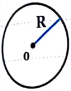
درس اول: حجم و مساحت کره

در این فصل با حجم و مساحت شکل‌هایی مانند کره، استوانه، منشور، مکعب، مکعب مستطیل، هرم و مخروط آشنا می‌شویم.

دایره

تعریف دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان تا یک نقطه ثابت به نام مرکز، مقدار ثابتی است که به آن مقدار ثابت شعاع دایره می‌گویند و با R نشان می‌دهند.



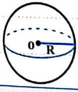
نکته: مساحت دایره‌ای به شعاع R از دستور $S = \pi R^{۲}$ و محیط این دایره از دستور $۲\pi R$ به دست می‌آید.

مثال ۱: محیط دایره‌ای ۶π است، مساحت آن را بیابید.

حل: $۲\pi R = ۶\pi \Rightarrow R = \frac{۶\pi}{۲\pi} = ۳ \quad \Rightarrow \quad \text{مساحت} = \pi R^{۲} = \pi \times ۳^{۲} = ۹\pi$

کره

تعریف کره: مجموعه نقاطی از فضا است که فاصله‌شان از یک نقطه ثابت به نام مرکز، مقدار ثابتی است که به این مقدار ثابت شعاع کره می‌گویند و با **R** نشان می‌دهند.



نکته: حجم کره‌ای به شعاع R از دستور $V = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$ و مساحت کره از دستور $S = ۴\pi R^{۲}$ به دست می‌آید.

مثال ۲: حجم و مساحت کره‌ای که قطرش ۶ می‌باشد را بیابید.

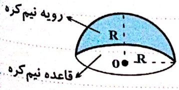
حل: قطر دو برابر شعاع است چون قطر ۶ است پس $R = ۳$ می‌باشد. (شعاع ۳ است)

حجم $V = \frac{۴}{۳}\pi(۳)^{۳} = \frac{۴}{۳} \times \pi \times ۲۷ = \frac{۴\pi \times ۲۷}{۳} = ۳۶\pi$

مساحت $S = ۴\pi(۳)^{۲} = ۴\pi \times ۹ = ۳۶\pi$

نیم کره

نیم‌کره، نصف کره است.



مثال ۳: یک نیم‌کره چوبی توپر به شعاع ۴ سانتی‌متر داریم. مساحت کل و مساحت رویه و حجم آن را بیابید.

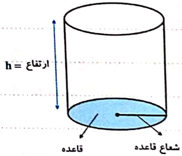
حل:

$$\text{مساحت رویه نیم‌کره} = ۲\pi R^{۲} = ۲\pi\times ۴^{۲} = ۳۲\pi$$

$$\text{مساحت کل نیم‌کره} = ۳\pi R^{۲} = ۳\pi\times ۴^{۲} = ۴۸\pi$$

$$\text{حجم نیم‌کره} = \frac{۲}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۲}{۳}\pi\times ۴^{۳} = \frac{۲}{۳}\times\pi\times ۶۴ = \frac{۱۲۸\pi}{۳}$$

استوانه



نکته: حجم استوانه به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر $V=\pi R^{۲}h$ می‌باشد.

مثال ۴: کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۶ سانتی‌متر محاط شده است.

الف) حجم کره و استوانه را بیابید. ب) حجم فضای بین کره و استوانه را بیابید.

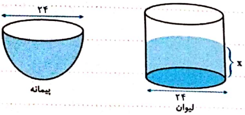
حل: الف)

$$\text{شعاع قاعده استوانه} = \frac{۶}{۲} = ۳ \Rightarrow \text{حجم استوانه}\ V=\pi R^{۲}h = \pi\times ۳^{۲}\times ۶ = ۵۴\pi$$

$$\text{شعاع کره} = \frac{۶}{۲} = ۳ \Rightarrow \text{حجم کره}\ V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi\times ۳^{۳} = ۳۶\pi$$

ب) $\text{حجم فضای بین دو شکل} = \text{حجم استوانه} - \text{حجم کره} = ۵۴\pi - ۳۶\pi = ۱۸\pi$

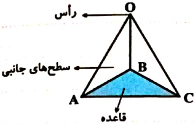
مثال ۵: پیمانه‌ای به شکل نیم‌کره و به قطر ۲۴ سانتی‌متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم. آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟



حل: چون حجم پیمانه (نیم کره) به شعاع ۱۲ با حجم استوانه (لیوان تا ارتفاع x) به ارتفاع x و شعاع قاعده ۱۲ با هم برابرند پس تقسیم‌شان یک می‌شود.

