

۱۰۲ مسأله ترکیبیات

تألیف تیتو آندریسکو / زومینگ فنگ
ترجمه ارشک حمیدی



سرای ریاضی (خانه ی ریاضی)

<http://www.math-home.ir>

کتاب ۱۰۲ مسأله ترکیبیات از مسأله‌هایی تشکیل شده است که با دقت فراوان از میان مسأله‌هایی که برای آموزش اعضای تیمهای اعزامی از امریکا به المپیاد بین‌المللی ریاضی استفاده شده، دست‌چین شده‌اند. مسأله‌های این کتاب طوری انتخاب و مرتب شده‌اند که مهارت‌ها و تواناییهای دانش‌آموزان در حل کردن مسأله‌های ترکیبیات رفته رفته گسترش یابد. مطالعه این کتاب برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در مسابقه‌هایی از نوع المپیادهای ریاضی، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان مفید است.



مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

زیر نظر :

یحیی تابش

عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف

عضو کمیته ملی المپیاد ریاضی

امید علی کرمزاده

عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)

عضو کمیته ملی المپیاد ریاضی

از کتابهای این مجموعه



- نظریه اعداد
 - هندسه
 - جبر
 - آنالیز
 - ترکیبیات
 - هنر مسئله حل کردن
- کتابهای زود**

کتابهای نارنجی

- هندسه مسطحه
- پانصد مسئله ریاضی پیکار جو
- از اردوش تا کی یف
- دایره ها
- فنون مسئله حل کردن
- محافل ریاضی
- مباحثی از هندسه
- ۱۰۲ مسئله ترکیبیات



کتابهای قرمز

- حل مسئله از طریق مسئله
- برگزیده مسئله های جبر و آنالیز
- المپیادهای ریاضی چین
- استراتژیهای مسئله حل کردن





۱۰۲ مسأله ترکیبات

تألیف تیتو آندریسکو/ زومینگ فنگ
ترجمه ارشک حمیدی

102 Combinatorial Problems

From the Training of the USA IMO Team

Titu Andreescu/Zuming Feng

Birkhäuser, 2003

۱۰۲ مسأله ترکیبیات

مؤلفان: تیتو آندریسکو، زومینگ فنگ

مترجم: ارشک حمیدی

ویراستار: بردیا حسام

ناشر: مؤسسه فرهنگی فاطمی

چاپ اول، ۱۳۸۳

شابک ۹۶۴-۳۱۸-۳۷۵-۰

ISBN 964-318-375-0

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسه فرهنگی فاطمی

- مدیر تولید: فرید مصلحی

- طراح جلد: زهرا قورچیان

- حروفچینی و صفحه‌بندی (TeX-ماپرک): مریم مهری

- رسامی: فاطمه ثقفی

- نظارت بر چاپ: علیرضا رضانزاد

لیتوگرافی: صاحب

چاپ و صحافی: چاپخانه معراج

کلیه حقوق برای مؤسسه فرهنگی فاطمی محفوظ است.

مؤسسه فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ - خیابان دکتر فاطمی، شماره ۱۵۹

تلفن: ۸۹۶۱۴۲۲ - ۸۹۶۴۷۷۰ - ۸۹۵۶۲۵۸

info@fatemi.ir



Andreescu, Titu

آندریسکو، تیتو، ۱۹۵۶ - م.

۱۰۲ [صد و دو] مسأله ترکیبیات / تألیف تیتو آندریسکو، زومینگ فنگ؛ ترجمه ارشک حمیدی، ویرایش بردیا حسام. - تهران: فاطمی، ۱۳۸۳.

دوازده، ۱۳۶ ص. (مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی)

ISBN 964-318-375-0

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

102 Combinatorial problems:

from the training of the USA lmo team, c2003.

Feng, م.

۱. المپیادها (ریاضیات). ۲. آنالیز ترکیبی - مسائل، تمرینها و غیره. الف. فنگ، زومینگ، ۱۹۷۰ - م. Zuming ب. حمیدی، ارشک، ۱۳۵۲ - م. مترجم، ج. عنوان.

۲۳۴/۲۳۸

L۲۳۰۶۰/۲۴/۱۸۵۳۲

۱۳۸۳

۸۳-۲۶۸۷ م

کتابخانه ملی ایران

فهرست مطالب

هفت	آمادگی برای المپیاد ریاضی
نه	پیشگفتار
یازده	مقدمه
۱	۱ مسأله‌های مقدماتی
۹	۲ مسأله‌های پیشرفته
۱۹	۳ راه‌حل مسأله‌های مقدماتی
۵۹	۴ راه‌حل مسأله‌های پیشرفته
۱۳۵	فهرست برخی نمادها

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان. هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست و یکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادها و ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر المپیاد ریاضی اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بيفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ اتووش به نام بارون لوراند اتووش^۱ به صورت مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به کار گرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی المپیاد بین‌المللی ریاضی شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

1. Baron Loránd Eötvös

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو مؤسسهٔ انتشارات فاطمی به انتشار مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

این کتاب از دستهٔ دوم و شامل ۱۰۲ مسألهٔ ترکیبیات است که با دقت فراوان از میان مسأله‌هایی که برای آموزش اعضای تیمهای اعزامی از آمریکا به المپیاد بین‌المللی ریاضی استفاده شده دست‌چین شده‌اند.

مسأله‌های این کتاب طوری انتخاب و مرتب شده‌اند که مهارتها و تواناییهای دانش‌آموزان در ترکیبیات رفته‌رفته گسترش یابند.

پیشگفتار

این کتاب شامل ۱۰۲ مسأله ترکیبیات است که با دقت فراوان از میان مسأله‌هایی که برای آموزش و سنجش اعضای تیمهای اعزامی از آمریکا به المپیاد بین‌المللی ریاضی استفاده شده دست‌چین شده‌اند. این کتاب مجموعه‌ای از سؤالهای بسیار دشوار و غیرقابل فهم نیست. مسأله‌های این کتاب طوری انتخاب و مرتب شده‌اند که مهارت‌ها و تواناییهای دانش‌آموزان در ترکیبیات رفته‌رفته گسترش یابند. هدف این کتاب، وسعت بخشیدن به دیدگاه ریاضی دانش‌آموزی است که می‌خواهد در مسابقه‌های ریاضی شرکت کند. آشنایی با فنون و رموز مسأله حل کردن باعث ایجاد علاقه به ترکیبیات و سایر شاخه‌های ریاضی می‌شود.

مقدمه

در ایالات متحده آمریکا، مراحل انتخاب اعضای تیم برای شرکت در المپیاد بین‌المللی ریاضی از چند مسابقه ملی تشکیل شده است که عبارت‌اند از مسابقه ریاضی آمریکا-۱۰، مسابقه ریاضی آمریکا-۱۲، آزمون دعوتی ریاضیات آمریکا و المپیاد ریاضی ایالات متحده آمریکا. شرکت در آزمون دعوتی ریاضیات آمریکا و المپیاد ریاضی ایالات متحده آمریکا منحصرأً از طریق دعوت از دانش‌آموزان، براساس نتایج آنها در امتحانهای مراحل قبلی ممکن است. دوره تابستانی المپیاد ریاضی دوره‌ای آموزشی و چهار هفته‌ای فشرده برای حدود یکصد تن از دانش‌آموزان فوق‌العاده مستعدی است که برترینهای مسابقه‌های ریاضی آمریکا شناخته شده‌اند. شش دانش‌آموزی که اعضای تیم ایالات متحده آمریکا در المپیاد بین‌المللی ریاضی هستند، براساس نمره‌هایشان در المپیاد ریاضی ایالات متحده آمریکا و امتحانات دیگری که در خلال دوره تابستانی المپیاد ریاضی برگزار می‌شوند انتخاب می‌شوند. دانش‌آموزان در دوره تابستانی المپیاد ریاضی، روزهایی پرمشغله دارند، باید در کلاسها شرکت کنند و برای آمادگی پیدا کردن در چند شاخه مهم ریاضیات تعداد زیادی مسأله را حل کنند. موضوعاتی که مطرح می‌شوند شامل استدلالها و اتحادهای ترکیبیاتی، تابعهای مولد، نظریه گراف، رابطه‌های بازگشتی، مجموعه‌ها و حاصل‌ضربها، احتمالات، نظریه اعداد، چندجمله‌ایها، نظریه معادلات، اعداد مختلط در هندسه، اثباتهای الگوریتمی، هندسه ترکیبیاتی و پیشرفته، معادلات تابعی و نابرابریهای کلاسیک است. امتحانات نهایی از نوع المپیاد از چند مسأله پیکارجو اما ساده‌فهم تشکیل می‌شوند. معمولاً برای پیدا کردن راه‌حلهای درست باید تحلیلی عمیق و استدلالی دقیق کرد. ممکن است سؤالهای المپیادی برای تازه‌کاران گیج‌کننده به‌نظر برسد، با این حال اکثر این سؤالها را می‌توان با فنون ریاضیات دبیرستانی، که البته هوشمندانه به‌کار برده می‌شوند، حل کرد.

به دانش آموزانی که می خواهند مسأله های این کتاب را حل کنند چند توصیه می کنیم.

- مواظب وقتتان باشید! تعداد بسیار کمی از شرکت کنندگان می توانند همه مسأله های داده شده را حل کنند.
- سعی کنید ارتباطی بین مسأله ها پیدا کنید. موضوع مهم این است که همه فنون و ایده های مهمی که در این کتاب آمده اند بیشتر از یک بار به کار می آیند!
- راه حل مسأله های المپادی بلافاصله به ذهن نمی آید. حوصله کنید. شیوه های مختلفی را بیازمایید. حالت های ساده را بررسی کنید. گاهی استفاده از روش بازگشت از حکم خواسته شده مفید است.
- حتی اگر مسأله ای را حل کردید راه حل آن را بخوانید. ممکن است در این راه حل ایده هایی مطرح شده باشد که در راه حل شما نباشد و در راه حلها از فوت و فنهایی بحث شده باشد که جای دیگر نیز به کار می آیند. همچنین، این راه حلها نمونه هایی از راه حل های زیبایی هستند که می توانید از آنها الگو برداری کنید، البته معمولاً در آنها فرایند پیچیده ای که منجر به کشف راه حل شده نامشخص است، همین طور گامهای ابتدایی که اشتباه بوده اند، ایده های بکر و توجه به جزئیات. وقتی که راه حلها را می خوانید، سعی کنید تفکراتی را که در پس آنهاست بازسازی کنید. از خودتان بپرسید: «ایده های کلیدی کدام اند؟ چگونه می توانم باز هم از این ایده ها استفاده کنم؟»
- بعد ببینید که آیا می توانید مسأله را از راه دیگری حل کنید؟ خیلی از مسأله ها چندین راه حل دارند، اما همه آنها را در این کتاب نیاورده ایم.
- مسأله حل کردن هدفمند احتیاج به تمرین دارد. اگر در ابتدا مشکل داشتید ناامید نشوید.

مسأله‌های مقدماتی

۱. آقا و خانم گلپور می‌خواهند نام فرزندشان را طوری بگذارند که حروف اول سه کلمه اسم و فامیلش به ترتیب حروف الفبا باشند و تکراری نباشند. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟

۲. کمدهای دانش‌آموزان در مدرسه المپیک پشت سر هم شماره خورده‌اند و شماره اولین کمد ۱ است. قیمت هر قطعه از رقمهای پلاستیکی که برای شماره‌گذاری به‌کار می‌روند دو تومان است. بنابراین، شماره‌گذاری کمد شماره ۹ دو تومان و شماره‌گذاری کمد شماره ۱۰ چهار تومان خرج دارد. اگر هزینه شماره‌گذاری همه کمدها ۱۳۷۹۴ تومان شده باشد، در این مدرسه چند کمد وجود دارد؟

۳. فرض کنید n عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد. ثابت کنید تعداد عددهای فرد در دنباله

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

عددی فرد است.

۴. چند عدد طبیعی که از ۲۰۰۱ بزرگتر نیستند مضرب ۳ یا ۴ اند اما مضرب ۵ نیستند؟

۵. فرض کنید

$$x = 0, 123456789101112 \dots 998999$$

که در آن رقمهای بعد از ممیز با نوشتن عددهای طبیعی از ۱ تا ۹۹۹ به‌دنبال هم به‌دست آمده‌اند. رقم ۱۹۸۳ام سمت راست ممیز را پیدا کنید.

۶. بیست و پنج دانش آموز و بیست و پنج معلم دور میزی نشسته‌اند. ثابت کنید که می‌توان کسی را پیدا کرد که کنار دستهایش معلم‌اند.

۷. در پایان یک دوره مسابقات قهرمانی بولینگ، پنج نفر اول به طور حذفی مسابقه می‌دهند. ابتدا نفر پنجم با نفر چهارم مسابقه می‌دهد. بازنده جایزه پنجم را می‌گیرد و برنده با نفر سوم مسابقه می‌دهد. بازنده این مسابقه جایزه چهارم را می‌گیرد و برنده آن با نفر دوم مسابقه می‌دهد. بازنده این مسابقه جایزه سوم را می‌گیرد و برنده آن با نفر اول مسابقه می‌دهد. برنده این بازی جایزه اول را می‌گیرد و بازنده آن جایزه دوم را می‌گیرد. به چند ترتیب نفرات اول تا پنجم می‌توانند جایزه‌ها را تصاحب کنند؟

۸. عنکبوت به هر پایش یک جوراب و یک کفش می‌کند. اگر قرار باشد که ابتدا جوراب پوشیده شود بعد کفش، عنکبوت به چند طریق مختلف می‌تواند جورابها و کفشهایش را به پا کند؟

۹. در کشویی که در اتاقی تاریک قرار دارد 100 جوراب قرمز، 80 جوراب سبز، 60 جوراب آبی و 40 جوراب مشکی وجود دارد. پسر بچه‌ای هر بار یک جوراب از این کشو انتخاب می‌کند، اما نمی‌تواند رنگ جورابی را که بیرون آورده است ببیند. کمترین تعداد جورابهایی که باید درآورد تا مطمئن شد که در میان جورابهای بیرون آورده شده دست‌کم 10 جفت جوراب وجود دارد چند تا است؟ (هر جفت جوراب، دو جوراب یک‌رنگ است. هیچ جورابی را نمی‌توان در بیش از یک جفت شمرد.)

۱۰. عددی گویا مفروض است. این عدد را به شکل کسری ساده‌نشده بنویسید و حاصل ضرب صورت و مخرج آن را حساب کنید. به ازای چندتا از عددهای گویا میان 0 و 1 این حاصل ضرب برابر با 20 است؟

۱۱. به چند طریق می‌توان پنج عدد از میان نخستین هجده عدد طبیعی طوری انتخاب کرد که تفاضل هر دوتا از عددهای انتخاب شده دست‌کم 2 باشد؟

۱۲. در اتاقی N نفر حاضرند، $N > 3$ ، و دست‌کم یکی از این افراد با هیچ کسی در این اتاق دست نداده است. حداکثر چند نفر از افراد حاضر در این اتاق با همه افراد دیگر دست داده‌اند؟

۱۳. تعداد چهارتاییهای مرتب از عددهای طبیعی فرد مانند (x_1, x_2, x_3, x_4) را پیدا کنید که

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$$

۱۴. تعدادی متناهی کارت را به دو دسته تقسیم کرده‌ایم و تعداد کارتهای دسته سمت چپ از تعداد کارتهای دسته سمت راست بیشتر است. روی هر کارت یک اسم یا چند اسم متمایز نوشته‌ایم و ممکن است اسمی روی چند کارت مختلف نوشته شده باشد. بزرگترین تعداد اسمی که هر کاردی

را که این نام روی آن نوشته شده است به دسته مقابل منتقل کنیم. ثابت کنید همواره می‌توانیم چند نام مختلف را طوری انتخاب کنیم که با بُر زدن تک‌تک این نامها، در نهایت تعداد کارتهای دسته سمت راست بیشتر شده باشد.

۱۵. در چند جفت از عددهای متوالی از مجموعه

$$\{1000, 1001, 1002, \dots, 2000\}$$

وقتی عددها را با هم جمع می‌کنیم انتقالی نداریم؟

۱۶. شش دانش‌آموز و پروفیسور آلفا، پروفیسور بتا و پروفیسور گاما باید روی نه صندلی که در یک ردیف چیده شده‌اند بنشینند. پروفیسورها پیش از شش دانش‌آموز رسیده‌اند و تصمیم گرفته‌اند که صندلیهایشان را طوری انتخاب کنند که هر یک از آنها در میان دو دانش‌آموز قرار داشته باشد. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟

۱۷. ثابت کنید در میان هر ۱۶ عدد طبیعی متمایز که از ۱۰۰ بیشتر نیستند چهار عدد متمایز مانند a ، b ، c و d وجود دارد که $a + b = c + d$.

۱۸. پسر بچه‌ای ۹۶ مهره متمایز دارد. جنس هر مهره یا پلاستیک است یا چوب، اندازه هر مهره یا کوچک است یا متوسط یا بزرگ، رنگ هر مهره یا آبی است یا سبز یا قرمز یا زرد و شکل هر مهره یا دایره است یا شش‌ضلعی یا مربع یا مثلث. چندتا از این مهره‌ها با مهره «پلاستیکی متوسط قرمز دایره‌ای» دقیقاً در دو مشخصه فرق دارند؟ (مهره «چوبی متوسط قرمز مربعی» یکی از این مهره‌هاست.)

۱۹. شماره تلفن هفت‌رقمی $d_1 d_2 d_3 - d_4 d_5 d_6 d_7$ را به یادماندنی بنامید، هرگاه دنباله پیش‌شماره آن، یعنی $d_1 d_2 d_3$ ، با دنباله $d_4 d_5 d_6$ یا دنباله $d_5 d_6 d_7$ (یا هر دو آنها) یکسان باشد. با فرض اینکه هر یک از d_i ها ممکن است یکی از ده رقم اعشاری ۰، ۱، ۲، ... و ۹ باشد، تعداد شماره تلفنهای به یادماندنی متمایز را پیدا کنید.

۲۰. دوتا از خانه‌های صفحه شطرنجی 7×7 را زرد و بقیه را سبز می‌کنیم. دو رنگ‌آمیزی را هم‌ارز می‌نامیم اگر بتوان یکی را با دوران صفحه شطرنج از دیگری به دست آورد. چند رنگ‌آمیزی غیرهم‌ارز می‌توان به دست آورد؟

۲۱. به چند طریق می‌توان عددهای ۲۱، ۳۱، ۴۱، ۵۱، ۶۱، ۷۱ و ۸۱ را طوری مرتب کرد که مجموع هر چهار عدد متوالی از آنها بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۲۲. فرض کنید S مجموعه‌ای شش‌عضوی باشد. به چند طریق مختلف می‌توان دو زیرمجموعه از S را که لزوماً متمایز نیستند طوری انتخاب کرد که اجتماع این دو زیرمجموعه برابر با S باشد؟ ترتیب انتخاب مهم نیست؛ مثلاً انتخاب دو زیرمجموعه $\{a, c\}$ و $\{b, c, d, e, f\}$ با انتخاب دو زیرمجموعه $\{a, c\}$ و $\{b, c, d, e, f\}$ فرقی ندارد.

۲۳. مجموعه‌ای از عددهای مثبت مثلثی است، هرگاه سه عضو متمایز داشته باشد که سه ضلع مثلثی با مساحت مثبت باشند. مجموعه‌هایی مانند $\{4, 5, 6, \dots, n\}$ از عددهای طبیعی متوالی را در نظر بگیرید که همه زیرمجموعه‌های ده‌عضوی آنها مثلثی‌اند. بیشترین مقدار ممکن n چقدر است؟

۲۴. A و B دو مجموعه جدا از هم‌اند که اجتماعشان مجموعه عددهای طبیعی است. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n عددهایی متمایز مانند a و b وجود دارند که $a, b > n$ و یا $\{a, b, a+b\} \subseteq A$ یا $\{a, b, a+b\} \subseteq B$.

۲۵. دنباله صعودی

$$1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$$

از همه عددهای طبیعی تشکیل شده است که توان ۳‌اند یا مجموع توانهای متمایز ۳‌اند. جمله ۱۰۰ام این دنباله را پیدا کنید (۱ جمله اول است، ۳ جمله دوم است و همین‌طور در مورد بقیه).

۲۶. دسته‌ای کارت داریم که روی هر کارت آن یکی از شکلهای دایره، مربع یا مثلث حک شده است و هر یک از این شکلهای به یکی از سه رنگ قرمز، آبی یا سبز است. علاوه بر این، سایه هر یک از رنگها یا ملایم است یا متوسط یا سیر. در این دسته ۲۷ کارت وجود دارد و هر ترکیبی از شکل-رنگ-سایه در آن آمده است. مجموعه‌ای از سه کارت این دسته را متمم می‌نامیم، هرگاه حکمهای زیر هر سه درست باشند:

(الف) یا شکل هر سه کارت متفاوت باشد یا شکل هر سه کارت یکسان باشد.

(ب) یا رنگ هر سه کارت متفاوت باشد یا رنگ هر سه کارت یکسان باشد.

(ج) یا سایه هر سه کارت متفاوت باشد یا سایه هر سه کارت یکسان باشد.

چند مجموعه سه‌کارتی متمم وجود دارد؟

۲۷. در اردوی ریاضی، هر m دانش‌آموز دقیقاً یک دوست مشترک دارند، $m \geq 3$. (اگر A دوست B باشد، B هم دوست A است. همچنین، هیچکس دوست خودش نیست.) فرض کنید P بیشترین تعداد دوستان را داشته باشد. این تعداد را مشخص کنید.

۲۸. ۷ دانش‌آموز و ۱۳ معلم در یک صف ایستاده‌اند. فرض کنید A تعداد جاهایی در این صف باشد

که یک دانش‌آموز و یک معلم کنار هم ایستاده‌اند. مثلاً در صف

TSSTTTTSTSTTTTSTSTTTST

۱۲. A . میانگین مقادیر A را (وقتی که همه آرایشهای ممکن این ۲۰ نفر را در نظر بگیریم) حساب کنید.

۲۹. دانش‌آموز بی‌حوصله‌ای در سالی که در آن کمد‌های در بسته‌ای با شماره‌های ۱ تا ۱۰۲۴ در یک ردیف قرار گرفته‌اند قدم می‌زند. او در کمد شماره ۱ را باز می‌کند و سپس در کمد‌ها را یکی در میان باز می‌کند. پس از اینکه به انتهای سالن رسید، برمی‌گردد. به اولین کمد در بسته‌ای که برسد در آن را باز می‌کند و سپس در کمد‌ها را یکی در میان باز می‌کند. این دانش‌آموز آنقدر می‌رود و می‌آید که در همه کمد‌ها باز شود. شماره آخرین کمدی که او درش را باز کرده است چیست؟

۳۰. فرض کنید $n = 2^{31}3^{19}$. چقدر تا از مقسوم‌علیه‌های مثبت n^2 از n کوچکترند اما n را نمی‌شمارند؟

۳۱. در یک ورزشگاه در جایگاه تماشاچیان در هر ردیف ۱۹۹ نفر می‌نشینند. یک بار از ۱۹۹۰ دانش‌آموز برای تماشای مسابقه فوتبال دعوت شد. فقط معلوم بود که از هر مدرسه حداکثر ۳۹ دانش‌آموز می‌آیند. اگر قرار باشد که دانش‌آموزان هر مدرسه در یک ردیف بنشینند، کمترین تعداد ردیف‌هایی را که باید به دانش‌آموزان اختصاص داد تعیین کنید.

۳۲. فرض کنید

$$T = \{9^k : 0 \leq k \leq 4000 \text{ و } k \text{ عددی صحیح است}\}$$

می‌دانیم 9^{4000} ، ۳۸۱۷ رقم دارد و اولین رقم (سمت چپ) آن ۹ است. اولین رقم سمت چپ چقدر است؟

۳۳. به ازای چه مقدارهایی از عدد طبیعی n عددی مانند m وجود دارد که می‌توان آن را به $(n-1)!$ طریق یا بیشتر به شکل $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ نوشت، که در آن

$$a_1 \in \{1\}, \quad a_2 \in \{1, 2\}, \quad \dots, \quad a_n \in \{1, 2, \dots, n\}$$

۳۴. فرض کنید مجموع هر مجموعه از عددها مجموع عضوهایش باشد. فرض کنید S مجموعه‌ای از عددهای طبیعی باشد که از ۱۵ بزرگتر نیستند. فرض کنید مجموع هیچ دو زیرمجموعه جدا از هم از S برابر نباشد. بیشترین مقدار مجموع مجموعه‌ای مانند S با این ویژگی‌ها چقدر است؟

۳۵. دست‌کم چهار شکلات داریم که درون n ($n \geq 4$) جعبه قرار دارند. آقای چاق هر بار می‌تواند

دو جعبه انتخاب کند، از هر یک از این دو جعبه یک شکلات بردارد و آنها را درون جعبه‌ای دیگر بگذارد. آیا همواره می‌توان همه شکلاتها را درون یک جعبه قرار داد؟

۳۶. آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰۰ را طوری در یک ردیف مرتب کرد که میانگین هیچ دو عدد متمایزی از آنها میان این دو عدد قرار نگرفته باشد؟

۳۷. فرض کنید $A_1 A_2 \dots A_{12}$ دوازده ضلعی منتظمی باشد که مرکزش نقطه O است. ناحیه‌های مثلثی $OA_i A_{i+1}$ ، $1 \leq i \leq 12$ ($A_{13} = A_1$) را با رنگهای قرمز، آبی، سبز و زرد طوری رنگ می‌کنیم که رنگ ناحیه‌های مجاور متفاوت باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۳۸. $2n$ نفر در مهمانی حاضرند. تعداد دوستان هر کس در این مهمانی عددی زوج است. (دوستی رابطه‌ای دوطرفه است.) ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان مشترکشان در این مهمانی عددی زوج است.

۳۹. چند جدول 4×4 متمایز وجود دارد که درایه‌هایشان ۱ و ۱- هستند و مجموع درایه‌های هر سطر و مجموع درایه‌های هر ستون صفر است؟

۴۰. مربعی $(n-1) \times (n-1)$ را به طریق معمول به $(n-1)^2$ مربع واحد تقسیم می‌کنیم. هر یک از n^2 رأس این مربعها را یا قرمز می‌کنیم یا آبی. تعداد رنگ‌آمیزیهای متمایزی را پیدا کنید که در آنها هر مربع واحد دقیقاً دو رأس قرمز دارد. (دو رنگ‌آمیزی وقتی متمایزند که دست‌کم رنگ یک رأس در آنها متفاوت باشد.)

۴۱. شصت و چهار گلوله را به چند دسته تقسیم کرده‌ایم. در هر گام می‌توانیم به طریق زیر عمل کنیم. دو دسته انتخاب می‌کنیم، یکی مثلاً دسته A با p گلوله و دیگری مثلاً دسته B با q گلوله، که در اینجا $p \geq q$ ، و سپس q گلوله از دسته A برمی‌داریم و در دسته B می‌گذاریم. ثابت کنید می‌توان همه گلوله‌ها را در یک دسته قرار داد.

۴۲. نوعی بازی یک‌نفره را با تعدادی متناهی عدد صحیح نامنفی انجام می‌دهند. در حرکت اول، بازیکن عددی صحیح را به عنوان بزرگ در نظر می‌گیرد و عددی صحیح و نامنفی و کوچکتر از عدد بزرگ را جایگزین یکی از عددها می‌کند. در حرکت بعدی هم بازی به‌طور مشابه انجام می‌شود، فقط باید عددی که به عنوان جایگزین در نظر گرفته می‌شود همان عدد بزرگ حرکت قبلی باشد. ثابت کنید پس از چند بار متناهی حرکت بازی تمام می‌شود.

۴۳. اگر S زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد، می‌توانیم S را با انجام یکی از کارهای صفحه بعد تغییر دهیم:

(الف) اگر $1, a \notin S$ را به S اضافه کنید؛

(ب) اگر $n, m \in S$ را از S حذف کنید؛

(ج) به‌ازای $1 \leq r \leq n-1$ ، اگر $r \in S$ و $r, r+1 \notin S$ را از S حذف کنید و $r+1$ را به S اضافه کنید.

فرض کنید با انجام این تغییرات می‌توان دنباله‌ای مانند

$$\emptyset \rightarrow \{1\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{n\}$$

به‌دست آورد که از \emptyset شروع و به $\{n\}$ ختم می‌شود و در آن هر یک از 2^n زیرمجموعه مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ دقیقاً یک بار آمده است. ثابت کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند m ، $n = 2^m - 1$.

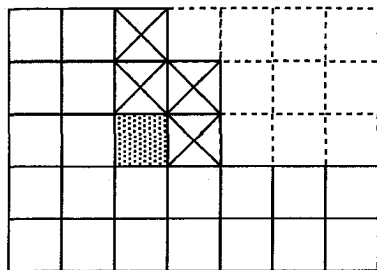
۴۴. ۲۰۰۱ سکه روی میز وجود دارد. به‌ازای $i = 1, 2, \dots, 2001$ می‌توان پشت سر هم دقیقاً i سکه را پشت و رو کرد. ثابت کنید همواره یا می‌توان همه سکه‌ها را به رو کرد یا می‌توان همه سکه‌ها را به پشت کرد، اما فقط یکی از این کارها میسر است.

۴۵. مجموع یکی درمیان مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ و هر یک از زیرمجموعه‌های ناتهی آن را به شکل زیر تعریف می‌کنیم: عددهای این زیرمجموعه را به ترتیب نزولی مرتب کنید و سپس ابتدا از بزرگترین عدد، عددها را به ترتیب یکی درمیان زیاد و کم کنید. (مثلاً، مجموع یکی درمیان مجموعه $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ برابر با $1 + 2 - 4 + 6 - 9 = 0$ و مجموع یکی درمیان مجموعه $\{5\}$ برابر با ۵ است.) به‌ازای $n = 7$ ، مجموع همه مجموعه‌های یکی درمیان را حساب کنید.

۴۶. در بازی ملج‌ملوچ خوردن دو بازیکن یکی درمیان «تکه‌هایی» از جدولی 5×7 از مربعهای واحد را برمی‌دارند. برای برداشتن هر تکه، بازیکن یکی از مربعهای باقی‌مانده را انتخاب می‌کند و سپس همه مربعهایی را که در ناحیه‌ای که با ضلع سمت چپ (و امتداد آن به سمت بالا) و ضلع پایینی (و امتداد آن به سمت راست) این مربع تعریف شده است حذف می‌کند (می‌خورد). مثلاً، با تکه‌ای که مربع سایه‌دار در شکل صفحه بعد مشخص می‌کند، مربع سایه‌دار و و چهار مربعی که با علامت \times مشخص شده‌اند حذف می‌شوند. (مربعهایی که دوتا یا تعداد بیشتری ضلع خط‌چین دارند در حرکتهای قبلی از صفحه اصلی حذف شده‌اند.)

هدف هر بازیکن این است که کاری کند که طرف مقابلش تکه آخر را بردارد. شکل صفحه بعد یکی از چند زیرمجموعه مجموعه ۳۵ مربع واحد را نشان می‌دهد که ممکن است در طول بازی ملج‌ملوچ خوردن پدید بیایند. در کل چندتا از این زیرمجموعه‌های متمایز وجود دارند؟ در این

شمارش، کل صفحه و صفحه خالی را هم در نظر بگیرید.



۴۷. در هر خانه صفحه شطرنجی 2002×1988 یا 0 نوشته شده یا 1 ، به طوری که در هر سطر و هر ستون تعداد کل خانه‌هایی که 1 در آنها نوشته شده عددی فرد است. ثابت کنید تعداد خانه‌های سفیدی که در آنها 1 نوشته شده عددی زوج است.

۴۸. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{1, 2, \dots, 1989\}$ باشد که تفاضل هیچ دو عضوی از آن 4 یا 7 نیست. تعداد عضوهای S حداکثر چندتا است؟

۴۹. پانزده دانش آموز زنگ و پانزده دانش آموز تنبل دور میزی گرد نشسته‌اند. معلم می‌خواهد دانش آموزان را در گروه‌های دونفره دسته‌بندی کند و پانزده نوع برگه امتحانی میان آنها توزیع کند. هر برگه امتحانی برای یک گروه دونفره.

معلم حین کار از خود پرسید «به چند طریق می‌توانم دانش آموزان را در گروه‌های دونفره زنگ/تنبل کنار هم بنشانم، به طوری که لازم نباشد از دانش آموزی بخواهم جایش را عوض کند؟» به این سؤال معلم جواب بدهید. (دو طرز نشستن را یکی می‌دانیم، هرگاه بتوان یکی را از دوران دیگری به دست آورد).

۵۰. دو خانه در صفحه شطرنجی 8×8 را چسبیده می‌نامیم هرگاه دست‌کم یک رأس مشترک داشته باشند. آیا شاه می‌تواند از خانه‌ای شروع به حرکت کند و به همه خانه‌ها دقیقاً یک‌بار برود، به طوری که در تمام حرکتها، بجز اولی، به خانه‌ای برود که به تعداد زوجی از خانه‌هایی که قبلاً به آنها رفته است چسبیده باشد؟

۵۱. ۱۱۹ نفر در ساختمانی ۱۲۰ آپارتمانی زندگی می‌کنند. آپارتمانی را پرازدحام می‌نامیم که دست‌کم ۱۵ نفر در آن ساکن باشند. هر روز ساکنان آپارتمانهای پرازدحام مشاجره می‌کنند و هر کدام به آپارتمانی متفاوت از بقیه در همین ساختمان می‌رود (در نتیجه می‌توانند روی یکدیگر را نبینند!). آیا درست است که این روند لزوماً روزی به پایان می‌رسد؟

مسأله‌های پیشرفته

۱. در تورنمنتی هر بازیکن با هر یک از بازیکنان دیگر دقیقاً یک بار بازی می‌کند. در هر بازی، برنده ۱ امتیاز می‌گیرد، بازنده هیچ امتیازی نمی‌گیرد و اگر بازی به تساوی ختم شود هر یک از دو بازیکن $\frac{1}{2}$ امتیاز می‌گیرد. در پایان تورنمنت معلوم شد که دقیقاً نصف امتیازهایی که هر بازیکن گرفته است در مقابل ده بازیکنی بوده است که کمترین امتیازها را دارند (به‌ویژه، هر یک از ده بازیکنی که کمترین امتیازها را دارند نصف امتیازهایش را در مقابل نه نفر دیگر از این ده نفر به‌دست آورده است). چند بازیکن در این تورنمنت بوده‌اند؟

۲. فرض کنید n عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد. تعداد جایگشت‌هایی از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ مانند p را پیدا کنید که

$$|p(1) - 1| + |p(2) - 1| + \dots + |p(n) - n| = \frac{n^2 - 1}{2}$$

۳. در هر دنباله از نتیجه‌های پرتاب‌کردهای یک سکه می‌توان تعداد دفعاتی را که یک شیر بلافاصله بعد از یک خط می‌آید، یک شیر بلافاصله بعد از یک شیر می‌آید و غیره، را حساب کرد. فرض کنید این پشت سر هم آمدنها را با HH, TH و غیره، نشان دهیم. مثلاً، در دنباله

$HHHTTHHHHTHTTTTT$

از نتیجه‌های ۱۵ بار پرتاب کردن یک سکه، پنج زبردنباله HH ، سه زبردنباله HT ، دو زبردنباله TH و چهار زبردنباله TT وجود دارد. چند دنباله متفاوت از نتیجه‌های ۱۵ بار پرتاب کردن یک سکه شامل دقیقاً دو زبردنباله HH ، سه زبردنباله HT ، چهار زبردنباله TH و پنج زبردنباله TT است؟

۴. فرض کنید $A = (a_1, a_2, \dots, a_{2001})$ دنباله‌ای از عددهای طبیعی باشد. فرض کنید m برابر با تعداد زیردنباله‌های سه عضوی از این دنباله مانند (a_i, a_j, a_k) باشد که $1 \leq i < j < k \leq 2001$ و $a_j = a_i + 1$ و $a_k = a_j + 1$. در میان همه دنباله‌هایی مانند A بزرگترین m را پیدا کنید.

۵. بیست و سه نفر که وزن هر یک از آنها عددی طبیعی است می‌خواهند فوتبال بازی کنند. این عده یکی را به عنوان داور انتخاب می‌کنند و سپس به دو تیم ۱۱ نفره طوری تقسیم می‌شوند که وزن کل دو تیم برابر باشد. معلوم شده است که داور هر که باشد می‌توان این کار را کرد. ثابت کنید وزن این ۲۳ نفر برابر است.

۶. کوچکترین عدد طبیعی مانند n , $n \geq 4$, را پیدا کنید که بتوان از میان هر n عدد صحیح متمایز چهار عدد مختلف مانند a, b, c, d طوری پیدا کرد که $a + b - c - d$ بر ۲۰ بخش پذیر باشد.

۷. پستیچی نامه‌ها را به نوزده خانه ضلع شرقی خیابان می‌برد. او متوجه شده است که هر روز، از هر دو خانه همسایه حداکثر یکی نامه دارد و هر روز تعداد خانه‌هایی که پشت سر هم هستند و نامه ندارند بیشتر از دوتا نبوده است. چند الگوی متمایز برای رساندن نامه‌ها وجود دارد؟

۸. به ازای $i = 1, 2, \dots, 11$ فرض کنید M_i مجموعه‌ای پنج عضوی باشد و اگر $1 \leq i < j \leq 11$, $M_i \cap M_j \neq \emptyset$. فرض کنید m بزرگترین عددی باشد که بتوان مجموعه‌هایی مانند M_1, \dots, M_m و M_{i_m} را طوری انتخاب کرد که $\bigcap_{k=1}^m M_{i_k} \neq \emptyset$. کمترین مقدار m را به ازای همه انتخابهای ممکن M_i ‌ها پیدا کنید.

۹. هر دومینو را زوجی مرتب از عددهای طبیعی تعریف می‌کنیم. هر دنباله متناوب از دومینوها دنباله‌ای از دومینوهای متمایز است که در آن درایه اول هر زوج، پس از زوج اول، برابر است با درایه دوم زوج پیش از آن و هیچ دو زوجی مانند (j, i) و (i, j) در آن به چشم نمی‌خورد. فرض کنید D_4 مجموعه همه دومینوهایی باشد که درایه‌های آنها از ۴۰ بزرگتر نیستند. طول بلندترین دنباله متناوب از دومینوها را که می‌توان با دومینوهای D_4 تشکیل داد پیدا کنید.

۱۰. تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 2000\}$ را پیدا کنید که مجموع عضوهای هر یک از آنها بر ۵ بخش پذیر است.

۱۱. فرض کنید X مجموعه‌ای متناهی از عددهای طبیعی و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از X مانند B وجود دارد که A برابر است با مجموعه عضوهایی از X که تعداد فردی از عضوهای B را می‌شمارند.

۱۲. ۲۰۰۰ کارت داریم که آنها را با عددهای طبیعی از ۱ تا ۲۰۰۰ طوری شماره‌گذاری کرده‌ایم که عددهای روی کارتهای متفاوت با هم فرق دارند. کارتهای این دسته کارت به ترتیب عددهای نوشته شده رویشان نیستند. کارت رویی را می‌کشیم و روی میز می‌گذاریم و کارت بعدی را زیر این دسته کارت می‌گذاریم. کارت جدید را می‌کشیم و روی میز در سمت راست کارتی که قبلاً روی میز گذاشته‌ایم قرار می‌دهیم و کارت بعدی را زیر این دسته کارت می‌گذاریم. این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم که همه کارتها روی میز قرار بگیرند. معلوم شده است که شماره کارتها از چپ به راست به ترتیب صعودی است:

$$۱, ۲, ۳, \dots, ۱۹۹۹, ۲۰۰۰$$

در دسته کارت اولیه چندتا کارت بالای کارت شماره ۱۹۹۹ قرار داشته‌اند؟

۱۳. با صفحه‌های نمایش ۱×۱ صفحه‌ای ۲۰۰۲×۲۰۰۰ تشکیل دهید. در آغاز بیش از ۱۹۹۹×۲۰۰۱ تا از صفحه‌های نمایش ۱×۱ روشن‌اند. اگر در صفحه‌ای ۲×۲ سه تا از صفحه‌های ۱×۱ خاموش باشند، چهارمی هم خودبه‌خود خاموش می‌شود. ثابت کنید هیچ‌گاه کل صفحه خاموش نمی‌شود.

۱۴. مدیری در طول روز در زمانهای مختلفی نامه‌ای را برای تایپ به منشی می‌دهد و هر بار نامه را روی ستون نامه‌های روی میز منشی می‌گذارد. هر وقت که موقعش برسد، منشی نامه رویی را برمی‌دارد و آن را تایپ می‌کند. امروز نه نامه باید تایپ شوند و مدیر آنها را به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ به منشی می‌دهد. هنگام ناهار، منشی به همکارش می‌گوید که نامه ۸ تایپ شده است اما از اینکه پیش از ظهر چه نامه‌هایی تایپ شده است هیچ چیز نمی‌گوید. همکار منشی از خود می‌پرسد که بعد از ناهار کدام یک از نه نامه و به چه ترتیبی باید تایپ شوند. براساس اطلاعات بالا، چندتا ترتیب تایپ بعد از ناهار ممکن است وجود داشته باشد؟ (اینکه هیچ نامه‌ای برای تایپ نمانده باشد هم یکی از حالت‌های ممکن است.)

۱۵. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

۱۶. فرض کنید m و n عددهایی طبیعی باشند. فرض کنید می‌توان مستطیلی را با ترکیبی از نوارهای $m \times ۱$ افقی و نوارهای $n \times ۱$ عمودی فرش کرد. ثابت کنید می‌توان این مستطیل را تنها با استفاده از یکی از این دو نوع نوار فرش کرد.

۱۷. دنباله

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

از عددهای حقیقی مفروض است. در هر مرحله، اگر دنباله به

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

تبدیل شده باشد، آن را با دنباله

$$|x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_n - a|$$

که در آن a عددی حقیقی است، عوض می‌کنیم. در هر مرحله ممکن است مقدار a تغییر کند.

الف) ثابت کنید همواره می‌توان دنباله‌ای به دست آورد که همه جمله‌هایش صفرند.

ب) کمترین تعداد مرحله‌هایی را تعیین کنید که، بدون توجه به اینکه دنباله اولیه چه دنباله‌ای است، بتوانیم پس از این مرحله‌ها دنباله‌ای به دست بیاوریم که همه جمله‌هایش صفرند.

۱۸. درباره دنباله $(a_n)_{n \geq 1}$ می‌دانیم $a_1 = 0$ ، $a_2 = 1$ و اگر $n \geq 3$

$$a_n = \frac{1}{4}na_{n-1} + \frac{1}{4}n(n-1)a_{n-2} + (-1)^n \left(1 - \frac{n}{4}\right)$$

دستوری صریح برای

$$a_n + 2 \binom{n}{1} a_{n-1} + 3 \binom{n}{2} a_{n-2} + \dots + (n-1) \binom{n}{n-2} a_2 + n \binom{n}{n-1} a_1$$

پیدا کنید.

۱۹. به ازای هر مجموعه مانند A فرض کنید $|A|$ و $s(A)$ به ترتیب تعداد عضوهای A و مجموع

عضوهای A باشند. (اگر $A = \emptyset$ ، آن وقت $|A| = s(A) = 0$). فرض کنید S مجموعه‌ای از

عددهای طبیعی باشد که

الف) دو عدد در S مانند x و y وجود دارند که $(x, y) = 1$ ب.م.م.؛

ب) به ازای هر دو عدد در S مانند x_1 و y_1 و $x_1 + y_1 \in S$.

فرض کنید T مجموعه همه عددهای طبیعی‌ای باشد که در S نیستند. ثابت کنید

$$s(T) \leq |T|^2 < \infty.$$

۲۰. در جنگلی ۹ حیوان در لانه‌هایشان زندگی می‌کنند و دقیقاً یک راه جداگانه بین هر دو تا از این

لانه‌ها وجود دارد. پیش از مراسم انتخاب سلطان جنگل، برخی حیوانات در مبارزه انتخاباتی شرکت

می‌کنند. هر یک از نامزدها به هر یک از لانه‌های دیگر دقیقاً یک بار سر می‌زند، فقط از راههای

میان لانه‌ها برای رفت و آمد استفاده می‌کند، هیچ‌گاه در مسیر بین دو لانه از هیچ راهی به راهی دیگر

نمی‌پیچد و در پایان مبارزه انتخاباتی به لانه خودش برمی‌گردد. همچنین می‌دانیم که هیچ راهی بین

دو لانه را بیش از یک نفر از نامزدها طی نکرده است. بیشترین تعداد ممکن نامزدها را پیدا کنید.

۲۱. مجموعه قطری دنباله‌ای مانند

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

از زیرمجموعه‌ای مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ و جایگشتی مانند π از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, n\}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$D_\pi(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{i \in S : i \notin A_{\pi(i)}\}$$

بیشترین تعداد ممکن مجموعه‌های متمایزی که ممکن است مجموعه قطری دنباله‌ای مانند

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

باشند چقدر است؟

۲۲. زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ مانند M این ویژگی را دارد که حاصل ضرب هیچ سه عضوی از آن مربع کامل نیست. بیشترین تعداد عضوهای M را مشخص کنید.

۲۳. همه دنباله‌های متناهی مانند (x_0, x_1, \dots, x_n) را طوری پیدا کنید که به ازای هر j , $0 \leq j \leq n$, x_j برابر با تعداد دفعه‌هایی باشد که j در این دنباله آمده است.

