ ب- $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{x^2-xy+2y^2}{(4x-y)^2}$

۳. اگر M تابعی از x و y و هر کدام از x و y تابعی از s و t باشند، با فرض آنکه s و t تابعی از u و v و w هستند، نمودار درختی قابل استفاده در قاعده زنجیری را رسم کنید.

۴. با استفاده از قاعده زنجیری، مشتقات جزیی $\frac{\partial M}{\partial u}$ و $\frac{\partial M}{\partial v}$ را در نقطه $(u,v) = (1,-1)$ بدست آورید.

$$M = xe^{y-z^2}, \qquad x = 2uv, \quad y = u - v, \quad z = u + v$$

۵. مقدار $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ و $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ را در عبارات زیر حساب کنید.

الف- $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

ب- $\sqrt[3]{xy} + \ln z = \tan^{-1}(xz)$

۶. بردار گرادیان را برای توابع زیر بدست آورید.

الف- $f(x,y) = \tan\dfrac{x-y}{x+y}$ ب- $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1 - x_2x_3^2 + 5x_2x_4x_5^3$

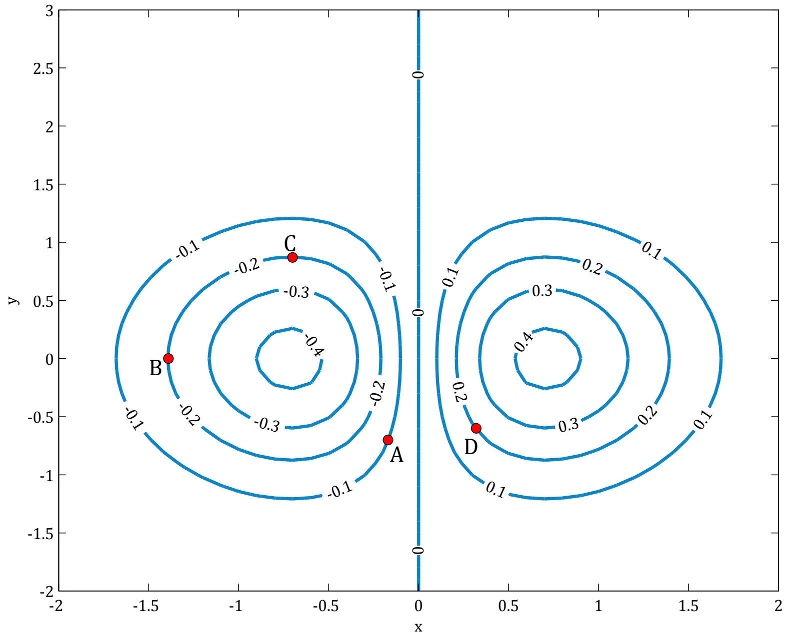
۷. مشتق سویی را در نقاط و جهت‌های تعیین شده بدست آورید.

الف- $\vec{u} = 2\hat{i} - \hat{j}$ ، $(-1,1)$ ، $f(x,y) = \cos(2x+2y)$

ب- $\vec{u} = (1,2)$ ، $(2,-1)$ ، $f(x,y) = 2xy^3 + x^2y$

۸. جهتی را بیابید که در آن مشتق سویی تابع $f(x,y) = ye^{-xy}$ در نقطه $(0,2)$ دارای اندازه واحد باشد.

۹. در شکل زیر سطوح تراز یک نمودار نشان داده شده‌اند. جهت بردار گرادیان را در نقاط A، B، C و D به طور تقریبی رسم کنید.



۱۰. بیشینه حجم یک مکعب مستطیل را به شرطی که مجموع اضلاع آن برابر با مقدار ثابت c و یک ضلع آن برابر با مجموع دو ضلع دیگر باشد بیابید.

۱۱. نقطه‌ای روی نمودار $x^2 = 1 + 4yz$ بیابید که نزدیک‌ترین فاصله را با مبدأ داشته باشد.

۱۲. صفحه $x + y + 2z = 2$ با سهمی $z = x^2 + y^2$ در یک خم دارای نقاط مشترک هستند. دورترین و نزدیک‌ترین فاصله این خم از مبدأ را بیابید.

۱۳. مقدار بیشینه و کمینه $f(x, y, z) = x + 2y$ را با توجه به شروط $y^2 + z^2 = 4$ و $x + y + z = 1$ تعیین کنید.

آدم‌های منفی به پیچ و خم جاده می‌اندیشند و آدم‌های مثبت به زیبایی‌های امتداد مسیر، ممکن است هر دو به مقصد برسند، اما یکی با حسرت و دیگری با لذت!

AvaEducation16.blog.ir
@AvaEducation16
@AvaEducation16
AvaEducation16@gmail.com