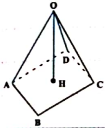
یعنی:

$$\frac{\text{حجم نیمه پر لیوان}}{\text{حجم پیمانه}} = ۱ \Rightarrow \frac{\pi R^{۲}x}{\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}} = ۱ \Rightarrow \frac{x}{\frac{۲}{۳}\times R} = ۱ \xrightarrow{R=۱۲} \frac{x}{\frac{۲}{۳}\times ۱۲} = ۱ \Rightarrow \frac{x}{\frac{۲۴}{۳}} = ۱ \Rightarrow \frac{x}{۸} = ۱ \Rightarrow x = ۸$$



هرم: هرم یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین است و آن را قاعده می‌نامیم.
قاعده هرم یک چندضلعی است. روی محیط این قاعده، سطح‌هایی وجود دارند که در یک نقطه به نام رأس همدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی گویند.
هرم شکل رو به رو دارای سه سطح جانبی و ۴ وجه می‌باشد و شکل وجه‌های آن مثلث است.

ارتفاع هرم: به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود ارتفاع هرم گویند. در شکل زیر OH ارتفاع می‌باشد.



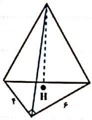
نکته‌ها:

* اگر قاعده هرم ، یک چندضلعی منتظم باشد (مانند مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و ...) و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم گویند.
* در هرم منتظم، اگر قاعده مرکز تقارن داشته باشد پای ارتفاع روی مرکز تقارن می‌افتد.

اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند حجم‌های آنها با هم برابر است.

حجم هرم با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}sh$

مثال ۱: قاعده یک هرم مثلث قائم‌الزاویه به ضلع‌های قائمه ۴ و ۶ می‌باشد. اگر ارتفاع هرم ۱۰ باشد، حجم هرم را بیابید.



حل:

مساحت قاعده برابر است با $\frac{۴\times۶}{۲}=۱۲$

حجم هرم $=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}\times۱۲\times۱۰=۴۰$

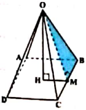
مثال ۲: حجم هرم منتظم با قاعده مربع، به ضلع ۶ برابر ۱۰۸ است، ارتفاع هرم را بیابید.

حل:

$V=\frac{۱}{۳}S.h$ مساحت قاعده $=$ مساحت مربع $=۶^۲=۳۶$

$$۱۰۸=\frac{۱}{۳}S.h\Rightarrow ۱۰۸=\frac{۱}{۳}\times۳۶\times h\Rightarrow ۱۰۸=۱۲h\Rightarrow h=\frac{۱۰۸}{۱۲}=۹$$

مثال ۳: در شکل زیر هرم منتظم با قاعده مربع به ضلع ۱۲ رسم شده است که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌های متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰ سانتی‌متر و M وسط BC است، حجم این هرم را بیابید.

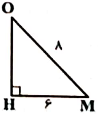


حل: چون ضلع مربع ۱۲ است پس $BM=CM=HM=۶$ مثلث OMB قائم‌الزاویه است بنابر رابطه فیثاغورس OM را می‌یابیم:

$$OM^۲=OB^۲-BM^۲=۱۰۰-۳۶=۶۴\Rightarrow OM=۸$$

حال مثلث قائم‌الزاویه OMH را در نظر می‌گیریم و ارتفاع هرم یعنی OH را می‌یابیم:

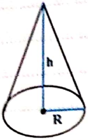
$$OH^۲+HM^۲=OM^۲$$
$$OH^۲+۳۶=۶۴$$
$$OH^۲=۲۸\Rightarrow OH=\sqrt{۲۸}$$



$$\text{حجم هرم}=\frac{۱}{۳}S.h=\frac{(۱۲)^۲\times\sqrt{۲۸}}{۳}=\frac{۱۴۴\sqrt{۲۸}}{۳}=\frac{۱۴۴\times\sqrt{۴\times۷}}{۳}=\frac{۲۸۸\sqrt{۷}}{۳}$$

مخروط

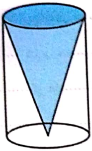
مخروط، شکلی شبیه هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره است و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.



نکته:

حجم مخروط از رابطه زیر به دست می‌آید: $V=\frac{۱}{۳}SH=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h$

مثال ۴: **مطابق شکل مخروطی داخل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۶ و ارتفاع ۱۰ محاط شده است حجم فضای بین آن‌ها را بیابید.**



حل: ابتدا حجم استوانه و مخروط را می‌یابیم و از هم کم می‌کنیم.