۲۴. آیا می‌توان مجموعه عددهای طبیعی را به دو مجموعه مانند A و B طوری افراز کرد که A شامل هیچ تضاعد حسابی سه جمله‌ای و B شامل هیچ تضاعد حسابی نامتناهی نباشد؟

۲۵. مجموعه T_5 ، مجموعه همه عددهای طبیعی پنج رقمی را در نظر بگیرید که نمایش اعشاری آنها جایگشتی از رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ است. آیا می‌توان T_5 را به دو مجموعه مانند A و B طوری افراز کرد که مجموع مربعات عضوهای A با مجموع مربعات عضوهای B برابر باشد؟

۲۶. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. تعداد چندجمله‌هایی مانند $P(x)$ را پیدا کنید که ضریبهای عضو مجموعه $\{0, 1, 2, 3\}$ هستند و $P(2) = n$.

۲۷. فرض کنید n و k عددهایی طبیعی باشند که $\frac{1}{4}n < k \leq \frac{2}{3}n$. کوچکترین عدد مانند m را طوری پیدا کنید که بتوان m سرباز را روی خانه‌های صفحه شطرنجی $n \times n$ طوری قرار داد که در هیچ سطر و هیچ ستونی k خانه پشت سر هم خالی وجود نداشته باشد.

۲۸. در یک دوره مسابقات فوتبال، هر تیم با هر یک از دیگر تیمها دقیقاً یک بار بازی می‌کند و برای هر برد ۳ امتیاز و برای هر تساوی ۱ امتیاز می‌گیرد و اگر ببازد هیچ امتیازی نمی‌گیرد. در پایان مسابقات، معلوم شد که تیمی بیشترین امتیاز را گرفته است و کمترین برد را داشته است. کمترین تعداد تیمها را پیدا کنید که چنین چیزی ممکن باشد.

۲۹. فرض کنید

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

سطر اول آرایه‌ای مثلثی باشد، که $a_i \in \{0, 1\}$ ، $1 \leq i \leq n$. سطر دوم را با

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$$

پر می‌کنیم، به طوری که اگر $a_k \neq a_{k+1}$ ، آن وقت $b_k = 1$ و اگر $a_k = a_{k+1}$ ، آن وقت $b_k = 0$. بقیه سطرها را هم به روش مشابه پر می‌کنیم. بیشترین تعداد ممکن ۱ها را در آرایه به دست آمده تعیین کنید.

۳۰. در تخت‌آباد ۱۰ شهر وجود دارد. پرواز میان شهرها در دست دو شرکت هوایی است. میان هر دو شهر دقیقاً یک خط هوایی (در هر دو جهت) وجود دارد. ثابت کنید یکی از این شرکتها می‌تواند دو مسیر دوری برقرار کند که هر دور از تعداد فردی از شهرها می‌گذرد و این دو دور از شهری مشترک نمی‌گذرند.

۳۱. فرض کنید هر یک از عددهای طبیعی را که از $\frac{n(n^2 - 2n + 3)}{2}$ ، $n \geq 2$ ، بزرگتر نیستند با یکی از دو رنگ (قرمز و آبی) رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید دنباله‌ای n جمله‌ای و تکرنگ مانند a_1, a_2, \dots, a_n وجود دارد که

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

و

$$a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \dots \leq a_n - a_{n-1}$$

۳۲. مجموعه $\{1, 2, \dots, 3n\}$ را به سه مجموعه A, B, C که هر کدام n عضو دارد افراز کرده‌ایم. آیا همواره می‌توان از هر یک از این مجموعه‌ها عددی انتخاب کرد که یکی از این عددها مجموع دو عدد دیگر باشد؟

۳۳. فرض کنید هر یک از ۳۰ نفر دانش‌آموز کلاسی فقط به یکی از واریانتهای شطرنج و فقط به یکی از نابرابریهای کلاسیک علاقه دارد. هر یک از این دانش‌آموزان این اطلاعات را روی یک برگه نظرخواهی می‌نویسد. در میان پاسخهای روی برگه نظرخواهی دقیقاً ۲۰ واریانت مختلف شطرنج و دقیقاً ۱۰ نابرابری کلاسیک متفاوت وجود دارد. فرض کنید n برابر با تعداد دانش‌آموزانی مانند M باشد که تعداد دانش‌آموزانی که نابرابری موردعلاقه M را نوشته‌اند از تعداد دانش‌آموزانی که واریانت موردعلاقه M را نوشته‌اند بیشتر است. ثابت کنید $n \geq 11$.

۳۴. با شروع از سه‌تایی (a, b, c) از عددهای صحیح نامنفی، هر حرکت یعنی انتخاب دوتا از این عددها، مانند x و y و جایگزین کردن یکی از آنها با $x + y$ یا $|x - y|$. مثلاً می‌توان با یک حرکت

از $(3, 5, 7)$ به $(3, 5, 4)$ رفت. ثابت کنید عددی ثابت و مثبت مانند r وجود دارد که اگر a, b, c و n عددهایی طبیعی باشند و $a, b, c < 2^n$ ، دنباله‌ای از حداکثر rn حرکت وجود دارد که (a, b, c) را به (a', b', c') تبدیل می‌کنند که در آن $a'b'c' = 0$.

۳۵. آرایه‌ای مستطیلی از عددها مفروض است. مجموع عددهای هر سطر و مجموع عددهای هر ستون عددی صحیح است. ثابت کنید هر عدد غیرصحیح در این آرایه مانند x را می‌توان با $[x]$ یا $[x]$ طوری عوض کرد که مجموع هیچ سطری و مجموع هیچ ستونی تغییر نکند.

۳۶. مجموعه‌ای متناهی از عددهای طبیعی (متمايز) را باوفا می‌نامیم، هرگاه هر یک از عضوهایش مجموع همه عضوهای مجموعه را بشمارد. ثابت کنید هر مجموعه متناهی از عددهای طبیعی زیرمجموعه مجموعه باوفاست.

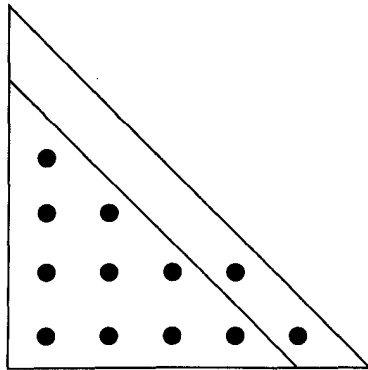
۳۷. دوازده نوازنده به نامهای M_1, M_2, \dots, M_{12} در یک جشنواره یک هفته‌ای موسیقی گرد هم آمده‌اند. برای هر روز، یک کنسرت پیش‌بینی شده است که در آن برخی نوازنده‌ها برنامه اجرا می‌کنند و بقیه در میان شنوندگان می‌نشینند. به ازای $i = 1, 2, \dots, 12$ ، فرض کنید t_i تعداد کنسرت‌هایی باشد که در آن نوازنده M_i برنامه اجرا می‌کند و فرض کنید $t = t_1 + t_2 + \dots + t_{12}$. کمترین مقدار t را پیدا کنید که هر نوازنده بتواند، به عنوان شنونده، به برنامه بقیه نوازندگان گوش بدهد.

۳۸. آرایه‌ای $m \times n$ را با عددهای $1, 2, \dots, n$ ، که از هر کدام m بار استفاده کرده‌ایم، پر کرده‌ایم. ثابت کنید همواره می‌توان جای عددهای ستونها را طوری عوض کرد که هر یک از عددهای $1, 2, \dots, n$ در هر سطر دقیقاً یک بار بیاید.

۳۹. فرض کنید $U = \{1, 2, \dots, n\}$ ، که در آن $n \geq 3$. می‌گوییم زیرمجموعه‌ای از U مانند S با آرایشی از عضوهای U شکافته می‌شود، هرگاه در این آرایش عضوی که در S نیست جایی بین دو عضو S آمده باشد. مثلاً $\{1, 2, 3\}$ می‌شکافد، اما $\{3, 4, 5\}$ را نمی‌شکافد. ثابت کنید به ازای هر $n - 2$ زیرمجموعه U ، که دست‌کم ۲ عضو و حداکثر $n - 1$ عضو دارند، آرایشی از عضوهای U وجود دارد که همه اینها را می‌شکافد.

۴۰. n سنگریزه را در ستونی عمودی روی هم چیده‌ایم. این ترکیب را می‌توان با قاعده‌های زیر تغییر داد. اگر سنگریزه‌ای روی ستونی باشد که دست‌کم دو سنگریزه بیشتر از ستون سمت راستش داشته باشد، می‌توان آن را حرکت داد. (اگر سنگریزه‌ای در سمت راست نبود، این وضعیت را ستونی با ۰ سنگریزه در نظر بگیرید.) در هر مرحله، از میان سنگریزه‌هایی که می‌توان آنها را حرکت داد (اگر چنین سنگریزه‌هایی وجود داشتند)، سنگریزه‌ای را انتخاب کنید و آن را روی ستون سمت راستش قرار دهید. اگر هیچ سنگریزه‌ای را نتوان حرکت داد، این ترکیب را ترکیب نهایی می‌نامیم. ثابت

کنید، به ازای هر n ، صرف نظر از اینکه در هر مرحله کدام سنگریزه را انتخاب کنیم، ترکیب نهایی ای که به دست می آید یکتاست. این ترکیب را بر حسب n توصیف کنید.



ترکیب نهایی به ازای $n = ۱۲$

۴۱. فرض کنید B_n مجموعه همه رشته های دودویی به طول n باشد. فاصله دو دنباله از رشته ها مانند $(a_i)_{i=1}^n$ و $(b_i)_{i=1}^n$ را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$d((a_i), (b_i)) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$$

فرض کنید C_n زیرمجموعه ای از B_n باشد. مجموعه C_n را کد تصحیح خطای کامل (ک ت خ ک) به طول n و خطای مجاز m می نامیم، هرگاه به ازای هر رشته در B_n مانند (b_i) ، رشته ای یکتا در C_n مانند (c_i) وجود داشته باشد که $d((b_i), (c_i)) \leq m$ ثابت کنید ک ت خ ک ای به طول ۹۰ و خطای مجاز ۲ وجود ندارد.

۴۲. اگر $n = ۲۰۰۰$ ، $n = ۲۰۰۱$ یا $n = ۲۰۰۲$ ، آیا می توان عددهای

$$۱, ۱, ۲, ۲, \dots, n, n$$

را طوری مرتب کرد که بین هر دو عدد مانند j ، j عدد قرار داشته باشد؟ (مثلاً، اگر $n = ۴$ ، ۴۱۳۱۲۴۳۲ چنین آرایشی است.)

۴۳. فرض کنید k ، m و n عددهایی صحیح باشند و $۱ \leq k \leq m - ۱ \leq n$. بیشترین اندازه زیرمجموعه ای از مجموعه $\{۱, ۲, \dots, k\}$ مانند S را طوری پیدا کنید که مجموع هیچ n عضو متمایزی از S برابر با m نباشد.

۴۴. دنباله ای صعودی از عددهای صحیح نامنفی مانند

$$s_0, s_1, \dots$$

را خیلی جمعی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای همهٔ عددهای صحیح نامنفی مانند i و j ، $s_{i+j} \geq s_i + s_j$. فرض کنید $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ دو دنبالهٔ خیلی جمعی باشند و $\{u_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عددهای صحیح باشد و هر عدد صحیح همان قدر در $\{u_n\}$ آمده باشد که روی هم در $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ آمده است. ثابت کنید $\{u_n\}$ هم خیلی جمعی است.

۴۵. عددهای طبیعی از ۱ تا n^2 را به‌طور تصادفی در خانه‌های جدولی $n \times n$ می‌نویسیم. به‌ازای هر جفت از عددهایی که روی یک سطر یا روی یک ستون قرار دارند، نسبت عدد بزرگتر به عدد کوچکتر را حساب می‌کنیم. مشخصهٔ این آرایش کوچکترین کسر در میان این $n^2(n-1)$ کسر است. بیشترین مقدار ممکن مشخصه را پیدا کنید.

۴۶. فرض کنید A مجموعه‌ای باشد که $|A| = n$ و A_1, A_2, \dots, A_n زیرمجموعه‌هایی از A باشند که $1 \leq i \leq n, |A_i| \geq 2$. فرض کنید به‌ازای هر زیرمجموعهٔ دو عضوی A مانند A' عددی یکتا مانند i وجود داشته باشد که $A' \subseteq A_i$. ثابت کنید

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

۴۷. فرض کنید r_1, r_2, \dots, r_n عددهایی حقیقی باشند. ثابت کنید مجموعه‌ای مانند S وجود دارد که $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ و اگر $1 \leq i \leq n-2$ و

$$1 \leq |S \cap \{i, i+1, i+2\}| \leq 2$$

و

$$\left| \sum_{i \in S} r_i \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n |r_i|$$

۴۸. فرض کنید n, k و m عددهایی طبیعی باشند و $n > 2k$. فرض کنید S مجموعه‌ای ناتمامی از زیرمجموعه‌های k عضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد، به‌طوری که هر زیرمجموعهٔ $(k+1)$ عضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, n\}$ شامل دقیقاً m عضو S باشد. ثابت کنید S باید شامل تمامی زیرمجموعه‌های k عضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد.

۴۹. مجموعه‌ای مانند T را زوج می‌نامیم، هرگاه تعداد عضوهایش عددی زوج باشد. فرض کنید n عددی زوج و مثبت باشد و S_1, S_2, \dots, S_n زیرمجموعه‌هایی زوج از مجموعهٔ $S = \{1, 2, \dots, n\}$ باشند. ثابت کنید i و j ای وجود دارند که $1 \leq i < j \leq n$ و $S_i \cap S_j$ زوج است.

۵۰. فرض کنید $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ مجموعه‌هایی باشند که $A_1 = \emptyset$ ، $B_1 = \{0\}$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n

$$A_{n+1} = \{x+1 : x \in B_n\}, \quad B_{n+1} = (A_n \cap B_n) - (A_n \cap B_n)$$

همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که $B_n = \{0\}$.

۵۱. فرض کنید $S = \{1, 2, \dots, n\}$ و A_1, A_2, \dots, A_k زیرمجموعه‌هایی از S باشند که اگر
آنوقت $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq k$

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}| \leq n - 2$$

ثابت کنید $k \leq 2^{n-2}$.

راه حل مسأله‌های مقدماتی

۱. آقا و خانم گلپرور می‌خواهند نام فرزندشان را طوری بگذارند که حروف اول سه کلمه اسم و فامیلش به ترتیب حروف الفبا باشند و تکراری نباشند. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟
(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۹)

راه حل اول

ترکیبی که از سه حرف اول سه کلمه مورد نظر به دست می‌آید باید یکی از ترکیبهای

ابگ، اپگ، ...، فقگ، فکگ، قکگ

باشد. از ترکیب «گ» با هر زیرمجموعه دو عضوی از مجموعه ۲۵ حرف اول الفبا، که به ترتیب الفبایی نوشته شود، می‌توان ترکیبی به شکل دلخواه به دست آورد. مثلاً، {د، ض} را می‌توان به شکل {ض، د} نوشت و دضگ را به دست آورد. علاوه بر این، به هر ترکیبی به شکل مورد نظر دقیقاً یک زیرمجموعه دو عضوی از مجموعه {ک، ...، پ، ب، ا} نظیر است. بنابراین، جواب مسأله، تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی‌ای است که می‌توان از مجموعه ۲۵ حرف تشکیل داد؛ تعداد چنین زیرمجموعه‌هایی برابر با $\binom{25}{2}$ یا ۳۰۰ است.

راه حل دوم

حرف اول کلمه آخر باید «گ» باشد. اگر حرف اول کلمه اول «ا» باشد، حرف اول کلمه دوم باید یکی از حروف ب، پ، ت، ... و ک باشد؛ بنابراین ۲۴ انتخاب برای حرف اول کلمه دوم داریم. اگر حرف اول کلمه اول «ب» باشد، ۲۳ انتخاب برای حرف اول کلمه دوم داریم. اگر همین روش

شمردن را تکرار کنیم معلوم می‌شود که تعداد ترکیبهای موردنظر برابر است با

$$۲۴ + ۲۳ + \dots + ۲ + ۱$$

اگر از دستور

$$۱ + ۲ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{۲}$$

استفاده کنیم معلوم می‌شود که جواب برابر است با $\frac{۲۴ \times ۲۵}{۲}$ یا ۳۰۰.

۲. کمد های دانش آموزان در مدرسه المپیک پشت سر هم شماره خورده‌اند و شماره اولین کمد ۱ است. قیمت هر قطعه از رقمهای پلاستیکی که برای شماره‌گذاری به‌کار می‌روند دو تومان است. بنابراین، شماره‌گذاری کمد شماره ۹ دو تومان و شماره‌گذاری کمد شماره ۱۰ چهار تومان خرج دارد. اگر هزینه شماره‌گذاری همه کمد ها ۱۳۷۹۴ تومان شده باشد، در این مدرسه چند کمد وجود دارد؟ (آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۹۹)

راه‌حل

برای شماره‌گذاری کمد ها به $\frac{۱۳۷۹۴}{۲}$ رقم احتیاج است که برابر است با ۶۸۹۷ رقم. برای شماره‌گذاری کمد های شماره ۱ تا ۹ به ۹ رقم احتیاج است، برای شماره‌گذاری کمد های شماره ۱۰ تا ۹۹ به ۲×۹۰ رقم احتیاج است و برای شماره‌گذاری کمد های شماره ۱۰۰ تا ۹۹۹ به ۳×۹۰۰ رقم احتیاج است. بنابراین، برای شماره‌گذاری بقیه کمد ها به

$$۶۸۹۷ - ۳ \times ۹۰۰ - ۲ \times ۹۰ - ۹$$

رقم احتیاج است که برابر است با ۴۰۰۸ رقم. بنابراین باید $\frac{۴۰۰۸}{۴}$ یا ۱۰۰۲ کمد دیگر وجود داشته باشد که شماره هر یک از آنها ۴ رقمی است. در کل $۱۰۰۲ + ۹۹۹$ کمد دانش‌آموزی وجود دارد که برابر است با ۲۰۰۱ کمد.

۳. فرض کنید n عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد. ثابت کنید تعداد عددهای فرد در دنباله

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

عددی فرد است.

(مجله ریاضی تیمیشوارا)

راه‌حل

مجموع عددهای دنباله موردنظر برابر است با

$$\frac{1}{2} \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right) = \frac{1}{2} (2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$$

که عددی فرد است و در نتیجه حکم به دست می آید.

۴. چند عدد طبیعی که از ۲۰۰۱ بزرگتر نیستند مضرب ۳ یا ۴ اند اما مضرب ۵ نیستند؟
(مسابقه ریاضی آمریکا-۱۲، ۲۰۰۱)

راه حل

در میان عددهای طبیعی که از ۲۰۰۱ بزرگتر نیستند، مضرب ۳ و $\left\lfloor \frac{2001}{3} \right\rfloor$ مضرب ۴ وجود دارد. از این $\left\lfloor \frac{2001}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{4} \right\rfloor$ عدد، مضربهای ۱۲ را که تعدادشان برابر است با $\left\lfloor \frac{2001}{12} \right\rfloor$ دو بار شمرده ایم؛ بنابراین تعداد مضربهای ۳ یا ۴ برابر است با

$$\left\lfloor \frac{2001}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2001}{12} \right\rfloor$$

که برابر است با ۱۰۰۱. از این عددها $\left\lfloor \frac{2001}{15} \right\rfloor$ مضرب ۱۵ و $\left\lfloor \frac{2001}{20} \right\rfloor$ مضرب ۲۰ را کنار می گذاریم، زیرا این عددها مضرب ۵ اند. توجه کنید که به این ترتیب $\left\lfloor \frac{2001}{60} \right\rfloor$ مضرب ۶۰ را دو بار کنار گذاشته ایم و بنابراین باید یک بار دیگر آنها را حساب کنیم. تعداد عددهایی که ویژگیهای مورد نظر را دارند برابر است با

$$1001 - \left\lfloor \frac{2001}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2001}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{60} \right\rfloor$$

که برابر است با ۸۰۱.

۵. فرض کنید

$$x = 0,123456789101112...998999$$

که در آن رقمهای بعد از ممیز با نوشتن عددهای طبیعی از ۱ تا ۹۹۹ به دنبال هم به دست آمده اند. رقم ۱۹۸۳ ام سمت راست ممیز را پیدا کنید.

(آزمون ریاضیات دبیرستانی آمریکا، ۱۹۸۳)

راه حل

۱۹۸۳ رقم نخست را در نظر بگیرید و فرض کنید رقم ۱۹۸۳ ام برابر با z باشد. می توانیم این ردیف از رقمها را به سه قطعه زیر تقسیم کنیم

$$0, \underbrace{123456789}_{A} \underbrace{1011 \dots 9899}_{B} \underbrace{100101 \dots z}_{C}$$

۹ رقم در A و 90×2 رقم در B وجود دارد، بنابراین $1983 - 189 = 1994$ رقم در C وجود دارد که برابر است با ۱۷۹۴ رقم. اگر ۱۷۹۴ را بر ۳ تقسیم کنیم خارج قسمت ۵۹۸ و باقیمانده ۰ می شود.

بنابراین C از نخستین ۵۹۸ عدد سه‌رقمی تشکیل شده است. چون نخستین عدد سه‌رقمی 100 است (نه 101 یا 100)، پس ۵۹۸ امین عدد سه‌رقمی $99 + 598$ یا 697 است. پس $z = 7$.

۶. بیست و پنج دانش‌آموز و بیست و پنج معلم دور میزی نشسته‌اند. ثابت کنید که می‌توان کسی را پیدا کرد که کنار دستیهایش معلم‌اند.

راه حل اول

فرض کنید که افراد طوری نشسته باشند که هیچ‌یک از آنها بین دو معلم نشسته است. هر گروهی از معلمان (دانش‌آموزان) را که پهلوی پهلوی هم طوری نشسته‌اند که دو طرفشان دانش‌آموز (معلم) نشسته است قطعه می‌نامیم. بنابر فرضمان، هر قطعه از معلمان حداکثر دو معلم دارد و در فاصله میان هر دو قطعه از معلمان دست‌کم دو دانش‌آموز نشسته‌اند. بنابراین دست‌کم $\lceil \frac{25}{2} \rceil$ یا ۱۳ قطعه از معلمان وجود دارد و دست‌کم 13×2 دانش‌آموز در فاصله‌های میان قطعه‌های معلمان نشسته‌اند. اما فقط ۲۵ دانش‌آموز داریم، پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین فرضمان غلط است و حتماً کسی وجود دارد که بین دو معلم نشسته است.

راه حل دوم

باز هم فرض می‌کنیم که افراد طوری نشسته باشند که هیچ‌یک از آنها بین دو معلم نشسته است. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که افراد در جهت ساعتگرد به ترتیب در موقعیتهای a_1, a_2, \dots و a_5 نشسته‌اند (پس a_5 کنار a_1 نشسته است). اکنون این افراد را دور دو میز در جهت ساعتگرد به ترتیب $(a_1, a_3, a_5, \dots, a_{49})$ و $(a_2, a_4, a_6, \dots, a_{50})$ می‌نشانیم. در این صورت، بنابر فرضمان، هیچ دو معلمی دور این دو میز کنار هم نشسته‌اند. پس دور هر یک از این دو میز حداکثر ۱۲ معلم نشسته‌اند و در نتیجه حداکثر ۲۴ معلم داریم، که تناقض است. بنابراین فرضمان غلط است و حتماً کسی وجود دارد که بین دو معلم نشسته است.

۷. در پایان یک دوره مسابقات قهرمانی بولینگ، پنج نفر اول به‌طور حذفی مسابقه می‌دهند. ابتدا نفر پنجم با نفر چهارم مسابقه می‌دهد. بازنده جایزه پنجم را می‌گیرد و برنده با نفر سوم مسابقه می‌دهد. بازنده این مسابقه جایزه چهارم را می‌گیرد و برنده آن با نفر دوم مسابقه می‌دهد. بازنده این مسابقه جایزه سوم را می‌گیرد و برنده آن با نفر اول مسابقه می‌دهد. برنده این بازی جایزه اول را می‌گیرد و بازنده آن جایزه دوم را می‌گیرد. به چند ترتیب نفرات اول تا پنجم می‌توانند جایزه‌ها را تصاحب کنند؟ (آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۸)

راه حل

برای اینکه برنده جایزه‌های اول تا پنجم مشخص شود باید چهار بازی انجام شود و هر بازی دوجور

نتیجه ممکن است داشته باشد. نحوه اهدای جایزه‌ها به‌ازای هر دو دنباله چهارتایی متمایز از نتیجه‌ها فرق می‌کند. بنابراین ۲۴ یا ۱۶ ترتیب مختلف برای اهدای جایزه‌ها وجود دارد.

۸. عنکبوت به هر پایش یک جوراب و یک کفش می‌کند. اگر قرار باشد که ابتدا جوراب پوشیده شود بعد کفش، عنکبوت به چند طریق مختلف می‌تواند جورابها و کفشهایش را به پا کند؟
(مسابقه ریاضی آمریکا-۱۲، ۲۰۰۱)

راه حل

پاهای عنکبوت را از ۱ تا ۸ شماره‌گذاری کنید و فرض کنید a_k و b_k جوراب و کفشی باشند که باید به پای شماره k بروند. هر ترتیب ممکن از جورابها و کفشها جایگشتی از شانزده نماد $a_1, b_1, \dots, a_8, b_8$ است، که در آن، به‌ازای $1 \leq k \leq 8$ ، a_k پیش از b_k آمده است. تعداد جایگشتهای این ۱۶ نماد برابر با $16!$ است، که در نیمی از آنها، یعنی در $\frac{16!}{2}$ تا از آنها، a_1 پیش از b_1 آمده است. به همین ترتیب معلوم می‌شود که در نیمی از اینها، یعنی در $\frac{16!}{2}$ تا از آنها، a_2 پیش از b_2 آمده است. اگر به همین ترتیب استدلال را ادامه دهیم نتیجه می‌گیریم که در $\frac{16!}{2^8}$ جایگشت، به‌ازای $1 \leq k \leq 8$ ، a_k پیش از b_k آمده است.

۹. در کشویی که در اتاقی تاریک قرار دارد ۱۰۰ جوراب قرمز، ۸۰ جوراب سبز، ۶۰ جوراب آبی و ۴۰ جوراب مشکی وجود دارد. پسر بچه‌ای هر بار یک جوراب از این کشو انتخاب می‌کند، اما نمی‌تواند رنگ جورابی را که بیرون آورده است ببیند. کمترین تعداد جورابهایی که باید درآورد تا مطمئن شد که در میان جورابهایی بیرون آورده شده دست‌کم ۱۰ جفت جوراب وجود دارد چقدر است؟ (هر جفت جوراب، دو جوراب یک‌رنگ است. هیچ جورابی را نمی‌توان در بیش از یک جفت شمرد.)
(آزمون ریاضیات دبیرستانی آمریکا، ۱۹۸۶)

راه حل اول

در هر انتخابی از جورابها حداکثر یک جوراب از هر رنگ بی‌لنگه باقی می‌ماند، و این وضعیت وقتی فقط وقتی پیش می‌آید که تعداد فردی جوراب از یک رنگ انتخاب شده باشند. بنابراین، برای برآورده شدن منظور ما، انتخاب ۲۴ جوراب کافی است، زیرا حداکثر ۴ جوراب بی‌لنگه می‌مانند و دست‌کم ۲۰ جوراب جفت انتخاب شده‌اند. با این وجود، انتخاب ۲۳ جوراب هم منظور ما را برآورده می‌کند! چون ۲۳ برابر با مجموع چهار عدد فرد نیست، حداکثر ۳ جوراب از ۲۳ جوراب انتخاب شده بی‌لنگه می‌مانند. از طرف دیگر، انتخاب ۲۲ جوراب منظور ما را برآورده نمی‌کند، زیرا اگر تعداد جورابهایی قرمز، سبز، آبی و سیاه ۵، ۵، ۷ و ۷ باشد، ۴ تا از آنها بی‌لنگه می‌مانند و در نتیجه ۹ جفت جوراب داریم. بنابراین ۲۳ کمترین تعداد جورابهایی است که باید انتخاب کرد.

راه حل دوم

استقرایی عمل می‌کنیم. اگر یک جفت جوراب بخواهیم، کافی است ۵ جوراب انتخاب کنیم. علاوه بر این، اگر ۴ جوراب انتخاب کنیم مطمئن نیستیم که یک جفت جوراب داشته باشیم، زیرا ممکن است از هر رنگ یک جوراب انتخاب کرده باشیم.

اگر دو جفت جوراب بخواهیم، کافی است ۷ جوراب انتخاب کنیم: در میان هر ۷ جوراب حتماً یک جفت جوراب وجود دارد؛ اگر این جفت را کنار بگذاریم، همان‌طور که در بالا گفتیم، در میان ۵ جوراب باقی‌مانده جفت دیگری وجود دارد. از طرف دیگر، اگر ۶ جوراب انتخاب کرده باشیم، ممکن است سه جوراب سبز، ۱ جوراب سیاه، ۱ جوراب قرمز و ۱ جوراب آبی انتخاب کرده باشیم و در نتیجه فقط یک جفت داشته باشیم. بنابراین کمترین تعداد جورابهایی که باید انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم دو جفت جوراب داریم ۷ تا است.

از همین روش استدلال معلوم می‌شود که باید ۹ جوراب بیرون بیاوریم تا مطمئن باشیم که ۳ جفت جوراب داریم و در حالت کلی، باید $3 + 2p$ جوراب بیرون بیاوریم تا مطمئن باشیم که p جفت جوراب داریم. به سادگی می‌توان این مطلب را به استقرای ریاضی ثابت کرد. بنابراین باید ۲۳ جوراب بیرون بیاوریم تا مطمئن باشیم که ۱۰ جفت جوراب داریم.

۱۰. عددی گویا مفروض است. این عدد را به شکل کسری ساده‌نشده بنویسید و حاصل ضرب صورت و مخرج آن را حساب کنید. به ازای چندتا از عددهای گویا میان ۰ و ۱ این حاصل ضرب برابر با ۲۰! است؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۱)

راه حل

برای اینکه کسری ساده‌نشده باشد، باید صورت و مخرج آن نسبت به هم اول باشند. بنابراین هیچ مقسوم‌علیه اولی از صورت نباید مقسوم‌علیه اولی از مخرج هم باشد، و برعکس. ۲۰! هشت مقسوم‌علیه اول دارد، که عبارت‌اند از ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹. باید تصمیم بگیریم که هریک از این مقسوم‌علیه‌های اول در صورت بیاید یا در مخرج. به ۲۸ طریق می‌توان این کار را کرد. اما همه این ۲۵۶ کسر از ۱ کوچکتر نیستند. درحقیقت، می‌توان این کسر را به ۱۲۸ جفت که وارون یکدیگرند تقسیم کرد که هر کدام دقیقاً یک کسر کوچکتر از ۱ دارد. بنابراین تعداد عددهای گویا که ویژگیهای موردنظر را دارند برابر با ۱۲۸ است.

۱۱. به چند طریق می‌توان پنج عدد از میان نخستین هجده عدد طبیعی طوری انتخاب کرد که تفاضل هر دوتا از عددهای انتخاب‌شده دست‌کم ۲ باشد؟

راه حل

فرض کنید a_1, a_2, a_3, a_4 و a_5 پنج عدد انتخاب شده باشند و

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$$

فرض کنید

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, a_4 - 3, a_5 - 4)$$

در این صورت b_1, b_2, b_3, b_4 و b_5 پنج عدد متمایز از نخستین چهارده عدد طبیعی‌اند. برعکس، از هر پنج عدد متمایز مانند b_1, b_2, b_3, b_4 و b_5 که

$$b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$$

اگر فرض کنیم

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, b_4 + 3, b_5 + 4)$$

می‌توانیم پنج عدد به‌دست بیاوریم که ویژگیهای موردنظر را داشته باشند. بنابراین نگاشتی یک‌به‌یک میان مجموعه پنج‌تاییهائی که ویژگیهای موردنظر را دارند و مجموعه پنج‌تاییهائی متمایز از نخستین چهارده عدد طبیعی یافته‌ایم. بنابراین جواب مسأله (۱۴) است که برابر است با ۲۰۰۲.

۱۲. در اتاقی N نفر حاضرند، $N > 3$ ، و دست‌کم یکی از این افراد با هیچ‌کسی در این اتاق دست نداده است. حداکثر چند نفر از افراد حاضر در این اتاق با همهٔ افراد دیگر دست داده‌اند؟ (آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۸)

راه حل

افراد را با A_1, A_2, \dots و A_N طوری برچسب بزنید که A_1 و A_2 زوجی باشند که با هم دست نداده‌اند. ممکن است که هر دو نفر دیگری از این افراد با هم دست داده باشند و فقط A_1 و A_2 با بقیه دست نداده باشند. بنابراین، حداکثر $N - 2$ نفر با بقیهٔ افراد دست داده‌اند.

۱۳. تعداد چهارتاییهائی مرتب از عددهای طبیعی فرد مانند (x_1, x_2, x_3, x_4) را پیدا کنید که

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$$

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۸)

راه حل

هر x_i را می‌توان با $2y_i - 1$ جایگزین کرد، که در اینجا y_i عددی طبیعی است. چون

$$98 = \sum_{i=1}^4 (2y_i - 1) = 2 \left(\sum_{i=1}^4 y_i \right) - 4$$

در هر حالت گام استقرایی خاتمه می یابد و اثباتمان کامل شده است.

۱۵. در چند جفت از عددهای متوالی از مجموعه

$$\{1000, 1001, 1002, \dots, 2000\}$$

وقتی عددها را با هم جمع می کنیم انتقالی نداریم؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۲)

راہ حل

فرض کنید نمایش اعشاری عدد $nabc$ باشد. اگر یکی از a, b یا c برابر با ۵، ۶، ۷ یا ۸ باشد، وقتی n و $n+1$ را با هم جمع می کنیم انتقالی داریم. اگر $b=9$ و $c \neq 9$ ، یا اگر $a=9$ و یا $b \neq 9$ یا $c \neq 9$ ، باز هم وقتی که n و $n+1$ را با هم جمع می کنیم انتقالی داریم. اگر n هیچ یک از عددهایی که در بالا گفتیم نباشد، به یکی از شکلهای

$$1abc, \quad 1ab9, \quad 1a99, \quad 1999$$

است، که در آنها $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. به ازای چنین n ای، وقتی که n و $n+1$ را با هم جمع می کنیم انتقالی نداریم. تعداد چنین n هایی $1 + 5 + 5^2 + 5^3$ است که برابر است با ۱۵۶.

۱۶. شش دانش آموز و پروفسور آلفا، پروفسور بتا و پروفسور گاما باید روی نه صندلی که در یک ردیف چیده شده اند بنشینند. پروفسورها پیش از شش دانش آموز رسیده اند و تصمیم گرفته اند که صندلیهایشان را طوری انتخاب کنند که هر یک از آنها در میان دو دانش آموز قرار داشته باشد. به چند طریق می توانند این کار را انجام دهند؟

(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۹۴)

راہ حل اول

روی دو صندلی دو سر ردیف صندلیها باید دانش آموز بنشینند، پس پروفسورها باید صندلی خود را از میان هفت صندلی وسط طوری انتخاب کنند که صندلیهایشان مجاور نباشد. اگر این صندلیها را از ۲ تا ۸ شماره بگذاریم، می توان صندلیهای زیر را انتخاب کرد:

$$(2, 4, 6), \quad (2, 4, 7), \quad (2, 4, 8), \quad (2, 5, 7), \quad (2, 5, 8)$$

$$(2, 6, 8), \quad (3, 5, 7), \quad (3, 5, 8), \quad (3, 6, 8), \quad (4, 6, 8)$$

پروفسورها می توانند در هر یک از این سه تاییها به ۳! بنشینند، پس تعداد کل راههای مورد نظر برابر است با $6 \times 10 \times 60$.

راه حل دوم

فرض کنید شش دانش آموز پیش از نشستن در یک ردیف بایستند. پنج جای خالی میان آنها وجود دارد که در هر یک از آنها حداکثر یکی از سه پروفیسور ممکن است قرار بگیرد. بنابراین $P(5, 3)$ راه برای اینکه پروفیسورها جای خود را انتخاب کنند وجود دارد و

$$P(5, 3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

۱۷. ثابت کنید در میان هر ۱۶ عدد طبیعی متمایز که از ۱۰۰ بیشتر نیستند چهار عدد متمایز مانند a , b , c و d وجود دارد که $a + b = c + d$.

راه حل

فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_{16} این ۱۶ عدد باشند و

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{16}$$

تفاضل هر جفت از این عددها را در نظر بگیرید. تعداد این جفتها $\binom{16}{2}$ است که برابر است با ۱۲۰. هر جفت از عددها را به شکل (a_i, a_j) نشان می دهیم که در آن $a_i > a_j$. اگر دو جفت متمایز مانند (a_{i_1}, a_{i_2}) و (a_{i_3}, a_{i_4}) داشته باشیم که $a_{i_1} - a_{i_2} = a_{i_3} - a_{i_4}$ ، اگر فرض کنیم

$$(a, b, c, d) = (a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4})$$

بجز وقتی که $a_{i_2} = a_{i_3}$ ، چهارتایی (a, b, c, d) ویژگی مورد نظر را دارد. می گوئیم عدد a برای دو جفت (a, a_{i_1}) و (a, a_{i_2}) نامناسب است هرگاه $a - a_{i_2} = a - a_{i_1}$ (یا $2a = a_{i_1} + a_{i_2}$). توجه کنید که اگر عددی مانند a برای دو جفت از جفت عددها نامناسب باشد، حکم را ثابت کرده ایم. درحقیقت، اگر a برای (a, a_{i_1}) و (a, a_{i_2}) و نیز برای (a_{i_3}, a) و (a, a_{i_4}) نامناسب باشد، آن وقت

$$a_{i_1} + a_{i_2} = 2a = a_{i_3} + a_{i_4}$$

سرانجام، فرض کنید هر یک از a_i ها حداکثر برای یک جفت از جفت عددها نامناسب باشد. در مورد هر جفت از چنین عددهایی یک جفت را کنار می گذاریم. بنابراین، دیگر عددی نامناسب نداریم. البته هنوز دست کم ۱۶ - ۱۲۰ یا ۱۰۴ جفت از عددها باقی مانده اند. تفاضل عددهای هر یک از جفتهای باقی مانده عددی از ۱ تا ۹۹ است. بنابر اصل لانه کبوتری، مقدار برخی از این تفاضلهای با هم برابر است. اگر فرض کنیم $a_{i_1} - a_{i_2} = a_{i_3} - a_{i_4}$ ، چهارتایی $(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4})$ ویژگی مورد نظر را دارد.

۱۸. پسر بچه ای ۹۶ مهره متمایز دارد. جنس هر مهره یا پلاستیک است یا چوب، اندازه هر مهره یا کوچک است یا متوسط یا بزرگ، رنگ هر مهره یا آبی است یا سبز یا قرمز یا زرد و شکل هر مهره

یا دایره است یا شش ضلعی یا مربع یا مثلث. چنداناً از این مهره‌ها با مهره «پلاستیکی متوسط قرمز دایره‌ای» دقیقاً در دو مشخصه فرق دارند؟ (مهره «چوبی متوسط قرمز مربعی» یکی از این مهره‌هاست.)

(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۹)

راه حل

برای اینکه مهره‌ای با مهره موردنظر فرق کند در مورد جنس مهره ۱ انتخاب، در مورد اندازه مهره ۲ انتخاب، در مورد رنگ مهره ۳ انتخاب و در مورد شکل مهره ۳ انتخاب داریم. (۴) حالت برای اینکه مهره‌ای با مهره موردنظر دقیقاً در دو مشخصه فرق داشته باشد وجود دارد:

۱. جنس و اندازه: ۱×۲ مهره متفاوت.
۲. جنس و رنگ: ۱×۳ مهره متفاوت.
۳. جنس و شکل: ۱×۳ مهره متفاوت.
۴. اندازه و رنگ: ۲×۳ مهره متفاوت.
۵. اندازه و شکل: ۲×۳ مهره متفاوت.
۶. رنگ و شکل: ۳×۳ مهره متفاوت.

بنابراین

$$۲ + ۳ + ۳ + ۶ + ۶ + ۹$$

یا ۲۹ مهره با مهره موردنظر در دقیقاً دو مشخصه فرق دارند.

۱۹. شماره تلفن هفت رقمی $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ را به یادماندنی بنامید، هرگاه دنباله پیش‌شماره آن، یعنی $d_1d_2d_3$ ، با دنباله $d_4d_5d_6$ یا دنباله $d_5d_6d_7$ (یا هر دو آنها) یکسان باشد. با فرض اینکه هر یک از d_i ها ممکن است یکی از ده رقم اعشاری ۰، ۱، ۲، ... و ۹ باشد، تعداد شماره تلفنهای به یادماندنی متمایز را پیدا کنید.

(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۹۸)

راه حل اول

۱۰۰۰۰ راه برای نوشتن چهار رقم آخر، یعنی $d_4d_5d_6d_7$ ، وجود دارد و در میان اینها $۱۰ - ۱۰۰۰۰$ یا ۹۹۹۰ تا دست‌کم دو رقم متمایز دارند. در مورد هر یک از اینها دقیقاً دو راه وجود دارد که می‌توان سه رقم $d_1d_2d_3$ را طوری نوشت که شماره به دست آمده به یادماندنی شود. ده شماره به یادماندنی وجود دارد که چهار رقم آخرشان یکسان است، پس در کل $۱۰ + ۹۹۹۰ \times ۲$ یا ۱۹۹۹۰ شماره تلفن به یادماندنی وجود دارد.

راه حل دوم

فرض کنید A مجموعه شماره تلفنهایی باشد که در آنها $d_1 d_2 d_3$ با $d_4 d_5 d_6$ یکسان است و B مجموعه شماره تلفنهایی باشد که در آنها $d_1 d_2 d_3$ بر $d_5 d_6 d_7$ منطبق است. شماره تلفنی مانند $d_1 d_2 d_3 - d_4 d_5 d_6 d_7$ وقتی و فقط وقتی عضو $A \cap B$ است که

$$d_1 = d_2 = d_5 = d_6 = d_4 = d_3 = d_7$$

بنابراین $|A \cap B| = 10$. به این ترتیب، بنابر اصل شمول و عدم شمول،

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= 10^3 \times 1 \times 10 + 10^3 \times 10 \times 1 - 10 = 19990$$

۲۰. دوتا از خانه‌های صفحه شطرنجی 7×7 را زرد و بقیه را سبز می‌کنیم. دو رنگ‌آمیزی را هم‌ارز می‌نامیم اگر بتوان یکی را با دوران صفحه شطرنج از دیگری به‌دست آورد. چند رنگ‌آمیزی غیرهم‌ارز می‌توان به‌دست آورد؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۶)

راه حل

(۴۹) راه برای انتخاب خانه‌های زرد وجود دارد که برابر است با ۱۱۷۶. چون می‌توان صفحه را یک‌چهارم دور چرخاند، تعداد رنگ‌آمیزیهای غیرهم‌ارز از ۱۱۷۶ کمتر است. رنگ‌آمیزیهایی که در آنها دو خانه زرد رنگ متقاطع نیستند چهار رنگ‌آمیزی هم‌ارز به‌وجود می‌آورند. رنگ‌آمیزیهایی که در آنها دو خانه زرد رنگ متقاطعند دو رنگ‌آمیزی هم‌ارز به‌وجود می‌آورند و $\frac{49-1}{2}$ یا ۲۴ جفت از این خانه‌های زرد رنگ وجود دارد. بنابراین تعداد رنگ‌آمیزیهای غیرهم‌ارز برابر است با

$$\frac{1176 - 24}{4} + \frac{24}{2} = 300$$

۲۱. به چند طریق می‌توان عددهای ۲۱، ۳۱، ۴۱، ۵۱، ۶۱، ۷۱ و ۸۱ را طوری مرتب کرد که مجموع هر چهار عدد متوالی از آنها بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

(لیگ منطقه‌ای ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

راه حل

چون فقط لازم است عددها را به‌پیمانه ۳ در نظر بگیریم، عددهای ۲۱، ۳۱، ۴۱، ۵۱، ۶۱، ۷۱ و ۸۱ را ۰، ۱، ۲، ۰، ۱، ۲، ۰، ۱، ۲ و ۰ در نظر می‌گیریم. فرض کنید

$$a_1, a_2, \dots, a_7$$

یکی از آرایشهای مورد نظر باشد. توجه کنید که

$$\begin{aligned} & \circ \equiv (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \\ & \equiv (a_1 + a_2 + \dots + a_7) + a_4 \\ & \equiv (\circ + 1 + 2 + \circ + 1 + 2 + \circ) + a_4 \\ & \equiv a_4 \text{ (به پیمانه ۳)} \end{aligned}$$

بنابراین a_1, a_2 و a_3 باید جایگشتی از $\circ, 1$ و 2 باشند، زیرا

$$a_1 + a_2 + a_3 \equiv a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv \circ \text{ (به پیمانه ۳)}$$

چون

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv \circ \text{ (به پیمانه ۳)}$$

پس (به پیمانه ۳) $a_1 \equiv a_5$. به همین ترتیب می توانیم ثابت کنیم که ترتیب a_5, a_6 و a_7 به طور یکتا بر اساس a_1, a_2 و a_3 معلوم می شود. بنابراین تعداد آرایشهای مورد نظر برابر است با $3! \times 2 \times 3 = 12$ یا ۱۴۴.

۲۲. فرض کنید S مجموعه ای شش عضوی باشد. به چند طریق مختلف می توان دو زیرمجموعه از S را که لزوماً متمایز نیستند طوری انتخاب کرد که اجتماع این دو زیرمجموعه برابر با S باشد؟ ترتیب انتخاب مهم نیست؛ مثلاً انتخاب دو زیرمجموعه $\{a, c\}$ و $\{b, c, d, e, f\}$ با انتخاب دو زیرمجموعه $\{a, c\}$ و $\{b, c, d, e, f\}$ فرقی ندارد.

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۳)

راه حل

برای اینکه $A \cup B = S$ ، به ازای هر عضو S مانند s باید دقیقاً یکی از حکمهای زیر درست باشد:

$$s \in A, \quad s \notin B$$

$$s \in A, \quad s \in B$$

$$s \notin A, \quad s \in B$$

بنابراین اگر S ، n عضوی باشد، 3^n راه برای انتخاب A و B وجود دارد. بجز در جفت هایی که در آنها $A = B$ ، در این روش هر جفت از مجموعه ها را دو بار شمرده ایم. چون $A \cup B = S$ و $A = B$ وقتی و فقط وقتی پیش می آید که $A = B = S$ ، تعداد جفت هایی از زیرمجموعه های S که اجتماعشان برابر با S است برابر است با

$$\frac{3^n - 1}{2} + 1$$

که وقتی $n = 6$ برابر است با ۳۶۵.

۲۳. مجموعه‌ای از عددهای مثبت مثلی است، هرگاه سه عضو متمایز داشته باشد که سه ضلع مثلی با مساحت مثبت باشند. مجموعه‌هایی مانند $\{4, 5, 6, \dots, n\}$ از عددهای طبیعی متوالی را در نظر بگیرید که همه زیرمجموعه‌های ده‌عضوی آنها مثلی‌اند. بیشترین مقدار ممکن n چقدر است؟ (آزمون دعوتی ریاضیات آمریکا، ۲۰۰۱)

راه حل

مجموعه $\{4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157, 254\}$ زیرمجموعه‌ای ده‌عضوی از مجموعه $\{4, 5, 6, \dots, 254\}$ است که مثلی نیست. فرض کنید N کوچکترین عدد صحیحی باشد که مجموعه $\{4, 5, 6, \dots, N\}$ زیرمجموعه‌ای ده‌عضوی دارد که مثلی نیست. فرض کنید $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}\}$ چنین زیرمجموعه‌ای باشد و

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{10}.$$

چون هیچ‌یک از زیرمجموعه‌های سه‌عضوی این مجموعه طول ضلعهای هیچ مثلی نیستند، باید

$$\begin{aligned} N &\geq a_{10} \geq a_9 + a_8 \geq (a_8 + a_7) + a_8 \\ &= 2a_8 + a_7 \geq 2(a_7 + a_6) + a_7 = 3a_7 + 2a_6 \\ &\geq 3(a_6 + a_5) + 2a_6 = 5a_6 + 3a_5 \geq 8a_5 + 5a_4 \\ &\geq 13a_4 + 8a_3 \geq 21a_3 + 13a_2 \geq 34a_2 + 21a_1 \\ &\geq 34 \times 5 + 21 \times 4 = 254 \end{aligned}$$

بنابراین $N = 254$ و بیشترین مقدار n برابر است با $N - 1 = 253$.

۲۴. A و B دو مجموعه جدا از هم‌اند که اجتماعشان مجموعه عددهای طبیعی است. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m عددهایی متمایز مانند a و b وجود دارند که $a, b > n$ و یا $\{a, b, a+b\} \subseteq A$ یا $\{a, b, a+b\} \subseteq B$.

(دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۷)

راه حل

عددهای a و b را طوری پیدا می‌کنیم که $a, b > n$ و $a+b$ در همان مجموعه‌ای باشد که a و b هستند. ابتدا فرض کنید که $|A|$ متناهی و m بزرگترین عضو آن باشد. در این صورت به‌ازای هر $n \geq m$ که $n, n+1, n+2$ و $n+3$ همگی در B هستند، زیرا

$$2n+3 = (n+1) + (n+2)$$

در نتیجه، فرض می‌کنیم که A و B هر دو نامتناهی باشند.

از استدلال غیرمستقیم استفاده می‌کنیم. فرض کنید عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد که به ازای هر a و هر b که $a, b > n$,

$$\{a, b, a + b\} \not\subset A, \quad \{a, b, a + b\} \not\subset B$$

اکنون x, y و z را در A طوری انتخاب کنید که

$$x > y > z > n, \quad y - z > n$$

چون A نامتناهی و در نتیجه بی‌کران است می‌توان این کار را انجام داد. در این صورت

$$\{x + y, y + z, z + x\} \subset B$$

اما به این ترتیب $y - z$ بدون جا می‌ماند. پس فرضمان غلط است و حکم را ثابت کرده‌ایم.

۲۵. دنباله صعودی

$$۱, ۳, ۴, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۳, \dots$$

از همهٔ عددهای طبیعی تشکیل شده است که توان ۳ اند یا مجموع توانهای متمایز ۳ اند. جملهٔ ۱۰۰ام این دنباله را پیدا کنید (۱ جملهٔ اول است، ۳ جملهٔ دوم است و همین‌طور در مورد بقیه). (آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۶)

راه حل اول

اگر فقط از نخستین شش توان ۳ که نماهایشان عددهایی صحیح و غیرمنفی‌اند، یعنی از ۱، ۳، ۹، ۲۷، ۸۱ و ۲۴۳، استفاده کنیم فقط می‌توانیم ۶۳ جمله را بنویسیم، زیرا

$$\binom{۶}{۱} + \binom{۶}{۲} + \dots + \binom{۶}{۶} = ۲^۶ - ۱ = ۶۳$$

در نتیجه، به توان بعدی ۳، یعنی ۷۲۹، هم احتیاج داریم.

پس از ۶۳ جملهٔ اول دنبالهٔ موردنظر، جمله‌های بعدی باید یکی از جمعوندهایشان ۷۲۹ باشد و جمعوند ۲۴۳ نداشته باشند. ۳۲ تا از این جمله‌ها وجود دارد، زیرا

$$\binom{۵}{۰} + \binom{۵}{۱} + \dots + \binom{۵}{۵} = ۳۲$$

که تعداد جمله‌ها را به ۹۵ می‌رساند. چون جملهٔ ۱۰۰ام را می‌خواهیم، باید ۲۴۳ را حساب کنیم و ۸۱ را حذف کنیم. با این کار معلوم می‌شود که جمله‌های ۹۶ام، ۹۷ام، ... و ۱۰۰ام ۲۴۳ + ۷۲۹، ۲۴۳ + ۷۲۹ + ۳، ۲۴۳ + ۷۲۹ + ۱ + ۳ + ۷۲۹ + ۲۴۳ + ۹ و ۷۲۹ + ۲۴۳ هستند. پس جملهٔ ۱۰۰ام ۹۸۱ است.

راه حل دوم

توجه کنید که عددی طبیعی وقتی و فقط وقتی عضوی از این دنباله است که بسط آن در مبنای ۳ فقط از رقمهای ۰ و ۱ تشکیل شده باشد. بنابراین می‌توانیم تناظری یک‌به‌یک میان عددهای طبیعی و عضوهای این دنباله برقرار کنیم، به این ترتیب که هر دو را با رقمهای دودویی (۰، ۱) نمایش دهیم، ابتدا در مبنای ۲ و سپس در مبنای ۳:

$$\begin{aligned} 1 &= 1(2) & \Leftrightarrow & 1(3) = 1 \\ 2 &= 10(2) & \Leftrightarrow & 10(3) = 3 \\ 3 &= 11(2) & \Leftrightarrow & 11(3) = 4 \\ 4 &= 100(2) & \Leftrightarrow & 100(3) = 9 \\ 5 &= 101(2) & \Leftrightarrow & 101(3) = 10 \\ & \vdots & & \end{aligned}$$

به این ترتیب تناظری یک‌به‌یک میان جمله‌های این دو دنباله، که به ترتیب مفروض قرار گرفته‌اند، برقرار کرده‌ایم، یعنی n امین عدد طبیعی نظیر n امین مجموع از توانهای متمایز ۳ (به ترتیب صعودی) است. دلیل این مطلب این است که وقتی عددهای دودویی را به ترتیب صعودی می‌نویسیم، وقتی که آنها را در هر مبنای دیگری هم به حساب آوریم باز هم به ترتیب صعودی‌اند. (اگر بتوانید موضوع را وقتی که عددها را در مبنای ۱۰ به حساب می‌آوریم روشن کنید در مورد مبنای ۳ هم می‌توانید.) بنابراین برای اینکه جمله ۱۰۰ام را پیدا کنیم فقط کافی است سطر ۱۰۰ام تناظر بالا را در نظر بگیریم:

$$100 = 1100100(2) \Leftrightarrow 1100100(3) = 981$$

۲۶. دسته‌ای کارت داریم که روی هر کارت آن یکی از شکلهای دایره، مربع یا مثلث حک شده است و هر یک از این شکلهای به یکی از سه رنگ قرمز، آبی یا سبز است. علاوه بر این، سایه هر یک از رنگها یا ملایم است یا متوسط یا سیر. در این دسته ۲۷ کارت وجود دارد و هر ترکیبی از شکل-رنگ-سایه در آن آمده است. مجموعه‌ای از سه کارت این دسته را متمم می‌نامیم، هرگاه حکمهای زیر هر سه درست باشند:

(الف) یا شکل هر سه کارت متفاوت باشد یا شکل هر سه کارت یکسان باشد.

(ب) یا رنگ هر سه کارت متفاوت باشد یا رنگ هر سه کارت یکسان باشد.

(ج) یا سایه هر سه کارت متفاوت باشد یا سایه هر سه کارت یکسان باشد.

چند مجموعه سه‌کارتی متمم وجود دارد؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۷)

راه حل

یک جفت کارت دلخواه از این دسته کارت در نظر بگیرید. ثابت می‌کنیم که دقیقاً یک کارت وجود دارد که با این دو کارت مجموعه‌ای متمم تشکیل می‌دهد. اگر شکل کارتهای جفت مورد نظر یکسان باشد، شکل کارت سوم هم باید همین شکل باشد و اگر شکل کارتها متفاوت باشد، شکل کارت سوم باید با شکلهای این دو کارت فرق داشته باشد. در هر حالت، شکل کارت سوم به طور یکتا معلوم می‌شود. از همین نحوه استدلال معلوم می‌شود که رنگ و سایه کارت سوم هم به طور یکتا معلوم می‌شود. کارت سوم، که براساس دو کارت اول مشخص می‌شود، هرگز یکی از دو کارت اول نیست. بنابراین، برای حساب کردن تعداد مجموعه‌های متمم، می‌توانیم تعداد جفت کارتها را حساب کنیم و آن را بر ۳ تقسیم کنیم، زیرا در این روش هر مجموعه متمم سه بار شمرده می‌شود. تعداد مجموعه‌های متمم برابر است با

$$\frac{1}{3} \binom{27}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{27 \times 26}{2} = 117$$

۲۷. در اردوی ریاضی، هر m دانش‌آموز دقیقاً یک دوست مشترک دارند، $m \geq 3$. (اگر A دوست B باشد، B هم دوست A است. همچنین، هیچکس دوست خودش نیست.) فرض کنید P بیشترین تعداد دوستان را داشته باشد. این تعداد را مشخص کنید.

(چین، ۱۹۹۰)

راه حل اول

ابتدا توجه کنید که هر دانش‌آموزی دوستی دارد. فرض کنید دانش‌آموزان A_1, A_2, \dots, A_k و دوست یکدیگر باشند، که در اینجا k عددی طبیعی است و $2 \leq k \leq m$. در این صورت دانش‌آموزی مانند A_{k+1} وجود دارد که دوست مشترک همه A_i ها، $1 \leq i \leq k$ ، است. بنابراین می‌توانیم دو دانش‌آموز مانند A_1 و A_2 در نظر بگیریم که دوست یکدیگرند و هر باریک دانش‌آموز اضافه کنیم تا $m+1$ دانش‌آموز مانند A_1, A_2, \dots و A_{m+1} به دست بیاوریم که دوست یکدیگر باشند.

ادعا می‌کنیم که دانش‌آموز دیگری بجز A_1, A_2, \dots, A_{m+1} در اردو حضور ندارد. فرض کنید دانش‌آموز دیگری مانند B هم در اردو باشد. در این صورت B دوستی دارد. حالتهای زیر را در نظر بگیرید.

حالت ۱. اگر B دست‌کم دو دوست در میان دانش‌آموزان A_1, A_2, \dots و A_{m+1} داشته باشد، می‌توانیم بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود فرض کنیم که A_1 و A_2 دوست B

هستند. در این صورت m دانش آموز $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{m+1}$ دو دوست مشترک دارند، یکی A_1 و دیگری A_2 ، که خلاف فرض مسأله است.

حالت ۲. اگر B حداکثر یک دوست در میان دانش آموزان A_1, A_2, \dots, A_{m+1} در اردو داشته باشد، می‌توانیم بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود فرض کنیم که A_2, A_3, \dots, A_{m+1} دوست B نیستند. در این صورت m دانش آموز $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ دو دوست مشترکی مانند C دارند که C هیچ‌یک از A_1, A_2, \dots, A_{m+1} نیست. اما چون $m \geq 3$ ، دانش آموز C دست‌کم دو دوست در میان دانش آموزان A_1, A_2, \dots, A_{m+1} دارد. اما بنابر آنچه در حالت ۱ استدلال کردیم چنین چیزی ممکن نیست.

در کل، ثابت کرده‌ایم که در اردوی موردنظر فقط دانش آموزان A_1, A_2, \dots, A_{m+1} حضور دارند و همه آنها با یکدیگر دوست‌اند. بنابراین تعداد موردنظر برابر با m است.

راه حل دوم

ابتدا توجه کنید که P باید دست‌کم m دوست داشته باشد، زیرا دوست مشترک هر m دانش آموز دست‌کم m دوست دارد (یعنی همین m دانش آموز). اکنون ثابت می‌کنیم که ممکن نیست P بیشتر از m دوست داشته باشد. فرض کنید چنین نباشد. فرض کنید S مجموعه دوستان P باشد و $|S| = n$. بنابر فرض $n \geq m + 1$. ادعا می‌کنیم که به ازای هر زیرمجموعه $(m-1)$ عضوی S مانند S' ، دانش آموز یکتایی مانند $Q_{S'}$ در S وجود دارد که دوست مشترک اعضای S' است. زیرمجموعه‌ای مانند S' در نظر بگیرید. اگر P را به این مجموعه اضافه کنیم، مجموعه‌ای m عضوی به دست می‌آید و در نتیجه، دانش آموز یکتایی مانند Q وجود دارد که دوست P و همه اعضای S' است. ادعا می‌کنیم این Q همان $Q_{S'}$ است که به دنبالش می‌گردیم. در حقیقت، $Q \in S$ ، زیرا بنابر تعریف، S مجموعه همه دوستان P است.

اکنون ادعا می‌کنیم که به ازای هر دو زیرمجموعه $(m-1)$ عضوی S مانند S_1 و S_2 ، Q_{S_1} و Q_{S_2} یکی نیستند. فرض کنید چنین نباشد، یعنی زیرمجموعه‌هایی از S مانند S_1 و S_2 وجود داشته باشند که Q_{S_1} و Q_{S_2} یکی هستند. زیرمجموعه‌ای m عضوی از $S_1 \cup S_2$ انتخاب کنید. در این صورت دانش آموزان این مجموعه دو دوست مشترک دارند، یکی Q_{S_1} و دیگری P ، که خلاف فرض مسأله است.

در نتیجه، هر زیرمجموعه $(m-1)$ عضوی مانند S' متناظر با دانش آموزی مانند $Q_{S'}$ مختص خودش است. تعداد زیرمجموعه‌های $(m-1)$ عضوی S برابر است با $\binom{n}{m-1}$ و چون $n \geq m + 1$ و $m \geq 3$

$$\binom{n}{m-1} \geq \binom{n}{2} > n$$

جای دیگر باید $k-1$ دانش آموز و $1-k-n$ معلم بایستند. بنابراین $2\binom{n-2}{k-1}$ دنباله داریم که در آنها یک جفت معلم و دانش آموز در $(i, i+1)$ ایستاده است. چون $\binom{n}{k}$ دنباله داریم، میانگین موردنظر برابر است با

$$(n-1)A_i = \frac{(n-1) \times 2\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{2k(n-k)}{n}$$

که به ازای $n=20$ و $k=7$ برابر است با $\frac{91}{10}$.

۲۹. دانش آموز بی حوصله‌ای در سالنی که در آن کمد‌های در بسته‌ای با شماره‌های ۱ تا ۱۰۲۴ در یک ردیف قرار گرفته‌اند قدم می‌زند. او در کمد شماره ۱ را باز می‌کند و سپس در کمد‌ها را یکی در میان باز می‌کند. پس از اینکه به انتهای سالن رسید، برمی‌گردد. به اولین کمد در بسته‌ای که برسد در آن را باز می‌کند و سپس در کمد‌ها را یکی در میان باز می‌کند. این دانش آموز آنقدر می‌رود و می‌آید که در همه کمد‌ها باز شود. شماره آخرین کمدی که او درش را باز کرده است چیست؟ (آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۶)

راه حل اول

فرض کنید 2^k کمد در یک ردیف قرار گرفته باشند و L_k شماره آخرین کمدی باشد که درش باز می‌شود. وقتی که دانش آموز برای اولین بار برمی‌گردد، 2^{k-1} کمد در بسته باقی مانده است. شماره همه این کمد‌های در بسته زوج است و از جایی که دانش آموز ایستاده است به ترتیب نزولی قرار گرفته‌اند. اکنون از آخر، جایی که دانش آموز ایستاده است، کمد‌های بسته را دوباره از ۱ تا 2^{k-1} شماره‌گذاری کنید. توجه کنید کمدی که در ابتدا شماره‌اش n بوده است (که در اینجا n عددی زوج است) اکنون شماره‌اش $1 - \frac{n}{2} + 2^{k-1}$ است. بنابراین، چون L_{k-1} شماره آخرین کمدی است که در شماره‌گذاری جدید درش باز می‌شود،

$$L_{k-1} = 2^{k-1} + 1 - \frac{L_k}{2}$$

پس

$$L_k = 2^k + 2 - 2L_{k-1}$$

اگر از این رابطه بازگشتی یک بار دیگر استفاده کنیم به دست می‌آید

$$L_k = 2^k + 2 - 2(2^{k-1} + 2 - 2L_{k-2}) = 4L_{k-2} - 2 \quad (1)$$

وقتی که تعداد کمد‌ها ۱۰۲۴ یا 2^{10} است، آخرین کمدی که درش باز می‌شود L_{10} است. چون $L_0 = 1$ ، اگر از تساوی (۱) چند بار استفاده کنیم معلوم می‌شود که $2 = L_2 - 4L_0$ ، $6 = L_4 - 4L_2$ ، $22 = L_6 - 4L_4$ ، $86 = L_8 - 4L_6$ و $L_{10} = 342$.

راه حل دوم

رابطه بازگشتی (۱) را، که می‌توان آن را به شکل

$$L_k - \frac{2}{3} = 2 \left(L_{k-2} - \frac{2}{3} \right)$$

نوشت، حل می‌کنیم.

چون $L_0 = 1$ و $L_1 = 2$ ، پس

$$L_k - \frac{2}{3} = \begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{\frac{k}{2}} & \text{اگر } k \text{ عددی زوج باشد} \\ \left(2 - \frac{2}{3}\right)^{\frac{k-1}{2}} & \text{اگر } k \text{ عددی فرد باشد} \end{cases}$$

این دستورها را می‌توان یکجا به شکل

$$L_k = \frac{1}{3} \left(2^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} + 2 \right)$$

نوشت. به‌ویژه، $L_{10} = 342$.

یادداشت

اگر ۱۰۰۰ کمد در سالن باشد، راه حل چه تغییری می‌کند؟

۳۰. فرض کنید $n = 2^{31} 3^{19}$. چندتا از مقسوم‌علیه‌های مثبت n^2 از n کوچکترند اما n را نمی‌شمارند؟ (آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۵)

راه حل اول

فرض کنید $n = p^r q^s$ ، که در آن p و q عددهایی اول و متمایزند. در این صورت $n^2 = p^{2r} q^{2s}$ ، پس تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n^2 برابر است با

$$(2r+1)(2s+1)$$

به‌ازای هر مقسوم‌علیه‌ی از n^2 که کوچکتر از n است، مقسوم‌علیه‌ی هم وجود دارد که بزرگتر از n است. اگر n را هم کنار بگذاریم معلوم می‌شود که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n^2 که از n کوچکترند برابر است با

$$\frac{(2r+1)(2s+1) - 1}{2} = 2rs + r + s$$

چون تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n برابر با $(r+1)(s+1)$ است (خود n را هم شمرده‌ایم) و چون هر مقسوم‌علیه n مقسوم‌علیه n^2 هم هست، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n^2 که از n کوچکترند

و مقسوم علیه n نیستند برابر است با

$$2rs + r + s - ((r+1)(s+1) - 1) = rs$$

وقتی که $r = 31$ و $s = 19$ ، تعداد چنین مقسوم علیه‌هایی برابر است با ۵۸۹.

راه حل دوم (از چنگد فنگ)

مقسوم علیه‌ی مثبت از n^2 مانند d وقتی و فقط وقتی از n کوچکتر است و n را نمی‌شمارد که

$$d = \begin{cases} 2^{31+a} 3^{19-b} & 2^a < 3^b \\ 2^{31-a} 3^{19+b} & 2^a > 3^b \end{cases}$$

که در آنها a و b عددهایی صحیح‌اند که $1 \leq a \leq 31$ و $1 \leq b \leq 19$. چون اگر a و b عددهایی طبیعی باشند، $2^a \neq 3^b$ ، تعداد مقسوم علیه‌های مورد نظر برابر است با 19×31 یا ۵۸۹.

۳۱. در یک ورزشگاه در جایگاه تماشاچیان در هر ردیف ۱۹۹ نفر می‌نشینند. یک بار از ۱۹۹۰ دانش‌آموز برای تماشای مسابقه فوتبال دعوت شد. فقط معلوم بود که از هر مدرسه حداکثر ۳۹ دانش‌آموز می‌آیند. اگر قرار باشد که دانش‌آموزان هر مدرسه در یک ردیف بنشینند، کمترین تعداد ردیفهایی را که باید به دانش‌آموزان اختصاص داد تعیین کنید.

(چین، ۱۹۹۰)

راه حل

چون ۱۹۹ عددی اول است، ۲۰۰ را در نظر می‌گیریم. بزرگترین مقسوم علیه ۲۰۰ که از ۳۹ بیشتر نیست ۲۵ است. توجه کنید که

$$1990 = 79 \times 25 + 15$$

اگر ۷۹ مدرسه هر کدام ۲۵ دانش‌آموز بفرستند و یک مدرسه ۱۵ دانش‌آموز بفرستد، دست کم باید $\left\lceil \frac{79}{25} \right\rceil$ ردیف برای نشان دادن همه دانش‌آموزان در نظر بگیریم، که برابر است با ۱۲ ردیف.

اکنون ثابت می‌کنیم که ۱۲ ردیف برای برآوردن مقصود ما کافی است. دانش‌آموزان را مدرسه به مدرسه، سطر به سطر، بنشانید تا همه صندلیهای ۱۰ ردیف اول پر شود، حتی اگر مجبور باشیم دانش‌آموزان برخی مدارس را در دو ردیف پخش کنیم. چنین چیزی حداکثر برای ۹ مدرسه پیش می‌آید. دانش‌آموزان این مدرسه‌ها را خارج کنید و آنها را در دو ردیف بگنجانید. این کار ممکن است، چون می‌توان در هر ردیف دانش‌آموزان دست کم ۵ مدرسه را جا داد، زیرا $5 \times 39 = 195 < 199$.

یادداشت

ممکن است خوانندگان علاقه‌مند بخواهند دوگان این مسأله را هم حل کنند: در یک ورزشگاه ۱۱ ردیف صندلی وجود دارد و هر ردیف ۱۹۹ صندلی دارد. n دانش‌آموز می‌آیند مسابقه بسکتبال تماشا کنند. فقط می‌دانیم که از هر مدرسه حداکثر ۳۹ دانش‌آموز می‌آید. اگر قرار باشد که دانش‌آموزان هر مدرسه در یک ردیف بنشینند، بیشترین تعداد دانش‌آموزان را طوری تعیین کنید که همه دانش‌آموزان بتوانند بنشینند.

۳۲. فرض کنید

$$T = \{9^k : 0 \leq k \leq 4000 \text{ و } k \text{ عددی صحیح است}\}$$

می‌دانیم 9^{4000} ، ۳۸۱۷ رقم دارد و اولین رقم (سمت چپ) آن ۹ است. اولین رقم سمت چپ چندان از عضوهای T ، ۹ است؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۰)

راه حل

توجه کنید که بجز وقتی که 9^k با رقم ۹ شروع می‌شود، 9^k یک رقم بیشتر از 9^{k-1} دارد. در حالتی که 9^k با رقم ۹ شروع می‌شود، با تقسیم کردن معلوم می‌شود که 9^{k-1} با ۱ شروع می‌شود و تعداد رقمهایش با تعداد رقمهای 9^k برابر است. بنابراین، وقتی که توانهای ۹ را از 9^0 تا 9^{4000} حساب می‌کنیم، ۳۸۱۶ بار تعداد رقمها زیاد می‌شود. بنابراین در $3816 - 4000$ یا ۱۸۶ جا وقتی که 9^k را از روی 9^{k-1} ($1 \leq k \leq 4000$) حساب می‌کنیم تعداد رقمها زیاد نمی‌شود. چون $9^0 = 1$ ، پس 9^0 با رقم ۹ شروع نمی‌شود و نتیجه می‌گیریم که دقیقاً وقتی 9^k ($1 \leq k \leq 4000$) با رقم ۹ شروع می‌شود که وقتی می‌خواهیم 9^k را از روی 9^{k-1} حساب کنیم تعداد رقمها زیاد نشود. در نتیجه ۱۸۴ عدد از عددهای موردنظر با رقم ۹ شروع می‌شوند.

یادداشت

لازم نیست بدانید که 9^{4000} با رقم ۹ شروع می‌شود، اما مهم است که به یاد داشته باشید که 9^0 با رقم ۹ شروع نمی‌شود.

۳۳. به ازای چه مقدارهایی از عدد طبیعی n عددی مانند m وجود دارد که می‌توان آن را به $(n-1)!$ طریق یا بیشتر به شکل $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ نوشت، که در آن

$$a_1 \in \{1\}, \quad a_2 \in \{1, 2\}, \dots, \quad a_n \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(جیم پراپ، مسأله پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

راه حل اول

توجه کنید که به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ به ترتیب می‌توانیم فرض کنیم $m = 1, 3, 5, 7$.
توجه کنید که در هر طریق نوشتن عدد m به شکل $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ که در آن

$$a_1 \in \{1\}, \quad a_2 \in \{1, 2\}, \dots, \quad a_n \in \{1, 2, \dots, n\}$$

به $(n-1)$ تایی‌ای مرتب مانند (a_1, a_2, \dots, a_n) متمایز از بقیه احتیاج داریم. علاوه بر این، فقط $(n-1)!$ تا از چنین $(n-1)$ تاییهایی وجود دارد، پس از هر یک از آنها می‌توان استفاده کرد؛ یعنی، باید

$$2n-1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n-1} + n \geq m$$

یا وقتی که

$$a_1 = a_2 = \dots = 1$$

نمی‌توان m را به شکل موردنظر نوشت؛ همچنین

$$m \geq 1+2+\dots+(n-1)+1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

یا وقتی که $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_{n-1} = n-1$ نمی‌توان m را به شکل موردنظر نوشت.
اگر دو نابرابری بالا را با هم در نظر بگیریم معلوم می‌شود که

$$2(n-1) \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

پس $n \leq 4$.

بنابراین تنها مقدارهای n که ویژگیهای موردنظر را دارند ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند.

راه حل دوم (از دیوید و نسان)

به ازای هر n فرض کنید

$$f_n(x) = x(x+x^2) \cdots (x+x^2+\dots+x^n)$$

معلوم است که $f_n(x)$ چندجمله‌ایی از درجه

$$1+2+\dots+n$$

است، که برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$. می‌توانیم بنویسیم

$$f_n(x) = f_{n,1}x + f_{n,2}x^2 + \dots + f_{n,\frac{n(n+1)}{2}}x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

در این صورت ضریب جمله x^m در $f_n(x)$ ، یعنی $f_{n,m}$ ، برابر است با تعداد راههایی که می‌توان

m را به شکل $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ نوشت، که در آن

$$a_1 \in \{1\}, \quad a_2 \in \{1, 2\}, \dots, \quad a_n \in \{1, 2, \dots, n\}$$

برای راحتی کار می‌توانیم این تعریف را به همه توانهای x تعمیم دهیم، به این ترتیب که اگر m ی اصلاً نیامده بود فرض می‌کنیم $f_{n,m} = 0$.

می‌توان نوشت

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = x^2 + x^3$$

$$f_3(x) = x^3 + 2x^4 + 2x^5 + x^6$$

$$f_4(x) = x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 3x^9 + x^{10}$$

در نتیجه به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ به ترتیب می‌توان فرض کرد $m = 1$ ؛ $m = 2$ یا $m = 3$ ؛

$m = 4$ یا $m = 5$ ؛ $m = 7$.

به سادگی معلوم می‌شود که تعداد جمله‌های $f_n(x)$ برابر است با

$$(1 + 2 + \dots + n) - n + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

همین‌طور به سادگی معلوم می‌شود که به ازای $n \geq 5$ ، تعداد جمله‌های $f_{n-1}(x)$ از n بیشتر است، زیرا

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 > n$$

چون

$$f_n(x) = f_{n-1}(x)(x + x^2 + \dots + x^n)$$

اگر m عددی طبیعی باشد،

$$f_n(x) \text{ در } x^m \text{ ضریب} = f_{n-1,m-1} + f_{n-1,m-2} + \dots + f_{n-1,m-n}$$

$$< \sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} f_{n-1,i} = f_{n-1}(1) = (n-1)!$$

۳۴. فرض کنید مجموعه هر مجموعه از عددها مجموع عضوهایش باشد. فرض کنید S مجموعه‌ای از

عددهای طبیعی باشد که از ۱۵ بزرگتر نیستند. فرض کنید مجموع هیچ دو زیرمجموعه جدا از هم

از S برابر نباشد. بیشترین مقدار مجموع مجموعه‌ای مانند S با این ویژگی‌ها چقدر است؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۶)

راه حل

ابتدا ثابت می‌کنیم که S حداکثر پنج عضو دارد. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت S دستکم $(\binom{6}{4}) + (\binom{6}{5}) + (\binom{6}{6})$ یا ۵۶ زیرمجموعه حداکثر چهارعضوی دارد. مجموع هریک از این زیرمجموعه‌ها حداکثر ۵۴ است (زیرا $54 = 12 + 13 + 14 + 15$)؛ بنابراین، بنابر اصل لانه کبوتری، دستکم دوتا از این مجموعه‌ها برابرند. اگر این زیرمجموعه‌ها اشتراکی نداشته باشند، حکم را ثابت کرده‌ایم؛ اگر زیرمجموعه‌ها اشتراک داشته باشد، با حذف عضو یا عضوهای مشترک آنها، به تناقض می‌رسیم.

از طرف دیگر، به سادگی می‌توان ثابت کرد که مجموعه $S' = \{15, 14, 13, 11, 8\}$ شرطهای مسأله را دارد. مجموع S' برابر با ۶۱ است. بنابراین، مجموعه‌ای مانند S که به دنبالش هستیم، مجموعه‌ای پنج‌عضوی است که مجموعش دستکم ۶۱ است. فرض کنید $S = \{a, b, c, d, e\}$ که در آن

$$a < b < c < d < e$$

و مجموع S ، s باشد. در این صورت معلوم است که $d + e \leq 29$ و $c \leq 13$. چون S ، $(\binom{5}{2})$ زیرمجموعه دو عضوی دارد، پس

$$a + b \leq d + e - 10 + 1 \leq 20$$

بنابراین $62 = 29 + 13 + 20 \leq s$. اگر $c \leq 12$ ، آن وقت $s \leq 61$ ؛ اگر $c = 13$ ، آن وقت $d = 14$ و $e = 15$. در این صورت $s \leq a + b + 42$. چون $13 + 14 = 15 + 12$ ، پس $b \leq 11$. اگر $b \leq 10$ ، آن وقت $a + b \leq 19$ و $s \leq 61$ ؛ اگر $b = 11$ ، آن وقت $a \leq 8$ و از اینکه

$$10 + 15 = 11 + 14, \quad 9 + 15 = 11 + 13$$

نتیجه می‌شود $s \leq 61$. در همه حالات، $s \leq 61$. بنابراین بیشترین مقدار موردنظر برابر با ۶۱ است.

۳۵. دستکم چهار شکلات داریم که درون n ($n \geq 4$) جعبه قرار دارند. آقای چاق هر بار می‌تواند دو جعبه انتخاب کند، از هریک از این دو جعبه یک شکلات بردارد و آنها را درون جعبه‌ای دیگر بگذارد. آیا همواره می‌توان همه شکلاتها را درون یک جعبه قرار داد؟

(زونگوکیو، چین، ۱۹۹۴)

راه حل

همواره می‌توان همه شکلاتها را درون یک جعبه قرار داد. این حکم را به استقرا روی m تعداد شکلاتها، ثابت می‌کنیم.

وقتی که $m = 4$ ، حداکثر ۴ جعبه غیر خالی وجود دارد. جعبه‌های خالی را کنار می‌گذاریم و همه حالت‌های ممکن توزیع اولیه شکلاتها را در نظر می‌گیریم:

$$۱. (1, 1, 1, 1) \quad ۲. (1, 2, 1, 0) \quad ۳. (2, 2, 0, 0) \quad ۴. (1, 3, 0, 0)$$

در حالت (۱) به طریق زیر عمل می‌کنیم

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (3, 1, 0, 0) \rightarrow (2, 0, 2, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 2) \rightarrow (0, 0, 0, 4)$$

به سادگی معلوم می‌شود که همه حالت‌های دیگر در دنباله بالا بررسی شده‌اند. بنابراین حکم را در این حالت ثابت کرده‌ایم.

اکنون فرض می‌کنیم که حکم به ازای عددی طبیعی مانند m ، $m \geq 4$ درست باشد. اگر $m + 1$ شکلات داشته باشیم، یکی از آنها را در نظر می‌گیریم و آن را مخصوص می‌نامیم. ابتدا شکلات مخصوص را کنار می‌گذاریم و فقط m شکلات دیگر را در نظر می‌گیریم. بنابر فرض استقرای می‌توانیم همه این m شکلات را درون یک جعبه قرار دهیم. اگر این جعبه شامل شکلات مخصوص هم باشد، حکم را ثابت کرده‌ایم. اگر چنین نباشد، دو جعبه خالی انتخاب می‌کنیم و مانند زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (1, m, 0, 0) &\rightarrow (0, m-1, 2, 0) \rightarrow (0, m-2, 1, 2) \\ &\rightarrow (2, m-3, 0, 2) \rightarrow (1, m-1, 0, 1) \rightarrow (0, m+1, 0, 0) \end{aligned}$$

در این صورت همه شکلاتها در یک جعبه هستند و استقرای کامل شده است.

۳۶. آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰۰ را طوری در یک ردیف مرتب کرد که میانگین هیچ دو عدد متمایزی از آنها میان این دو عدد قرار نگرفته باشد؟

راه حل

ادعا می‌کنیم که می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و n را طوری در یک ردیف مرتب کرد که میانگین هیچ دو عدد متمایزی از آنها میان این دو عدد قرار نگرفته باشد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که این حکم به ازای $m = 2^m$ ، که در آن m عددی طبیعی است، درست است. از استقرای روی m استفاده می‌کنیم. وقتی که $m = 1$ معلوم است که حکم درست است.

اکنون فرض می‌کنیم که به ازای عددی طبیعی مانند m می‌توانیم عددهای ۱، ۲، ... و 2^m را در یک ردیف مانند $(a_1, a_2, \dots, a_{2^m})$ طوری مرتب کنیم که میانگین هیچ دو عدد متمایزی از آنها میان این دو عدد قرار نگرفته باشد. به سادگی معلوم می‌شود که اگر

$$(b_1, b_2, \dots, b_{2^{m+1}}) = (2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \dots, 2a_{2^m} - 1, 2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2^m})$$

آن وقت $(b_1, b_2, \dots, b_{2m+1})$ ترتیبی از عددهای ۱، ۲، ... و 2^{m+1} است که ویژگی موردنظر را دارد. درحقیقت، بنابر فرض استقرا، میانگین دو عدد b_i و b_j که در آنها یا $2^m \leq i < j \leq 2^{m+1}$ یا $2^m + 1 \leq i < j \leq 2^{m+1}$ ، میان این دو عدد قرار ندارد و میانگین دو عدد b_i و b_j که در آنها $2^m + 1 \leq i \leq 2^m < j \leq 2^{m+1}$ ، عددی صحیح نیست. بنابراین استقرا کامل شده است.

بازای هر عدد طبیعی مانند n که توانی از ۲ نیست همواره می‌توانیم عددی طبیعی مانند m پیدا کنیم که $2^m < n$. ابتدا عددهای ۱، ۲، ... و 2^m را به شکل موردنظر مرتب می‌کنیم و سپس همه عددهای بزرگتر از n را حذف می‌کنیم تا ترتیبی از عددهای ۱، ۲، ... و n به دست بیاوریم که ویژگی موردنظر را داشته باشد.

۳۷. فرض کنید $A_1 A_2 \dots A_{12}$ دوازده ضلعی منتظمی باشد که مرکزش نقطه O است. ناحیه‌های مثلی $OA_i A_{i+1}$ ، $1 \leq i \leq 12$ ($A_{13} = A_1$) را با رنگهای قرمز، آبی، سبز و زرد طوری رنگ می‌کنیم که رنگ ناحیه‌های مجاور متفاوت باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

راه حل

دستوری کلی پیدا می‌کنیم. فرض کنید $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$) ضلعی منتظمی باشد که مرکزش نقطه O است. ناحیه‌های مثلث $OA_i A_{i+1}$ ، $1 \leq i \leq n$ ($A_{n+1} = A_1$) را با یکی از k ($k \geq 3$) رنگی که در اختیار داریم طوری رنگ می‌کنیم که رنگ ناحیه‌های مجاور متفاوت باشد. فرض کنید $p_{n,k}$ تعداد راههای چنین رنگ‌آمیزی باشد. می‌خواهیم $p_{12,4}$ را پیدا کنیم.

ناحیه $OA_1 A_2$ را به k طریق می‌توان رنگ کرد و سپس ناحیه‌های $OA_2 A_3$ ، $OA_3 A_4$ ، ... را به $k-1$ طریق می‌توان رنگ کرد. باید در مورد رنگ کردن ناحیه $OA_n A_1$ دقت کنیم. ممکن است رنگ این ناحیه با رنگ ناحیه $OA_1 A_2$ یکی باشد. اما در این صورت می‌توانیم ناحیه $OA_n A_2$ را یک ناحیه به حساب آوریم و به رنگ‌آمیزی مجازی برای $n-1$ ناحیه برسیم. معلوم است که با این کار تناظری یک‌به‌یک میان این نوع رنگ‌آمیزیهای غیرمجاز برای n ناحیه و رنگ‌آمیزیهای مجاز برای $n-1$ ناحیه به دست می‌آید. بنابراین

$$p_{n,k} = k(k-1)^{n-1} - p_{n-1,k}$$

توجه کنید که $p_{3,k} = k(k-1)(k-2)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + k(k-1)^{n-3} \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-4} k(k-1)^3 + (-1)^{n-3} k(k-1)(k-2) \\ &= k \times \frac{(k-1)^n + (-1)^{n-4} (k-1)^3}{1 + (k-1)} + (-1)^{n-3} k(k-1)(k-2) \\ &= (k-1)^n + (-1)^n (k-1)^3 + (-1)^{n-1} k(k-1)(k-2) \end{aligned}$$

$$= (k-1)^n + (-1)^n(k-1)((k-1)^2 - k(k-2))$$

$$= (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

بنابراین

$$p_{12,4} = 3^{12} + 3 = 531444$$

۳۸. $2n$ نفر در مهمانی حاضرند. تعداد دوستان هر کس در این مهمانی عددی زوج است. (دوستی رابطه ای دوطرفه است). ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان مشترکشان در این مهمانی عددی زوج است.

راہ حل

فرض کنید حکم درست نباشد و تعداد دوستان مشترک هر دو نفر از افراد حاضر در مهمانی عددی فرد باشد. شخصی مانند P را در نظر بگیرید. فرض کنید A مجموعه دوستان P و B مجموعه بقیه افراد (یعنی هر کس بجز P و دوستانش) باشد. توجه کنید که چون $|A|$ عددی زوج و تعداد کل افراد حاضر در مهمانی برابر با $2n$ است، پس $|B|$ عدد فرد است. شخصی مانند Q را در B در نظر بگیرید. بنابر تعریف B ، Q دوست P نیست. بنابر فرض، تعداد دوستان مشترک Q و P عددی فرد است، پس تعداد دوستان Q در A عددی فرد است. چون تعداد دوستان Q عددی زوج است، تعداد دوستان Q در B هم عددی فرد است. اکنون اگر تعداد دوستان افرادی مانند Q را در B جمع کنیم، حاصل برابر است با دو برابر تعداد دوستیهای میان افراد B . اما این مجموع عددی فرد است، زیرا همان طور که قبلاً گفتیم $|B|$ عددی فرد است. این هم تناقض است و در نتیجه دو نفر در مهمانی وجود دارند که تعداد دوستان مشترکشان عددی زوج است.

یادداشت

می توان ثابت کرد که به ازای هر کسی مانند P در این مهمانی شخصی مانند Q وجود دارد که تعداد دوستان مشترکش با P در مهمانی عددی زوج است. در حقیقت، فرض کنید A و B همان مجموعه های اشاره شده در راه حل باشند. مجموعه B ناتهی است، زیرا $|B|$ عددی فرد است. شخصی مانند Q وجود دارد که تعداد دوستانش در B عددی زوج است. به این ترتیب تعداد دوستان Q در A هم باید عددی زوج باشد. برای اثبات این حکم کلیتر از روش اثبات با استفاده از رسیدن به تناقض استفاده نکرده ایم.

۳۹. چند جدول 4×4 متمایز وجود دارد که درایه هایشان ۱ و -۱ هستند و مجموع درایه های هر سطر و مجموع درایه های هر ستون صفر است؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۷)

راه حل

هر سطر و هر ستون باید دو تا ۱ و دو تا ۱- داشته باشد و برای پر کردن سطر اول (۲) راه وجود دارد، که برابر است با ۶. همچنین، شش راه برای پر کردن سطر دوم وجود دارد. از اینها، یکی چهار دریاهاش با چهار دریاۀ سطر اول مطابقت دارد، چهارتا دو تا از دریاهایشان با دو تا از دریاهاۀ سطر اول مطابقت دارد و یکی هیچکدام از دریاهاایش با دریاهاۀ سطر اول مطابقت ندارد. در حالت اول می توان به یک طریق سطر سوم را پر کرد، در حالت دوم می توان به دو طریق سطر سوم را پر کرد و در حالت سوم می توان به شش طریق سطر سوم را پر کرد. وقتی که سه سطر اول پر شدند، سطر چهارم را فقط به یک طریق می توان پر کرد. بنابراین $(6 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 6) \times 6$ یا ۹۰ راه برای پر کردن جدول به شیوۀ مورد نظر وجود دارد.

۴۰. مربعی $(n-1) \times (n-1)$ را به طریق معمول به $(n-1)^2$ مربع واحد تقسیم می کنیم. هر یک از n^2 رأس این مربعها را یا قرمز می کنیم یا آبی. تعداد رنگ آمیزیهای متمایزی را پیدا کنید که در آنها هر مربع واحد دقیقاً دو رأس قرمز دارد. (دو رنگ آمیزی وقتی متمایزند که دست کم رنگ یک رأس در آنها متفاوت باشد).

(مسأله پیشنهادی به المپیاد بین المللی ریاضی، ۱۹۹۶)

راه حل

فرض کنید رأسهای سطر پایینی را به طور دلخواه رنگ کرده باشیم و رنگ دو تا از رأسهای مجاور یکسان باشد. در این صورت به سادگی معلوم می شود که رنگ بقیۀ رأسها خود به خود مشخص می شود. $2^n - 2$ راه برای رنگ آمیزی سطر پایینی وجود دارد، به طوری که در آنها دو تا از رأسهای مجاور همرنگ باشند (زیرا کلاً 2^n راه برای رنگ آمیزی رأسها وجود دارد و در ۲ تا از آنها رنگ رأسها یکی در میان یکسان است).

اگر رنگ رأسهای سطر پایینی یکی در میان یکسان باشد، رنگ رأسهای بقیۀ سطرها هم همین گونه است. بنابراین هر سطر را می توان به ۲ طریق و همه سطرها را در کل به 2^n طریق رنگ کرد. بنابراین جواب مسأله $2^n - 2 + 2^n$ یا $2^{n+1} - 2$ طریق است.

۴۱. شصت و چهار گلوله را به چند دسته تقسیم کرده ایم. در هر گام می توانیم به طریق زیر عمل کنیم. دو دسته انتخاب می کنیم، یکی مثلاً دسته A با p گلوله و دیگری مثلاً دسته B با q گلوله، که در اینجا $q \geq p$ ، و سپس q گلوله از دسته A برمی داریم و در دسته B می گذاریم. ثابت کنید می توان همه گلوله ها را در یک دسته قرار داد.

راه حل

به استقرا ثابت می کنیم که اگر به ازای عددی صحیح و نامنفی مانند m ، $n = 2^m$ می توانیم همه

n گلوله را در یک دسته قرار دهیم. اگر $m = 0$ و $m = 1$ ، درستی حکم معلوم است.

اکنون فرض می‌کنیم که به‌ازای عددی طبیعی مانند m می‌توان همه 2^m گلوله را در یک دسته قرار داد. ثابت می‌کنیم که می‌توان 2^{m+1} گلوله را هم در یک دسته قرار داد. ابتدا توجه کنید که تعداد دسته‌هایی که تعداد گلوله‌های آنها عددی فرد است، عددی زوج است. این دسته‌ها را دوتا دوتا جفت می‌کنیم و در هر دسته عمل موردنظر را انجام می‌دهیم. در این صورت پس از چند بار انجام این عمل، تعداد گلوله‌های هر یک از دسته‌ها عددی زوج است. بعد جفتهای هر دسته را کنار هم می‌گذاریم تا گلوله‌ای بزرگ تشکیل شود. به این ترتیب تعدادی دسته به‌دست آورده‌ایم که هر کدام 2^m گلوله بزرگ دارد. بنابر فرض استقرا، می‌توانیم این گلوله‌های بزرگ را در یک دسته قرار دهیم. در این صورت همه 2^{m+1} گلوله در یک دسته جمع شده‌اند و استقرا کامل شده است.

۴۲. نوعی بازی یک‌نفره را با تعدادی متناهی عدد صحیح نامنفی انجام می‌دهند. در حرکت اول، بازیکن عددی صحیح را به‌عنوان بزرگ در نظر می‌گیرد و عددی صحیح و نامنفی و کوچکتر از عدد بزرگ را جایگزین یکی از عددها می‌کند. در حرکت بعدی هم بازی به‌طور مشابه انجام می‌شود، فقط باید عددی که به‌عنوان جایگزین در نظر گرفته می‌شود همان عدد بزرگ حرکت قبلی باشد. ثابت کنید پس از چند بار متناهی حرکت بازی تمام می‌شود.

(ریچارد استونگ، مسأله پیشنهادی به المپیاد ریاضی آمریکا، ۱۹۹۹)

راه حل

فرض کنید در زمانی عددهای صحیح a_1, a_2, \dots, a_n باشند و اندیس عددی که در گام قبل به‌عنوان بزرگ انتخاب کرده‌ایم برابر با l باشد. نمره این موقعیت را این‌طور تعریف می‌کنیم: $S = \sum_{i \neq l} a_i$. در هر گام باید عدد صحیحی مانند a_l را به‌عنوان بزرگ جدید انتخاب کنیم (که در اینجا در S به حساب می‌آید اما پس از حرکت خیر) و a_l را (که در اینجا در S به حساب نمی‌آید) با عددی کوچکتر از a_l (که در S جدید به حساب می‌آید) جایگزین کنیم. پس در هر حرکت S دست‌کم یک واحد کم می‌شود. چون در آغاز مقدار S متناهی است و همواره $S \geq 0$ ، بازی با انجام تعدادی متناهی حرکت تمام می‌شود.

۴۳. اگر S زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد، می‌توانیم S را با انجام یکی از کارهای زیر تغییر دهیم:

(الف) اگر $1 \notin S$ ، 1 را به S اضافه کنید؛

(ب) اگر $m \in S$ و $n \in S$ ، n را از S حذف کنید؛

(ج) به‌ازای $1 \leq r \leq n-1$ ، اگر $r \in S$ و $r+1 \notin S$ ، r را از S حذف کنید و $r+1$ را به S اضافه کنید.

فرض کنید با انجام این تغییرات می‌توان دنباله‌ای مانند

$$\emptyset \rightarrow \{1\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{n\}$$

به دست آورد که از \emptyset شروع و به $\{n\}$ ختم می‌شود و در آن هر یک از 2^n زیرمجموعه مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ دقیقاً یک بار آمده است. ثابت کنید به ازای عددی طبیعی مانند m ، $n = 2^m - 1$.

(سیسیل روسو، مسأله پیشنهادی به المپاد ریاضی امریکا، ۲۰۰۰)

راه حل

فرض کنید m برابر با مجموع عضوهای مجموعه باشد. وقتی که عملهای (الف) یا (ج) را انجام می‌دهیم، m یکی زیاد می‌شود و وقتی که عمل (ب) را انجام می‌دهیم، m تا کم می‌شود. اگر در دنباله‌ای از k بار تغییر که ابتدا و انتهای آن یک مجموعه است، d بار عمل (ب) را انجام داده باشیم، آن وقت $dn = (k - d) - dn = 0$ ، یعنی $k = d(n + 1)$. چون با اضافه کردن $\emptyset \rightarrow \{n\}$ به دنباله مفروض به

$$\emptyset \rightarrow \{1\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{n\} \rightarrow \emptyset$$

می‌رسیم، که دوری به طول 2^n است (یعنی $k = 2^n$)، پس $2^n \mid n + 1$. بنابراین n باید به شکل $n = 2^m - 1$ باشد، که در آن $m \leq n$.

۴۴. ۲۰۰۱ سکه روی میز وجود دارد. به ازای $i = 1, 2, \dots, 2001$ ، می‌توان پشت سر هم دقیقاً i سکه را پشت و رو کرد. ثابت کنید همواره یا می‌توان همه سکه‌ها را به رو کرد یا می‌توان همه سکه‌ها را به پشت کرد، اما فقط یکی از این کارها میسر است.

(پینگ‌شن تائو، چین، ۱۹۸۹)

راه حل

حکم مسأله در مورد هر تعداد فردی سکه درست است. این حکم را به استقرا روی n (عدد فرد است)، تعداد سکه‌ها، ثابت می‌کنیم. اگر $n = 1$ ، درستی حکم معلوم است. فرض کنید به ازای عددی طبیعی مانند k ، حکم به ازای $n = 2k - 1$ درست باشد. اگر $n = 2k + 1$ ، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. سکه‌ای مانند C_1 وجود دارد که به روست و سکه‌ای مانند C_2 وجود دارد که به پشت است. ابتدا $2k - 1$ سکه دیگر را در نظر می‌گیریم. بنابر فرض استقرا، می‌توانیم پشت سر هم ۱، ۲، ... و $2k - 1$ سکه را طوری پشت و رو کنیم که $2k - 1$ سکه همگی به یک طرف باشند. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که $2k - 1$ سکه همگی

به رو هستند. اکنون این سکه و C_1 را برمی‌گردانیم و سپس $1 + 2k$ سکه را برمی‌گردانیم تا همگی به رو شوند.

حالت ۲. همه سکه‌ها به یک طرف‌اند. سکه‌ها را روی یک دایره می‌چینیم و آنها را در جهت ساعتگرد با عددهای ۱، ۲، ... و $1 + 2k$ شماره می‌گذاریم. ابتدا سکه شماره ۱ را برمی‌گردانیم، سپس سکه‌های شماره ۲ و ۳ را برمی‌گردانیم، بعد سکه‌های شماره ۴، ۵ و ۶ را برمی‌گردانیم و همین‌طور تا آخر. در این صورت

$$1 + 2 + \dots + (2k + 1)$$

بار عمل برگشتن را انجام داده‌ایم و هر سکه را $1 + k$ بار برگردانده‌ایم، زیرا

$$1 + 2 + \dots + (2k + 1) = (k + 1)(2k + 1)$$

چون سکه‌ها در ابتدا به یک طرف بوده‌اند، در آخر کار هم به یک طرف قرار دارند.

مطابق آنچه در بالا گفتیم، می‌توانیم همه $1 + 2k$ سکه را، بدون در نظر گرفتن اینکه در ابتدا چگونه قرار گرفته‌اند، پس از $1 + 2k$ مرحله به یک رو قرار دهیم.

اکنون ثابت می‌کنیم که نمی‌توان هم کاری کرد که همه سکه‌ها به رو باشند هم کاری کرد که همه سکه‌ها به پشت باشند. فرض کنید چنین نباشد و آرایشی از سکه‌ها مانند A وجود داشته باشد که بتوان با فرایندهایی مانند T_1 و T_2 به ترتیب همه سکه‌ها را به رو و به پشت کرد. در این صورت می‌توانیم در ابتدا همه سکه‌ها را به پشت کنیم، همه گامهای T_2 را برعکس طی کنیم تا به آرایش A برسیم و سپس با طی کردن همه گامهای T_1 در انتها همه سکه‌ها را به رو کنیم. تعداد دفعاتی که هر سکه را برگردانده‌ایم عدد فرد است. چون 2001 سکه داریم، تعداد کل تعداد دفعاتی که سکه‌ها را برگردانده‌ایم عددی فرد است. از طرف دیگر، تعداد دفعاتی که سکه‌ها را برگردانده‌ایم برابر است با

$$2(1 + 2 + \dots + 2001)$$

که عددی زوج است. به تناقض رسیده‌ایم. پس فرضمان غلط است و فقط می‌توان به یکی از دو آرایش نهایی رسید.

۴۵. مجموع یکی در میان مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ و هریک از زیرمجموعه‌های ناتهی آن را به شکل زیر تعریف می‌کنیم: عددهای این زیرمجموعه را به ترتیب نزولی مرتب کنید و سپس ابتدا از بزرگترین عدد، عددها را به ترتیب یکی در میان زیاد و کم کنید. (مثلاً، مجموع یکی در میان مجموعه $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ برابر با $1 + 2 - 4 + 6 - 9 = 0$ و مجموع یکی در میان مجموعه $\{5\}$ برابر با ۵ است.) به ازای $n = 7$ ، مجموع همه مجموعه‌های یکی در میان را حساب کنید.

(آزمون دعوتی ریاضیات آمریکا، ۱۹۸۳)

راه حل

شاید ساده‌تر باشد که مسأله را در حالتی (حتی کمی) کلی‌تر حل کنیم، یعنی اینکه مجموع همهٔ مجموعه‌های یکی در میان زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, n\}$ را حساب کنیم (مجموعهٔ تهی را هم در نظر می‌گیریم). برای اینکه مجموعهٔ تهی را هم به حساب بیاوریم و این کار تأثیری در جواب نداشته باشد کافی است مجموع یکی در میان آن را صفر در نظر بگیریم. زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, n\}$ را می‌توان به دو نوع تقسیم کرد: آنهایی که شامل n نیستند و آنهایی که شامل n هستند. علاوه بر این، به‌طریق زیر هر زیرمجموعه از نوع اول را می‌توان در تناظری یک‌به‌یک با زیرمجموعه‌ای از نوع دوم قرار داد:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_i\} \longleftrightarrow \{n, a_1, a_2, \dots, a_i\}$$

(در مورد زیرمجموعهٔ تهی تناظر $\{n\} \leftrightarrow \emptyset$ را در نظر می‌گیریم). در این صورت، اگر فرض کنیم

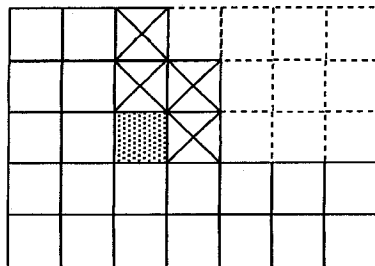
$$n > a_1 > a_2 > \dots > a_i$$

مجموع مجموعه‌های یکی در میان هر یک از این جفتها برابر است با

$$(a_1 - a_2 + \dots \pm a_i) + (n - a_1 + a_2 - \dots \mp a_i) = n$$

و چون تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, n\}$ برابر با 2^n است و در نتیجه 2^{n-1} جفت از زیرمجموعه‌ها داریم، مجموع موردنظر برابر است با $n \cdot 2^{n-1}$. سرانجام، اگر $n = 7$ ، مجموع موردنظر برابر است با ۴۴۸.

۴۶. در بازی ملج ملوچ خوردن دو بازیکن یکی در میان «تکه‌هایی» از جدولی 5×7 از مربعهای واحد را برمی‌دارند. برای برداشتن هر تکه، بازیکن یکی از مربعهای باقی‌مانده را انتخاب می‌کند و سپس همهٔ مربعهایی را که در ناحیه‌ای که با ضلع سمت چپ (و امتداد آن به سمت بالا) و ضلع پایینی (و امتداد آن به سمت راست) این مربع تعریف شده است حذف می‌کند (می‌خورد). مثلاً، با تکه‌ای که مربع سایه‌دار در شکل زیر مشخص می‌کند، مربع سایه‌دار و و چهار مربعی که با علامت \times مشخص شده‌اند حذف می‌شوند. (مربعهایی که دوتا یا تعداد بیشتری ضلع خط‌چین دارند در حرکت‌های قبلی از صفحهٔ اصلی حذف شده‌اند).

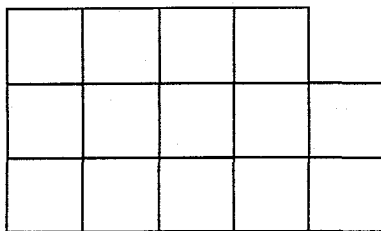


هدف هر بازیکن این است که کاری کند که طرف مقابلش تکه آخر را بردارد. شکل صفحه قبل یکی از چند زیرمجموعه مجموعه ۳۵ مربع واحد را نشان می‌دهد که ممکن است در طول بازی ملج‌ملوچ خوردن پدید بیایند. در کل چندتا از این زیرمجموعه‌های متمایز وجود دارند؟ در این شمارش، کل صفحه و صفحه خالی را هم در نظر بگیرید.

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۲)

راه حل

در هر مرحله از بازی، وقتی از چپ به راست نگاه کنیم، مربعهای خورده نشده ستونهایی با ارتفاعهای نزولی تشکیل می‌دهند.



به سادگی می‌توان ثابت کرد که این شرط نه تنها برای اینکه آرایشی از مربعها در بازی پدید بیاید لازم است، بلکه کافی هم هست. (از خواننده می‌خواهیم که این مطلب را ثابت کند). علاوه بر این، هر چنین آرایشی را می‌توان با مسیری ۱۲-تکه‌ای که از قسمت بالا سمت چپ صفحه اصلی شروع می‌شود و به قسمت پایین سمت راست صفحه اصلی ختم می‌شود و مرز میان مربعهای خورده شده و مربعهای خورده نشده است مشخص کرد. این مرز را می‌توان با دنباله‌ای دوازده حرفی از حرفهای H و V مشخص کرد. چنین دنباله‌ای شامل هفت H و پنج V است، که در آن هر H نشانه بالای سطری خورده نشده (یا پایین ستونی کاملاً خورده شده) و هر V نشانه یک پله سقوط به طور عمودی از بالای ستونی خورده نشده به بالای ستونی کنار آن است که البته ارتفاعش کمتر است. مثلاً می‌توان وضعیت شکلی را که در صورت مسأله آورده‌ایم با $HHHHHHHHVVVVVV$ مشخص کرد و دنباله‌های $HHHHVVHVVVHHHHVV$ و $VVVVVVHHHHHHHH$ به ترتیب صفحه کامل و صفحه خالی را مشخص می‌کنند. بنابراین، تعداد زیرمجموعه‌های ممکن برابر است با $\binom{12}{7}$ یا ۷۹۲.

یادداشت

بازی ملج‌ملوچ خوردن از دیوید گیل است و مارتین گاردنر آن را در ستون «بازیهای ریاضی» اش در مجله ساینتیفیک امریکن معرفی (و نامگذاری) کرده است. این ستون بار دیگر در مجموعه دونات گره خورده از گاردنر آمده است.

۴۷. در هر خانهٔ صفحهٔ شطرنجی 2002×1998 یا ۰ نوشته شده یا ۱، به طوری که در هر سطر و هر ستون تعداد کل خانه‌هایی که ۱ در آنها نوشته شده عددی فرد است. ثابت کنید تعداد خانه‌های سفیدی که در آنها ۱ نوشته شده عددی زوج است.

راه حل

فرض کنید (i, j) ، $1 \leq i \leq 1998$ و $1 \leq j \leq 2002$ ، خانه‌ای باشد که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد و a_{ij} عددی باشد که در (i, j) نوشته شده است. خانه‌ای مانند (i, j) وقتی و فقط وقتی سفید است که زوجیت i و j یکسان باشد. بنابر فرض مسأله، مجموع

$$R_{\text{فرد}} = \sum_{i=1}^{1998} \sum_{j=1}^{2002} a_{2i-1,j}$$

مجموع همهٔ عددهای واقع در سطرهاى فرد است، یعنی $R_{\text{فرد}}$ فرد است، زیرا مجموع ۹۹۹ عدد فرد است. به طور مشابه معلوم می‌شود که مجموع همهٔ عددهای واقع در ستونهای زوج، یعنی

$$C_{\text{زوج}} = \sum_{j=1}^{1001} \sum_{i=1}^{1998} a_{2j,i}$$

هم عددی فرد است، زیرا مجموع 1001 عدد فرد است. فرض کنید B مجموعهٔ همهٔ خانه‌های سیاه در ستونهای زوج و $S(B)$ مجموع عددهای نوشته شده در خانه‌های مجموعهٔ B باشد. توجه کنید که عددی که در هر یک خانه‌های B نوشته شده است دقیقاً یک بار در مجموع $R_{\text{فرد}}$ به حساب می‌آید. همچنین، توجه کنید که عددی که در هر یک از خانه‌های B نوشته شده است دقیقاً یک بار در مجموع $C_{\text{زوج}}$ به حساب می‌آید. سرانجام، توجه کنید که هر عدد در خانه‌ای سفید دقیقاً یک بار در مجموع $C_{\text{زوج}} + R_{\text{فرد}}$ به حساب می‌آید. بنابراین تعداد خانه‌های سفید برابر است با $2S(B) - C_{\text{زوج}} - R_{\text{فرد}}$ ، که عددی زوج است. بنابراین تعداد خانه‌های سفیدی که در آنها ۱ نوشته شده است عددی زوج است.

۴۸. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, 1989\}$ باشد که تقاضل هیچ دو عضوی از آن ۴ یا ۷ نیست. تعداد عضوهای S حداکثر چندتا است؟
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۹)

راه حل

ابتدا ثابت می‌کنیم که در هر مجموعهٔ ۱۱ عضوی از عددهای متوالی از مجموعهٔ

$$\{1, 2, 3, \dots, 1989\}$$

حداکثر پنج‌تا عضو ممکن است عضو S باشند. این مطلب را در مورد مجموعه $T = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$ ثابت می‌کنیم، اما از همین روش اثبات در مورد هر مجموعه‌ای از ۱۱ عدد متوالی دیگر هم می‌توان استفاده کرد. T را به شکل زیر افراز کنید، که در آن هر زیرمجموعه طوری انتخاب شده است که حداکثر یکی از عضوهایش ممکن است عضو S باشد:

$$\{1, 5\}, \{2, 9\}, \{3, 7\}, \{4, 11\}, \{6, 10\}, \{8\} \quad (*)$$

اگر شش عضو T در S باشند، از هر یک از مجموعه‌های $(*)$ دقیقاً یک عضو در S قرار دارد. در زیر نشان داده‌ایم که چرا چنین چیزی ممکن نیست:

$$\begin{aligned} 8 \in S &\Rightarrow 1 \notin S \Rightarrow 5 \in S \Rightarrow 9 \notin S \Rightarrow 2 \in S \Rightarrow 6 \notin S \Rightarrow 10 \in S \\ &\Rightarrow 3 \notin S \Rightarrow 7 \in S \Rightarrow 11 \notin S \Rightarrow 4 \in S \Rightarrow 8 \notin S \end{aligned}$$

به کمک مجموعه‌های $(*)$ ، یا به‌طریقی دیگر، به‌سادگی می‌توانیم زیرمجموعه‌ای ۵ عضوی از T پیدا کنیم که ویژگی اصلی S (اینکه تفاضل هیچ دو عضوش ۴ یا ۷ نیست) را داشته باشد. یکی از این مجموعه‌ها $T' = \{1, 3, 4, 6, 9\}$ است. همچنین، ویژگی فوق‌العاده T' این است که می‌توان از روی آن به‌طور دوره‌ای مجموعه‌ای با ویژگی موردنظر ساخت. یعنی اگر فرض کنیم

$$S' = \{k + 11n : k \in T, n \in \mathbb{Z}\}$$

S' هم این ویژگی را دارد که تفاضل هیچ دو عضوش ۴ یا ۷ نیست. علاوه بر این، چون

$$1989 = 180 \times 11 + 19$$

معلوم است که S بیشتر از 5×181 یا ۹۰۵ عضو ندارد. چون بزرگترین عضو T' ، ۹ است، پس مجموعه

$$S = S' \cap \{1, 2, 3, \dots, 1989\}$$

۹۰۵ عضو دارد که نشان می‌دهد کران بالای ۹۰۵ برای اندازه مجموعه موردنظر دست‌یافتنی است.

یادداشت

ممکن است خواننده بخواهد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی دیگری از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$ پیدا کند که ویژگی اصلی S را داشته باشند. کدام‌یک از این زیرمجموعه‌ها، مانند زیرمجموعه‌ای که در بالا از آن استفاده کردیم، بزرگترین S را تولید می‌کنند؟

همچنین، از خواننده می‌خواهیم که مسأله‌هایی مشابه این مسأله که در آنها به‌جای ۴ و ۷ زوجهای دیگری (یا سه‌تاییهای دیگری، ...) استفاده شده است طرح کند و دلایل قانع‌کننده‌ای برای انتخاب ۱۱ برای اندازه قطعه‌های عددهای صحیح در راه حل بالا بیابد.

۴۹. پانزده دانش‌آموز زرنگ و پانزده دانش‌آموز تنبل دور میزی گرد نشسته‌اند. معلم می‌خواهد دانش‌آموزان را در گروه‌های دوفره دسته‌بندی کند و پانزده نوع برگه امتحانی میان آنها توزیع کند. هر برگه امتحانی برای یک گروه دوفره.

معلم حین کار از خود پرسید «به چند طریق می‌توانم دانش‌آموزان را در گروه‌های دوفره زرنگ/تنبل کنار هم بنشانم، به طوری که لازم نباشد از دانش‌آموزی بخواهم جایش را عوض کند؟» به این سؤال معلم جواب بدهید. (دو طرز نشستن را یکی می‌دانیم، هرگاه بتوان یکی را از دوران دیگری به دست آورد.)

(زومینگ فنگ، مسأله پیشنهادی به المپیاد ریاضی آمریکا، ۲۰۰۲)

راه حل

جفت کردن خوب جفت‌کردنی است که در آن هر جفت شامل یک دانش‌آموز زرنگ و یک دانش‌آموز تنبل باشد. معلوم است که $15!$ جفت کردن خوب وجود دارد. به ازای هر جفت کردن خوب، $2^{15} \times 14!$ راه برای نشان دادن دانش‌آموزان دور میز وجود دارد. هر چنین طرز نشان دنی را یک رابطه کاری خوب می‌نامیم. بنابراین، $15! \times 14! \times 2^{15}$ رابطه کاری خوب وجود دارد.

طرز نشان دادن خوب طرز نشان دنی است که معلم بتواند دانش‌آموزان را در گروه‌های دوفره زرنگ/تنبل کنار هم طوری بنشانند که لازم نباشد از دانش‌آموزی بخواهد جایش را عوض کند. می‌خواهیم x ، تعداد طرز نشان دنیهای خوب، را حساب کنیم. دو نوع طرز نشان دنی خوب وجود دارد:

(الف) طرز نشان دنی خوبی که دقیقاً یک رابطه کاری خوب برقرار می‌کند. یعنی اینکه دست‌کم دو دانش‌آموز زرنگ کنار هم نشسته‌اند. این طرز نشان دنها را طرز نشان دنیهای خوب نوع اول می‌نامیم. فرض کنید x_1 تعداد طرز نشان دنیهای خوب نوع اول باشد.

(ب) طرز نشان دنی خوبی که دقیقاً دو رابطه کاری خوب برقرار می‌کند. یعنی اینکه دانش‌آموزان زرنگ و تنبل یکی در میان نشسته‌اند. این طرز نشان دنها را طرز نشان دنیهای خوب نوع دوم می‌نامیم. فرض کنید x_2 تعداد طرز نشان دنیهای خوب نوع دوم باشد. در این صورت $15! \times 14! = x_2$ ، زیرا $14!$ راه برای نشان دادن دانش‌آموزان زرنگ دور میز وجود دارد و $15!$ راه هم برای نشان دادن هر یک از دانش‌آموزان تنبل در میان دو دانش‌آموز زرنگ کنار هم وجود دارد.

توجه کنید که $x = x_1 + x_2$ ، که در آن $15! \times 14! = x_2$ و

$$x_1 + 2x_2 = 15! \times 14! \times 2^{15}$$

بنابراین $x = 15! \times 14! (2^{15} - 1)$.

۵۰. دو خانه در صفحه شطرنجی 8×8 را چسبیده می‌نامیم هرگاه دست‌کم یک رأس مشترک داشته باشند. آیا شاه می‌تواند از خانه‌ای شروع به حرکت کند و به همه خانه‌ها دقیقاً یک بار برود، به طوری

که در تمام حرکتها، بجز اولی، به خانه‌ای برود که به تعداد زوجی از خانه‌هایی که قبلاً به آنها رفته است چسبیده باشد؟

(حوزهٔ بالتیک، ۱۹۹۹)

راه حل

خیر، شاه نمی‌تواند با شرطهای موردنظر به همهٔ خانه‌ها برود. فرض کنید چنین نباشد و مسیری وجود داشته باشد که شاه در تمام حرکتها، بجز اولی، به خانه‌ای برود که به تعداد زوجی از خانه‌هایی که قبلاً به آنها رفته است چسبیده است. معلوم است که شاه در حرکت اول باید به خانه‌ای برود که دقیقاً به یک خانه که قبلاً در آن بوده است چسبیده است، یعنی خانه‌ای که حرکت را از آن شروع کرده است. اگر تعداد خانه‌های چسبیده را در همهٔ حرکت‌های قبلی با هم جمع کنیم عددی فرد به دست می‌آید. از طرف دیگر، در این مجموع هر جفت خانهٔ چسبیده، به‌ازای عضوی از این جفت که شاه دیرتر به آن رفته است، دقیقاً یک بار به حساب آمده است. بنابراین، این مجموع برابر است با تعداد جفت‌های چسبیده. اما این عدد زوج است، زیرا تعداد جفت‌های چسبیده در امتداد شمال-جنوب و شرق-غرب برابر است، همین‌طور تعداد جفت‌های چسبیده در جهت شمال شرق-جنوب غرب و شمال غرب-جنوب شرق. بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و هیچ مسیری با ویژگیهای موردنظر وجود ندارد.

۵۱. ۱۱۹ نفر در ساختمانی ۱۲۰ آپارتمانی زندگی می‌کنند. آپارتمانی را پرازدحام می‌نامیم که دست‌کم ۱۵ نفر در آن ساکن باشند. هر روز ساکنان آپارتمانهای پرازدحام مشاجره می‌کنند و هر کدام به آپارتمانی متفاوت از بقیه در همین ساختمان می‌رود (در نتیجه می‌توانند روی یکدیگر را نبینند!). آیا درست است که این روند لزوماً روزی به پایان می‌رسد؟

(سنت پترزبورگ، ۱۹۸۸)

راه حل

فرض کنید p_1, p_2, \dots, p_{120} آپارتمان باشند و a_i تعداد ساکنان آپارتمان p_i باشد. فرض کنید

$$S = \frac{a_1(a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2(a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_{120}(a_{120} - 1)}{2}$$

(فرض کنید ساکنان هر آپارتمان صبح هر روز با هم دست می‌دهند؛ در این صورت S تعداد دست‌دادنها در این روز است.) اگر هر یک از a_i ها از ۱۵ کمتر باشد، هیچ دلیلی برای رفتن کسی به آپارتمانی دیگر وجود ندارد. در غیر این صورت، بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $a_1 \geq 15$ و ساکنان آپارتمان p_1 به آپارتمانهای مختلفی در ساختمان

می‌روند. فرض کنید این افراد به آپارتمانهای $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{a_1}}$ بروند. روز بعد، مقدار S به اندازه

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_{a_1}} - \frac{a_1(a_1 - 1)}{2}$$

تغییر می‌کند، که مقداری مثبت است، زیرا

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_{a_1}} \leq 119 - a_1 \leq 119 - 15 = 104$$

و

$$\frac{a_1(a_1 - 1)}{2} \geq \frac{15 \times 14}{2} = 105$$

بنابراین مقدار S در این نقل و انتقالات کمتر می‌شود. از طرف دیگر، مقدار S در ابتدا متناهی است و S همواره مثبت است. بنابراین روند نقل و انتقالات روزی به پایان می‌رسد.

راه حل مسأله‌های پیشرفته

۱. در تورنمنتی هر بازیکن با هر یک از بازیکنان دیگر دقیقاً یک بار بازی می‌کند. در هر بازی، برنده ۱ امتیاز می‌گیرد، بازنده هیچ امتیازی نمی‌گیرد و اگر بازی به تساوی ختم شود هر یک از دو بازیکن $\frac{1}{2}$ امتیاز می‌گیرد. در پایان تورنمنت معلوم شد که دقیقاً نصف امتیازهایی که هر بازیکن گرفته است در مقابل ده بازیکنی بوده است که کمترین امتیازها را دارند (به‌ویژه، هر یک از ده بازیکنی که کمترین امتیازها را دارند نصف امتیازهایش را در مقابل نه نفر دیگر از این ده نفر به دست آورده است). چند بازیکن در این تورنمنت بوده‌اند؟
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۵)

راه حل

فرض کنید که n بازیکن در تورنمنت شرکت کرده باشند. دو عبارت برحسب n به دست می‌آوریم: یکی کل امتیازهایی که همه بازیکنان گرفته‌اند و دیگری امتیازهایی که بازنده‌ها (۱۰ بازیکنی که کمترین امتیازها را گرفته‌اند) و امتیازهایی که برنده‌ها ($n - ۱۰$ بازیکن دیگر) گرفته‌اند. برای این منظور، از این نکته استفاده می‌کنیم که اگر k بازیکن در مقابل یکدیگر بازی کنند، در کل $\frac{k(k-1)}{2}$ امتیاز انجام داده‌اند و $\frac{k(k-1)}{2}$ امتیاز در میان آنها تقسیم شده است. با در نظر داشتن این مطلب، n بازیکن در این تورنمنت در کل $\frac{n(n-1)}{2}$ امتیاز گرفته‌اند. به همین ترتیب، بازنده‌ها در بازیهای میان خودشان $\frac{۱۰ \times ۹}{2}$ یا ۴۵ امتیاز گرفته‌اند و چون این مقدار نصف امتیازهایشان است، در کل ۹۰ امتیاز گرفته‌اند. $n - ۱۰$ برنده نیز در بازیهای میان خودشان $\frac{(n-10)(n-11)}{2}$ امتیاز گرفته‌اند و چون این مقدار نصف کل امتیازهایشان است (نصف دیگر امتیازها مربوط به بازیهای

مقابل بازنده‌هاست)، کل امتیازهایشان $(n-11)(n-10)$ است. بنابراین

$$\frac{n(n-1)}{2} = 90 + (n-10)(n-11)$$

که با

$$n^2 - 41n + 400 = 0$$

هم‌ارز است. چون سمت چپ این معادله را می‌توان به شکل $(n-25)(n-16)$ تجزیه کرد، پس یا $n=16$ یا $n=25$. حالت $n=16$ ممکن نیست، زیرا اگر ۱۶ بازیکن در تورنمنت وجود داشته باشند، فقط ۶ نفر آنها برنده‌اند و کل امتیازهایشان باید ۳۰ امتیاز باشد، که در نتیجه میانگین امتیاز هر یک از آنها ۵ امتیاز است. این مقدار امتیاز از $\frac{90}{16}$ یا ۹ امتیازی که هر یک از بازنده‌ها به‌طور میانگین کسب کرده است کمتر است! بنابراین، $n=25$ ، یعنی ۲۵ نفر در تورنمنت شرکت کرده‌اند.

سرانجام، ثابت می‌کنیم که می‌توان تورنمنتی با این ویژگی‌ها برگزار کرد. چون $n=25$ ، ۱۵ نفر برنده و ۱۰ نفر بازنده داریم. هر بازی میان برنده‌ها به تساوی ختم می‌شود، پس هر بازیکن $\frac{15-1}{2}$ یا ۷ امتیاز از بازی‌هایی که با بقیه برنده‌ها انجام داده است می‌گیرد. به همین ترتیب، هر بازی میان بازنده‌ها به تساوی ختم می‌شود، که در نتیجه به هر یک از ۱۰ بازنده $\frac{4}{5}$ امتیاز می‌رسد. در ده بازی که هر برنده با بازنده‌ها انجام می‌دهد، شش برد، دو باخت و دو تساوی وجود دارد، که به هر برنده ۷ امتیاز دیگر از بازی‌های مقابل بازنده‌ها می‌رسد. بنابراین هر بازنده، در بازی‌های مقابل برندگان سه برد، نه باخت و سه تساوی دارد، که در مجموع $\frac{4}{5}$ امتیاز دیگر می‌گیرد. به این ترتیب، هر یک از این ۲۵ بازیکن نصف امتیازهایش را در بازی‌های مقابل بازنده‌ها به‌دست آورده است، همان چیزی که می‌خواهیم.

۲. فرض کنید n عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد. تعداد جایگشت‌هایی از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ مانند p را پیدا کنید که

$$|p(1) - 1| + |p(2) - 1| + \dots + |p(n) - n| = \frac{n^2 - 1}{2}$$

(تیتو آندریسکو، مسأله پیشنهادی به المپیاد ریاضی آمریکا، ۱۹۹۹)

راه حل

می‌توان نوشت

$$|p(1) - 1| + |p(2) - 1| + \dots + |p(n) - n|$$

$$= \pm 1 \pm 1 \pm 2 \pm 2 \pm \dots \pm n \pm n$$

بیشترین مقدار $|p(1) - 1| + |p(2) - 2| + \dots + |p(n) - n|$ برابر است با

$$2\left(-1 - 2 - \dots - \frac{n-1}{2}\right) - \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} + 2\left(\frac{n+3}{2} + \dots + n\right) \\ = -\left(1 + \frac{n-1}{2}\right)\frac{n-1}{2} + \left(\frac{n+3}{2} + n\right)\frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{2}$$

فرض کنید $p\left(\frac{n+1}{2}\right) = k$ در این صورت، اگر $k \leq \frac{n-1}{2}$

$$\left\{p(1), p(2), \dots, p\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\} = \left\{\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \dots, n\right\}$$

و

$$p\left\{\left(\frac{n+3}{2}\right), p\left(\frac{n+5}{2}\right), \dots, p(n)\right\} = \left\{1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}\right\} - \{k\}$$

و اگر $k \geq \frac{n+1}{2}$

$$\left\{p(1), p(2), \dots, p\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\} = \left\{\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \dots, n\right\} - \{k\}$$

و

$$\left\{p\left(\frac{n+3}{2}\right), p\left(\frac{n+5}{2}\right), \dots, p(n)\right\} = \left\{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\right\}$$

تعداد جایگشت‌های موردنظر برابر است با

$$\frac{n-1}{2} \left(\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right)^2 + \frac{n+1}{2} \left(\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right)^2 = n \left(\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right)^2$$

۳. در هر دنباله از نتیجه‌های پرتاب‌کردنهای یک سکه می‌توان تعداد دفعاتی را که یک شیر بلافاصله بعد از یک خط می‌آید، یک شیر بلافاصله بعد از یک شیر می‌آید و غیره، را حساب کرد. فرض کنید این پشت سر هم آمدنها را با HH, TH و غیره، نشان دهیم. مثلاً در دنباله

$$HHTTHHHHTHHTTTT$$

از نتیجه‌های ۱۵ بار پرتاب کردن یک سکه، پنج زیردنباله HH ، سه زیردنباله HT ، دو زیردنباله TH و چهار زیردنباله TT وجود دارد. چند دنباله متفاوت از نتیجه‌های ۱۵ بار پرتاب کردن یک سکه شامل دقیقاً دو زیردنباله HH ، سه زیردنباله HT ، چهار زیردنباله TH و پنج زیردنباله TT است؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۶)

راه حل

هر چنین دنباله‌ای از نتیجه‌های پرتاب کردن یک سکه را می‌توان زنجیره‌ای از قطعه‌هایی از T و H ، که آنها را به ترتیب با $\{T\}$ و $\{H\}$ نشان می‌دهیم، در نظر گرفت. اکنون توجه کنید که هر یک از دنباله‌های HT و TH به ترتیب محل گذر از $\{H\}$ به $\{T\}$ و از $\{T\}$ به $\{H\}$ است. چون در هر دنباله از نتیجه‌های ۱۵ بار پرتاب کردن یک سکه سه گذر از نوع اول و چهار گذر از نوع دوم داریم، هر چنین دنباله‌ای به شکل

$$\{T\}\{H\}\{T\}\{H\}\{T\}\{H\}\{T\}\{H\} \quad (*)$$

است.

کار بعدی، قرار دادن T ها و H ها در قطعه‌های نظیرشان است، به طوری که مطمئن باشیم در هر دنباله دو زیردنباله HH و پنج زیردنباله TT وجود دارد. برای این منظور، فرض می‌کنیم که هر قطعه در $(*)$ در ابتدا فقط یک عضو دارد. در این صورت، برای اینکه شرطهای مسأله برآورده شوند کافی است دوتا H دیگر در $\{H\}$ ها و پنج تا T دیگر در $\{T\}$ ها بگذاریم. بنابراین، برای اینکه مسأله را حل کنیم باید تعداد راههای انجام این کار را بشماریم.

به یاد بیاورید که تعداد راههای قرار دادن p گلوله یکسان (در این مورد H ها و T های اضافی) درون q جعبه یکسان $\{H\}$ ها و $\{T\}$ ها، که با ترتیبشان در دنباله مشخص شده‌اند برابر است با $\binom{p+q-1}{p}$. (دانش آموزانی که این مطلب را نمی‌دانند آن را ثابت کنند). در این مورد، از این مطلب نتیجه می‌شود که دوتا H را می‌توان به $\binom{4+2-1}{2} = 10$ طریق در چهارتا $\{H\}$ قرار داد و پنج تا T را می‌توان به $\binom{4+5-1}{5} = 56$ طریق در چهارتا $\{T\}$ قرار داد. جواب مسأله حاصل ضرب این عددها، یعنی ۵۶۰، است.

۴. فرض کنید $A = (a_1, a_2, \dots, a_{2001})$ دنباله‌ای از عددهای طبیعی باشد. فرض کنید m برابر با تعداد زیردنباله‌های سه‌عضوی از این دنباله مانند (a_i, a_j, a_k) باشد که $1 \leq i < j < k \leq 2001$ و $a_k = a_j + 1$ و $a_j = a_i + 1$ در میان همه دنباله‌هایی مانند A بزرگترین m را پیدا کنید. (مسأله پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۱)

راه حل

دو عمل زیر را روی دنباله A در نظر بگیرید:

۱. اگر $a_i > a_{i+1}$ جای a_i و a_{i+1} را عوض کنید تا دنباله جدید

$$(a_1, a_2, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_{2001})$$

به دست بیاید.

۲. اگر $a_{i+1} = a_i + 1 + d$ که در آن $d > 0$ و a_1, \dots, a_i را به اندازه d زیاد کنید تا دنباله جدید

$$(a_1 + d, a_2 + d, \dots, a_i + d, a_{i+1}, \dots, a_{2001})$$

به دست بیاید.

معلوم است که با انجام عمل (۱) مقدار m کمتر نمی‌شود. اگر عمل (۱) را پی‌درپی تکرار کنیم، می‌توانیم دنباله مورد نظر را طوری مرتب کنیم که صعودی باشد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم دنباله‌ای که در آن m بیشترین مقدار ممکن است صعودی است. اکنون توجه کنید که اگر A دنباله‌ای صعودی باشد، با انجام عمل (۲) مقدار m کمتر نمی‌شود. پس هر دنباله‌ای مانند A که در آن m بیشترین مقدار ممکن است به شکل

$$(a_1, \dots, a_1, \underbrace{a_1 + 1, \dots, a_1 + 1}_{t_2}, \dots, \underbrace{a_1 + s - 1, \dots, a_1 + s - 1}_{t_s})$$

است که در آن t_1, t_2, \dots, t_s تعداد جمله‌های زیر دنباله متناظرشان هستند و $s \geq 3$. در چنین دنباله‌ای،

$$m = t_1 t_2 t_3 + t_2 t_3 t_4 + \dots + t_{s-2} t_{s-1} t_s \quad (*)$$

می‌ماند که بهترین انتخاب برای s و بهترین افراز 2001 به عددهای طبیعی t_1, t_2, \dots, t_s را پیدا کنیم.

بیشترین مقدار m وقتی به دست می‌آید که $s = 3$ یا $s = 4$. اگر $s > 4$ ، می‌توانیم با استفاده از افرازی از 2001 به $s - 1$ بخش، یعنی

$$t_2, t_3, (t_1 + t_2), \dots, t_s$$

مقدار m را که بر حسب تساوی (*) به دست می‌آید زیاد کنیم. توجه کنید که وقتی $s = 4$ ، این تغییر، مقداری را که بر اساس تساوی (*) به دست می‌آید عوض نمی‌کند. بنابراین می‌توان بیشترین مقدار m را به ازای $s = 3$ به دست آورد. در این حالت، $m = t_1 t_2 t_3$ و m وقتی بیشترین مقدار است که

$$t_1 = t_2 = t_3 = \frac{2001}{3} = 667$$

بنابراین بیشترین مقدار m برابر با 667^3 است. این بیشترین مقدار را وقتی که $s = 4$ هم می‌توان به دست آورد، که در این حالت به ازای $t_1 = a$ ، $t_2 = t_3 = 667$ و $t_4 = 667 - a$ که در اینجا $1 \leq a \leq 666$ ، به دست می‌آید.

۵. بیست و سه نفر که وزن هر یک از آنها عددی طبیعی است می‌خواهند فوتبال بازی کنند. این عده یکی را به عنوان داور انتخاب می‌کنند و سپس به دو تیم ۱۱ نفره طوری تقسیم می‌شوند که وزن کل

دو تیم برابر باشد. معلوم شده است که داور هر که باشد می‌توان این کار را کرد. ثابت کنید وزن این ۲۳ نفر برابر است.

(پال زایتس، مسأله پیشنهادی به المپیاد ریاضی آمریکا، ۱۹۸۹)

راه حل

فرض کنید حکم درست نباشد و ۲۳ نفر وجود داشته باشند که وزنشان برابر نباشد و شرطهای مسأله در مورد آنها برقرار باشد. در این صورت، در میان چنین مجموعه‌هایی از افراد مجموعه‌ای مانند $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{23}\}$ وجود دارد که وزن کل افرادش، یعنی $w = a_1 + a_2 + \dots + a_{23}$ کمترین مقدار ممکن است. اگر a_i داور باشد، آن وقت $2s_i = w - a_i$ که در آن s_i وزن کل هر یک از تیمهاست. بنابراین (به پیمانه ۲) $a_i \equiv w$ ، یعنی زوجیت a_i ها یکسان است.

اگر a_i ها همگی زوج باشند، می‌توان A را با

$$A' = \left\{ \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_{23}}{2} \right\}$$

جایگزین کرد، که مجموعه‌ای است که وزن کلش کمتر است و شرطهای مسأله در مورد آن برقرار است و چون a_i ها همگی برابر نیستند، $\frac{a_i}{2}$ ها هم همگی برابر نیستند. این هم با اینکه A مجموعه‌ای است که وزن کلش کمترین مقدار ممکن است تناقض دارد. اگر a_i ها همگی فرد باشند، می‌توانیم از مجموعه

$$A'' = \left\{ \frac{a_1 + 1}{2}, \frac{a_2 + 1}{2}, \dots, \frac{a_{23} + 1}{2} \right\}$$

استفاده کنیم و مانند قبل به تناقض برسیم.

بنابراین فرضمان غلط است و وزن هر ۲۳ نفر برابر است.

یادداشت

با معلوماتی از نظریه ماتریسها می‌توان حکمی کلیتر را ثابت کرد. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ عددهایی حقیقی باشند. اگر هر یک از این عددها را که کنار بگذاریم بتوان بقیه را به دو مجموعه n عضوی طوری تقسیم کرد که مجموعشان برابر باشد، آن وقت

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2n+1}$$

۶. کوچکترین عدد طبیعی مانند n ، $n \geq 4$ ، را پیدا کنید که بتوان از میان هر n عدد صحیح متمایز چهار عدد مختلف مانند a, b, c و d طوری پیدا کرد که $a + b - c - d = 20$ بخش پذیر باشد.

(مسأله پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۸)

راه حل

ابتدا فقط مجموعه‌هایی از عددهای صحیح را در نظر می‌گیریم که باقیمانده تقسیم آنها بر 2^0 مختلف است. به ازای هر مجموعه k عضوی این چنینی، $\frac{k(k-1)}{2}$ جفت از عددها می‌توان تشکیل داد. اگر $\frac{k(k-1)}{2} > 2^0$ (یعنی اگر $k \geq 7$)، دو جفت از عددها مانند (a, b) و (c, d) وجود دارند که

$$a + b \equiv c + d \pmod{2^0}$$

و a, b, c و d متمایزند.

در حالت کلی، مجموعه‌ای از ۹ عدد صحیح متمایز در نظر می‌گیریم. اگر باقیمانده تقسیم هفت تا از این عددها بر 2^0 مختلف باشد، بنابر آنچه در بالا گفتیم کار تمام شده است. فرض کنید باقیمانده حداکثر شش تا از عددهای این مجموعه بر 2^0 مختلف باشد، یعنی دست کم سه تا از باقیمانده‌ها تکراری باشند. در این صورت یا چهار عدد مانند a, b, c و d وجود دارند که

$$a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod{2^0}$$

یا دو جفت از عددها مانند (a, c) و (b, d) وجود دارند که

$$a \equiv c \pmod{2^0}, \quad b \equiv d \pmod{2^0}$$

در هر دو حالت، چهارتایی (a, b, c, d) ویژگی مورد نظر را دارد.

به سادگی می‌توان مجموعه‌ای از ۸ عدد پیدا کرد که ویژگی مورد نظر را نداشته باشد:

$$\{0, 2^0, 4^0, 1, 2, 4, 7, 12\}$$

باقیمانده تقسیم این عددها بر 2^0 به ترتیب $0, 0, 0, 1, 2, 4, 7, 12$ است. ویژگی این باقیمانده‌ها این است که هر یک از آنها که صفر نیست از مجموع هر دوتای دیگر که از آن کوچکترند بزرگتر است و مجموع هر دوتا از آنها از 2^0 کوچکتر است. فرض کنید a, b, c و d باقیمانده‌های چهارتا از عددهای متمایز این مجموعه باشند. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که a بزرگترین این عددهاست (زیرا a را می‌توان با b عوض کرد و می‌توان آن را پس از ضرب کردن در -1 ، که در بخش پذیری آن بر 2^0 تأثیری ندارد، با c یا d هم عوض کرد). بنابراین a یکی از باقیمانده‌های غیر صفر است و

$$0 < a - c - d \leq a + b - c - d \leq a + b < 2^0$$

بنابراین $a + b - c - d$ بر 2^0 بخش پذیر نیست.

بنابراین کمترین مقدار n برابر با ۹ است.

۷. پستیچی نامه‌ها را به نوزده خانه ضلع شرقی خیابان می‌برد. او متوجه شده است که هر روز، از هر دو

خانه همسایه حداکثر یکی نامه دارد و هر روز تعداد خانه‌هایی که پشت سر هم هستند و نامه ندارند بیشتر از دوتا نبوده است. چند الگوی متمایز برای رساندن نامه‌ها وجود دارد؟
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۲۰۰۱)

راه حل اول

از شرط اول نتیجه می‌شود که در یک روز حداکثر ده خانه نامه دارند و از شرط دوم نتیجه می‌شود که در یک روز دست‌کم شش خانه نامه دارند. اگر شش خانه نامه داشته باشند، باید در کل دست‌کم پنج خانه میان آنها باشد، که این خانه‌ها نامه ندارند. هشت خانه دیگری را که نامه ندارند باید در هفت فضای خالی مجاور شش خانه‌ای که نامه دارند توزیع کرد. این کار را می‌توان به ۷ طریق انجام داد: در هر انتهای خیابان دو خانه قرار دهید و چهارتای دیگر را به $\binom{4}{2}$ یا ۵ طریق توزیع کنید، یا در هر یک از هفت فضای خالی یک خانه قرار دهید و یک خانه دیگر را در یکی از دو طرف خیابان قرار دهید. اگر هفت خانه نامه داشته باشند، هشت فضای خالی به وجود می‌آید که در میان شش تا از آنها باید دست‌کم یک خانه باشد که نامه‌ای ندارد. شش خانه باقی‌مانده را که نامه ندارند می‌توان به ۱۱۳ طریق در میان این هشت فضای خالی توزیع کرد: شش تا از هشت فضای خالی را می‌توان به $\binom{8}{6}$ یا ۲۸ طریق انتخاب کرد و یک خانه در هر یک از آنها قرار داد؛ در هر دو انتهای خیابان می‌توان دو خانه قرار داد و دو فضای خالی میانی را می‌توان به $\binom{4}{2}$ یا ۱۵ طریق انتخاب کرد؛ در یک انتهای خیابان می‌توان دو خانه قرار داد و چهار فضای خالی را می‌توان به $\binom{4}{2}$ یا ۶ طریق انتخاب کرد و در هر یک از آنها یک خانه قرار داد. اگر به همین روش استدلال کنیم، معلوم می‌شود که وقتی هشت خانه نامه دارند $\binom{4}{2} + 1 + 2 + \binom{4}{2}$ یا ۱۸۳ الگو و وقتی نه خانه نامه دارند $\binom{4}{2} + 2 + 47$ الگو وجود دارد. وقتی ده خانه نامه دارند فقط یک الگو وجود دارد و بنابراین تعداد کل الگوها برابر است با

$$7 + 113 + 183 + 47 + 1 = 351$$

راه حل دوم

رشته‌ای n رقمی از رقم‌های ۰ و ۱ در نظر بگیرید که به ترتیب نشانه نامه نداشته یا نامه داشتن هستند. چنین دنباله‌ای را پذیرفتنی می‌نامیم، هرگاه در آن ۱۱ یا ۰۰ وجود نداشته باشد. فرض کنید f_n برابر با تعداد رشته‌های n رقمی پذیرفتنی باشد، a_n برابر با تعداد رشته‌های n رقمی پذیرفتنی‌ای باشد که در آنها ۰۰ پس از اولین رقم ۱ از سمت چپ آمده است و b_n برابر با تعداد رشته‌های n رقمی پذیرفتنی‌ای باشد که در آنها ۰۱ پس از اولین رقم ۱ از سمت چپ آمده است. توجه کنید که اگر $f_n = a_n + b_n$ ، $n \geq 5$. اگر اولین ۱۰۰ از سمت چپ را حذف کنیم معلوم می‌شود $b_n = f_{n-3}$ و اگر اولین ۱۰۱ از سمت چپ را حذف کنیم معلوم می‌شود

$b_n = f_{n-2}$. در نتیجه، اگر $n \geq 5$ ، $f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$. به سادگی می‌توان حساب کرد که $f_2 = 7$ ، $f_3 = 4$ ، $f_4 = 3$ ، $f_1 = 2$ ، $f_{19} = 351$ کرد و نتیجه گرفت

۸. به ازای $i = 1, 2, \dots, 11$ فرض کنید M_i مجموعه‌ای پنج‌عضوی باشد و اگر $1 \leq i < j \leq 11$ ، $M_i \cap M_j \neq \emptyset$. فرض کنید m بزرگترین عددی باشد که بتوان مجموعه‌هایی مانند M_1, \dots, M_{11} را طوری انتخاب کرد که $\bigcap_{k=1}^m M_{i_k} \neq \emptyset$. کمترین مقدار m را به ازای همه انتخابهای ممکن M_i ها پیدا کنید.

(چین، ۱۹۹۶)

راه حل

کمترین مقدار m برابر با ۴ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم $m \geq 4$. فرض کنید $X = \bigcup_{i=1}^{11} M_i$ و به ازای هر x در X فرض کنید $n(x)$ تعداد i هایی باشد که $x \in M_i$ ، $1 \leq i \leq 11$. در این صورت

$$m = \max\{n(x) : x \in X\}$$

توجه کنید که

$$\sum_{x \in X} n(x) = 55$$

چون $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ ، $\binom{11}{2}$ یا ۵۵ جفت از مجموعه‌های مورد نظر اشتراکشان ناتهی است. از طرف دیگر، هر عضوی مانند x در $\binom{n(x)}{2}$ تا از این اشتراکها وجود دارد. بنابراین

$$\sum_{x \in X} \binom{n(x)}{2} \geq \binom{11}{2} = 55$$

پس

$$\sum_{x \in X} \frac{n(x)(n(x)-1)}{2} \geq 55$$

و در نتیجه

$$\frac{m-1}{2} \sum_{x \in X} n(x) \geq 55$$

پس $\frac{m-1}{2} \sum_{x \in X} n(x) \geq 55$ یا $m \geq 3$. اگر $m = 3$ ، در همه نابرابریهای بالا تساوی برقرار است؛ به‌طور دقیقتر، به ازای هر x ، $n(x) = m = 3$ ، اما چون

$$\sum_{x \in X} n(x) = 55$$

و ۵۵ بر ۳ بخش پذیر نیست، ممکن نیست همه $n(x)$ ها برابر با ۳ باشند. بنابراین $m \geq 4$. اکنون ثابت می‌کنیم حالتی پیش می‌آید که $m = 4$. جدول 4×4 زیر را در نظر بگیرید:

a	b	c	d
e	f	g	h
۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که به ازای $m = 4$ ، مجموعه‌های

$$M_1 = \{a, b, c, d, H\}, \quad M_2 = \{e, f, g, h, H\}$$

$$M_3 = \{1, 2, 3, 4, H\}, \quad M_4 = \{5, 6, 7, 8, H\}$$

(که آنها را مجموعه‌های افقی می‌نامیم) و

$$M_5 = \{a, e, 1, 5, V\}, \quad M_6 = \{b, f, 2, 6, V\}$$

$$M_7 = \{c, g, 3, 7, V\}, \quad M_8 = \{d, h, 4, 8, V\}$$

(که آنها را مجموعه‌های عمودی می‌نامیم) و

$$M_9 = \{a, f, 3, 8, D\}, \quad M_{10} = \{b, g, 4, 5, D\}$$

$$M_{11} = \{c, h, 1, 6, D\}$$

(که آنها را مجموعه‌های قطری می‌نامیم) ویژگیهای مورد نظر را دارند.

۹. هر دومینو را زوجی مرتب از عددهای طبیعی تعریف می‌کنیم. هر دنباله متناوب از دومینوها دنباله‌ای از دومینوهای متمایز است که در آن درایه اول هر زوج، پس از زوج اول، برابر است با درایه دوم زوج پیش از آن و هیچ دو زوجی مانند (i, j) و (j, i) در آن به چشم نمی‌خورد. فرض کنید D_4 مجموعه همه دومینوهایی باشد که درایه‌های آنها از 40° بزرگتر نیستند. طول بلندترین دنباله متناوب از دومینوها را که می‌توان با دومینوهای D_{40} تشکیل داد پیدا کنید.
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۸)

راه حل اول

فرض کنید $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ و D_n مجموعه دومینوهایی باشد که می‌توان از عددهای طبیعی مجموعه A_n تشکیل داد. هر عدد در A_n مانند k در $2(n-1)$ دومینو در D_n ظاهر می‌شود؛ پس حداکثر $n-1$ بار در دنباله‌ای متناوب از عضوهای D_n ظاهر می‌شود. بجز عددهای i و j که در ابتدا و انتهای دنباله‌ای متناوب آمده‌اند، تعداد دفعه‌هایی که بقیه عددها در

این دنباله ظاهر می شود عددی فرد است. بنابراین، اگر n عددی زوج باشد، هر عدد دیگری بجز i و j حداکثر در $n - 2$ دومینو ظاهر می شود. پس کران بالای تعداد دومینوهای طولانیترین دنباله متناسب از عضوهای D_n برابر است با

$$\frac{1}{2}((n-2)^2 + 2(n-1)) = \frac{n^2 - 2n + 2}{2}$$

درحقیقت، به ازای هر عدد زوج مانند n این کران دست یافتنی است. به ازای $n = 2$ ، به سادگی می توان درستی این مطلب را تحقیق کرد، پس به استقرا فرض کنید که به ازای m می توان دنباله ای پیدا کرد که طولش این کران باشد. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود، می توانیم فرض کنیم $i = 1$ ، $j = 2$ و pX_{p+2} دنباله ای چهارتایی از دومینوها به شکل

$$(p, n+1)(n+1, p+1)(p+1, n+2)(n+2, p+2)$$

باشد. با افزودن

$$2X_4, 4X_6, \dots, m-2X_n, (n, n+1)(n+1, 1)(1, n+2)(n+2, 2)$$

به دنباله متناسب مفروض، دنباله ای متناسب به دست می آوریم که از ۱ شروع و به ۲ ختم می شود و طولش برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - 2n + 2}{2} + 4 \times \frac{n-2}{2} + 4 &= \frac{n^2 + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+2)^2 - 2(n+2) + 2}{2} \end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات استقرایی کامل شده است. به ویژه، وقتی که $n = 40$ ، طول بلندترین دنباله متناسب برابر است با ۷۶۱.

راہ حل دوم

برای نشان دادن هر دنباله متناسب می توانیم درایه های مشترک زوجهای مرتب مجاور را یک بار بنویسیم. مثلاً

$$(4, 7), (7, 3), (3, 5)$$

را با

$$4, 7, 3, 5$$

نشان می دهیم. رأسهای n ضلعی ای منتظم را با اعدادهای ۱، ۲، ... و n شماره گذاری کنید. به این ترتیب، هر دومینو را می توان با پاره خطی جهتدار از یک رأس این n ضلعی به رأس دیگری از آن نشان داد و هر دنباله متناسب را می توان با مسیری که از هیچ یک از پاره خطهایش دو بار رد

نمی‌شود نشان داد. هر بار که چنین مسیری به رأسی غیر انتهایی می‌رسد باید از آن خارج شود. بنابراین، وقتی که n عددی زوج است، ممکن نیست که چنین مسیری از هر یک از پاره‌خطها بگذرد، زیرا از هر رأس تعدادی فرد پاره‌خط خارج شده است. با این حال، می‌توان $\frac{1}{4}(n-2)$ پاره‌خط مناسب را انتخاب و آنها را طوری حذف کرد که $n-2$ پاره‌خط از $n-2$ رأس خارج شده باشند و از دقیقاً دوتا از رأسها تعداد فردی پاره‌خط خارج شده باشد. در این وضعیت، می‌توان مسیری پیدا کرد که از هر یک از پاره‌خطهای باقی‌مانده دقیقاً یک بار می‌گذرد و از یکی از دو رأس نامبرده شروع و به دیگری ختم می‌شود. طول این مسیر برابر است با $\frac{1}{4}(n-2) - \binom{n}{2}$ ، که وقتی $n = 40$ برابر است با ۷۶۱.

یادداشت

وقتی که n عددی فرد است، می‌توان دنباله‌ای متناسب به طول $\binom{n}{2}$ از دومینوهای عضو D_n پیدا کرد. در این حالت، درایه دوم آخرین دومینو با درایه اول اولین دومینو برابر است. به زبان نظریه گراف، چنین چیزی مدار اویلری است.

۱۰. تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 2^{100}\}$ را پیدا کنید که مجموع عضوهای هر یک از آنها بر ۵ بخش‌پذیر است.

(کیوهونگ کی، ریاضیات دبیرستانی، ۱/۱۹۹۴)

راه حل

جواب $\frac{1}{4}(2^{200} + 2^{402})$ است.

چندجمله‌ای

$$f(x) = (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{100}})$$

را در نظر بگیرید. در این صورت تناظری یک‌به‌یک میان زیرمجموعه $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ از مجموعه $\{1, 2, \dots, 2^{100}\}$ و جمله $x^{a_1} x^{a_2} \cdots x^{a_m}$ در حاصل ضرب پرانتزها وجود دارد. بنابراین باید مجموع ضریبهای جمله‌هایی مانند x^{5k} را پیدا کنیم، که در آن k عددی طبیعی است. این مجموع را S بنامید.

فرض کنید $\xi = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ ، یعنی ξ ریشه‌ای پنجم از واحد است. در این صورت

$$\xi^5 = 1, \quad 1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = 0$$

بنابراین

$$S = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 f(\xi^j)$$

توجه کنید که ξ ، ξ^2 ، ξ^3 ، ξ^4 و ξ^5 ریشه‌های $x^5 - 1 = g(x)$ هستند، یعنی

$$g(x) = x^5 - 1 = (x - \xi)(x - \xi^2)(x - \xi^3)(x - \xi^4)(x - \xi^5)$$

در نتیجه

$$g(-1) = -2 = (-1 - \xi)(-1 - \xi^2)(-1 - \xi^3)(-1 - \xi^4)(-1 - \xi^5)$$

بنابراین

$$(1 + \xi)(1 + \xi^2)(1 + \xi^3)(1 + \xi^4)(1 + \xi^5) = 2$$

و $f(\xi) = 2^{400}$ به همین ترتیب معلوم می‌شود

$$f(\xi^j) = 2^{400}, \quad j = 2, 3, 4$$

سرانجام،

$$f(\xi^5) = f(1) = 2^{2000}$$

پس

$$S = \frac{1}{5}(4 \times 2^{400} + 2^{2000}) = \frac{1}{5}(2^{402} + 2^{2000})$$

۱۱. فرض کنید X مجموعه‌ای متناهی از عددهای طبیعی و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از X مانند B وجود دارد که A برابر است با مجموعه عضوهایی از X که تعداد فردی از عضوهای B را می‌شمارند.

(دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۹)

راه حل

$B = \emptyset$ فرض کنید و عضوهای X را از بزرگتر به کوچکتر در نظر بگیرید. به ازای هر عضو x مانند x ببینید که آیا زوجیت تعداد عضوهایی از B که بر x بخش پذیرند آنچه می‌خواهیم هست یا نه. (یعنی، اگر $x \in A$ ، x تعداد فردی از عضوهای B را بشمارد؛ اگر $x \in X - A$ ، x تعداد زوجی از عضوهای B را بشمارد.) اگر نبود، x را به B اضافه کنید. بنابراین، اولین عضوی که به B اضافه می‌شود بزرگترین عضو A است. اکنون توجه کنید که این روند شرط بخش پذیری را برای هیچ عضوی بزرگتر از x عوض نمی‌کند و معلوم می‌شود که x این شرط را دارد یا نه. بنابراین، وقتی همه عضوهای X را به این ترتیب بررسی کنیم، عضوهای X که ویژگی موردنظر را دارند مشخص می‌شوند و مجموعه B ویژگی موردنظر را دارد.

۱۲. ۲۰۰۰ کارت داریم که آنها را با عددهای طبیعی از ۱ تا ۲۰۰۰ طوری شماره‌گذاری کرده‌ایم که عددهای روی کارتهای متفاوت با هم فرق دارند. کارتهای این دسته کارت به ترتیب عددهای نوشته

شده رویشان نیستند. کارت رویی را می‌کشیم و روی میز می‌گذاریم و کارت بعدی را زیر این دسته کارت می‌گذاریم. کارت رویی جدید را می‌کشیم و روی میز در سمت راست کارتی که قبلاً روی میز گذاشته‌ایم قرار می‌دهیم و کارت بعدی را زیر این دسته کارت می‌گذاریم. این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم که همه کارتها روی میز قرار بگیرند. معلوم شده است که شماره کارتها از چپ به راست به ترتیب صعودی است:

$$۱, ۲, ۳, \dots, ۱۹۹۹, ۲۰۰۰$$

در دسته کارت اولیه چندتا کارت بالای کارت شماره ۱۹۹۹ قرار داشته‌اند؟
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۲۰۰۰)

راه حل اول

روندی را که طی کرده‌ایم برعکس کنید. ابتدا کارت شماره ۲۰۰۰ را بردارید. سپس کارت شماره ۱۹۹۹ را بردارید، آن را روی دسته کارت بگذارید و کارت زیرین را روی دسته کارت قرار دهید. بعد کارت شماره ۱۹۹۸ را بردارید. آن را روی دسته کارت بگذارید و کارت زیرین را روی دسته کارت قرار دهید. اکنون کارت شماره ۱۹۹۹ بالای دسته کارت سه‌تایی قرار دارد. توجه کنید که وقتی m کارت دیگر را برداریم، کارت رویی دسته کارت m تایی، کارت رویی دسته کارت $2m$ تایی می‌شود (و این m کارت از زیر دسته کارت به روی آن می‌آیند). به استقرا معلوم می‌شود که اگر تعداد کارتهای دسته $2^k \times 3$ باشد، که در آن k عددی صحیح و نامنفی است که $2^k \times 3 < 2000$ ، کارت شماره ۱۹۹۹ روی دسته کارت است. به‌ویژه، آخرین باری که این وضعیت پیش می‌آید درست پس از وقتی است که $2^9 \times 3$ یا ۱۵۳۶ کارت را برداشته‌ایم. در این صورت کارتهای شماره ۱ تا شماره ۴۶۴ روی میز باقی مانده‌اند. پس از اینکه هر یک از کارتهای شماره ۴۶۴، ۴۶۳، ... و ۲ را برمی‌داریم و روی دسته کارت می‌گذاریم، کارت دیگری را هم از زیر دسته کارت روی آن می‌گذاریم. در آخر، کارت شماره ۱ را هم روی دسته کارت می‌گذاریم و دسته کارت به وضعیت اولیه‌اش درمی‌آید. بنابراین $1 + 463 \times 2$ یا ۹۲۷ کارت روی کارت شماره ۱۹۹۹ قرار داشته‌اند.

راه حل دوم

چون کاری که کرده‌ایم باعث شده کارتها برحسب شماره‌هایشان به ترتیب صعودی روی میز قرار بگیرند، کارت شماره ۱۹۹۹ کارت یکی مانده به آخر است که روی میز قرار گرفته است. برای اینکه رد این کارت را بگیریم، ابتدا توجه کنید که اگر دسته‌ای از 2^m کارت داشته باشیم، کارتی که یکی مانده به آخر روی میز قرار گرفته است در ابتدا در جای 2^{m-1} در دسته کارت بوده است. اکنون دسته کارتی را در نظر بگیرید که 2^{11} یا ۲۰۴۸ کارت دارد. پس از اینکه ۴۸ کارت را روی میز قرار دادیم و ۴۸ کارت دیگر را از روی دسته کارت برداشتیم و در زیر آن گذاشتیم، دسته‌ای ۲۰۰۰

کارتی باقی می‌ماند. کارتهایی را که روی میزند کنار بگذارید. کارت‌هایی که از دسته ۲۰۰۰ کارت‌های یکی مانده به آخر روی میز می‌گذاریم کارت‌هایی است که در دسته ۲۰۴۸ کارت‌های در جای ۱۰۲۴ است. جای این کارت در دسته ۲۰۰۰ کارت‌های $(۴۸ + ۴۸) - ۱۰۲۴$ یا ۹۲۸ است، پس ۹۲۷ کارت روی این کارت قرار دارند.

۱۳. با صفحه‌های نمایش ۱×۱ صفحه‌ای ۲۰۰۲×۲۰۰۰ تشکیل دهید. در آغاز بیش از ۲۰۰۱×۱۹۹۹ تا از صفحه‌های نمایش ۱×۱ روشن‌اند. اگر در صفحه‌ای ۲×۲ سه تا از صفحه‌های ۱×۱ خاموش باشند، چهارمی هم خودبه‌خود خاموش می‌شود. ثابت کنید هیچ‌گاه کل صفحه خاموش نمی‌شود.

راه حل

برای اینکه صفحه‌ای ۱×۱ خاموش شود باید چهارمین صفحه‌ای ۲×۲ باشد که سه تا از صفحه‌هایش خاموش‌اند. برعکس، از هر صفحه‌ای ۲×۲ فقط یک بار می‌توان برای خاموش کردن صفحه‌ای ۱×۱ استفاده کرد. چون ۲۰۰۱×۱۹۹۹ صفحه‌ای ۲×۲ داریم، حداکثر ۲۰۰۱×۱۹۹۹ صفحه‌ای ۱×۱ را می‌توانیم خاموش کنیم. بنابراین کل صفحه هیچ‌گاه خاموش نمی‌شود.

۱۴. مدیری در طول روز در زمانهای مختلفی نامه‌ای را برای تایپ به منشی می‌دهد و هر بار نامه را روی ستون نامه‌های روی میز منشی می‌گذارد. هر وقت که موقعش برسد، منشی نامه‌ای رویی را برمی‌دارد و آن را تایپ می‌کند. امروز نه نامه باید تایپ شوند و مدیر آنها را به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ به منشی می‌دهد. هنگام ناهار، منشی به همکاری می‌گوید که نامه‌ای ۸ تایپ شده است اما از اینکه پیش از ظهر چه نامه‌هایی تایپ شده است هیچ چیز نمی‌گوید. همکاری منشی از خود می‌پرسد که بعد از ناهار کدام یک از نه نامه و به چه ترتیبی باید تایپ شوند. براساس اطلاعات بالا، چندتا ترتیب تایپ بعد از ناهار ممکن است وجود داشته باشد؟ (اینکه هیچ نامه‌ای برای تایپ نمانده باشد هم یکی از حالت‌های ممکن است).

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۸)

راه حل

در هر زمانی، نامه‌ها از بالا به پایین به ترتیب نزولی قرار دارند. بنابراین دنباله نامه‌ها به‌طور یکتا با مجموعه نامه‌ها مشخص می‌شود. دو حالت داریم: نامه‌ای ۹ پیش از ناهار به منشی داده شده است یا بعد از ناهار.

حالت ۱. چون نامه‌ای ۹ پیش از ناهار به منشی داده شده است، هیچ نامه دیگری داده نخواهد شد و تعداد ترتیب‌های ممکن تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{۱, ۲, \dots, ۶, ۷, ۹\}$ است، $T =$

که ممکن است نامه‌های متناظرشان باقی مانده باشند. درحقیقت، هر یک از زیرمجموعه‌های T ممکن است جواب باشد، زیرا ممکن است منشی نامه‌هایی را که در این زیرمجموعه نیستند بلافاصله پس از تحویل آنها تایپ کند و هیچ نامه دیگری را تایپ نکند. چون T هشت عضو دارد، تعداد زیرمجموعه‌هایش (با احتساب مجموعه تهی) برابر است با 2^8 یا ۲۵۶.

حالت ۲. چون نامه ۹ پیش از ناهار به منشی داده نشده است، سؤال این است که ردیف قرار دادن این نامه برای تایپ کجاست؟ هر جایی در هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{1, 2, \dots, 6, 7\}$ که نامه‌های متناظرش به هنگام ناهار باقی مانده‌اند ممکن است جای نامه ۹ باشد. مثلاً، اگر هنگام ناهار نامه‌های باقی‌مانده ۳، ۶ و ۲ باشند، ترتیب نامه‌ها ممکن است ۶، ۳، ۹ و ۲ باشد، زیرا ممکن است مدیر درست پس از اینکه نامه ۳ تایپ شد نامه ۹ را بدهد. به نظر می‌رسد که در دنباله‌ای از k نامه، $k+1$ جا برای قرار دادن نامه ۹ وجود دارد. با این وجود، اگر نامه ۹ را در ابتدای این دنباله قرار دهیم (یعنی روی ستون نامه‌ها بگذاریم، در نتیجه این نامه پیش از اینکه نامه‌های تایی پس از ناهار تایپ شوند رسیده است)، یکی از ترتیبهای حالت (۱) را تکرار کرده‌ایم. بنابراین، اگر پس از بازگشتن از ناهار k نامه مانده باشند، k جا برای گذاشتن نامه ۹ وجود دارد (و هیچ ترتیبی از حالت (۱) را تکرار نکرده‌ایم). بنابراین تعداد ترتیبهای جدید در حالت (۲) برابر است با

$$\sum_{k=0}^7 k \binom{7}{k} = 7(2^7 - 1) = 448$$

بنابراین تعداد ترتیبهای تایپ کردن نامه‌ها برابر است با $448 + 256$ که برابر است با ۷۰۴.

۱۵. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

(ووشانگ شو، چین، ۱۹۹۴)

راه حل اول (از چن چانگ ژو)

به‌ازای هر چندجمله‌ای مانند $p(x)$ فرض کنید $[x^n](p(x))$ ضریب جمله x^n در $p(x)$ باشد. فرض کنید $p(x) = (x+1)^{2n}$. به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$[x^{n-1}](p(x)) + [x^n](p(x)) = \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$[x^{n-1}](p(x)) + [x^n](p(x)) = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+1)^2n = (x^2 + 2x + 1)^n \\ &= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} (x^2)^i (2x)^j \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} 2^j x^{2i+j} \end{aligned}$$

که در اینجا i ، j و k عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. بنابراین

$$\begin{aligned} [x^{n-1}](p(x)) + [x^n](p(x)) &= \sum_{\substack{0 \leq i+j \leq n \\ 2i+j=n}} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} 2^j + \sum_{\substack{0 \leq i+j \leq n \\ 2i+j=n-1}} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} 2^j \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i+(n-2i) \leq n \\ 0 \leq i, n-2i}} \frac{n!}{i!(n-2i)!i!} 2^{n-2i} \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq i+(n-2i-1) \leq n \\ 0 \leq i, n-2i-1}} \frac{n!}{i!(n-2i-1)!(i+1)!} 2^{n-2i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} \binom{2i}{i} 2^{n-2i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} \binom{2i+1}{i} 2^{n-2i-1} \\ &= \sum_{\substack{s=0 \\ s \text{ زوج است}}}^n \binom{n}{s} \binom{s}{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} 2^{n-s} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \text{ فرد است}}}^n \binom{n}{s} \binom{s}{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} 2^{n-s} \\ &= \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \binom{s}{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} 2^{n-s} \end{aligned}$$

اگر در عبارت آخر فرض کنیم $n-s=k$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} [x^{n-1}](p(x)) + [x^n](p(x)) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} 2^k \end{aligned}$$

راه حل دوم (از جیانگ گو)

مدلی ترکیبیاتی را در نظر می گیریم. $2n$ دانش آموز، n دانش آموز کلاس اول و n دانش آموز کلاس دوم، و یک نفر مربی در نظر بگیرد. دانش آموزان کلاس اول را با a_1, a_2, \dots, a_n و دانش آموزان کلاس دوم را با b_1, b_2, \dots, b_n نشان می دهیم. به ازای $1 \leq i \leq n$ ، فرض کنید (a_i, b_j) جفت متشکل از a_i و b_j باشد. به این دانش آموزان n بلیط برای دیدن یک بازی فوتبال پرهیجان اختصاص داده اند. تعداد راههایی را که می توان n دانش آموز برای دیدن این بازی انتخاب کرد حساب می کنیم. معلوم است که این تعداد برابر است با

$$\binom{2n+1}{n}$$

از طرف دیگر، می توانیم این تعداد را به روش زیر حساب کنیم. به ازای هر عدد صحیح و ثابت مانند k ، $1 \leq k \leq n$ ، جفت از n جفت دانش آموز انتخاب می کنیم و به هر جفت یک بلیط می دهیم. $2^k \binom{n}{k}$ راه برای انتخاب k جفت و برگزیدن یک دانش آموز از هر جفت برای رفتن به تماشای مسابقه وجود دارد. $n-k$ بلیط و $n-k$ جفت از دانش آموزان باقی مانده اند. $\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ جفت انتخاب می کنیم و به هر یک از این جفتهای دو بلیط می دهیم. تعداد راههای انجام این کار برابر است با

$$\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$$

تا اینجا $2^k \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor + k$ بلیط را پخش کرده ایم. این عدد را S بنامید. اگر $n-k$ فرد باشد، آن وقت $S = n-1$ و آخرین بلیط را هم به مربی می دهیم؛ اگر $n-k$ زوج باشد، آن وقت $S = n$ و همه بلیطها را پخش کرده ایم. به سادگی معلوم می شود که اگر k همه مقادیر 1 تا n را اختیار کند، همه راههای پخش کردن n بلیط را به دست آورده ایم. بنابراین تعداد راههای رفتن n نفر به تماشای مسابقه برابر است با

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$$

به این ترتیب

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

۱۶. فرض کنید m و n عددهایی طبیعی باشند. فرض کنید می توان مستطیلی را با ترکیبی از نوارهای $1 \times m$ افقی و نوارهای $1 \times n$ عمودی فرش کرد. ثابت کنید می توان این مستطیل را تنها با استفاده از یکی از این دو نوع نوار فرش کرد.

(محفل ریاضی حوزه خلیج، ۱۹۹۹)

راه حل

فرض کنید ابعاد مستطیل $a \times b$ باشد. معلوم است که a و b هر دو عددهایی طبیعی اند. می‌خواهیم ثابت کنیم a بر m بخش پذیر است یا b بر n بخش پذیر است. فرض کنید $\xi = e^{\frac{1}{n}i}$ و $\zeta = e^{\frac{1}{m}i}$ ، یعنی ξ و ζ به ترتیب ریشه‌های m ام و ریشه‌های n ام از واحدند. مستطیل موردنظر را به ab مربع واحد تقسیم کنید و در مربع واقع در ستون x ام و سطر y ام عدد $\zeta^x \xi^y$ را بنویسید. مجموع عددهای نوشته شده در هر نوار عمودی برابر است با

$$\zeta^x \xi^y (1 + \xi + \xi^2 + \dots + \xi^{n-1}) = \zeta^x \xi^y \frac{\xi^n - 1}{\xi - 1} = 0.$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که مجموع عددهای هر نوار افقی برابر با صفر است. چون مستطیل با این نوارها فرش شده است، مجموع عددهای نوشته شده در مستطیل صفر است. اما این مجموع برابر است با

$$(\zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^a)(\xi + \xi^2 + \dots + \xi^b) = \zeta \xi \times \frac{\zeta^a - 1}{\zeta - 1} \times \frac{\xi^b - 1}{\xi - 1}$$

بنابراین $\zeta^a = 1$ یا $\xi^b = 1$ ، که در نتیجه به ترتیب a یا b بر n بخش پذیر است.

۱۷. دنباله

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

از عددهای حقیقی مفروض است. در هر مرحله، اگر دنباله به

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

تبدیل شده باشد، آن را با دنباله

$$|x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_n - a|$$

که در آن a عددی حقیقی است، عوض می‌کنیم. در هر مرحله ممکن است مقدار a تغییر کند.

(الف) ثابت کنید همواره می‌توان دنباله‌ای به دست آورد که همه جمله‌هایش صفرند.

(ب) کمترین تعداد مرحله‌هایی را تعیین کنید که، بدون توجه به اینکه دنباله اولیه چه دنباله‌ای است، بتوانیم پس از این مرحله‌ها دنباله‌ای به دست بیاوریم که همه جمله‌هایش صفرند.

راه حل

ابتدا ثابت می‌کنیم برای اینکه دنباله‌ای به دست بیاوریم که همه جمله‌هایش صفرند، n مرحله کافی است. فرض کنید پس از k مرحله دنباله را با

$$(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$$

نشان بدهیم و $a^{(k)}$ مقدار a در مرحله k ام باشد که باید از جمله‌ها کم کنیم. فرض می‌کنیم $a^{(1)} = \frac{a_1 + a_2}{2}$ در این صورت

$$a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = \frac{1}{2} |a_1 - a_2|$$

سپس فرض می‌کنیم $a^{(2)} = \frac{a_1^{(1)} + a_2^{(1)}}{2}$ و به دست می‌آوریم

$$a_1^{(2)} = a_2^{(2)} = a_3^{(2)} = \frac{1}{2} |a_1^{(1)} - a_2^{(1)}|$$

و همین‌طور کار را ادامه می‌دهیم. در مرحله k ام فرض می‌کنیم

$$a^{(k)} = \frac{a_1^{(k-1)} + a_2^{(k-1)}}{2}$$

و به دست می‌آوریم

$$a_1^{(k)} = a_2^{(k)} = \dots = a_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{2} |a_1^{(k-1)} - a_2^{(k-1)}|$$

به این ترتیب، پس از $n-1$ مرحله دنباله‌ای مانند

$$(a_1^{(n-1)}, a_2^{(n-1)}, \dots, a_n^{(n-1)})$$

به دست می‌آوریم که در آن

$$a_1^{(n-1)} = a_2^{(n-1)} = \dots = a_n^{(n-1)}$$

در مرحله n ام فرض می‌کنیم $a^{(n)} = a_1^{(n-1)}$ و دنباله‌ای به دست می‌آوریم که همه جمله‌هایش صفرند.

به استقرا روی n ثابت می‌کنیم که در مورد دنباله

$$1, 2!, 3!, \dots, n!$$

طی کردن n مرحله لازم است. درستی حکم در حالت $n=1$ معلوم است.

فرض کنید به ازای عددی طبیعی مانند k حکم درست باشد، یعنی برای تبدیل کردن دنباله

$$1, 2!, 3!, \dots, k!$$

به دنباله‌ای که همه جمله‌هایش صفرند، طی کردن دست‌کم k مرحله لازم باشد. ثابت می‌کنیم برای اینکه دنباله

$$1, 2!, 3!, \dots, (k+1)!$$

را به دنباله‌ای تبدیل کنیم که همه جمله‌هایش صفرند، دست‌کم باید $k+1$ مرحله را طی کنیم.

نکته اصلی این است که اگر m کمترین تعداد مرحله‌های لازم برای تبدیل کردن دنباله

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

به دنباله‌ای باشد که همه جمله‌هایش صفرند، آن وقت، به ازای $1 \leq k \leq m$ ،

$$m^{(k-1)} \leq a^{(k)} \leq M^{(k-1)}$$

که در آن

$$m^{(k-1)} = \min\{a_1^{(k-1)}, a_2^{(k-1)}, \dots, a_n^{(k-1)}\}$$

و

$$M^{(k-1)} = \max\{a_1^{(k-1)}, a_2^{(k-1)}, \dots, a_n^{(k-1)}\}$$

در حقیقت، اگر $a^{(k)} < m^{(k-1)}$ ، آن وقت به ازای هر i ،

$$\begin{aligned} a_i^{(k+1)} &= |a_i^{(k)} - a^{(k+1)}| \\ &= \left| |a_i^{(k-1)} - a^{(k)}| - a^{(k+1)} \right| \\ &= |a_i^{(k-1)} - a^{(k)} - a^{(k+1)}| \\ &= |a_i^{(k-1)} - (a^{(k)} + a^{(k+1)})| \end{aligned}$$

در مرحله k ام می‌توانیم a را برابر با $a^{(k)} + a^{(k+1)}$ انتخاب کنیم و یک مرحله را حذف کنیم، که این هم با این فرض که m کمترین تعداد مرحله‌های مورد نیاز است تناقض دارد. از طرف دیگر، اگر $a^{(k)} > M^{(k-1)}$ ، آن وقت به ازای هر i ،

$$\begin{aligned} a_i^{(k+1)} &= |a_i^{(k)} - a^{(k+1)}| \\ &= \left| |a_i^{(k-1)} - a^{(k)}| - a^{(k+1)} \right| \\ &= |-a_i^{(k-1)} + a^{(k)} - a^{(k+1)}| \\ &= |a_i^{(k-1)} - (a^{(k)} - a^{(k+1)})| \end{aligned}$$

می‌توانیم در مرحله k ام a را برابر با $a^{(k)} - a^{(k+1)}$ انتخاب کنیم و یک مرحله را حذف کنیم، که با این فرض که m کمترین تعداد مرحله‌های مورد نیاز است تناقض دارد.

از آنچه در بالا گفتیم نتیجه می‌شود

$$M^{(0)} \geq M^{(1)} \geq \dots \geq M^{(m)}$$

و در نتیجه به ازای هر k ، $a^{(k)} \leq M^{(0)}$. همچنین، توجه کنید که چون همواره $m^{(k)}$ نامنفی است، به ازای هر k ، $a^{(k)} \geq 0$.

اکنون آماده‌ایم که گام استقرایی را ثابت کنیم. فرض کنید که بتوان در k مرحله دنباله

$$1, 2!, 3!, \dots, (k+1)!$$

را به دنباله‌ای تبدیل کرد که همه جمله‌هایش صفرند. در این صورت زیردنباله

$$1, 2!, 3!, \dots, k!$$

از این دنباله را هم می‌توان به دنباله‌ای تبدیل کرد که همه جمله‌هایش صفرند. بنابر فرض استقرا، کمترین تعداد مرحله‌هایی که لازم است تا دنباله

$$1, 2!, 3!, \dots, k!$$

را به دنباله‌ای تبدیل کرد که همه جمله‌هایش صفرند k مرحله است. بنابر آنچه در بالا گفتیم،

$$0 \leq a^{(i)} \leq k!, \quad 1 \leq i \leq k$$

اما در این صورت

$$\begin{aligned} a_{k+1}^{(k)} &= | \dots | (k+1)! - a^{(1)} - a^{(2)} - \dots - a^{(k)} | \\ &= (k+1)! - (a^{(1)} + a^{(2)} + \dots + a^{(k)}) \\ &\geq (k+1)! - k \times k! > 0 \end{aligned}$$

که این هم با تساوی $a_{k+1}^{(k)} = 0$ تناقض دارد. عضو $a_{k+1}^{(k)}$ از دنباله‌ای است که همه جمله‌هایش صفرند. بنابراین فرضمان غلط است و برای اینکه دنباله

$$1, 2!, 3!, \dots, (k+1)!$$

را به دنباله‌ای تبدیل کنیم که همه جمله‌هایش صفرند دست‌کم باید $k+1$ مرحله را طی کنیم. به این ترتیب، استقرا کامل شده است.

۱۸. درباره دنباله $(a_n)_{n \geq 1}$ می‌دانیم $a_1 = 0$ ، $a_2 = 1$ و اگر $n \geq 3$

$$a_n = \frac{1}{4} n a_{n-1} + \frac{1}{4} n(n-1) a_{n-2} + (-1)^n \left(1 - \frac{n}{4}\right)$$

دستوری صریح برای

$$a_n + 2 \binom{n}{1} a_{n-1} + 3 \binom{n}{2} a_{n-2} + \dots + (n-1) \binom{n}{n-2} a_2 + n \binom{n}{n-1} a_1$$

پیدا کنید.

(یومینگ هوانگ، چین، ۲۰۰۰)

راه حل اول

عبارت مورد نظر را f_n بنامید. از استقرایی سراسرست معلوم می‌شود که

$$a_n = na_{n-1} + (-1)^n$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$a_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

یا

$$a_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

بنابراین، بنابر دستور معروف برنولی-اولر برای تعداد راههای رساندن نامه‌ها به نشانیهای نادرست، a_n برابر است با تعداد پریشهای $(1, 2, \dots, n)$ ، یعنی تعداد جایگشتهای این n تایی به طوری که هیچ نقطه‌ای ثابت نباشد.

بنابراین، f_n را می‌توان به شکل زیر تعبیر کرد: به ازای هر جایگشت غیرهمانی از $(1, 2, \dots, n)$ یک علامت بگذارید؛ سپس به ازای هر نقطه ثابت این جایگشت یک علامت بگذارید. در این صورت f_n برابر است با تعداد کل علامتها به ازای همه جایگشتهای غیرهمانی.

از طرف دیگر، تعداد کل علامتها برابر است با مجموع علامتهایی که هر عضو در کل جایگشتهای غیرهمانی گرفته است. $n! - 1$ جایگشت غیرهمانی وجود دارد و هر عضو در $(n-1)!$ جایگشت غیرهمانی ثابت است؛ پس تعداد علامتها برابر است با

$$f_n = n! - 1 + n((n-1)! - 1) = 2n! - n - 1$$

راه حل دوم

روش دیگری برای اثبات اینکه a_n برابر است با تعداد پریشهای $(1, 2, \dots, n)$ می‌آوریم. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a_n &= na_{n-1} + (-1)^n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-1} + (-1)^n \\ &= ((n-1)a_{n-2} + (-1)^{n-1}) + (n-1)a_{n-1} + (-1)^n \\ &= (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید b_n تعداد پریشهای $(1, 2, \dots, n)$ باشد. در هر پریش، یا

الف) به ازای k ای غیر از 1 ، k به 1 و 1 به k نگاشته می‌شود. در این صورت، $n-1$ مقدار ممکن برای k وجود دارد و به ازای هر k ، b_{n-2} پریش برای $n-2$ عضو دیگر وجود دارد. بنابراین $(n-1)b_{n-1}$ پریش از این نوع وجود دارد.

(ب) به ازای m ای غیر از ۱، ۱ به k و k به m نگاشته می شود. توجه کنید که $k \neq m$. بنابراین، این پریش، پریشی از

$$(2, \dots, k-1, 1, k+1, \dots, n)$$

است که ۱ را به m می برد. باز هم $n-1$ مقدار ممکن برای k وجود دارد و به ازای هر k, b_{n-1} پریش وجود دارد. بنابراین $(n-1)b_{n-1}$ پریش از این نوع وجود دارد. به این ترتیب، $b_n = (n-1)(b_{n-1} + b_{n-2})$. چون $a_1 = b_1 = 0$ و $a_2 = b_2 = 1$ پس $a_n = b_n$ همان چیزی که گفتیم.

۱۹. به ازای هر مجموعه مانند A فرض کنید $|A|$ و $s(A)$ به ترتیب تعداد عضوهای A و مجموع عضوهای A باشند. (اگر $A = \emptyset$ ، آن وقت $|A| = s(A) = 0$). فرض کنید S مجموعه ای از عددهای طبیعی باشد که

(الف) دو عدد در S مانند x و y وجود دارند که $(x, y) = 1$ ب.م.م.؛

(ب) به ازای هر دو عدد در S مانند x_1 و y_1 $x_1 + y_1 \in S$.

فرض کنید T مجموعه همه عددهای طبیعی ای باشد که در S نیستند. ثابت کنید

$$s(T) \leq |T|^2 < \infty$$

(ریچارد استونگ، مسأله پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۲۰۰۰)

راه حل

ابتدا ثابت می کنیم که اگر $n \geq xy$ ، آن وقت $n \in S$. کافی است ثابت کنیم که عددهایی صحیح و نامنفی مانند a و b وجود دارند که $ax + by = n$. چون x و y نسبت به هم اول اند، عددی مانند b وجود دارد که $0 \leq b < x$ و

$$by \equiv n \pmod{x} \quad (\text{به پیمانه } x)$$

اکنون می توانیم فرض کنیم $a = \frac{n-by}{x}$ ، که چون $n \geq xy$ ، پس a مثبت است. بنابراین $|T| < \infty$.

عضوهای T را به ترتیب صعودی مرتب کنید و فرض کنید این اعضا $t_1, t_2, \dots, t_{|T|}$ باشند که

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{|T|}$$

چون $t_i \notin S$ ، به ازای هر m که $1 \leq m \leq \lfloor \frac{t_i}{y} \rfloor$ ، دست کم یکی از عددهای m و $t_i - m$ در S نیست. چون فقط $i-1$ عدد طبیعی کوچکتر از t_i وجود دارند که در S نیستند، پس

$$\left\lfloor \frac{t_i}{y} \right\rfloor \leq i-1$$

یا $1 - 2i \leq t_i$. در نتیجه

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{|T|} \leq |T|^2$$

همان چیزی که می‌خواهیم.

۲۰. در جنگلی ۹ حیوان در لانه‌هایشان زندگی می‌کنند و دقیقاً یک راه جداگانه بین هر دو تا از این لانه‌ها وجود دارد. پیش از مراسم انتخاب سلطان جنگل، برخی حیوانات در مبارزه انتخاباتی شرکت می‌کنند. هر یک از نامزدها به هر یک از لانه‌های دیگر دقیقاً یک بار سر می‌زند، فقط از راه‌های میان لانه‌ها برای رفت و آمد استفاده می‌کند، هیچ‌گاه در مسیر بین دو لانه از هیچ راهی به راهی دیگر نمی‌پیچد و در پایان مبارزه انتخاباتی به لانه خودش برمی‌گردد. همچنین می‌دانیم که هیچ راهی بین دو لانه را بیش از یک نفر از نامزدها طی نکرده است. بیشترین تعداد ممکن نامزدها را پیدا کنید.

راه حل

مسالّه را به زبان نظریه گراف برمی‌گردانیم. فرض کنید هر لانه یک رأس باشد و هر راه میان دو لانه یالی باشد که این دو رأس را به هم وصل می‌کند. به این ترتیب گراف کامل K_9 را به دست می‌آوریم. بیشترین تعداد دورهای هامیلتونی در این گراف کامل را می‌خواهیم که یال مشترک نداشته باشند. (به سادگی می‌توان تحقیق کرد که تعداد دورهای هامیلتونی در این گراف از تعداد رأسها کمتر است. بنابراین همواره می‌توانیم برای هر دور هامیلتونی یک نامزد انتخاب کنیم.)

نتیجه کلی این است که در گراف کامل K_n ، $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ دور هامیلتونی جدا از هم وجود دارد: چون $\frac{n(n-1)}{2}$ یال در K_n وجود دارد و هر دور هامیلتونی n یال دارد، حداکثر $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ دور هامیلتونی در K_n وجود دارد. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. n فرد است. فرض می‌کنیم که به ازای عددی طبیعی مانند k ، $n = 2k + 1$ (چون حالت $n = 1$ بی‌معنی است). رأس‌های P_1, P_2, \dots, P_{2k} را به ترتیب در جهت ساعتگرد روی دایره‌ای به فاصله‌های برابر می‌چینیم و رأس P_0 را در مرکز دایره قرار می‌دهیم. اولین دور هامیلتونی

$$(P_0, P_1, P_2, P_{2k}, P_3, P_{2k-1}, P_4, P_{2k-2}, P_5, \dots, P_{k-1}, P_{k+3}, P_k, P_{k+2}, P_{k+1}, P_0)$$

است. می‌توانیم این دور را با زاویه‌های $\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \dots$ و $\frac{(k-1)\pi}{k}$ در جهت ساعتگرد بچرخانیم و $k-1$ دور دیگر به دست بیاوریم که در مجموع تعداد دورها برابر می‌شود با $k = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

حالت ۲. n زوج است. فرض می‌کنیم به ازای عددی طبیعی مانند k ، $n = 2k + 2$. رأس‌های P_1, P_2, \dots, P_{2k} را به ترتیب در جهت ساعتگرد روی دایره‌ای به فاصله‌های برابر می‌چینیم و رأس P_0 را در مرکز دایره قرار می‌دهیم. می‌توانیم رأس P_{2k+1} را جایی درون دایره قرار دهیم.

در هر دور هامیلتونی که در حالت (۱) تعریف کردیم، P_{2k+1} را سمت راست وسط این دور قرار می‌دهیم و به این ترتیب $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ دور به دست می‌آوریم.

در مسأله خودمان، $n = 9$. بنابراین تعداد دورهای هامیلتونی برابر است با ۴ و در نتیجه بیشترین تعداد نامزدها ۴ نفر است.

۲۱. مجموعه قطری دنباله‌ای مانند

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

از زیرمجموعه‌ای مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ و جایگشتی مانند π از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, n\}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$D_\pi(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{i \in S : i \notin A_{\pi(i)}\}$$

بیشترین تعداد ممکن مجموعه‌های متمایزی که ممکن است مجموعه قطری دنباله‌ای مانند

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

باشند چقدر است؟

راه حل

جواب $2^n - n$ است.

ادعا می‌کنیم که به ازای هر i ,

$$D_\pi(A_1, A_2, \dots, A_n) \neq A_i$$

معلوم است که

$$D_{\pi \circ}(A_1, A_2, \dots, A_n) \neq A_i$$

که در آن $\pi \circ(i) = i$. بنابراین

$$D_\pi(A_1, A_2, \dots, A_n) = D_{\pi \circ}(A_{\pi(1)}, A_{\pi(2)}, \dots, A_{\pi(n)}) \neq A_{\pi(i)}$$

چون

$$\{A_{\pi(1)}, A_{\pi(2)}, \dots, A_{\pi(n)}\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

آنچه ادعا کردیم نتیجه می‌شود.

مجموعه مورد نظر 2^n زیرمجموعه متمایز دارد. اگر n مجموعه اولیه را کنار بگذاریم، حداکثر $2^n - n$ مجموعه باقی می‌ماند که ممکن است مجموعه قطری باشند. درحقیقت، می‌توان این تعداد مجموعه قطری پیدا کرد. فرض کنید

$$A_i = \{i\}, \quad 1 \leq i \leq n$$

در این صورت

$$D_{\pi \circ}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \emptyset$$

$$D_{\pi}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{i \in S : i \notin A_{\pi(i)}\} = \{i \in S : i \neq \pi(i)\}$$

می‌توان هر زیرمجموعه S را که دست‌کم دو عضو دارد با انتخاب مناسب جایگشت π به مجموعه‌ای مانند D_{π} تبدیل کرد. بنابراین، مجموعه تهی و همه زیرمجموعه‌های S که دست‌کم دو عضو دارند تنها مجموعه‌های قطری ممکن‌اند، که در نتیجه $2^n - n$ مجموعه قطری ممکن است وجود داشته باشد.

۲۲. زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ مانند M این ویژگی را دارد که حاصل ضرب هیچ سه عضوی از آن مربع کامل نیست. بیشترین تعداد عضوهای M را مشخص کنید.
(مسأله پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۴)

راه حل

می‌گوییم مجموعه‌ای مانند M خوب است، هرگاه زیرمجموعه‌ای از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ باشد و حاصل ضرب هیچ سه عضوی از آن مربع کامل نباشد. می‌خواهیم بیشترین مقدار $|M|$ را پیدا کنیم، که در اینجا M مجموعه‌ای خوب است. بیشترین مقدار موردنظر را m بنامید. مجموعه سه‌عضوی $\{i, j, k\}$ را که در آن $1 \leq i < j < k \leq 15$ بد می‌نامیم، هرگاه ijk مربع کامل باشد.

ابتدا ثابت می‌کنیم $11 \leq m$. چون مجموعه‌های سه‌عضوی بد

$$B_1 = \{1, 4, 9\}, B_2 = \{2, 6, 12\}, B_3 = \{3, 5, 15\}, B_4 = \{7, 8, 14\}$$

جدا از هم‌اند، اگر $|M| = 12$ ، هر سه عضو دست‌کم یکی از این مجموعه‌های سه‌عضوی در M ‌اند. بنابراین، اگر $|M| \geq 12$ ، M مجموعه‌ای خوب نیست و در نتیجه $11 \leq m$.

فرض کنید $m = 11$ و M مجموعه‌ای خوب باشد که $|M| = 11$. در این صورت

$$M = S - \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

که در آن

$$a_i \in B_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

بنابراین $10 \in M$. چون $10 \in M$ و مجموعه‌های سه‌عضوی

$$B_1 = \{1, 4, 9\}, B_4 = \{7, 8, 14\}, B_5 = \{2, 5, 10\}, B_6 = \{6, 15, 10\}$$

بد هستند و تنها عضو تکراری است، پس

$$M = S - \{b_1, b_2, b_5, b_6\}$$

که در آن

$$b_1 \in B_1, \quad b_2 \in B_2, \quad b_5 \in \{2, 5\}, \quad b_6 \in \{6, 15\}$$

بنابراین $\{3, 12\} \subset M$. به این ترتیب ۱، ۴ و ۹ در M نیستند. چون هنوز دو مجموعه سه عضوی بد و جدا از هم $\{2, 3, 6\}$ و $\{7, 8, 14\}$ وجود دارند، دستکم باید دو عضو دیگر M را حذف کنیم تا مجموعه‌ای خوب شود. بنابراین $|M| \leq 10$ ، که با فرض $|M| = 11$ تناقض دارد. بنابراین فرضمان غلط است و $m \leq 10$. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که مجموعه

$$\{1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

ویژگیهای موردنظر را دارد. بنابراین بیشترین تعداد ممکن عضوهای M برابر با ۱۰ است.

۲۳. همه دنباله‌های متناهی مانند (x_0, x_1, \dots, x_n) را طوری پیدا کنید که به ازای هر j ، $0 \leq j \leq n$ ، x_j برابر با تعداد دفعه‌هایی باشد که j در این دنباله آمده است. (مسأله پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۱)

راه حل

فرض کنید دنباله (x_0, x_1, \dots, x_n) ویژگی موردنظر را داشته باشد، چون هر x_j تعداد دفعه‌هایی است که j در دنباله آمده است، جمله‌های دنباله موردنظر عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. توجه کنید که $x_0 > 0$ ، زیرا امکان ندارد $x_0 = 0$. فرض کنید تعداد جمله‌های مثبت در میان جمله‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر با m باشد. چون از $x_0 = p \geq 1$ نتیجه می‌شود $x_p \geq 1$ پس $m \geq 1$ توجه کنید که

$$\sum_{i=1}^n x_i = m + 1$$

زیرا مجموع سمت چپ این تساوی تعداد جمله‌های مثبت دنباله موردنظر است و $x_0 > 0$. (توجه: اگر عدد مثبتی مانند j به عنوان جمله‌ای مانند x_i بیاید، دنباله آنقدر طولانی هست که شامل جمله‌ای مانند x_j باشد که j هم به حساب بیاید، زیرا دنباله شامل j تا i و دستکم یک مقدار دیگر است، که اگر $j \neq i$ خود j است و اگر $j = i$ برابر با ۰ است.) چون در مجموع بالا دقیقاً m جمله مثبت وجود دارد، $(1 - m)$ تا از جمله‌ها باید برابر با ۱ باشند، یکی از جمله‌ها باید برابر با ۲ باشد و بقیه باید ۰ باشند. بنابراین فقط x_0 ممکن است از ۲ بیشتر باشد و در نتیجه اگر $2 < j$ ، فقط وقتی $x_j > 0$ که $j = x_0$ به‌ویژه، $m \leq 3$. بنابراین سه حالت را باید بررسی کنیم. در هر حالت، به‌خاطر داشته باشید که $m - 1$ جمله از جمله‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر با ۱ هستند، یکی برابر با ۲ است و بقیه برابر با ۰ هستند.

۱.۱. $m = ۱$. در این صورت $x_2 = ۲$ ، زیرا ممکن نیست $x_1 = ۲$. بنابراین $x_0 = ۲$ و دنباله موردنظر $(۲, ۰, ۲, ۰)$ است.

۲.۲. $m = ۲$. در این صورت یا $x_1 = ۲$ یا $x_2 = ۲$. در مورد اول دنباله $(۱, ۲, ۱, ۰)$ است و در مورد دوم دنباله $(۲, ۱, ۲, ۰, ۰)$ است.

۳.۳. $m = ۳$. در این حالت، به ازای p ای که در $p \geq ۳$ ، $x_p > ۰$. بنابراین $x_0 = p$ و $x_p = ۱$ به این ترتیب $۱ \neq x_1$ و در نتیجه $x_1 = ۲$ و $x_2 = ۱$ و همه جمله های مثبت دنباله را پیدا کرده ایم. دنباله موردنظر

$$(p, 2, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-3}, 1, 0, 0, 0)$$

است.

به طور خلاصه، سه جواب خاص، یعنی

$$(2, 0, 2, 0), (1, 2, 1, 0), (2, 1, 2, 0, 0)$$

و خانواده ای نامتناهی از جوابها، یعنی

$$(p, 2, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-3}, 1, 0, 0, 0)$$

که در آنها $p \geq ۳$ وجود دارند.

یادداشت

می توانیم دنباله هایی را که همه جمله هایشان صفرند نیز جواب به حساب بیاوریم. صورت کلیتری از این مساله را می توان در مورد دنباله های نامتناهی طرح کرد، و دنباله هایی نامتناهی که ویژگی موردنظر را داشته باشند وجود دارند. راه ساده ای برای ساختن چنین دنباله ای این است که ابتدا دنباله ای متناهی مانند (x_0, x_1, \dots, x_n) در نظر بگیریم که ویژگی موردنظر را داشته باشد و فرض کنیم $x_{n+1} = n + ۱$ و کار را مانند آنچه در زیر نشان داده ایم ادامه می دهیم:

$$(x_0, x_1, \dots, x_n, \underbrace{n+1, n+1, \dots, n+1}_{\text{جمله } x_{n+1}}),$$

$$(\underbrace{n+2, n+2, \dots, n+2}_{\text{جمله } x_{n+2}}, \dots)$$

مثلاً

$$(1, 2, 1, 0, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, \dots)$$

۲۴. آیا می توان مجموعه عددهای طبیعی را به دو مجموعه مانند A و B طوری افراز کرد که A شامل هیچ تصاعد حسابی سه جمله ای و B شامل هیچ تصاعد حسابی نامتناهی نباشد؟

راه حل

هر تصاعد حسابی نامتناهی با جمله اول و قدرنسبتش مشخص می شود، به عبارت دیگر، می توانیم تصاعد حسابی نامتناهی

$$a, a + d, a + 2d, \dots$$

را به شکل (a, d) بنویسیم. بنابراین می توانیم تناظری یک به یک میان مجموعه تصاعدهای حسابی نامتناهی از عددهای طبیعی و مجموعه S ، مجموعه همه نقطه های شبکه ای در ربع اول صفحه مختصات (که محورهای مختصات را از آن حذف کرده ایم) برقرار کنیم. توجه کنید که مجموعه S شماراست، زیرا می توان آن را با مجموع مختصات نقطه هایش شمرد:

$$\{(1, 1); (1, 2), (2, 1); (1, 3), (2, 2), (3, 1); \dots\}$$

مجموعه A را استقرایی تشکیل می دهیم. درگام اول، فرض می کنیم $a_1 = 1$ و a_1 در مجموعه A باشد (پس تصاعد حسابی نامتناهی $(1, 1)$ را شکسته ایم)؛ درگام دوم، عددی مانند a_2 از تصاعد $(1, 2)$ انتخاب می کنیم که از $2a_1$ بزرگتر باشد و آن را در A قرار می دهیم (پس تصاعد $(1, 2)$ را شکسته ایم)؛ درگام سوم، عددی مانند a_3 از تصاعد $(2, 1)$ انتخاب می کنیم که از $2a_2$ بزرگتر باشد و آن را در A قرار می دهیم؛ ...؛ درگام i ام، $i \geq 3$ ، عددی از تصاعد i ام S انتخاب می کنیم (توجه کنید که S شماراست و چنین ترتیبی وجود دارد) که از $2a_{i-1}$ بزرگتر باشد و آن را در A قرار می دهیم، و همین طور تا آخر. همه عددهایی که در A نیستند، مجموعه B را تشکیل می دهند. با این روش تشکیل مجموعه های A و B معلوم است که هر تصاعد نامتناهی شکسته می شود و در نتیجه مجموعه B شامل هیچ تصاعد حسابی نامتناهی ای نیست. از طرف دیگر، عضوهای A را می توان به ترتیب صعودی چید:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

که در اینجا $2a_i > a_{i+1}$. در نتیجه اگر a_i, a_j و a_k جمله هایی باشند که $a_i < a_j < a_k$ ، آن وقت a_i, a_j و a_k تصاعدی حسابی تشکیل نمی دهند، زیرا

$$2a_j < a_{j+1} \leq a_k < a_k + a_i$$

بنابراین می توان مجموعه عددهای طبیعی را به دو مجموعه مانند A و B طوری افراز کرد که A شامل هیچ تصاعد حسابی سه جمله ای و B شامل هیچ تصاعد حسابی نامتناهی نباشد.

۲۵. مجموعه T_5 ، مجموعه همه عددهای طبیعی پنج رقمی را در نظر بگیرید که نمایش اعشاری آنها جایگشتی از رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ است. آیا می توان T_5 را به دو مجموعه مانند A و B طوری افراز کرد که مجموع مربعات عضوهای A با مجموع مربعات عضوهای B برابر باشد؟
(اتحاد جماهیر شوروی، ۱۹۸۹)

راه حل

ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_5 جایگشتی از رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد. در این صورت مجموع مربعات عدد پنج‌رقمی $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ و چهار جایگشت دوری آن برابر است با مجموع مربعات عدد $(a_5 a_4 a_3 a_2 a_1)$ و چهار جایگشت دوری آن. یعنی،

$$\sum_{i=1}^5 (a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4})^2 = \sum_{i=1}^5 (a_{i+4} a_{i+3} a_{i+2} a_{i+1} a_i)^2$$

که در آن $a_{i+5} = a_i$.

برهان. هر نمایش اعشاری مانند $(d_1 d_2 d_3 d_4 d_5)$ را به شکل $\sum 10^j d_j$ می‌نویسیم و مربعات را بسط می‌دهیم. به این ترتیب عددهایی مربع کامل به شکل $10^{2j} d_j^2$ و حاصل ضربهایی به شکل $2 \times 10^{j+k} d_j d_k$ به وجود می‌آیند. اکنون در هر طرف تساوی‌ای که می‌خواهیم آن را ثابت کنیم، جمله‌های مربع کامل و جمله‌هایی را که به شکل حاصل ضرب‌اند در نظر می‌گیریم. به سادگی معلوم می‌شود که جمله‌های مربع کامل در دو طرف یکسان‌اند، زیرا هر رقم دقیقاً یک بار در یکان، دهگان، صدگان، هزارگان و ده‌هزارگان ظاهر می‌شود. ادعا می‌کنیم جمله‌های به شکل حاصل ضرب هم در دو طرف یکسان‌اند. در حقیقت، هر جمله حاصل ضربی به شکل $2 \times 10^{j+k} a_j a_k$ که در سمت چپ از حاصل ضرب $10^j a_j$ و $10^k a_k$ به وجود می‌آید، در سمت راست از حاصل ضرب $10^k a_k$ و $10^j a_j$ به وجود می‌آید، زیرا در سمت راست، مقلوب همه عددهای سمت چپ وجود دارند. ■

اکنون ۱۲۰ عدد در T_5 را به ۲۴ گروه تقسیم می‌کنیم که هر کدام شامل پنج عددی است که جایگشت دوری یکدیگرند. همه جایگشت‌هایی را که در آنها رقمهای ۱، ۲، ۳ به طور دوری به همین ترتیب آمده‌اند در مجموعه A و بقیه جایگشت‌ها را (که در آنها ترتیب ۱، ۳، ۲ است) در مجموعه B قرار می‌دهیم. به این ترتیب، هر گروه پنج‌تایی در A ، گروه نظیری در B دارد که می‌توان در مورد آنها از لم بالا استفاده کرد و نتیجه گرفت که مجموع مربعات عضوهای A با مجموع مربعات عضوهای B برابر است.

۲۶. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. تعداد چندجمله‌هایی مانند $P(x)$ را پیدا کنید که ضریب‌های عضو مجموعه $\{0, 1, 2, 3\}$ هستند و $P(2) = n$.

(چین، ۱۹۹۶)

راه حل اول

فرض کنید $S = \{0, 1, 2, 3\}$ و

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

که در آن $a_i \in S$, $1 \leq i \leq m$. در این صورت

$$P(2) = 2^m a_m + 2^{m-1} a_{m-1} + \cdots + 2 a_1 + a_0.$$

می‌خواهیم تعداد دنباله‌هایی مانند (a_0, a_1, \dots) را پیدا کنیم که هر یک از a_i ها در S است و

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i a_i = n$$

تابع مولد

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^4 + x^8 + x^{12}) \cdots$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $1 + x + x^2 + x^3$ مربوط به انتخابهای مختلف a_0 است، $1 + x^2 + x^4 + x^6$ مربوط به انتخابهای مختلف a_1 است، $1 + x^4 + x^8 + x^{12}$ مربوط به انتخابهای مختلف a_2 است، و همین‌طور تا آخر. کافی است ضریب جمله a^n در $f(x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1} \times \frac{x^8 - 1}{x^2 - 1} \times \frac{x^{16} - 1}{x^4 - 1} \times \cdots = \frac{1}{(x - 1)(x^2 - 1)}$$

زیرا هر جمله در صورت، در مخرج کسر دوتا بعدتر ظاهر می‌شود. اگر $f(x)$ را به شکل کسرهای جزئی بنویسیم به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} \\ &= \frac{-2}{4(x^2-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left((x-1)^{-2} + \frac{1}{1-x^2} \right) \end{aligned}$$

اگر دو تابعی را که در تساوی آخر مانده‌اند بسط بدهیم معلوم می‌شود که

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \binom{-2}{1} x + \binom{-2}{2} x^2 - \cdots \right) + (1 + x^2 + x^4 + \cdots) \right)$$

چون

$$\binom{-2}{n} = \frac{(-2)(-3) \cdots (-2-n+1)}{n!} = (-1)^n (n+1)$$

پس

$$f(x) = \frac{1}{2} ((1 + 2x + 3x^2 + \cdots) + (1 + x^2 + x^4 + \cdots))$$

$$= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \dots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \right) x^m$$

بنابراین، ضریب x^n برابر با $1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ است، یعنی $1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ چندجمله‌ای وجود دارند که ویژگیهای موردنظر را دارند.

راه حل دوم

مسأله‌ای کلیتر را حل می‌کنیم: فرض کنید m و n عددهایی طبیعی باشند و $m \geq 2$. تعداد چندجمله‌ایهایی مانند $P(x)$ را پیدا کنید که ضریبهایش عضو مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, m^2 - 1\}$ هستند و $n = P(m)$. هر چندجمله‌ای با این ویژگی را خوب می‌نامیم.

فرض کنید $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ، که در آن

$$a_k \in \{0, 1, 2, \dots, m^2 - 1\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

در این صورت هر یک از a_k ها را می‌توان به شکل $b_k m + c_k$ نوشت، که

$$b_k, c_k \in \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$$

بنابراین

$$n = P(m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k = mt + \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k$$

که در آن $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^k$. هر t را که $0 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ ، فقط به یک طریق می‌توان به شکل $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^k$ نوشت، که در آن

$$b_k \in \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$$

(یعنی t را در مبنای m بنویسیم) و فقط به یک طریق می‌توان $n - mt$ را به شکل $n - mt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k$ نوشت، که در آن

$$c_k \in \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$$

(یعنی $n - mt$ را در مبنای m بنویسیم). بنابراین تناظری یک‌به‌یک میان مجموعه $\{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor\}$ و مجموعه چندجمله‌های خوب وجود دارد. پس $1 + \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ چندجمله‌ای خوب وجود دارد.

در مسأله خودمان، $m = 2$ و بنابراین $1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ چندجمله‌ای وجود دارند که ویژگیهای موردنظر را دارند.

۲۷. فرض کنید n و k عددهایی طبیعی باشند که $\frac{1}{3}n < k \leq \frac{2}{3}n$. کوچکترین عدد مانند m را طوری پیدا کنید که بتوان m سرباز را روی خانه‌های صفحه شطرنجی $n \times n$ طوری قرار داد که در هیچ سطر و هیچ ستونی k خانه پشت سر هم خالی وجود نداشته باشد.
(مسأله پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۰)

راه حل

چیدنی از سربازها را روی صفحه خوب می‌نامیم که هیچ قطعه $1 \times k$ ای (یا $k \times 1$ ای) از خانه‌های خالی وجود نداشته باشد. سطرها و ستونها را با عددهای 0 تا $n-1$ شماره‌گذاری کنید. راهی برای چیدن خوب سربازها این است که آنها را در خانه‌هایی مانند (i, j) (خانه واقع در سطر i ام و ستون j ام)، که در آن $1 + j + i$ بر k بخش‌پذیر است بچینیم. چون $n < 2k$ مجموع $j + i$ باید برابر با $1 - k$ ، $2k - 1$ یا $3k - 1$ باشد و در نتیجه در این الگو حداکثر سه خط کج به چشم می‌خورد. چون $2n \leq 3k$ ، یکی از این سه خط از k خانه تشکیل شده است، خط دیگر از $2n - 2k$ خانه و خط سوم هم از $2n - 3k$ خانه تشکیل شده است. پس روی این خطها در کل $4(n - k)$ خانه خالی وجود دارد.

اکنون ثابت می‌کنیم که درحقیقت این مقدار کمترین تعداد سربازهایی است که ممکن است در چیدنی خوب وجود داشته باشند. فرض کنید چیدنی خوب با m سرباز داریم. صفحه شطرنج را به نه ناحیه مستطیلی مانند

$$A \quad B \quad C$$

$$D \quad E \quad F$$

$$G \quad H \quad I$$

طوری تقسیم کنید که ناحیه‌های A, C, G و I هر کدام $(n - k) \times (n - k)$ خانه داشته باشند، هر یک از ناحیه‌های B و H ، $n - k$ سطر و $2k - n$ ستون داشته باشد و هر یک از ناحیه‌های D و F ، $2k - n$ سطر و $n - k$ ستون داشته باشد. (چون $2k - n > 0$ ، می‌توان این کار را کرد.) توجه کنید که می‌توانیم ناحیه $A \cup B$ را به $n - k$ نوار مستطیلی $1 \times k$ تقسیم کنیم. به‌طور مشابه، می‌توانیم ناحیه‌های $B \cup C$ ، $G \cup H$ و $H \cup I$ را به $n - k$ نوار افقی ببریم. به‌همین روش می‌توانیم $4(n - k)$ نوار عمودی به‌دست آوریم، که در کل می‌شود $8(n - k)$ نوار. بنابر فرض مسأله، هر یک از این نوارها باید شامل دستکم یک سرباز باشد. از طرف دیگر، طوری نوارها را بریده‌ایم که هیچ سربازی روی بیش از دوتا از نوارها قرار ندارد. بنابراین دستکم $4(n - k)$ سرباز داریم.

۲۸. در یک دوره مسابقات فوتبال، هر تیم با هر یک از دیگر تیمها دقیقاً یک بار بازی می‌کند و برای

تیم برد ۳ امتیاز و برای هر تساوی ۱ امتیاز می‌گیرد و اگر ببازد هیچ امتیازی نمی‌گیرد. در پایان مسابقات، معلوم شد که تیمی بیشترین امتیاز را گرفته است و کمترین برد را داشته است. کمترین تعداد تیمها را پیدا کنید که چنین چیزی ممکن باشد.

(چین، ۱۹۹۶)

راہل

تیم موردنظر را W می‌نامیم. فرض کنید n تیم در مسابقات شرکت کرده‌اند. تعداد بازیها $\binom{n}{2}$ یا $\frac{n(n-1)}{2}$ است و کل امتیازها دستکم $n(n-1)$ است. بنابراین هر تیم به‌طور میانگین دستکم $n-1$ امتیاز گرفته است. چون W ، $n-1$ بازی کرده است و امتیازش باید از میانگین بیشتر باشد، پس دستکم یک بازی را برده است. هر یک از دیگر تیمها باید دستکم دو بازی را برده باشد و دستکم ۶ امتیاز دارد؛ پس W باید دستکم در ۴ بازی مساوی کرده باشد (پس دستکم ۷ امتیاز دارد). اما اگر تیمی مانند A در مسابقه‌اش مقابل W مساوی کرده باشد، A ، ۷ امتیاز دارد. بنابراین تیم W باید دستکم ۵ بار مساوی کرده باشد. به این ترتیب، $n \geq 7$.

اگر $n = 7$ ، تیم W یک بازی را برده است و در ۵ بازی مساوی کرده است، پس در کل ۸ امتیاز دارد. بنابراین هر یک از دیگر تیمها دقیقاً دو بازی را برده است و در حداکثر یک بازی مساوی کرده است. پس هر یک از دیگر تیمها باید دستکم سه بازی را باخته باشد. به این ترتیب، دستکم 3×6 یا 18 باخت و فقط $2 \times 6 + 1$ یا 13 برد وجود دارد، که ممکن نیست. بنابراین $n \geq 8$. اکنون مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد می‌توان مسابقاتی ۸ تیمی داشت که شرطهای مسالہ در مورد آن درست باشد. فرض کنید W ، A_1 ، A_2 ، ... و A_7 هشت تیم باشند. تیم W بازی مقابل A_1 و A_2 را برده است و بقیه بازیها را مساوی کرده است، پس در کل ۱۱ امتیاز دارد. به‌ازای $1 \leq i \leq 7$ ، تیم A_i بازی مقابل تیمهای A_{i+1} ، A_{i+2} و A_{i+3} را برده است و بازی مقابل تیمهای A_{i+4} ، A_{i+5} ، A_{i+6} و A_{i+7} را باخته است، که در اینجا $A_{i+7} = A_i$. بنابراین هر یک از تیمهای A_1 و A_2 سه برد و چهار باخت و در کل ۹ امتیاز دارد؛ هر یک از تیمهای A_3 ، A_4 ، ... و A_7 سه برد، سه باخت و یک مساوی و در کل ۱۰ امتیاز دارد. بنابراین کمترین تعداد تیمهای موردنظر برابر با ۸ است.

۲۹. فرض کنید

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

سطر اول آرایه‌ای مثلثی باشد، که $1 \leq i \leq n$ ، $a_i \in \{0, 1\}$. سطر دوم را با

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$$

پر می‌کنیم، به‌طوری‌که اگر $a_k \neq a_{k+1}$ ، آن‌وقت $b_k = 1$ و اگر $a_k = a_{k+1}$ ، آن‌وقت $b_k = 0$.

بقیه سطرها را هم به روش مشابه پر می‌کنیم. بیشترین تعداد ممکن ۱ها را در آرایه به دست آمده تعیین کنید.

راه حل

فرض کنید در آرایه‌ای n سطری، x_n برابر با بیشترین تعداد ممکن ۱ها باشد. می‌توان تحقیق کرد که $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ و $x_3 = 4$.

اکنون x_{n+3} را به x_n ربط می‌دهیم. سه سطر بالای مثلثی $3 + n$ سطری را در نظر بگیرید:

$$a_1, \dots, a_{n+3}; b_1, \dots, b_{n+2}; c_1, \dots, c_{n+1}$$

سنگریزه‌هایتان را آماده کنید.

اگر دست‌کم یکی از a_k ، b_k و c_k صفر بود، یک سنگریزه نظیر این صفر روی ستون k بگذارید. اگر $a_k b_k c_k = 1$ آن وقت $b_{k+1} = a_{k+1} = 0$ ؛ یک سنگریزه نظیر a_{k+1} روی ستون k و یک سنگریزه دیگر نظیر b_{k+1} روی ستون $k+1$ بگذارید. ابتدا فرض کنید $k=1$ و روند بالا را پی‌درپی تکرار کنید، هر بار k را ستون بعدی که بدون سنگریزه است بگیرید. در پایان، روی همه ستونهای ۱ تا $n+3$ سنگریزه است. اگر روی ستون $n+2$ سنگریزه نباشد، هیچ‌یک از سنگریزه‌هایی که گذاشته‌ایم نظیر a_{k+2} ، b_{k+2} یا c_{k+2} نیست، اما چون دست‌کم یکی از این سه عدد صفر است، باید یک سنگریزه دیگر نظیر این ستون قرار دهیم.

چون هر یک از $n+2$ سنگریزه‌ای که گذاشته‌ایم نظیر یک صفر است، در سه سطر بالایی مثلث مورد نظر دست‌کم $n+2$ صفر وجود دارد. در نتیجه، در این سه سطر حداکثر $(4+2n)$ تا ۱ وجود دارد، پس $x_{n+3} \leq x_n + 2n + 4$. اکنون به استقرا می‌توان ثابت کرد که

$$x_n \leq \left\lfloor \frac{n^2 + n + 1}{3} \right\rfloor$$

علاوه بر این، همان‌طور که در الگوی زیر نشان داده‌ایم، این کران دست‌یافتنی است:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & & & & & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 1
 \end{array}$$

عددهای هر سطر در قطعه‌های سه‌تایی تکرار می‌شوند. از سطر پایین به بالا تعداد ۱ها برابر است با ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، ۵، ۶، ...

۳۰. در تخت‌آباد ۱۰ شهر وجود دارد. پرواز میان شهرها در دست دو شرکت هواپیمایی است. میان هر دو شهر دقیقاً یک خط هوایی (در هر دو جهت) وجود دارد. ثابت کنید یکی از این شرکتها می‌تواند دو مسیر دوری برقرار کند که هر دور از تعداد فردی از شهرها می‌گذرد و این دو دور از شهری مشترک نمی‌گذرند.

راه‌حل

فرض کنید هر شهر یک رأس و هر راه هوایی میان دو شهر یالی میان رأسهای متناظر این شهرها باشد. یالهای مربوط به یکی از شرکتهای هواپیمایی را آبی و یالهای مربوط به شرکت دیگر را قرمز می‌کنیم. به این ترتیب گراف کامل ۲-رنگ شده K_{10} را به دست می‌آوریم. به زبان نظریه گراف، باید ثابت کنیم که در گراف کامل ۲-رنگ شده K_{10} دو دور فرد غیرمتقاطع تکرنگ وجود دارد. ابتدا نتیجه‌ای معروف از نظریه گراف را می‌آوریم.

لم ۱. اگر یالهای گراف کامل K_6 را با دو رنگ رنگ کنیم، این گراف مثلثی تکرنگ دارد.

برهان. برای این حکم برهانی ساده وجود دارد که در آن از اصل لانه کبوتری استفاده می‌شود. با این حال، در اینجا برای این حکم برهانی قشنگ می‌آوریم. ثابت می‌کنیم که در حقیقت دو مثلث تکرنگ وجود دارد. فرض کنید v_1, v_2, \dots, v_6 و v_6 رأسهای K_6 باشند. اگر رنگ دوتا از یالها مانند $v_i v_k$ و $v_i v_j$ یکسان باشد، زاویه $v_j v_i v_k$ را تکرنگ می‌نامیم. فرض کنید r_i و b_i به ترتیب تعداد یالهای قرمز و آبی باشند که از v_i خارج می‌شوند. در این صورت، به‌ازای هر i ، $r_i + b_i = 5$ و تعداد زاویه‌های تکرنگ برابر است با

$$\sum_{i=1}^6 \left(\binom{r_i}{2} + \binom{b_i}{2} \right)$$

اما

$$\sum_{i=1}^6 \left(\binom{r_i}{2} + \binom{b_i}{2} \right) \geq \sum_{i=1}^6 \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} \right) = 24$$

از طرف دیگر، در هر مثلث تکرنگ، سه زاویه تکرنگ و در هر مثلث دیگری زاویه تکرنگ وجود دارد. فرض کنید تعداد مثلثهای تکرنگ برابر با m باشد. چون در کل $\binom{6}{3}$ یا ۲۰ مثلث وجود دارد، تعداد زاویه‌های تکرنگ برابر است با

$$3m + (20 - m) = 20 + 2m$$

بنابراین $24 \geq 2m + 20$ و در نتیجه $m \geq 2$ ، همان چیزی که می‌خواستیم. ■

لم ۲. اگر یالهای گراف کامل K_5 را با دو رنگ کنیم و این گراف مثلث تکرنگ نداشته باشد، آن وقت این گراف از دو دور تکرنگ به طول ۵ تشکیل شده است.

برهان. فرض کنید v_1, v_2, \dots, v_5 و v_5 رأسهای K_5 باشند. اگر رنگ سه‌تا از یالهای $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5$ یکسان باشد، مثلی تکرنگ داریم. درحقیقت، می‌توانیم فرض کنیم v_1v_2, v_1v_3 و v_1v_4 قرمزند؛ در این صورت اگر یکی از یالهای v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4 قرمز باشد کار تمام است. در غیر این صورت، $v_2v_3v_4$ مثلی آبی است و باز هم مثلی تکرنگ به دست آورده‌ایم. (به سادگی می‌توان این نحوه استدلال را گسترش داد و ثابت کرد که در گراف ۲-رنگ شده K_6 مثلی تکرنگ وجود دارد.) چون در K_5 مثلث تکرنگ وجود ندارد، از هر رأس دو یال قرمز و دو یال آبی خارج شده است. اگر فقط یالهای قرمز را در نظر بگیریم، زیرگرافی به دست می‌آوریم که پنج رأس دارد و درجه هر رأس ۲ است. بنابراین این زیرگراف یا دور است یا می‌توان آن را به چند دور غیرمتقاطع تجزیه کرد. اما چون فقط پنج رأس وجود دارد، نمی‌توانیم دو دور داشته باشیم. بنابراین دوری قرمز به طول ۵ داریم. دقیقاً به همین روش می‌توانیم ثابت کنیم که دوری آبی به طول ۵ داریم. ■

اکنون آماده‌ایم که حکم اصلی را ثابت کنیم. فرض کنید v_1, v_2, \dots, v_5 رأسهای گراف کامل ۲-رنگ شده K_{10} (با رنگهای قرمز و آبی) باشند. بنابر لم ۱، مثلی تکرنگ در K_{10} وجود دارد. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم این مثلث $v_1v_2v_3$ باشد. باز هم بنابر لم ۱، در زیرگراف $\{v_1, v_2, v_3\} - K_{10}$ مثلی تکرنگ وجود دارد. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم این مثلث $v_4v_5v_6$ باشد. اگر رنگ $v_1v_2v_3$ و $v_4v_5v_6$ یکسان باشد حکم را ثابت کرده‌ایم. اگر چنین نبود، فرض کنید $v_1v_2v_3$ آبی و $v_4v_5v_6$ قرمز باشد. یالهای $v_i v_j, 1 \leq i \leq 3$ و $4 \leq j \leq 6$ را در نظر بگیرید. بنابر اصل لانه کبوتری، رنگ پنج‌تا از این یالها یکسان است؛ بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم رنگ این یالها آبی است. بنابراین برای $4 \leq j \leq 6$ و $1 \leq i \leq 3$ دو تا از یالهای $v_i v_j, v_1 v_j, v_2 v_j, v_3 v_j$ آبی‌اند. بنابراین مثلی آبی و مثلی قرمز داریم که فقط در رأس v_j مشترک‌اند.

برای راحتی کار، نقطه‌ها را طوری از نو شماره‌گذاری می‌کنیم که $v_1v_2v_3$ آبی و $v_4v_5v_6$ قرمز باشد. زیرگراف $\{v_1, v_2, \dots, v_5\} - K_{10}$ را در نظر بگیرید. اگر این زیرگراف مثلی تکرنگ داشته باشد کار تمام است، زیرا می‌توانیم یکی از مثلتهای $v_1v_2v_3$ و $v_4v_5v_6$ را طوری انتخاب کنیم که همرنگ این مثلث جدید باشد. بنابراین یکی از شرکتها می‌تواند دو مسیر دوری هر کدام بین سه‌تا از شهرها برقرار کند که هیچ شهر مشترکی نداشته باشند. در غیر این صورت، بنابر لم ۲،

دوری قرمز به طول ۵ و دوری آبی به طول ۵ داریم. بنابراین هر یک از شرکتها می‌تواند مسیری دوری بین سه تا از شهرها و مسیری دوری بین پنج شهر دیگر برقرار کند.

۳۱. فرض کنید هر یک از عددهای طبیعی را که از $\frac{n(n^2 - 2n + 3)}{2}$, $n \geq 2$, بزرگتر نیستند با یکی از دو رنگ (قرمز و آبی) رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید دنباله‌ای n جمله‌ای و تکرنگ مانند a_1, a_2, \dots, a_n وجود دارد که

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

و

$$a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \dots \leq a_n - a_{n-1}$$

(دورهٔ تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۷)

راه حل

دنباله‌ای مانند a_1, a_2, \dots, a_m را که

$$a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \dots \leq a_n - a_{n-1} \leq m$$

m -دنباله‌ای n -جمله‌ای بنامید. توجه کنید که

$$s_n = \frac{n(n^2 - 2n + 3)}{2} = 3\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$$

ثابت می‌کنیم که اگر عددهای طبیعی را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم، در میان s_n عدد اول، $3\binom{n}{3}$ -دنباله‌ای n -جمله‌ای و تکرنگ وجود دارد. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. اگر $n = 2$ ، درستی حکم معلوم است.

بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که $3\binom{n}{3}$ -دنباله‌ای n -جمله‌ای و قرمز مانند a_1, a_2, \dots, a_n داریم که $a_n \leq s_n$. توجه کنید که

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \left(3\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{1} \right) \\ &\quad - \left(3\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} \right) \\ &= 3\binom{n}{2} + \binom{n}{1} + 1 \end{aligned}$$

$n+1$ عدد

$$a_n + 3\binom{n}{2}, a_n + 3\binom{n}{2} + 1, \dots, a_n + 3\binom{n}{2} + n$$

را در نظر بگیرید و توجه کنید که

$$a_n + 3\binom{n}{2} + n < s_n + 3\binom{n}{2} + \binom{n}{1} + 1 = s_{n+1}$$

اگر این عددها همگی آبی باشند، ۱- دنباله‌ای $(n+1)$ -جمله‌ای و آبی داریم و کار تمام است. در غیر این صورت، یکی از این عددها، مثلاً $k + 3\binom{n}{2} + a$ ، قرمز است. فرض کنید $a_{n+1} = a + 3\binom{n}{2} + k$ در این صورت

$$a_{n+1} - a_n = 3\binom{n}{2} + k = 3\binom{n+1}{2} - 3\binom{n}{1} + k \leq 3\binom{n+1}{2}$$

و باز هم $3\binom{n+1}{2}$ -دنباله‌ای $(n+1)$ -جمله‌ای و قرمز داریم. اثبات استقرایی کامل شده است.

۳۲. مجموعه $\{1, 2, \dots, 3n\}$ را به سه مجموعه A ، B و C که هر کدام n عضو دارد افراز کرده‌ایم. آیا همواره می‌توان از هر یک از این مجموعه‌ها عددی انتخاب کرد که یکی از این عددها مجموع دو عدد دیگر باشد؟

(ک. ج. اسمیت)

راه حل (از و. الکسیف)

برای ساده‌نویسی، سه‌تایی (a, b, c) را خوب می‌نامیم، هرگاه $a \in A$ ، $b \in B$ و $c \in C$ و یکی از عددهای a ، b و c مجموع دو عدد دیگر باشد.

بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $1 \in A$ و اگر k کوچکترین عددی باشد که در A نیست، $k \in B$. با فرض اینکه هیچ سه‌تایی خوبی وجود ندارد، ادعا می‌کنیم که اگر $x \in C$ ، آن وقت $x-1 \in A$. در این صورت به‌سادگی می‌توانیم به تناقض برسیم. درحقیقت، اگر

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

آن وقت A شامل عددهای $1, c_1-1, c_2-1, \dots, c_n-1$ است که همگی از ۱ بزرگترند، زیرا $2 \notin C$ اما $1 \in A$ و در نتیجه A دست‌کم $n+1$ عضو دارد.

اکنون ادعایمان را ثابت می‌کنیم. فرض کنید این ادعا درست نباشد. در این صورت عددی مانند x در C وجود دارد که $x-1 \notin A$. معلوم است که $x-1 \notin B$ زیرا در غیر این صورت سه‌تایی $(1, x-1, x)$ خوب است. اکنون، با استفاده از اینکه $x \in C$ و $x-1 \in C$ ثابت می‌کنیم که

$$x-k \in C, \quad x-k-1 \in C$$

(به‌یاد بیاورید که k کوچکترین عددی است که در A نیست.) درحقیقت، اگر $x-k \in A$ ، آن وقت

سه‌تایی $(x-k, k, x)$ خوب است و اگر $x-k \in B$ ، آن وقت سه‌تایی $(k-1, x-k, x-1)$ خوب است. به‌طور مشابه معلوم می‌شود که اگر $x-k-1 \in A$ و $x-k-1 \in B$ ، به ترتیب سه‌تاییهای $(x-k-1, k, x-1)$ و $(1, x-k-1, x-k)$ خوب‌اند. اگر این روش استدلال را تکرار کنیم، معلوم می‌شود که به‌ازای هر عدد صحیح غیرمنفی مانند i ، عددهای $x-ik$ و $x-ik-1$ ، به شرط اینکه مثبت باشند، در C قرار دارند. اما به‌ازای k ای عددی $x-ik$ باید یکی از عددهای $1, 2, \dots, k$ باشد. پس این عدد باید یکی از عضوهای A یا B باشد، که تناقض است. بنابراین $x-1 \in A$ و اثباتمان کامل شده است.

۳۳. فرض کنید هر یک از ۳۰ نفر دانش‌آموز کلاسی فقط به یکی از واریانتهای شطرنج و فقط به یکی از نابرابریهای کلاسیک علاقه دارد. هر یک از این دانش‌آموزان این اطلاعات را روی یک برگه نظرخواهی می‌نویسد. در میان پاسخهای روی برگه نظرخواهی دقیقاً ۲۰ واریانت مختلف شطرنج و دقیقاً ۱۰ نابرابری کلاسیک متفاوت وجود دارد. فرض کنید n برابر با تعداد دانش‌آموزانی مانند M باشد که تعداد دانش‌آموزانی که نابرابری موردعلاقه M را نوشته‌اند از تعداد دانش‌آموزانی که واریانت موردعلاقه M را نوشته‌اند بیشتر است. ثابت کنید $n \geq 11$.

(دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۲۰۰۲)

راه‌حل

فرض کنید c_1, c_2, \dots, c_{20} واریانتهای مختلف شطرنج و e_1, e_2, \dots, e_{10} نابرابریهای کلاسیک مختلف باشند. فرض کنید S_i ، $1 \leq i \leq 20$ ، مجموعه همه دانش‌آموزانی باشد که واریانت موردعلاقه‌شان c_i است و T_j ، $1 \leq j \leq 10$ ، مجموعه همه دانش‌آموزانی باشد که نابرابری موردعلاقه‌شان e_j است.

به هر دانش‌آموز مانند M زوجی از عددها مانند (x_M, y_M) به شکل زیر نسبت می‌دهیم: اگر $M \in S_i$ ، آن وقت $x_M = \frac{1}{|S_i|}$ و اگر $M \in T_j$ ، آن وقت $y_M = \frac{1}{|T_j|}$. این عددها را مختصات M می‌نامیم. به دنبال دانش‌آموزانی مانند M می‌گردیم که $x_M > y_M$. مجموع مختصات x همه دانش‌آموزان برابر با ۲۰ و مجموع مختصات y همه دانش‌آموزان برابر با ۱۰ است. بنابراین

$$\sum_M (x_M - y_M) = 10$$

توجه کنید که به‌ازای هر M ، $x_M - y_M < x_M \leq 1$. بنابراین، دست‌کم ۱۱ جمله مثبت در مجموع سمت چپ تساوی بالا وجود دارد، یعنی دست‌کم ۱۱ دانش‌آموز مانند M وجود دارند که $x_M > y_M$ ، و این همان چیزی است که می‌خواهیم ثابت کنیم.

۳۴. با شروع از سه تایی (a, b, c) از عددهای صحیح نامنفی، هر حرکت یعنی انتخاب دوتا از این عددها، مانند x و y و جایگزین کردن یکی از آنها با $x + y$ یا $|x - y|$. مثلاً می‌توان با یک حرکت از $(3, 5, 7)$ به $(3, 5, 4)$ رفت. ثابت کنید عددی ثابت و مثبت مانند r وجود دارد که اگر a, b, c و n عددهایی طبیعی باشند و $a, b, c < 2^n$ ، دنباله‌ای از حداکثر rn حرکت وجود دارد که (a, b, c) را به (a', b', c') تبدیل می‌کنند که در آن $a'b'c' = 0$.

(بیورن پونن، مسأله پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

راه حل

با استفاده از استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم که اگر $r = 12$ ، حکم درست است. درگام اول، وقتی که $k = 1$ ، درستی حکم معلوم است. درگام استقرایی، بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $a \leq b \leq c$. در دو حرکت، اگر لازم بود، می‌توانیم a را با $c - a$ و b را با $c - b$ عوض کنیم و در عوض فرض کنیم $a \leq b \leq \frac{c}{2}$. فرض کنید m عددی طبیعی باشد که $2^{m-1} \leq b < 2^m$. چون

$$1 \leq b \leq \frac{c}{2} < 2^{n-1}$$

پس $1 \leq m \leq n - 1$. فرض کنید $x_1 = b$ ، $x_0 = a$ و اگر $k \geq 2$ ،

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$$

لم. هر عدد طبیعی مانند y را که $y \geq b$ می‌توان به شکل

$$\varepsilon + x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_l}$$

نوشت، که در آن $0 \leq \varepsilon < b$ و $i_1 < i_2 < \dots < i_l$ و $x_{i_l} < y < x_{i_l+1}$.

برهان. چون دنباله $(x_i)_{i \geq 0}$ صعودی است، پس عددی طبیعی و یکتا مانند i وجود دارد که $x_i < y < x_{i+1}$. از استقرای قوی روی i استفاده می‌کنیم. اگر $y - x_i < b$ ، فرض می‌کنیم $\varepsilon = y - x_i$ و کار تمام است. در غیر این صورت

$$x_1 = b \leq y - x_i < x_{j+1} - x_i = x_{i-1}$$

بنابراین عددی طبیعی و یکتا مانند j وجود دارد که $x_i < y - x_i < x_{j+1}$ و $j < i$. پس می‌توانیم از فرض استقرا در مورد $y - x_i$ استفاده کنیم تا کار تمام شود. ■

فرض کنید

$$c = \varepsilon + x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_l}$$

که در آن $b < \varepsilon \leq 0$ و $i_1 < i_2 < \dots < i_l$ چون به ازای $k \geq 1$

$$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k = 2x_k + x_{k-1} > 2x_k$$

پس

$$x_{2n-2m+3} \geq 2^{n-m+1} x_1 \geq 2^{n-m+1} \times 2^{m-1} = 2^n > c$$

در نتیجه

$$i_1 < i_2 < \dots < i_l < 2n - 2m + 3$$

با $2n - 2m + 1$ حرکت دیگر می‌توانیم (a, b, c) را، که برابر است با (x_0, x_1, c) ، به (x_2, x_1, c) تبدیل کنیم، سپس به (x_2, x_3, c) تبدیل کنیم، و همین‌طور کار را ادامه دهیم تا به سه‌تایی $(x_{2n-2m+2}, x_{2n-2m+1}, c)$ برسیم. به این ترتیب، حداکثر پس از $2n - 2m + 2$ حرکت می‌توانیم x_i را که در نمایش c وجود دارد و آن را در مختصات اول و دوم تولید کرده‌ایم، از c کم کنیم. بنابراین، در نهایت می‌توانیم c را تبدیل به ε کنیم. اکنون می‌توانیم $1 + 2n - 2m$ حرکت تفریقی انجام دهیم و سه‌تایی $(x_{2n-2m+2}, x_{2n-2m+1}, \varepsilon)$ را به سه‌تایی $(x_{2n-2m}, x_{2n-2m+1}, \varepsilon)$ برگردانیم، و این کار را ادامه دهیم، عملیات قبلی را درباره مختصات اول و دوم انجام ندهیم، تا در آخر به سه‌تایی (a, b, ε) برسیم.

برای رسیدن به (a, b, ε) حداکثر به

$$2 + (2n - 2m + 1) + (2n - 2m + 2) + (2n - 2m + 1)$$

حرکت احتیاج داریم، که برابر است با $6n - 6m + 6$ حرکت. سپس، چون $a, b, \varepsilon < 2^m$ بنا بر فرض استقرای می‌توانیم (a, b, ε) را در حداکثر $12m$ حرکت دیگر به سه‌تایی‌ای تبدیل کنیم که یکی از مختصاتش صفر است. بنابراین، تعداد حرکت‌هایی که لازم داریم حداکثر برابر است با $12m + (6n - 6m + 6)$ ، که چون $m \leq n - 1$

$$(6n - 6m + 6) + 12m = 6n + 6m + 6 < 12n$$

۳۵. آرایه‌ای مستطیلی از عددها مفروض است. مجموع عددهای هر سطر و مجموع عددهای هر ستون عددی صحیح است. ثابت کنید هر عدد غیر صحیح در این آرایه مانند x را می‌توان با $[x]$ یا $[x]$ طوری عوض کرد که مجموع هیچ سطری و مجموع هیچ ستونی تغییر نکند.

(مسأله پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۸)

راه حل

ابتدا هر عدد در آرایه مفروض را با جزء صحیح آن عوض می‌کنیم و اگر عددی تغییر کرد آن را با «-» علامت می‌گذاریم (در نتیجه، اگر عددی صحیح باشد، هیچ علامتی ندارد). سپس، ستون به ستون، مجموع ستونها را با زدن کردن به بالای برخی عددها، که به دلخواه انتخاب می‌شوند، به مقدار

قبلی برمی گردانیم و این عددهای به بالا رُند شده را با «+» علامت می گذاریم.

بعد مجموع سطرها را بدون دست زدن به مجموع ستونها به مقدار قبلی برمی گردانیم. مجموع قدرمطلقهای تغییرات مجموع ستونها را s بنامید. این عدد لزوماً زوج است (زیرا مجموع همه عددها ثابت مانده است) و می خواهیم صفر باشد. اگر $s > 0$ ، هر بار آن را دو تا کم می کنیم.

سطر S را از سطر R دست یافتنی می نامیم، هرگاه ستونی مانند C وجود داشته باشد که $R \cap C$ با «+» و $S \cap C$ با «-» علامت خورده باشد. می توانیم فرض کنیم مجموع سطر اول بزرگتر شده است. در این صورت، این سطر شامل «+» است. چون مجموع ستونها را به مقدار قبلی آنها برگردانده ایم، در ستونی که شامل این «+» هست «-» هم هست (در غیر این صورت همه علامتها «+» اند و مجموع ستون بزرگتر می شود). می توانیم فرض کنیم که سطر دوم از سطر اول دست یافتنی است. اگر مجموع این سطر کوچکتر شده بود، در ستونی که راه دسترسی این دو سطر است نحوه رُند کردن «+» و «-» را عوض می کنیم. با این کار مقدار s دو تا کم می شود. اگر مجموع سطر دوم کوچکتر نشده بود، باید شامل «+» باشد و سطر و وجود دارد که از این سطر دست یافتنی است. اگر در نهایت به ستونی رسیدیم که مجموعش کوچکتر شده بود، دنباله ای از تغییرها در ستونهایی که راههای دسترسی اند مقدار s را دو تا کم می کند. ادعا می کنیم که چنین چیزی اتفاق می افتد.

اجتماع همه ستونهایی که مستقیم و غیرمستقیم از سطر اول دست یافتنی هستند و خود این سطر را A بنامید. اجتماع بقیه سطرها را B بنامید. فرض کنید C یکی از ستونها باشد. اگر $A \cap C$ شامل هیچ «+» ای نباشد، مجموع عددهایش از مقدار اولیه اش بیشتر نشده است. اگر $A \cap C$ شامل دست کم یک «+» باشد، آن وقت $B \cap C$ شامل هیچ «-» ای نیست، زیرا در غیر این صورت سطر B از سطر اول دست یافتنی است و باید متعلق به A باشد. بنابراین مجموع عددهای $B \cap C$ کمتر نمی شود و در نتیجه مجموع عددهای $A \cap C$ در این حالت هم بیشتر نمی شود. چون C دلخواه بود، نتیجه می گیریم که مجموع عددهای A بیشتر نمی شود. چون مجموع سطر اول بزرگتر شده است، مجموع عددهای سطر A باید کوچکتر باشد، که ادعایمان را ثابت می کند.

۳۶. مجموعه ای متناهی از عددهای طبیعی (متمايز) را باوفا می نامیم، هرگاه هر یک از عضوهای مجموع همه عضوهای مجموعه را بشمارد. ثابت کنید هر مجموعه متناهی از عددهای طبیعی زیرمجموعه مجموعه باوفاست.

(مسأله پیشنهادی به المپیاد بین المللی ریاضی، ۱۹۹۷)

راه حل اول

از استقرا روی تعداد عضوهای مجموعه مان که مجموع عضوهای این مجموعه را نمی شمارد استفاده

می‌کنیم. اگر هیچ عضوی این ویژگی را نداشته باشد، معلوم است که این مجموعه باوفاست.

فرض کنید ΣS مجموع عضوهای مجموعه S باشد و s عضوی از S باشد که $s \nmid \Sigma S$. فرض کنید $s = 2^k m$ ، که در آن $m \nmid 2$.

۱. گام اول. عددهای

$$\Sigma S, 2\Sigma S, 4\Sigma S, \dots, 2^{k-1}\Sigma S$$

را به S اضافه کنید. مجموع عضوهای مجموعه جدید، که آن را T می‌نامیم، برابر است با $\Sigma T = 2^k \Sigma S$. بنابراین هر یک از عضوهای جدید ΣT را می‌شمارد، همین‌طور همه عضوهای قدیمی، زیرا ΣS را می‌شمارند. همچنین، توجه کنید که عضوهای T متمایزند.

۲. گام دوم. اگر $m = 1$ ، این گام را حذف می‌کنیم. در غیر این صورت، توجه کنید که بنابر تعمیم اویلر از قضیه کوچک فرما،

$$2^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \quad (\text{به پیمانه } m)$$

فرض کنید $r = \varphi(m)$. اکنون عددهای

$$2\Sigma T, 4\Sigma T, \dots, 2^{r-1}\Sigma T$$

و نیز عددهای

$$(2^r - 1)\Sigma T, 2(2^r - 1)\Sigma T, 4(2^r - 1)\Sigma T, \dots, 2^{r-2}(2^r - 1)\Sigma T$$

را به T اضافه کنید. مجموع عضوهای مجموعه جدید، که آن را U می‌نامیم، برابر است با

$$\Sigma U = 2^{r-1}(2^r - 1)\Sigma T$$

بنابراین همه عضوهایی که اضافه کرده‌ایم ΣU را می‌شمارند، همین‌طور همه عضوهای T ، زیرا ΣT را می‌شمارند. علاوه بر این، $M \mid \Sigma U$. پس از برداشتن این دوگام، $s \mid \Sigma U$. علاوه بر این، همه عضوهایی که از ابتدا ΣS را می‌شمردند، اکنون هم ΣU را می‌شمارند و همه عضوهایی که اضافه کردیم هم ΣU را می‌شمارند. بنابراین اگر n عضو S وجود داشته باشند که ΣS را نمی‌شمارند، اکنون حداکثر $n - 1$ عضو T هستند که ΣT را نمی‌شمارند.

بنابراین، اگر بتوانیم مجموعه‌ای باوفا تشکیل بدهیم که عضوهای زیرمجموعه‌ای n عضوی از آن مجموع عضوها را نشمارند، می‌توانیم مجموعه‌ای باوفا تشکیل بدهیم که عضوهای زیرمجموعه‌ای $n + 1$ عضوی از آن مجموع عضوها را نشمارند. بنابر استقرا، کار تمام شده است.

راه حل دوم (از یو-رولو)

به ازای هر عدد طبیعی مانند n ، $n \geq 2$ ، مجموعه‌ای باوفا معرفی می‌کنیم که شامل عددهای $1, 2, \dots, n$ است. در این صورت، چون به ازای هر مجموعه متناهی از عددهای طبیعی مانند S

می‌توانیم عدد طبیعی n را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که

$$S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$$

پس حکم را هم ثابت کرده‌ایم. ابتدا در مجموعه‌ای که به دنبالش هستیم عددهای $1, 2, \dots$ و $\frac{n(n+1)}{2}$ را قرار می‌دهیم. پس تا اینجا مجموع عضوها برابر است با $n(n+1)$. اکنون عددهای

$$(n-j)(n-j+2)(n-j+3) \cdots (n)(n+1), \quad j = 2, 3, \dots, n-1$$

را اضافه می‌کنیم. بنابراین مجموع کل عددها برابر است با

$$\begin{aligned} n(n+1) + \sum_{j=2}^{n-1} (n-j)(n-j+2) \cdots (n+1) \\ = n(n+1) + \sum_{j=2}^{n-1} ((n-j+1)(n-j+2) \cdots (n+1) \\ - (n-j+2)(n-j+3) \cdots (n+1)) \\ = n(n+1) + (n+1)! - n(n+1) \\ = (n+1)! \end{aligned}$$

معلوم است که عضوهای مجموعه‌ای که ساخته‌ایم متمایزند و $(n+1)!$ را می‌شمارند، پس راه‌حل کامل شده است.

۳۷. دوازده نوازنده به نامهای M_1, M_2, \dots, M_{12} در یک جشنواره یک هفته‌ای موسیقی گرد هم آمده‌اند. برای هر روز، یک کنسرت پیش‌بینی شده است که در آن برخی نوازندگان برنامه اجرا می‌کنند و بقیه در میان شنوندگان می‌نشینند. به ازای $i = 1, 2, \dots, 12$ ، فرض کنید t_i تعداد کنسرت‌هایی باشد که در آن نوازنده M_i برنامه اجرا می‌کند و فرض کنید $t_{12} + t_{11} + \dots + t_2 + t_1 = t$. کمترین مقدار t را پیدا کنید که هر نوازنده بتواند، به عنوان شنونده، به برنامه بقیه نوازندگان گوش بدهد. (چنگ‌زنگ لی، چین، ۱۹۹۴)

راه‌حل

شرط‌های مسأله را می‌توان چنین بیان کرد:

اگر نوازنده‌ای در یک روز برنامه نداشت، در میان شنوندگان به کنسرت گوش می‌دهد. اگر نوازنده‌ای در یک روز برنامه داشت، نمی‌تواند به برنامه بقیه نوازندگان در این روز گوش بدهد. هر نوازنده باید دست‌کم باید به یک برنامه هر یک دیگر از نوازندگان گوش بدهد (*).

نکته‌اول. برای برقراری شرط (*)، هر سه نفر از نوازندگان باید در دست‌کم سه کنسرت برنامه اجرا

کنند. در حقیقت، اگر سه نفر از نوازندگان در دو کنسرت برنامه اجرا کنند، بنابر اصل لانه کیوتری، دوتا از آنها در یک کنسرت برنامه اجرا می‌کنند. پس نمی‌توانند در این روز به برنامه هم گوش بدهند. یعنی اینکه این دو باید به برنامه هم در کنسرت دیگر گوش بدهند، که ممکن نیست.

نکته دوم. برای برقراری شرط (*)، هر هفت نفر از نوازندگان یا هر تعداد بیشتری از آنها باید در دست کم چهار کنسرت برنامه اجرا کنند. در حقیقت، اگر هفت نفر از نوازندگان در سه کنسرت برنامه اجرا کنند، بنابر اصل لانه کیوتری، دست کم سه تا از آنها در یک کنسرت برنامه اجرا می‌کنند، در نتیجه نمی‌توانند برنامه هم را در این کنسرت گوش کنند. بنابراین باید به برنامه‌های هم در دو کنسرت دیگر گوش بدهند که بنابر آنچه در نکته اول گفتیم ممکن نیست.

نکته سوم. برای برقراری شرط (*)، هر نه نفر از نوازندگان باید در دست کم پنج کنسرت برنامه اجرا کنند. در حقیقت، اگر نه نفر از نوازندگان فقط در چهار کنسرت برنامه اجرا کنند، هر یک از آنها در حداکثر سه کنسرت می‌تواند برنامه اجرا کند، زیرا در غیر این صورت نمی‌تواند به برنامه هشت نوازنده دیگر گوش بدهد. توجه کنید که اگر یکی از این نه نفر فقط در یک کنسرت برنامه اجرا کند، هشت نوازنده دیگر باید به این کنسرت گوش بدهند. در این صورت این هشت نوازنده باید در سه کنسرت به برنامه‌های هم گوش بدهند، که بنابر آنچه در نکته دوم گفتیم ممکن نیست. همچنین، توجه کنید که اگر یکی از این نه نفر در سه کنسرت برنامه اجرا کند، فقط می‌تواند در کنسرت چهارم شنونده باشد؛ پس هشت نوازنده دیگر همگی باید در این کنسرت برنامه اجرا کنند. باز هم به وضعیتی رسیده‌ایم که هشت نوازنده دیگر باید در سه کنسرت به برنامه‌های هم گوش بدهند، که بنابر آنچه در نکته دوم گفتیم ممکن نیست. بنابراین هر یک از این نه نوازنده در دو کنسرت برنامه اجرا می‌کند. (۴) یا ۶ راه برای انتخاب دو کنسرت برای اجرای برنامه وجود دارد. بنابر اصل لانه کیوتری، دو نفر از نوازندگان وجود دارند که روز اجرای برنامه‌شان یکی است، در نتیجه نمی‌توانند به برنامه‌های هم گوش بدهند، که این هم با شرط (*) تناقض دارد.

فرض می‌کنیم k نوازنده وجود دارند که هر یک از آنها فقط در یک کنسرت برنامه اجرا می‌کند. این k نوازنده باید در کنسرتهای مختلفی برنامه اجرا کنند، زیرا در غیر این صورت نمی‌توانند به برنامه‌های یکدیگر گوش بدهند. بنابراین $0 \leq k \leq 7$. توجه کنید که این k کنسرت همگی به شکل تکنوازی‌اند. هر یک از $12 - k$ نوازنده باقی‌مانده در دست کم دو کنسرت برنامه اجرا می‌کند و باید در $7 - k$ کنسرت دیگر به برنامه‌های یکدیگر گوش بدهند. به سادگی معلوم می‌شود که اگر $k = 7$ یا $k = 6$ ، چنین چیزی ممکن نیست؛ اگر $k = 5$ ، هفت نوازنده باید به برنامه‌های یکدیگر در دو کنسرت گوش بدهند، که بنابر آنچه در نکته دوم گفتیم ممکن نیست؛ اگر $k = 4$ ، هشت نوازنده باید به برنامه‌های یکدیگر در سه کنسرت گوش بدهند، که بنابر آنچه در نکته دوم گفتیم ممکن نیست؛ اگر $k = 3$ ، نه نوازنده باید به برنامه‌های یکدیگر در چهار کنسرت گوش بدهند، که بنابر آنچه در

نکته سوم گفتیم ممکن نیست. بنابراین $k \leq 2$ و در نتیجه

$$t \geq k + 2(12 - k) \geq 22$$

سرانجام، مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد واقعاً ممکن است $t = 22$. فرض کنید نوازندگان M_1 و M_2 در روزهای اول و دوم تکنوازی کنند. هر یک از دیگر نوازندگان دو برنامه اجرا می‌کند. ۵ روز دیگر باقی مانده است و $(\frac{5}{2})$ یا 10 راه برای انتخاب دو روز برای اجرای برنامه وجود دارد. بنابراین می‌توانیم برنامه هر یک از این نوازندگان را در زوجهای مختلفی قرار دهیم.

۳۸. آرایه‌ای $m \times n$ را با عددهای $1, 2, \dots, n$ که از هر کدام m بار استفاده کرده‌ایم، پر کرده‌ایم. ثابت کنید همواره می‌توان جای عددهای ستونها را طوری عوض کرد که هر یک از عددهای $1, 2, \dots, n$ در هر سطر دقیقاً یک بار بیاید.

(ریچارد استونگ، مسأله پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

راه حل

کافی است ثابت کنیم می‌توانیم جای عددهای ستونها را طوری عوض کنیم که هر یک از عددهای $1, 2, \dots, n$ در سطر بالایی دقیقاً یک بار بیاید؛ در این صورت حکم به استقرا روی تعداد سطرها به دست می‌آید. برای اثبات مطلبی که در ابتدا گفتیم از لم ازدواج استفاده می‌کنیم. پسرها را ستونها و دخترها را عددهای $1, 2, \dots, n$ بگیرید. فرض کنید پسری (ستونی) دختری (عددی) را می‌خواهد، هرگاه این عدد در این ستون آمده باشد. در هر مجموعه از k ستون، کلاً km عدد وجود دارد. بنابراین دستکم k عدد مختلف میان این عددها وجود دارد. بنابراین، راهی برای ازدواج ستونها و عددهایی که در این ستونها قرار دارند وجود دارد. اگر این عددها را به بالای ستون نظیرشان منتقل کنیم، آن وقت سطر اول شامل همه این عددهاست.

۳۹. فرض کنید $U = \{1, 2, \dots, n\}$ ، که در آن $n \geq 3$. می‌گوییم زیرمجموعه‌ای از U مانند S با آرایشی از عضوهای U شکافته می‌شود، هرگاه در این آرایش عضوی که در S نیست جایی بین دو عضو S آمده باشد. مثلاً $\{1, 2, 3\}$ ، $\{1, 3, 5, 4, 2\}$ می‌شکافد، اما $\{3, 4, 5\}$ را نمی‌شکافد. ثابت کنید به ازای هر $n - 2$ زیرمجموعه U ، که دستکم ۲ عضو و حداکثر $n - 1$ عضو دارند، آرایشی از عضوهای U وجود دارد که همه اینها را می‌شکافد.

(مسأله پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۸)

راه حل

از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. به ازای $n = 3$ ، خانواده موردنظر از تک زیرمجموعه ۲ عضوی $\{i, j\}$ تشکیل شده است، که جایگشت (i, k, j) ، که در آن k عضو سوم U است، آن را می‌شکافد.

اکنون فرض کنید که حکم به‌ازای عددی طبیعی مانند n , $n \geq 3$, درست باشد و

$$U = \{1, 2, \dots, n+1\}$$

خانواده‌ای مانند \mathcal{F} از $n-1$ زیرمجموعه داریم که هرکدام دست‌کم ۲ عضو و حداکثر n عضو دارد. لم. عضوی از U وجود دارد که عضو همهٔ زیرمجموعه‌های n عضوی در \mathcal{F} است، اما عضو حداکثر یکی از زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن است.

برهان. فرض کنید خانوادهٔ \mathcal{F} از k زیرمجموعهٔ ۲ عضوی و l زیرمجموعهٔ n عضوی تشکیل شده باشد. در این صورت $k + l \leq n - 1$. حداکثر k عضو U ممکن است دو بار یا بیشتر در زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آمده باشند. بنابراین، تعداد عضوهایی که حداکثر یک بار در این زیرمجموعه‌ها آمده‌اند دست‌کم برابر است با $(n+1) - k$ و

$$(n+1) - k \geq (n+1) - (n-1-l) = l+2$$

چون فقط l عضو وجود دارند که عضو هیچ‌یک از l زیرمجموعهٔ n عضوی نیستند، یکی از این $l+2$ عضو ویژگی موردنظر را دارد. ■

اکنون حکم اصلی را ثابت می‌کنیم. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم عدد $n+1$ عضوی از U است که ویژگی گفته شده در لم را دارد. اگر این عضو را حذف کنیم، همهٔ زیرمجموعه‌های n عضوی در \mathcal{F} ، زیرمجموعه‌هایی $n-1$ عضوی از $\{1, 2, \dots, n\}$ می‌شوند، اما حداکثر یکی از زیرمجموعه‌های ۲ عضوی در \mathcal{F} تک‌عضوی می‌شود.

اگر زیرمجموعه‌ای این‌چنینی مانند $\{i\}$ داشته باشیم، از فرض استقرا نتیجه می‌شود که جایگشتی از $\{1, 2, \dots, n\}$ مانند π وجود دارد که تمامی $n-2$ زیرمجموعهٔ دیگر را (که $n+1$ را از آنها حذف کرده‌ایم) می‌شکافد. اگر $n+1$ را جایی بعد از i به π اضافه کنیم، جایگشتی به‌دست می‌آوریم که تمامی $n-1$ زیرمجموعهٔ در \mathcal{F} را می‌شکافد. (توجه کنید که تمامی زیرمجموعه‌های دیگری که شامل $n+1$ هستند و پیش از اضافه کردن $n+1$ شکافته شده‌اند، شکافته شده باقی می‌مانند.)

اگر چنین زیرمجموعهٔ تک‌عضوی‌ای نداشته باشیم، از میان $n-1$ زیرمجموعه زیرمجموعه‌ای مانند S انتخاب کنید. بنابر اصل لانه کبوتری، جایگشتی از $\{1, 2, \dots, n\}$ مانند π وجود دارد که تمامی $n-2$ زیرمجموعهٔ دیگر را می‌شکافد. اگر $n+1 \notin S$ ، با اضافه کردن $n+1$ به π ، جایی بین دو عضو S ، جایگشتی به‌دست می‌آوریم که تمامی $n-1$ زیرمجموعهٔ در \mathcal{F} را می‌شکافد. در غیر این صورت، اگر $n+1 \in S$ ، اگر π را نمی‌شکافت، $n+1$ را به ابتدا یا انتهای π اضافه می‌کنیم تا S را بشکافد. استقرا کامل شده است.

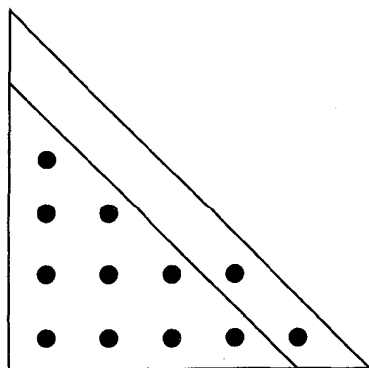
یادداشت

اگر \mathcal{F} از $n-1$ زیرمجموعه تشکیل شده باشد که هر کدام دستکم ۳ عضو و حداکثر $n-2$ عضو دارد، می‌توانیم از روشی ساده‌تر استفاده کنیم. به‌ازای هر زیرمجموعه k عضوی از U مانند S ، $k!(n-k+1)!$ جایگشت از U وجود دارد که S را نمی‌شکافند؛ $k!$ جایگشت از عضوهای S و $(n-k+1)!$ جایگشت از $n-k$ عضوی که در S نیستند و یک قطعهٔ بزرگ از عضوهای S وجود دارد. بیشترین مقدار $k!(n-k+1)!$ ، که در آن $3 \leq k \leq n-2$ ، برابر است با $3!(n-2)!$. بنابراین تعداد جایگشتهایی که زیرمجموعه‌ای در \mathcal{F} را نمی‌شکافند حداکثر برابر با $3!(n-2)!$ است، که از $n!$ تعداد کل جایگشتها، کمتر است. پس جایگشتی وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های در \mathcal{F} را می‌شکافد.

۴۰. n سنگریزه را در ستونی عمودی روی هم چیده‌ایم. این ترکیب را می‌توان با قاعده‌های زیر تغییر داد. اگر سنگریزه‌ای روی ستونی باشد که دستکم دو سنگریزه بیشتر از ستون سمت راستش داشته باشد، می‌توان آن را حرکت داد. (اگر سنگریزه‌ای در سمت راست نبود، این وضعیت را ستونی با ۰ سنگریزه در نظر بگیرید.) در هر مرحله، از میان سنگریزه‌هایی که می‌توان آنها را حرکت داد (اگر چنین سنگریزه‌هایی وجود داشتند)، سنگریزه‌ای را انتخاب کنید و آن را روی ستون سمت راستش قرار دهید. اگر هیچ سنگریزه‌ای را نتوان حرکت داد، این ترکیب را ترکیب نهایی می‌نامیم. ثابت کنید، به‌ازای هر n ، صرف‌نظر از اینکه در هر مرحله کدام سنگریزه را انتخاب کنیم، ترکیب نهایی‌ای که به‌دست می‌آید یکتاست. این ترکیب را برحسب n توصیف کنید.

(لیگ ریاضی ایالت نیویورک، ۲۰۰۱،

مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۱)



ترکیب نهایی به‌ازای $n = 12$

راه حل اول

در هر مرحله، فرض کنید p_i ، $i \leq 1$ ، تعداد سنگریزه‌ها در ستون i ام باشد و ستون اول ستونی باشد که سمت چپ بقیه ستونهاست. ثابت می‌کنیم که در ترکیب نهایی، به ازای هر i که $p_i > 0$ ، $p_i = p_{i+1} + 1$ ، بجز حداکثر یک i^* که $p_{i^*} = p_{i^*+1}$. بنابراین، ترکیب نهایی مانند شکل صفحه قبل است، که در آن c ستون غیر خالی وجود دارد و از ۱ تا c سنگریزه در آخرین سطر قطری در آرایش مثلی وجود دارد. فرض کنید t_k ، k امین عدد مثلی باشد، یعنی

$$t_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

در این صورت، c عدد صحیح یکتایی است که $t_{c-1} < n \leq t_c$. فرض کنید $s = n - t_c - 1$. در این صورت در آخرین ستون سمت راست s سنگریزه وجود دارد و در نتیجه دو ستونی که ارتفاعشان برابر است، ستونهای $c - s$ و $c - s + 1$ هستند (مگر وقتی که $s = c$ ، که در این حالت هیچ دو ستون غیر خالی‌ای ارتفاعشان برابر نیست). به بیان دیگر،

$$p_i = \begin{cases} c - i & i \leq c - s \\ c - i + 1 & i > c - s \end{cases}$$

برای اثبات این مطلب، ثابت می‌کنیم که

الف) در هر مرحله،

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots$$

ب) در هیچ مرحله‌ای، i و j ای وجود ندارند که $i > j$ و

$$p_i = p_{i+1}, \quad p_j = p_{j+1} > 0, \quad p_{i+1} - p_j \leq j - i + 1$$

(یعنی میانگین کاهش ارتفاع هر ستون از ستون $i + 1$ تا ستون j برابر با ۱ یا کمتر است).

ج) در ترکیب نهایی، یا $p_i - p_{i+1} = 0$ یا $p_i - p_{i+1} = 1$ و حداکثر یک i وجود دارد که $p_i > 0$ و $p_i - p_{i+1} = 0$.

در اثبات حکمهای (الف) تا (ج) از اصطلاحات زیر استفاده می‌کنیم.

k -سوئیچ، حرکت یک سنگریزه از ستون k به ستون $k + 1$ است و آفت ستون i ، $p_i - p_{i+1}$ است.

برای اثبات (الف)، فرض کنید که دنباله‌ای از حرکت‌های درست برای اولین بار مثلاً در مرحله j ام منجر به این شود که $p_i < p_{i+1}$. در این صورت حرکتی که به این مرحله ختم شده است باید

ز-سوئیچ باشد، و این هم با این شرط که برای سوئیچ کردن، ستون i باید دستکم دوتا سنگریزه بیشتر از ستون $1 + i$ داشته باشد تناقض دارد.

برای اثبات (ب)، اگر چنین ترکیبی دست‌یافتنی باشد، در میان همه چنین ترکیب‌هایی، یکی باید کمترین مقدار $i - z$ را داشته باشد، و اکنون ثابت می‌کنیم که این کمترین مقدار وجود ندارد. فرض کنید

$$p_1, p_2, \dots$$

ترکیبی باشد که در آن $i - z$ کمترین مقدار ممکن است. در این صورت، $1 + i \neq z$ ؛ ستونهای i ، $1 + i$ و $2 + i$ درست پیش از حرکتی که ارتفاعها را برابر می‌کند چه وضعیتی دارند؟ حرکت موردنظر باید k -سوئیچ باشد که $2 + i \leq k \leq i - 1$ ، اما در این صورت ترکیب پیش از سوئیچ کردن ممکن نیست (نزولی نیست).

اکنون فرض کنید $1 + i > z$. در این دنباله، اولین ترکیب مانند C را در نظر بگیرید که در آن ستونهای i ، $1 + i$ ، z و $1 + z$ به ارتفاع نهایی خود می‌رسند. توجه کنید که از $1 + i$ به p_z ستونها در C هر باریکی کوتاهتر می‌شوند، زیرا اگر در جایی افتی برابر با 2 یا بیشتر وجود داشته باشد، برای اینکه به میانگین 1 یا کمتر برسیم باید در این فاصله افتی برابر با 0 داشته باشیم و در نتیجه $i - z$ کمترین مقدار ممکن نیست. حرکتی که به C ختم می‌شود یا $i - z$ -سوئیچ است یا z -سوئیچ. اگر این حرکت $i - z$ -سوئیچ باشد، در مرحله قبل ارتفاع ستونهای $1 + i$ و $2 + i$ برابر است، که با اینکه $i - z$ کمترین مقدار ممکن است تناقض دارد. اگر این حرکت z -سوئیچ باشد باز هم به روش مشابه به تناقض می‌رسیم.

سرانجام، برای اثبات (ج) اگر افتی برابر با 2 یا بیشتر باشد، ترکیب موردنظر نهایی نیست. با این همه، اگر همه افتها 0 یا 1 باشند و دو افت برابر با 0 بین ستونهای غیرخالی (مثلاً بین i و $1 + i$ و بین z و $1 + z$) داشته باشیم، آنوقت (ب) نقض می‌شود. بنابراین ترکیب نهایی‌ای که در (ب) صدق می‌کند در (ج) نیز صدق می‌کند. اکنون به سادگی معلوم می‌شود که تنها ترکیب نهایی ممکن همان است که قبلاً گفتیم.

راه حل دوم

در هر مرحله، فرض کنید c آخرین ستون غیرخالی سمت راست باشد. در حکمهای (الف) تا (ج) در راه حل قبل، (ب) را با (ب*) عوض کنید، که

(ب*) در همه ترکیب‌هایی که از ترکیب اولیه دست‌یافتنی هستند،

$$p_i - p_j \geq j - i - 1, \quad i < j \leq c + 1 \quad (*)$$

(شرط $1 + c \leq z$ ، که پیچیدگی‌هایی را ایجاد می‌کند، برای اینکه (*) درست باشد لازم است.)

حکم (ج)، و در نتیجه راه حل مسأله، به همان سادگی از (ب*) نتیجه می‌شود که از (ب). (ب*) را به‌روش زیر به استقرا ثابت می‌کنیم.

معلوم است که در ترکیب اولیه نابرابری (*) درست است: چون $c = 1$ ، فقط یک حالت وجود دارد، یعنی

$$p_1 - p_2 = n > 2 - 1 - 1$$

اکنون فرض کنید ترکیبی مانند

$$p_1, p_2, \dots$$

که آخرین ستون غیر خالی سمت راست c_p است در نابرابری (*) صدق کند و ترکیبی جدید مانند

$$q_1, q_2, \dots$$

با یک k -سوئیچ از این ترکیب به دست بیاید. در این صورت $q_k = p_k - 1$ ، $q_{k+1} = p_{k+1} + 1$ و به ازای هر i دیگر، $q_i = p_i$. اکنون فرض کنید ترکیب جدید c_q ستون غیر خالی داشته باشد. توجه کنید که مگر وقتی که $k = c_p$ ، $c_q = c_p$.

اکنون ثابت می‌کنیم

$$q_i - q_j \geq j - i - 1, \quad i < j \leq c_q + 1$$

فقط باید حالت‌هایی را بررسی کنیم که $q_i - q_j < p_i - p_j$ ، یعنی آنهایی که $i = k$ یا $j = k + 1$ ؛ و حالت‌هایی که $p_i - p_j$ قیدی ندارد، زیرا j از $c_p + 1$ بزرگتر است (حالت ۴ در زیر). چهارتا از چنین حالت‌هایی وجود دارند.

حالت ۱. اگر $(i, j) = (k, k + 1)$ ، آن وقت

$$q_i - q_j \geq 0 = j - i - 1$$

حالت ۲. اگر $i = k$ و $j > k + 1$ ، از نابرابری (*) درباره $(i + 1, j)$ استفاده کنید و نتیجه بگیرید

$$q_i - q_j \geq q_{i+1} - q_j = p_{i+1} - p_j + 1 \geq j - (i + 1) - 1 + 1 = j - i - 1$$

حالت ۳. اگر $j = k + 1$ و $i < k$ ، از نابرابری (*) درباره $(i, j - 1)$ استفاده کنید و نتیجه بگیرید

$$q_i - q_j \geq q_i - q_{j-1} = p_i - p_{j-1} + 1 \geq (j - 1) - i - 1 + 1 = j - i - 1$$

حالت ۴. $j = c_p + 2 = k + 2$ ، $p_k \geq 2$ و $p_{k+1} = 0$. اگر $i = k$ یا $i = k + 1$ ، آن وقت

$$q_i - q_j = q_i \geq 1 \geq j - i - 1$$

اگر $i < k$ ، آن وقت

$$q_i - q_j = p_i - 0 \geq p_i - p_k + 2 \geq (i - k - 1) + 2 = i - j - 1$$

پس گام استقرایی کامل و (ب*) ثابت شده است.

۴۱. فرض کنید B_n مجموعه همه رشته‌های دودویی به طول n باشد. فاصله دو دنباله از رشته‌ها مانند $(a_i)_{i=1}^n$ و $(b_i)_{i=1}^n$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$d((a_i), (b_i)) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$$

فرض کنید C_n زیرمجموعه‌ای از B_n باشد. مجموعه C_n را کد تصحیح خطای کامل (ک ت خ ک) به طول n و خطای مجاز m می‌نامیم، هرگاه به ازای هر رشته در B_n مانند (b_i) ، رشته‌ای یکتا در C_n مانند (c_i) وجود داشته باشد که $d((b_i), (c_i)) \leq m$ ثابت کنید ک ت خ ک‌ای به طول ۹۰ و خطای مجاز ۲ وجود ندارد.

راه حل

فرض کنید C ک ت خ ک‌ای به طول ۹۰ و خطای مجاز ۲ باشد. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $(0, 0, \dots, 0) \in C$. وزن رشته (a_i) را $\sum a_i$ می‌گیریم. رشته‌ای مانند (c_i) در C وجود ندارد که وزنش ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد، زیرا در غیر این صورت رشته‌ای مانند (b_i) وجود دارد که فاصله‌اش از هر دو $(0, 0, \dots, 0)$ و (c_i) حداکثر برابر با ۲ است. فرض کنید تعداد رشته‌های به وزن k در C برابر با n_k باشد.

$\binom{90}{3}$ رشته به وزن ۳ وجود دارد و هر یک از آنها باید به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از دقیقاً یک رشته در C به وزن ۵ قرار داشته باشد. هر رشته‌ای به وزن ۵ به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از $\binom{90}{3}$ رشته به وزن ۳ قرار دارد. بنابراین

$$\binom{90}{3} = \binom{5}{3} n_5$$

و در نتیجه $n_5 = 11748$.

$\binom{90}{4}$ رشته به وزن ۴ وجود دارد و هر یک از آنها باید به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از دقیقاً یک رشته در C به وزن ۵ یا ۶ قرار داشته باشد. هر رشته به وزن ۵ از دقیقاً $\binom{5}{4}$ رشته به وزن ۴ به فاصله ۱ قرار دارد و از هیچ رشته‌ای به وزن ۴ به فاصله ۲ قرار ندارد. هر رشته به وزن ۶ از دقیقاً $\binom{6}{4}$ رشته به وزن ۴ به فاصله ۲ قرار دارد. بنابراین

$$\binom{90}{4} = \binom{5}{4} n_5 + \binom{6}{4} n_6$$

و در نتیجه $n_6 = 116430$.

هر یک از $\binom{90}{5}$ رشته به طول ۵ به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از دقیقاً یک رشته در C به وزن ۵، ۶ یا ۷ قرار دارد. هر رشته‌ای به وزن ۵ در C به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از خودش و

(۵) ۸۵ رشته به وزن ۵ دیگر قرار دارد. هر رشته به وزن ۶ از دقیقاً $\binom{6}{5}$ رشته به وزن ۵ به فاصله ۱ قرار دارد و از هیچ رشته‌ای به وزن ۵ به فاصله ۲ قرار ندارد. هر رشته به وزن ۷ به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از $\binom{7}{5}$ رشته به وزن ۵ قرار دارد. بنابراین

$$\binom{90}{5} = \left(1 + 85 \binom{5}{4}\right) n_5 + \binom{6}{5} n_6 + \binom{7}{5} n_7$$

و در نتیجه $n_7 = 1806954 \frac{2}{7}$ که ممکن نیست. بنابراین کت‌خ‌ک‌ای به طول ۹۰ و خطای مجاز ۲ وجود ندارد.

۴۲. اگر $n = 2000$, $n = 2001$ یا $n = 2002$, آیا می‌توان عددهای

$$1, 1, 2, 2, \dots, n, n$$

را طوری مرتب کرد که بین هر دو عدد مانند j , j عدد قرار داشته باشد؟ (مثلاً اگر $n = 4$, ۴۱۳۱۲۴۳۲ چنین آرایشی است.)

راه حل

می‌گوییم جایگشتی خوب است، هرگاه ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. در حالت کلی، وقتی و فقط وقتی جایگشتی خوب از عددهای

$$1, 1, 2, 2, \dots, n, n$$

وجود دارد که به‌ازای عددی طبیعی مانند k , $n = 4k$ یا $n = 4k - 1$.

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $n \equiv 1 \pmod{4}$ (به‌پیمانه ۴) یا $n \equiv 2 \pmod{4}$ (به‌پیمانه ۴)، جایگشتی خوب از

عددهای

$$1, 1, 2, 2, \dots, n, n$$

وجود ندارد. فرض کنید این ادعا درست نباشد و

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n}$$

جایگشتی خوب باشد. به‌ازای هر عدد مانند k فرض کنید (i_k, j_k) , $i_k < j_k$ جاهایی باشند که دو عدد k آمده‌اند. در این صورت

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n j_k &= 1 + 2 + \dots + 2n \\ &= n(2n + 1) = S_1 \end{aligned}$$

که اگر $n \equiv 1 \pmod{4}$ (به‌پیمانه ۴) فرد است و اگر $n \equiv 2 \pmod{4}$ زوج است. از طرف

دیگر، $j_k - i_k = k + 1$ و در نتیجه

$$\sum_{k=1}^n j_k - \sum_{k=1}^n i_k = 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{n(n+3)}{2} = S_2$$

که اگر (به پیمانه ۴) $n \equiv 1$ زوج است و اگر (به پیمانه ۴) $n \equiv 2$ فرد است. بنابراین

$$2 \sum_{k=1}^n j_k = S_1 + S_2$$

یعنی عددی زوج برابر با عددی فرد است، که ممکن نیست. (می‌توانیم از روش زیر هم استفاده کنیم: هر جفت از عددهای زوج مانند $2k$ و $2k+1$ ($2 \leq 2k \leq n$) یک جای فرد و یک جای زوج را می‌گیرند و هر جفت از عددهای فرد مانند $2k-1$ و $2k$ ($1 \leq 2k-1 \leq n$) یا دو جای فرد را می‌گیرند یا دو جای زوج. بنابراین، عددهای فرد تعداد زوجی از جاهای زوج را می‌گیرند. فرض کنید این تعداد $2m$ باشد. چون $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ جفت از عددهای زوج مانند $2k$ و $2k+1$ وجود دارد، عددهای زوج $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ جای زوج را می‌گیرند. بنابراین $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2m = n$ ، و در نتیجه

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \equiv n \quad (\text{به پیمانه } 2)$$

که اگر (به پیمانه ۴) $n \equiv 1$ یا (به پیمانه ۴) $n \equiv 2$ درست نیست.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر (به پیمانه ۴) $n \equiv 0$ یا (به پیمانه ۴) $n \equiv 3$ ، جایگشتی خوب وجود دارد. اگر $n = 3$ ، جایگشت $(2, 3, 1, 2, 1, 3)$ خوب است. اگر $n = 4$ ، جایگشت $(2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4)$ خوب است. اگر $m \geq 2$ ، $n = 4m - 1$ ، جایگشت

$$\begin{aligned} & ((4m-4, 4m-6, \dots, 2m); 4m-2; (2m-3, 2m-5, \dots, 1); \\ & 4m-1; (1, 3, \dots, 2m-3); (2m, 2m+2, \dots, 4m-4); \\ & 2m-1; (4m-3, 4m-5, \dots, 2m+1); 4m-2; \\ & (2m-2, 2m-4, \dots, 2); 2m-1; 4m-1; \\ & (2, 4, \dots, 2m-2); (2m+1, 2m+3, \dots, 4m-3)) \end{aligned}$$

خوب است. اگر $n = 4m$ ، $m \geq 2$ ، جایگشت

$$\begin{aligned} & ((4m-2, 4m-4, \dots, 2m); 4m-1; (2m-3, 2m-5, \dots, 1); \\ & 4m; (1, 3, \dots, 2m-3); (2m, 2m+2, \dots, 4m-2); \\ & 2m-1; (4m-3, 4m-5, \dots, 2m+1); 4m-1; \end{aligned}$$

$$(2m-2, 2m-4, \dots, 2); 2m-1; 4m;$$

$$(2, 4, \dots, 2m-4); (2m+1, 2m+3, \dots, 4m-3))$$

خوب است.

یادداشت

این مسأله را مسألهٔ لنگفورد می‌نامند. این مسأله ارتباط زیادی با مسأله‌های زیر دارد:
لنگفورد. آیا می‌توان مجموعهٔ

$$\{1, 2, \dots, 2k\}$$

را به k جفت از عددها مانند $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ طوری افراز کرد که

$$b_i - a_i = i + 1, \quad 1 \leq i \leq k$$

اسکولم. آیا می‌توان مجموعهٔ

$$\{1, 2, \dots, 2k\}$$

را به k جفت از عددها مانند $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ طوری افراز کرد که

$$b_i - a_i = i, \quad 1 \leq i \leq k$$

اسکولم. آیا می‌توان مجموعهٔ

$$\{2, 3, \dots, 2k\}$$

را به یک مجموعهٔ تک‌عضوی و $k-1$ جفت از عددها مانند $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ و (a_{k-1}, b_{k-1}) طوری افراز کرد که

$$b_i - a_i = i, \quad 1 \leq i \leq k-1$$

۴۳. فرض کنید k, m و n عددهایی صحیح باشند و $k \leq m-1 < n$. بیشترین اندازهٔ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, k\}$ مانند S را طوری پیدا کنید که مجموع هیچ n عضو متمایزی از S برابر با m نباشد.

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۶)

راه حل

اگر $m < \frac{n(n+1)}{2}$ ، جواب مسأله معلوم است: مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, k\}$ خودش ویژگی موردنظر را دارد و بیشترین اندازهٔ موردنظر برابر با k است. از این پس فرض می‌کنیم $m \geq \frac{n(n+1)}{2}$. به سادگی می‌توان کران پایینی برای بیشترین اندازهٔ موردنظر پیدا کرد. فرض کنید r بزرگترین

عدد صحیحی باشد که

$$r + (r + 1) + \dots + (r + n - 1) \leq m$$

یا

$$nr + \frac{n(n-1)}{2} \leq m \quad (*)$$

معلوم است که مجموع هیچ n عددی از مجموعه $\{r+1, r+2, \dots, k\}$ برابر با m نیست. از نابرابری $(*)$ معلوم می‌شود

$$r = \left\lfloor \frac{m}{n} - \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

و در نتیجه کران پایینی برای بیشترین اندازه موردنظر برابر است با

$$k - \left\lfloor \frac{m}{n} - \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

اکنون ثابت می‌کنیم که این کران پایین در حقیقت همان عددی است که می‌خواهیم. برای این کار، کافی است ثابت کنیم که اگر S زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, k\}$ باشد و مجموع هیچ n عضوی از S برابر با m نباشد، آن وقت

$$|S| \leq k - \left\lfloor \frac{m}{n} - \frac{n-1}{2} \right\rfloor \quad (**)$$

از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. توجه کنید که $2 \leq n \leq m-1$. در حالتی که $n=2$ ، مجموع هیچ دو عضوی از S برابر با m نیست و در نتیجه به ازای هر i که $1 \leq 2i \leq m-1$ ، حداکثر یکی از عددهای جفت $(i, m-i)$ ممکن است در S باشد. بنابراین

$$|S| \leq k - \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$$

که همان نابرابری $(**)$ است.

فرض کنید $n > 2$. فرض می‌کنیم حکم به ازای $n-1$ درست است و آن را به ازای n ثابت می‌کنیم. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, k\}$ باشد که ویژگی موردنظر را دارد و فرض کنید x کوچکترین عضو S باشد. اگر

$$nx + \frac{n(n-1)}{2} > m$$

آن وقت

$$S \subseteq \{r+1, r+2, \dots, k\}$$

که در آن r همان عددی است که در بالا تعریف کردیم و چیزی برای ثابت کردن نمانده است.

بنابراین فرض می‌کنیم

$$nx + \frac{n(n-1)}{2} \leq m$$

از ویژگی S نتیجه می‌شود که اگر $S_2 = S - \{x\}$ ، S_2 زیرمجموعه‌ای از $\{x+1, x+2, \dots, k\}$ است که مجموع هیچ $n-1$ عضو متمایزی از S_2 برابر با $m-x$ نیست. فرض کنید

$$S_2 = \{s-x : s \in S_1\}$$

در این صورت S_2 زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, k-x\}$ است که مجموع هیچ $n-1$ عضو متمایزی از S_2 برابر با $m-nx$ نیست. برای اینکه بتوانیم از فرض استقرا استفاده کنیم باید ثابت کنیم

$$n-1 \leq m-nx-1 \leq k-x$$

نابرابری اول با نابرابری $m-nx \geq n$ هم‌ارز است و این نابرابری هم درست است، زیرا قبلاً فرض کرده‌ایم که $m-nx \geq \frac{n(n-1)}{2}$. درستی نابرابری دوم هم واضح است، زیرا $m-1 \leq k$. بنابراین فرض استقرا، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |S| &\leq 1 + k - x - \left\lfloor \frac{m-nx}{n-1} - \frac{n-2}{2} \right\rfloor \\ &= k - \left\lfloor \frac{m-x}{n-1} - \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &= k - \left\lfloor \frac{mn-nx}{n(n-1)} - \frac{1}{2} - \frac{n-1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

از نابرابری

$$nx + \frac{n(n-1)}{2} \leq m$$

نتیجه می‌شود

$$mn-nx \geq (n-1)m + \frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |S| &\leq k - \left\lfloor \frac{(n-1)m}{n(n-1)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{n-1}{2} \right\rfloor \\ &= k - \left\lfloor \frac{m}{n} - \frac{n-1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

که همان نابرابری (**) است. استقرا کامل شده است.

۴۴. دنباله‌ای صعودی از عددهای صحیح نامنفی مانند

$$s_0, s_1, \dots$$

را خیلی جمعی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای همهٔ عددهای صحیح نامنفی مانند i و j ، $s_{i+j} \geq s_i + s_j$. فرض کنید $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ دو دنبالهٔ خیلی جمعی باشند و $\{u_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عددهای صحیح باشد و هر عدد صحیح همان‌قدر در $\{u_n\}$ آمده باشد که روی هم در $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ آمده است. ثابت کنید $\{u_n\}$ هم خیلی جمعی است.

(کیران کدلیا، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۸)

راه‌حل

دنبالهٔ دوگان دنبالهٔ $\{a_n\}$ را، که آن را با $\{A_n\}$ نشان می‌دهیم، این‌طور تعریف می‌کنیم: A_n برابر با کوچکترین عدد صحیح مانند k است که $a_k \geq n$. نکتهٔ کلیدی این است که دنبالهٔ $\{a_n\}$ وقتی و فقط وقتی خیلی جمعی است که $\{A_n\}$ خیلی جمعی باشد. درحقیقت، فرض کنید $\{a_n\}$ خیلی جمعی باشد. در این صورت

$$a_{A_i+A_j} \geq a_{A_i} + a_{A_j} \geq i + j$$

و در نتیجه، بنابر تعریف $\{A_n\}$ ، $A_{i+j} \leq A_i + A_j$ ؛ نتیجهٔ عکس هم به‌روش مشابه ثابت می‌شود.

اکنون توجه کنید که اگر $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ به ترتیب دنباله‌های دوگان $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ باشند، دنبالهٔ دوگان $\{u_n\}$ ، $\{S_n + T_n\}$ است. چون $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ خیلی جمعی هستند، $\{S_n + T_n\}$ هم خیلی جمعی است. در نتیجه $\{u_n\}$ خیلی جمعی است، همان چیزی که می‌خواهیم.

۴۵. عددهای طبیعی از ۱ تا n^2 را به‌طور تصادفی در خانه‌های جدولی $n \times n$ می‌نویسیم. به‌ازای هر جفت از عددهایی که روی یک سطر یا روی یک ستون قرار دارند، نسبت عدد بزرگتر به عدد کوچکتر را حساب می‌کنیم. مشخصهٔ این آرایش کوچکترین کسر در میان این $n^2(n-1)$ کسر است. بیشترین مقدار ممکن مشخصه را پیدا کنید.

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۹)

راه‌حل

ابتدا ثابت می‌کنیم که مشخصهٔ هر آرایشی مانند A ، که آن را با $C(A)$ نشان می‌دهیم، از $\frac{n+1}{n}$ کوچکتر یا با آن برابر است. اگر دو عدد در مجموعهٔ

$$G = \{n^2 - n + 1, n^2 - n + 2, \dots, n^2\}$$

روی یک سطر یا یک ستون قرار داشته باشند، آن وقت

$$C(A) \leq \frac{n^2}{n^2 - n + 1} < \frac{n+1}{n}$$

اگر عده‌های عضو G روی سطرها و ستونهای متمایز قرار داشته باشند، آن وقت دوتا از آنها روی همان سطر یا همان ستونی قرار دارند که $n^2 - n$ قرار دارد و در نتیجه

$$C(A) \leq \frac{n^2 - 1}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n}$$

ثابت می‌کنیم مشخصه آرایش

$$a_{ij} = \begin{cases} i + n(j - i + 1) & i < j \\ i + n(n - i + j - 1) & i \geq j \end{cases}$$

یعنی

$1 + (n-1)n$	1	\dots	$1 + (n-2)n$
$2 + (n-2)n$	$2 + (n-1)n$	\dots	$2 + (n-3)n$
$3 + (n-3)n$	$3 + (n-2)n$	\dots	$3 + (n-4)n$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$(n-2) + 2n$	$(n-2) + 3n$	\dots	$(n-2) + n$
$(n-1) + n$	$(n-1) + 2n$	\dots	$n-1$
n	$n+n$	\dots	$n + (n-1)n$

برابر با $\frac{n+1}{n}$ است. در حقیقت،

- تفاضل هر دو عددی که روی یک سطر قرار دارند مضربی از n است؛ بنابراین

$$\frac{a_{ik}}{a_{ij}} = \frac{a_{ik}}{a_{ik} - hn} \geq \frac{a_{ik}}{a_{ik} - n} \geq \frac{n^2}{n^2 - n} > \frac{n+1}{n}$$

- عده‌های روی ستون اول تصاعدی حسابی‌اند و

$$n \leq (n-1) + n \leq (n-2) + 2n \leq \dots \leq 2 + (n-2)n \leq 1 + (n-1)n$$

و در نتیجه

$$\frac{a_{i1}}{a_{k1}} \geq \frac{1 + (n-1)n}{2 + (n-2)n} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 - 2n + 2} \geq \frac{n+1}{n}$$

و تساوی وقتی پیش می‌آید که $n = 2$.

• ستون j ام، $2 \leq j \leq n$ ، شامل دو تصاعد حسابی است:

$$j-1, (j-2)+n, (j-3)+2n, \dots, 1+(j-2)n$$

$$n(j-1)n, (n-1)+jn, \dots, j+(n-1)n$$

در نتیجه

$$\frac{a_{ij}}{a_{kj}} \geq \frac{j+(n-1)n}{(j+1)+(n-2)n} \geq \frac{n+1}{n}$$

۴۶. فرض کنید A مجموعه‌ای باشد که $|A| = n$ و A_1, A_2, \dots, A_n زیرمجموعه‌هایی از A باشند که $1 \leq i \leq n, |A_i| \geq 2$. فرض کنید به‌ازای هر زیرمجموعه دو عضوی A مانند A' عددی یکتا مانند i وجود داشته باشد که $A' \subseteq A_i$. ثابت کنید

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

(هونگ‌بین یو، چین، ۱۹۹۹)

راه حل

بنابر فرض،

$$\sum_{i=1}^n \binom{|A_i|}{2} = \binom{n}{2} \quad (*)$$

فرض کنید $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و d_i تعداد زیرمجموعه‌هایی مانند A_j باشد که

$$x_i \in A_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

در این صورت

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n |A_i| \quad (**)$$

از طرف دیگر

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} = \sum_{i \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$$

بنابر فرض مسأله، $|A_i \cap A_j| \leq 1$. کافی است ثابت کنیم $|A_i \cap A_j| = 1$ یا

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} = \binom{n}{2}$$

بنابر تساویهای (*) و (**) و تعریف ضریب دوجمله‌ای، $\binom{x}{2} = \frac{x^2 - x}{2}$ ، کافی است ثابت کنیم

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n |A_i|^2 \quad (***)$$

به ازای هر i ، مجموعه‌هایی مانند A_j را در نظر می‌گیریم که $x_i \notin A_j$ فرض کنید A_j یکی از این مجموعه‌ها باشد و

$$A_j = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$$

چون هر یک از زیرمجموعه‌های دو عضوی $\{x_i, y_1\}$ ، $\{x_i, y_2\}$ ، \dots و $\{x_i, y_s\}$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ دیگری مانند A_k هستند (چون ممکن نیست y_i و y_j عضو مجموعهٔ دیگری هم باشند)، پس $d_i \geq |A_j|$ در نتیجه

$$\frac{d_i}{n - d_i} \geq \frac{|A_j|}{n - |A_j|}$$

اگر همهٔ این‌گونه نابرابریها را جمع کنیم به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j|x_i \notin A_j} \frac{d_i}{n - d_i} \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j|x_i \notin A_j} \frac{|A_j|}{n - |A_j|} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i|x_i \notin A_j} \frac{|A_j|}{n - |A_j|} \\ &= \sum_{j=1}^n |A_j| \end{aligned}$$

پس، بنابر تساوی (**)، در تمام نابرابریهای بالا تساوی برقرار است. بنابراین $d_i = |A_j|$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (n - d_i) d_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j|x_i \notin A_j} d_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j|x_i \notin A_j} |A_j| \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i|x_i \notin A_j} |A_j| \\ &= \sum_{j=1}^n (n - |A_j|) |A_j| \end{aligned}$$

که از آن تساوی (***) نتیجه می‌شود، همان چیزی که می‌خواهیم.

۴۷. فرض کنید r_1, r_2, \dots, r_n عددهایی حقیقی باشند. ثابت کنید مجموعه‌ای مانند S وجود دارد

که $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ و اگر $1 \leq i \leq n-2$

$$1 \leq |S \cap \{i, i+1, i+2\}| \leq 2$$

۹

$$\left| \sum_{i \in S} r_i \right| \geq \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^n |r_i|$$

(ایران، ۱۹۹۹)

راه حل

فرض کنید $s = \sum_{i=1}^n |r_i|$ و به ازای $i = 1, 2, 3$

$$s_i = \sum_{r_j \geq 0, j \equiv i \pmod{3}} r_j, \quad t_i = \sum_{r_j < 0, j \equiv i \pmod{3}} r_j$$

(به پیمانه ۳)

در این صورت $s = s_1 + s_2 + s_3 - t_1 - t_2 - t_3$ یا

$$\begin{aligned} 2s &= (s_1 + s_2) + (s_2 + s_3) + (s_3 + s_1) \\ &\quad - (t_1 + t_2) - (t_2 + t_3) - (t_3 + t_1) \end{aligned}$$

بنابراین i_1 و i_2 ای وجود دارند که $i_1 \neq i_2$ و یا $s_{i_1} + s_{i_2} \geq \frac{s}{3}$ یا $t_{i_1} + t_{i_2} \leq -\frac{s}{3}$ هر دو. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $s_{i_1} + s_{i_2} \geq \frac{s}{3}$ و $|s_{i_1} + s_{i_2}| \geq |t_{i_1} + t_{i_2}|$ بنابراین

$$s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_1} + t_{i_2} \geq 0$$

پس

$$(s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_1}) + (s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_2}) \geq s_{i_1} + s_{i_2} \geq \frac{s}{3}$$

بنابراین دست‌کم یکی از عددهای $s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_1}$ و $s_{i_1} + s_{i_2} + t_{i_2}$ از $\frac{s}{6}$ بزرگتر است و حکم را ثابت کرده‌ایم.

یادداشت

اگر فرض کنیم $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ و $r_4 = r_5 = r_6 = -1$ به سادگی می‌توان ثابت کرد که $\frac{1}{6}$ را نمی‌توان کوچکتر کرد.

۴۸. فرض کنید n, k و m عددهایی طبیعی باشند و $n > 2k$. فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های k عضوی مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد، به طوری که هر زیرمجموعه $k+1$ عضوی مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ شامل دقیقاً m عضو S باشد. ثابت کنید S باید شامل تمامی

زیرمجموعه‌های k عضو مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد.

(کیران کدلایا، مسأله پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

راه حل

ابتدا تعداد جفتهایی مانند (U, V) را که در آن $U \in S$ و V زیرمجموعه‌ای $k+1$ عضو از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ است، به دو طریق مختلف حساب می‌کنیم. بنابر فرض، اگر این جفتها را برحسب V مرتب کنیم، $m \binom{n}{k+1}$ جفت به دست می‌آوریم. از طرف دیگر، اگر این جفتها را برحسب U مرتب کنیم، $|S|(n-k)$ جفت به دست می‌آوریم. در نتیجه

$$|S| = \frac{m}{n-k} \binom{n}{k+1} = \frac{m}{k+1} \binom{n}{k}$$

اکنون تعداد سه‌تاییهایی مانند (U, V, W) را حساب می‌کنیم، که در آن U زیرمجموعه‌ای $k+1$ عضو از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ است و V و W عضوهای متمایزی از S و زیرمجموعه U هستند. اگر این سه‌تاییها را برحسب U مرتب کنیم، از فرض نتیجه می‌گیریم که تعداد این سه‌تاییها برابر است با

$$m(m-1) \binom{n}{k+1} = \frac{m(m-1)(n-k)(n-k+1)}{k(k+1)} \binom{n}{k-1}$$

از طرف دیگر، می‌توانیم این سه‌تاییها را برحسب $V \cap W$ ، که همواره مجموعه‌ای $k-1$ عضو است، مرتب کنیم. به ازای هر زیرمجموعه $k-1$ عضو از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ مانند J ، فرض کنید s_J تعداد عضوهایی از S باشد که عضو J اند. هر J در دقیقاً $s_J(s_J-1)$ سه‌تایی $V \cap W$ است و در نتیجه

$$\frac{m(m-1)(n-k)(n-k+1)}{k(k+1)} \binom{n}{k-1} = \sum_J s_J(s_J-1)$$

تابع $f(x) = x^2$ محدب است و

$$\sum_J s_J = k|S| = \frac{mk}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{m(n-k+1)}{k+1} \binom{n}{k-1}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \frac{m(m-1)(n-k)(n-k+1)}{k(k+1)} \binom{n}{k-1} \\ & \geq \frac{m^2(n-k+1)^2}{(k+1)^2} \binom{n}{k-1} - \frac{m(n-k+1)}{k+1} \binom{n}{k-1} \end{aligned}$$

یا

$$\frac{(m-1)(n-k)}{k} \geq \frac{m(n-k+1)}{k+1} + 1$$

بنابراین

$$m(n-2k) \geq (k+1)(n-2k)$$

چون فرض کرده‌ایم $n > 2k$ ، پس $m \geq k+1$ و در نتیجه S باید شامل تمامی زیرمجموعه‌های k عضوی مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد.

۴۹. مجموعه‌ای مانند T را زوج می‌نامیم، هرگاه تعداد عضوهایش عددی زوج باشد. فرض کنید n عددی زوج و مثبت باشد و S_1, S_2, \dots, S_n زیرمجموعه‌هایی زوج از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, n\}$ باشند. ثابت کنید i و j ‌ای وجود دارند که $1 \leq i < j \leq n$ و $S_i \cap S_j$ زوج است.

راه حل اول

تفاضل متقارن دو مجموعه مانند A و B را با $A \Delta B$ نشان می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

یعنی $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. تابع شاخص هر زیرمجموعه از مجموعه T مانند A را با ψ_A نشان می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_A : T \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

برخی ویژگیهای تفاضل متقارن را در زیر آورده‌ایم:

$$A \Delta \emptyset = A \text{ و } A \Delta A = \emptyset \text{ (الف)}$$

$$A \Delta B = B \Delta A \text{ (ب)}$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \text{ (ج)}$$

(د) اگر A و B هر دو زوج باشند، $A \Delta B$ هم زوج است.

(ه) وقتی و فقط وقتی $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_r$ (عدد طبیعی است) که x عضو تعداد فردی از مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_r باشد.

اثبات ویژگیهای (الف)، (ب)، (ج)، و (د) تقریباً سراسر است. ویژگی (ه) را به استقرا روی r ثابت می‌کنیم. اگر $r = 1$ و $r = 2$ ، درستی حکم معلوم است. فرض کنید که این ویژگی به‌ازای

r مجموعه A_1, A_2, \dots, A_r درست باشد ($r \geq 2$). فرض کنید

$$X = A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_r \Delta A_{r+1} = X_1 \Delta A_{r+1}$$

که در آن

$$X_1 = A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_r$$

در این صورت وقتی و فقط وقتی $x \in X$ که x یا عضو $A_{r+1} - X_1$ باشد یا عضو $X_1 - A_{r+1}$ باشد. اگر $x \in X_1 - A_{r+1}$ آن وقت $x \notin A_{r+1}$ و $x \in X$ ، یعنی، بنابر فرض استقرا، x عضو تعداد فردی از مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_r و $A_{r+1} - X$ است. اگر $x \in A_{r+1} - X$ آن وقت $x \in A_{r+1}$ و x عضو تعداد زوجی از مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_r است و در نتیجه x عضو تعداد فردی از مجموعه‌های A_1, A_2, \dots, A_r و A_{r+1} است. استقرا کامل شده است. اکنون آماده‌ایم که حکم اصلی را ثابت کنیم. فرض کنید $n = 2m$ و

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_{2m}\}$$

لم. تعداد زوجی از مجموعه‌های S_i ، $1 \leq i \leq 2m$ ، وجود دارند که تفاضل متقارن آنها یا \emptyset است یا S .

برهان. همه تفاضل متقارنهای ممکن مانند

$$S_{i_1} \Delta S_{i_2} \Delta \dots \Delta S_{i_j}$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $j \geq 1$. اگر یکی از اینها \emptyset یا S باشد، کار تمام است؛ در غیر این صورت، توجه کنید که تعداد این تفاضلهای برابر با $2^{2m-1} - 1$ است و (بنابر ویژگی (د)) هریک از آنها زیرمجموعه‌ای زوج از S است. همچنین، توجه کنید که بجز \emptyset و S ، $2^{2m-1} - 1$ زیرمجموعه زوج از S وجود دارد. بنابر اصل لانه کبوتری، دوتا از این تفاضلهای برابرند. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود (با توجه به ویژگیهای (ب) و (ج)) می‌توانیم فرض کنیم

$$T_1 = S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_k \Delta S_{k+1} \Delta \dots \Delta S_{2i}$$

$$= S_{k+1} \Delta \dots \Delta S_{2i} \Delta S_{2i+1} \Delta S_{2j-k} = T_2$$

با استفاده از ویژگیهای (الف) و (ب) به دست می‌آوریم

$$\emptyset = T_1 \Delta T_2$$

$$= S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_k \Delta S_{2j+1} \Delta \dots \Delta S_{2j-k}$$

بنابراین \emptyset تفاضل متقارن $2(j-i) + k$ یا $2(j-k-i) + k$ مجموعه است. ■

بنابر لم، می‌توانیم فرض کنیم که عددی زوج مانند $2i$ وجود دارد که

$$S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_{2i} = \emptyset \text{ یا } S$$

این دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

حالت ۱. فرض می‌کنیم

$$S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_{2i} = \emptyset$$

بنابرویزگی (ه)، هر عضو S عضو تعداد زوجی از مجموعه‌های S_1, S_2, \dots, S_{2i} است. توجه کنید که

$$r_1 = \sum_{k=2}^{2i} |S_1 \cap S_k| = \sum_{k=2}^{2i} \left(\sum_{s_1 \in S_1} \psi_{S_k}(s_1) \right)$$

اگر $s_1 \in S_1$ ، s_1 عضو تعداد فردی از مجموعه‌های S_2, \dots, S_{2i} است، یعنی

$$\sum_{k=2}^{2i} \psi_{S_k}(s_1) \equiv 1 \quad (\text{به پیمانه } 2)$$

بنابراین

$$r_1 = \sum_{k=2}^{2i} \left(\sum_{s_1 \in S_1} \psi_{S_k}(s_1) \right) = \sum_{s_1 \in S_1} \left(\sum_{k=2}^{2i} \psi_{S_k}(s_1) \right)$$

چون S_1 مجموعه‌ای زوج است، r_1 عددی زوج است. بنابراین، دست‌کم یکی از $2i - 1$ عدد $|S_1 \cap S_k|$ ، $2 \leq k \leq 2i$ ، باید زوج باشد، همان چیزی که می‌خواهیم.

حالت ۲. فرض می‌کنیم

$$S_1 \Delta S_2 \Delta \dots \Delta S_{2i} = S$$

بنابرویزگی (ه)، هر عضو S عضو تعداد فردی از مجموعه‌های S_1, S_2, \dots, S_{2i} است. توجه کنید که

$$r_1 = \sum_{k=2}^{2i} |S_1 \cap S_k| = \sum_{k=2}^{2i} \left(\sum_{s_1 \in S_1} \psi_{S_k}(s_1) \right)$$

اگر $s_1 \in S_1$ ، s_1 عضو تعداد فردی از مجموعه‌های S_2, \dots, S_{2i} است، یعنی

$$\sum_{k=2}^{2i} \psi_{S_k}(s_1) \equiv 0 \quad (\text{به پیمانه } 2)$$

بنابراین

$$r_1 = \sum_{k=2}^{2i} \left(\sum_{s_1 \in S_1} \psi_{S_k}(s_1) \right) = \sum_{s_1 \in S_1} \left(\sum_{k=2}^{2i} \psi_{S_k}(s_1) \right)$$

چون n مجموعه عددهایی زوج است، پس عددی زوج است. بنابراین، دست‌کم یکی از $۱ - ۲i$ عدد $|S_1 \cap S_k|$ ، $۲ \leq k \leq ۲i$ ، باید زوج باشد، همان چیزی که می‌خواهیم.

راه حل دوم (از تیان‌کای لیو)

به هر S_i برداری n بعدی مانند a_i نسبت دهید، به‌طوری درایهٔ i ام a_i برابر با ۱ است، هرگاه j عضو S_i باشد و در غیر این صورت برابر با ۰ است. در این صورت، زوج بودن S_i را می‌توان این‌طور تعبیر کرد که

$$a_i \cdot a_i \equiv 0 \quad (\text{به پیمانه } ۲)$$

فرض کنید اگر $i \neq j$

$$a_i \cdot a_j \equiv 1 \quad (\text{به پیمانه } ۲)$$

یعنی، اگر $i \neq j$ ، تعداد عضوهای اشتراک S_i و S_j عددی فرد باشد. فرض کنید زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ مانند X وجود داشته باشد که

$$\sum_{x \in X} a_x \equiv (0, 0, \dots, 0) \quad (\text{به پیمانه } ۲)$$

در این صورت، به‌ازای هر $i \in X$

$$a_i \cdot \sum_{x \in X} a_x \equiv 0 \quad (\text{به پیمانه } ۲)$$

از طرف دیگر،

$$a_i \cdot \sum_{x \in X} a_x = a_i \cdot a_i + a_i \cdot \sum_{x \in (X-i)} a_x$$

$$\equiv a_i \cdot \sum_{x \in (X-i)} a_x$$

$$\equiv |X| - 1 \quad (\text{به پیمانه } ۲)$$

در نتیجه $|X|$ عددی فرد است. بنابراین X زیرمجموعه‌ای سره از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ است، زیرا n عددی زوج است. اما در این صورت، اگر $j \in X$ ، از

$$a_j \cdot \sum_{x \in X} a_x \equiv 0 \quad (\text{به پیمانه } ۲)$$

نتیجه می‌شود که $|X|$ عددی زوج است، که تناقض است. بنابراین زیرمجموعه‌ای مانند X وجود ندارد.

بنابراین، به‌ازای هر یک از 2^n زیرمجموعهٔ مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ مانند Y ، $\sum_{y \in Y} a_y$ به پیمانه ۲ با بقیه فرق دارد. از طرف دیگر، در هر مجموع از این نوع، مجموع مختصات بردار باید

عددی زوج باشد، زیرا مجموع بردارهای نظیر مجموعه‌های زوج است. بنابراین، زوجیت مختص آخر هر بردار با $1 - n$ مختص اول آن مشخص می‌شود. در نتیجه، به پیمانه ۲، فقط 2^{n-1} امکان برای $\sum_{y \in Y} a_y$ وجود دارد، که تناقض است.

بنابراین، i و j ای وجود دارند که $a_i \cdot a_j$ زوج است؛ در نتیجه، اشتراک S_i و S_j زوج است.

۵۰. فرض کنید $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ مجموعه‌هایی باشند که $A_1 = \emptyset, A_1 = \{0\}, B_1$ و به ازای هر عدد طبیعی مانند n

$$A_{n+1} = \{x + 1 : x \in B_n\}, \quad B_{n+1} = (A_n \cap B_n) - (A_n \cap B_n)$$

همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که $B_n = \{0\}$.

راه حل اول

ثابت می‌کنیم وقتی و فقط وقتی $B_n = \{0\}$ که n توانی از ۲ باشد.

به ازای هر مجموعه مانند S از عددهای صحیح فرض کنید $2S$ مجموعه $\{2x : x \in S\}$ باشد و به ازای هر عدد صحیح مانند k فرض کنید $S + k$ مجموعه $\{x + k : x \in S\}$ باشد. ابتدا توجه کنید که اگر $n \geq 1, n \notin A_n$. بنابر تعریف A_1 ، این حکم برای A_1 درست است، و در مورد بقیه به این دلیل درست است که A_{n+1} از جمع کردن ۱ با عضوهای B_n ، که همگی نامنفی‌اند، به دست می‌آید. از استقرایی ساده نتیجه می‌شود که اگر $n \geq 1, 0 \in B_n$. اکنون به استقرا روی n ثابت می‌کنیم که اگر $n \geq 2$

$$(الف) \quad A_{2n-1} = 2A_n - 1$$

$$(ب) \quad B_{2n-1} = A_{2n-1} \cup B_{2n}$$

$$(ج) \quad B_{2n} = 2B_n$$

$$(د) \quad 1 \in B_{2n-1}$$

اگر $n = 2$ ، درستی این حکمها از تساویهای زیر نتیجه می‌شوند:

$$A_2 = \{1\}, B_2 = \{0\}, A_3 = \{1\}, B_3 = \{0, 1\}, A_4 = \{1, 2\}, B_4 = \{0\}$$

برای گام استقرایی، فرض کنید این حکمها به ازای $n - 1$ درست باشند، یعنی فرض کنید

$$A_{2n-3} = 2A_{n-1} - 1$$

$$B_{2n-3} = A_{2n-3} \cup B_{2n-2}$$

$$B_{2n-2} = 2B_{n-1}$$

$$1 \in B_{2n-3}$$

در این صورت حکم (الف) به راحتی به دست می‌آید، زیرا

$$\begin{aligned} A_{2n-1} &= B_{2n-2} + 1 = 2B_{n-1} + 1 \\ &= 2(A_n - 1) + 1 = 2A_n - 1 \end{aligned}$$

که در آن در تساویهای اول و سوم از تعریف و در تساوی دوم از فرض استقرا استفاده کرده‌ایم. در مورد (ب) و (ج) ابتدا باید اطلاعاتی دربارهٔ A_{2n-2} به دست بیاوریم:

$$\begin{aligned} A_{2n-2} &= B_{2n-3} + 1 = (A_{2n-3} \cup B_{2n-2}) + 1 \\ &= ((2A_{n-1} - 1) \cup 2B_{n-1}) + 1 \\ &= 2A_{n-1} \cup (2B_{n-1} + 1) \end{aligned}$$

با استفاده از این اطلاعات، می‌توانیم B_{2n-1} را حساب کنیم. بنابر فرض می‌دانیم که

$$B_{2n-2} = 2B_{n-1}$$

و بنابر تعریف

$$\begin{aligned} B_{2n-1} &= (A_{2n-2} \cup B_{2n-2}) - (A_{2n-2} \cap B_{2n-2}) \\ B_n &= (A_{n-1} \cup B_{n-1}) - (A_{n-1} \cap B_{n-1}) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} B_{2n-1} &= 2A_{n-1} \cup (2B_{n-1} + 1) \cup 2B_{n-1} \\ &\quad - (2A_{n-1} \cup (2B_{n-1} + 1)) \cap 2B_{n-1} \\ &= (2B_{n-1} + 1) \cup 2A_{n-1} \cup 2B_{n-1} - (2A_{n-1} \cap 2B_{n-1}) \\ &= (2B_{n-1} + 1) \cup ((2A_{n-1} \cup 2B_{n-1}) - (2A_{n-1} \cap 2B_{n-1})) \\ &= (2B_{n-1} + 1) \cup 2B_n \end{aligned}$$

در تساوی دوم برای این می‌توانیم مجموعهٔ $2B_{n-1} + 1$ را بیرون بیاوریم که فقط از عددهای فرد تشکیل شده است و $2B_{n-1}$ فقط از عددهای زوج تشکیل شده است. در بالا دیدیم که $A_{2n-1} = 2B_{n-1} + 1$ پس

$$B_{2n-1} = A_{2n-1} \cup 2B_n$$

اکنون آماده‌ایم که (ج) و از روی آن (ب) را ثابت کنیم. از تعریف می‌دانیم که B_{2n} از عددهایی تشکیل شده است که یا در A_{2n-1} قرار دارند یا در B_{2n-1} و در هر دو قرار ندارند. ثابت کرده‌ایم که

$$B_{2n-1} = A_{2n-1} \cup 2B_n$$

بنابراین B_n شامل هیچ عضوی از A_{2n-1} نیست. از طرف دیگر، ثابت کردیم که

$$A_{2n-1} = 2A_n - 1$$

در نتیجه عضوهای A_{2n-1} همگی فردند و ممکن نیست عضوی از $2B_n$ باشند. بنابراین، B_{2n} همان $2B_n$ است، یعنی (ج) را ثابت کرده‌ایم. اکنون حکم (ب) به سادگی با قرار دادن B_{2n} به جای $2B_n$ در تساوی $B_{2n-1} = A_{2n-1} \cup 2B_n$ به دست می‌آید.

اکنون (د) را ثابت می‌کنیم. در بالا ثابت کردیم که

$$B_{2n-1} = (2B_{n-1} + 1) \cup 2B_n$$

در ابتدای راه حل دیدیم که \emptyset عضو همه B_n هاست. در نتیجه 1 عضو $2B_{n-1} + 1$ و در نتیجه B_{2n-1} است.

در این وضعیت به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که عددهای طبیعی مانند n که $B_n = \{0\}$ ، توانهای 2 اند. برای اثبات اینکه توانهای 2 این ویژگی را دارند، فقط کافی است از استقرایی ساده و تساوی $B_{2n} = 2B_n$ استفاده کنیم. برای اینکه ثابت کنیم هیچ عدد دیگری این ویژگی را ندارد، توجه کنید که بنابر (د)، همه B_n ها شامل 1 هستند و اکنون کافی است از استقرایی ساده و تساوی $B_{2n} = 2B_n$ استفاده کنیم.

راه حل دوم

فرض کنید تابعهای مولد g_1, g_2, \dots این طور تعریف شده‌اند: $g_1(x) = g_2(x) = 1$ و

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + xg_{n-1}(x)$$

ادعا می‌کنیم که به ازای هر i ، وقتی و فقط وقتی $i \in B_n$ که ضریب x^i در $g_n(x)$ عددی فرد باشد. برای اثبات این مطلب، ابتدا دنباله $\{f_n\}$ از تابعهای مولد نظیر A_n ها را این طور تعریف می‌کنیم: $f_1(x) = 0$ و $f_{n+1}(x) = xg_n(x)$. ثابت می‌کنیم که f_n ها A_n ها را با همان ترکیب نمایش می‌دهند. از استقرا استفاده می‌کنیم. اگر $n = 1$ ، معلوم است که این حکم درست است. اکنون فرض می‌کنیم که حکم به ازای n ای، $n \geq 1$ ، درست باشد و آن را به ازای $n + 1$ ثابت می‌کنیم. تعریف $f_{n+1}(x) = xg_n(x)$ ، دقیقاً برگردان تعریف A_{n+1} ، $A_{n+1} = \{x + 1 : x \in B_n\}$ است. در مورد B_{n+1} ، برای لحاظ کردن

$$B_{n+1} = (A_n \cup B_n) - (A_n \cap B_n)$$

می‌توانیم g_{n+1} را این طور انتخاب کنیم: $g_{n+1}(x) = g_n(x) + f_n(x)$. اگر $n \geq 2$ ، می‌توانیم f_n را از تساوی $f_n(x) = xg_{n-1}(x)$ جایگزین کنیم و همان طور که می‌خواهیم، به دست بیاوریم

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + xg_{n-1}(x)$$

ثابت می‌کنیم که اگر

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1-k}{k} x^k$$

آن وقت g_n در رابطه بازگشتی موردنظر صدق می‌کند. درحقیقت، با این تعریف،

$$\begin{aligned} g_n(x) + xg_{n-1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1-k}{k} x^k + x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-2-k}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1-k}{k} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1-k}{k-1} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} x^k = g_{n+1}(x) \end{aligned}$$

می‌ماند که ثابت کنیم همه ضریبهای $g_n(x)$ بجز آنهایی که مقدار ثابت‌اند وقتی و فقط وقتی زوج‌اند که n توانی از ۲ باشد. ابتدا فرض کنید n توانی از ۲ باشد و مثلاً $n = 2^m$. باید ثابت کنیم که اگر $0 < k < 2^{m-1}$ ، $\binom{2^m-1-k}{k}$ زوج است. توجه کنید که

$$\binom{2^m-1-k}{k} = \frac{(2^m-1-k)(2^m-2-k)\dots(2^m-2k)}{k(k-1)\dots 1}$$

هم صورت و هم مخرج کسر سمت راست تساوی بالا حاصل ضرب k عدد صحیح متوالی است. توجه کنید که چون حاصل ضرب در مخرج از ۱ شروع شده است، به‌ازای هر عدد صحیح مانند a ، تعداد مضربهای a در صورت دست‌کم به تعداد مضربهای a در مخرج هست. به‌ویژه، این مطلب در مورد توانهای ۲ درست است. درحقیقت، می‌توانیم چیز بیشتری را ثابت کنیم: اگر 2^l بزرگترین توان ۲ باشد که k را می‌شمارد، آن وقت تعداد مضربهای 2^{l+1} در صورت از تعداد مضربهای 2^{l+1} در مخرج بیشتر است. معلوم است که تعداد این مضربها در مخرج برابر است با $\lfloor \frac{k}{2^{l+1}} \rfloor$. با این حال، تعداد این مضربها در صورت برابر است با $\lfloor \frac{k}{2^{l+1}} \rfloor$ و $2^m - 2k$ کوچکترین آنهاست. چون بنابر فرض، $2^{l+1} < k$ را نمی‌شمارد، تعداد مضربهای 2^{l+1} در صورت از تعداد مضربهای 2^{l+1} در مخرج یکی بیشتر است. اکنون، توجه کنید که بزرگترین توان ۲ که حاصل‌ضربی را می‌شمارد برابر است با مجموع تعداد مضربهای 2^j ، $j \geq 1$ ، در این حاصل‌ضرب. بنابراین، از آنچه در بالا گفتیم نتیجه می‌شود که ضریبهای دوجمله‌ای موردنظر زوج‌اند.

اکنون فرض کنید ضریبهای موردنظر همگی زوج‌اند. اگر n توانی از ۲ نباشد، ثابت می‌کنیم دست‌کم یکی از این ضریبهای دوجمله‌ای بجز اولی فرد است. فرض کنید $n = 2^m p$ که در آن

p عددی فرد است و $1 < p$. $\binom{n-1-2^m}{2^m}$ را در نظر بگیرید:

$$\binom{n-1-2^m}{2^m} = \frac{(n-1-2^m)(n-2-2^m)\dots(n-2^{m+1})}{1 \cdot 2 \dots 2^m}$$

چون $n \mid 2^m$ ، به‌ازای هر i ،

$$n - i - 2^m \equiv -i \pmod{2^m} \quad (\text{به‌پیمانه } 2^m)$$

بنابراین، به‌ازای هر i که $i < 2^m$ ، عامل $n - i - 2^m$ در صورت، همان تعداد از مضربهای 2 را دارد که عامل i در مخرج. همین مطلب در مورد عاملهای آخر، $2^{m+1} - n$ و 2^m ، هم درست است. هیچ‌یک از آنها بر 2^{m+1} بخش‌پذیر نیست اما هر دو بر 2^m بخش‌پذیرند، پس در حقیقت ضریب دوجمله‌ای $\binom{n-1-2^m}{2^m}$ فرد است.

۵۱. فرض کنید $S = \{1, 2, \dots, n\}$ و A_1, A_2, \dots, A_k زیرمجموعه‌هایی از S باشند که اگر $1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq k$ ، آن‌وقت

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}| \leq n - 2$$

ثابت کنید $2^{n-2} \leq k$.

(ایران، ۱۹۹۹)

راه‌حل

زیرمجموعه‌ای از S مانند T را 2 -پوشاندنی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای i و j ای (که لزومی ندارد متمایز باشند) $A_i \cup A_j \supseteq T$. بنابر فرض، به‌ازای هر زیرمجموعه از S مانند T ، دست‌کم یکی از مجموعه‌های T و $S - T$ ، 2 -پوشاندنی نیست. فرض کنید در میان زیرمجموعه‌های S که 2 -پوشاندنی نیستند، A مجموعه‌ای باشد که $|A|$ کمترین مقدار ممکن است.

فرض کنید

$$S_1 = \{A \cap A_1, A \cap A_2, \dots, A \cap A_k\}$$

(ممکن است به‌ازای i و j ای متمایز، $A \cap A_i$ و $A \cap A_j$ برابر باشند، در این صورت یکی از آنها را حذف می‌کنیم.) چون A ، 2 -پوشاندنی نیست، اگر $X \in S_1$ ، آن‌وقت $A - X \notin S_1$. بنابراین حداکثر نصف زیرمجموعه‌های A در S_1 قرار دارند و

$$|S_1| \leq \frac{1}{2}|A|$$

از طرف دیگر، فرض کنید $B = S - A$ و

$$S_2 = \{B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_k\}$$

ادعا می‌کنیم که اگر $X \in S_2$ ، آن وقت $B - X \notin S_2$. فرض کنید این ادعا درست نباشد و $B - X$ و X هر دو در S_2 باشند و مثلاً،

$$X = B \cap A_l, \quad B - X = B \cap A_{l'}$$

بنابرویزیگی A ، مجموعه‌هایی مانند A_i و A_j وجود دارند که به‌ازای m ای، $A_i \cup A_j = A - \{m\}$.
در این صورت

$$|A_l \cup A_{l'} \cup A_i \cup A_j| = n - 1$$

که تناقض است. بنابراین فرضمان غلط است و

$$|S_2| \leq 2^{|B|-1} = 2^{n-|A|-1}$$

چون هر یک از A_i ها به‌طور یکتا براساس اشتراکش با A و B مشخص می‌شود، پس

$$k \leq |S_1||S_2| \leq 2^{n-2}$$

فهرست برخی نمادها

مجموعه تهی	\emptyset
مجموعه عددهای طبیعی	\mathbb{N}
مجموعه عددهای صحیح	\mathbb{Z}
عدد صحیح b بر عدد صحیح a بخش پذیر است.	$a \mid b$
(به پیمانه n) $a \equiv b$ بر n بخش پذیر است.	$a \equiv b \pmod{n}$
تعداد عددهای طبیعی کوچکتر از یا مساوی n که نسبت به n اول اند.	$\varphi(x)$
بزرگترین عدد صحیحی که از عدد حقیقی x کوچکتر یا با آن برابر است.	$\lfloor x \rfloor$
کوچکترین عدد صحیحی که از عدد حقیقی x بزرگتر یا با آن برابر است.	$\lceil x \rceil$
$\frac{m!}{(m-n)!}$	$P(m, n)$
$\frac{n!}{n!(m-n)!}$	$\binom{m}{n}$
تعداد عضوهای مجموعه A	$ A $