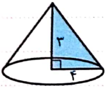
استوانه $V=\pi R^{۲}h=\pi\times ۶^{۲}\times ۱۰=۳۶۰\pi$

مخروط $V=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h=\frac{۱}{۳}\pi\times ۶^{۲}\times ۱۰=\frac{۳۶۰\pi}{۳}=۱۲۰\pi$

حجم فضای بین آنها $=۳۶۰\pi-۱۲۰\pi=۲۴۰\pi$

مثال ۵: **مثلث قائم‌الزاویه به ضلع‌های ۳ و ۴ و ۵ داریم و حول ضلع ۳ سانتی‌متری، دوران می‌دهیم.**

الف) چه شکلی به دست می‌آید. **ب) حجم آن را به دست آورید.**



حل: الف) یک مخروط به دست می‌آید که ارتفاع مخروط ۳ و شعاع قاعده آن ۴ می‌باشد.

ب) حجم $=\frac{۱}{۳}S.h=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h=\frac{۱}{۳}\pi\times ۴^{۲}\times ۳=۱۶\pi$

درس سوم: سطح و حجم

چند نکته درباره حجم حاصل از دوران:

۱ـ از دوران یک مستطیل حول یک ضلع آن، استوانه به وجود می‌آید.

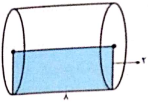
۲ـ از دوران مثلث قائم‌الزاویه، حول ضلع زاویه قائمه، مخروط به دست می‌آید. 

۳ـ از دوران نیم دایره حول قطرش، کره به وجود می‌آید. 

۴ـ از دوران یک ربع دایره حول شعاع آن، یک نیم کره به وجود می‌آید. 

مثال ۱: حجم حاصل از دوران یک مستطیل به طول ۸ و عرض ۲، حول طول آن را بیابید.

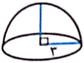
حل: یک استوانه به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۸ به دست می‌آید که حجم آن برابر است با:



$$V = S.h = (\pi R^{۲}).h = \pi(۲)^{۲} \times ۸ = ۳۲\pi$$

مثال ۲: حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۳ سانتی‌متر را حول شعاع آن بیابید.

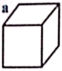
حل: یک نیم کره به شعاع ۳ به دست می‌آید که حجم آن برابر است با:

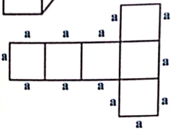


حجم نیم کره $V =$ نصف حجم کره $= \frac{۲}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۲}{۳} \times \pi \times ۳^{۳} = ۱۸\pi$

نکته‌ها:

اگر مکعبی به ضلع a داشته باشیم آن گاه گسترده آن به صورت شکل مقابل است.

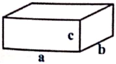


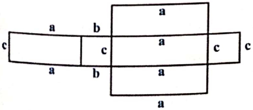


که حجم و مساحت کل (سطح کل) آن از دستور زیر به دست می‌آید:

حجم $V = a^{۳}$, سطح کل $S = ۶a^{۲}$

اگر مکعب مستطیلی به ابعاد a و b و c داشته باشیم آن گاه گسترده آن به صورت:



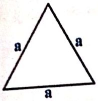


و حجم و مساحت کل از رابطه زیر به دست می‌آید:

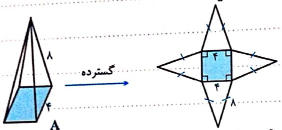
حجم = طول × عرض × ارتفاع $= a \times b \times c$

مساحت کل = (محیط قاعده × ارتفاع) + (مساحت دو قاعده) $= ۲(ab + ac + bc)$

نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\boxed{S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}$

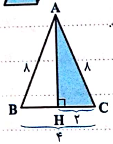


مثال ۳: مساحت گسترده هرم زیر را با توجه به اندازه‌های روی آن محاسبه کنید.



حل: گسترده این هرم از یک مربع به ضلع ۴ و چهارمثلث متساوی‌الساقین به قاعده ۴ و ساق ۸ تشکیل شده است.

کافیست مساحت مثلث‌ها و مربع را بیابیم که مساحت مربع $16=4^2$ می‌باشد. سپس باید ارتفاع مثلث را بیابیم:



طبق رابطه فیثاغورس در مثلث AHC داریم: $AH^2+HC^2=AC^2$

$AH^2+2^2=8^2 \Rightarrow AH^2=64-4=60 \Rightarrow \boxed{AH=\sqrt{60}}$ ارتفاع مثلث‌ها

$\text{مساحت هر مثلث}=\frac{4\times\sqrt{60}}{2}=2\sqrt{60}$

$\text{مساحت کل هرم}=\text{مساحت قاعده مربع}+\text{مساحت چهار مثلث}=16+4(2\sqrt{60})=16+8\sqrt{60}$

نکته کلی: حجم یک شکل هندسی منشوری (مانند مکعب، مکعب مستطیل، منشور، استوانه) برابر است با مساحت قاعده ضرب در ارتفاع و حجم شکل‌های هرمی (مانند هرم و مخروط) برابر است با: $V=\frac{1}{3}\times$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع