به نام خدا

ملت آزمون ۲۴۰

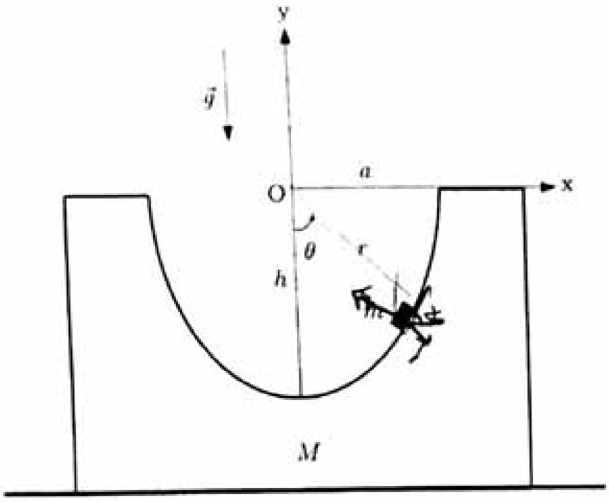
تاریخ: ۹۳_۵_۱۶

اللهم عجل لولیک الفرج

# امتحان نخست دوره تابستانی المپیاد فیزیک ۹۳

**مسئله‌ی 1)**

در دستگاه شکل مقابل جرم کوچک $m$ از حال سکون در زاویه $\theta = \pi/2$ رها می‌شود و در صفحه‌ی قائم داخل کاسه‌ای به جرم $M$ سر می‌خورد. زاویه $\theta$ به سمت راست امتداد قائم مثبت و به سمت چپ آن منفی است. سطح اتکای کاسه با میزی که روی آن قرار دارد، افقی است و کلیه سطوح بدون اصطکاک هستند. سطح ظرف طوری تراش خورده است که طول $r$ نشان داده شده در شکل تابع معین $r(\theta)$ است که $r(0) = a$، $r(\pi/2) = h$ و $r(\theta)$ تابعی زوج است. فرض کنید $T_m$، $T_M$ و $T$ به ترتیب انرژی جنبشی جرم $m$، انرژی جنبشی جرم $M$ و انرژی جنبشی کل دستگاه باشد و داشته باشیم $T = \frac{1}{2}mf(\theta)\dot{\theta}^2$.



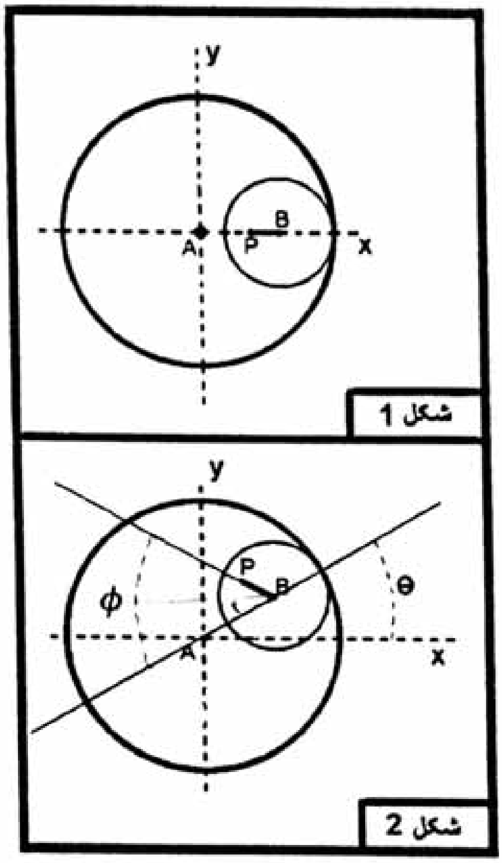

a) نسبت $T_m/T_M$ را بر حسب $\theta$، $r$ و $r' \equiv \frac{dr}{d\theta}$ به دست آورید. (۳٫۵ نمره)

b) تابع $f(\theta)$ را بر حسب $\theta$، $r$ و $r' \equiv \frac{dr}{d\theta}$ به دست آورید. (۱٫۵ نمره)

c) نیروی عمودی سطح $N(\theta)$ بین $m$ و $M$ را بر حسب $\theta$، $r$، $r' \equiv \frac{dr}{d\theta}$، $r''$، $f$ و $f' \equiv \frac{df}{d\theta}$ به دست آورید. (۵ نمره)

لطفاً توجه کنید که مسئله دو صفحه است.

مسئله ی 2)




یک دایره به شعاعِ r مطابقِ شکل درون دایره‌ای بزرگ‌تر به شعاع $R = \alpha r$ قرار دارد، که $\alpha$ ثابتی مثبت و بزرگ‌تر از 1 است. دایره‌ی کوچک شروع به غلتشِ محض در داخلِ دایره‌ی بزرگ می‌کند. مبدأ مختصات منطبق بر مرکزِ دایره‌ی بزرگ است. دایره‌ی بزرگ ثابت است و نمی‌چرخد.

یک میله مانند پره‌ی چرخ به دایره‌ی کوچک وصل شده است. میله در ابتدا در حالتِ افقی قرار دارد. مرکزِ دایره‌ی بزرگ را با A، مرکزِ دایره‌ی کوچک را با B و نقطه‌ی انتهایی میله را با P نشان می‌دهیم. مختصات P در ابتدا $R - r - \beta r$ در راستای x است، که $\beta$ ثابت است. $\beta$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد (شکل با فرضِ $\beta$ مثبت است). در هر لحظه، زاویه‌ای را که خطِ واصلِ نقاطِ A و B با افق می‌سازد با $\theta$ نشان می‌دهیم. زاویه‌ای که امتدادِ میله (یعنی خطِ واصلِ B و P) با خطِ واصلِ A و B در جهتِ ساعتگرد می‌سازد، با $\phi$ نشان می‌دهیم. در ابتدا (شکل 1)، هم $\theta = 0$ و هم $\phi = 0$ است. در همه‌ی قسمت‌های مسئله، پاسخ را تا حدِ امکان ساده کنید.

از این به بعد منظور از ثوابت مسئله، مجموعه‌ی r، $\alpha$ و $\beta$ است.

**الف)** (0.5 نمره) وقتی دو جسم (یا دو منحنی) روی هم غلتشِ محض می‌کنند، در هر لحظه، طول قسمتی از هر کدام از خمها که با خمِ دیگر تا آن لحظه در تماس بوده است با هم برابرند. با استفاده از این نکته (یا از هر روش دیگری)، $\phi$ را بر حسب $\theta$ و ثوابت بنویسید.

**ب)** (2.5 نمره) مختصاتِ x و y نقطه‌ی P را به صورتِ تابعی از $\theta$ و ثوابت بیابید. همچنین فاصله‌ی نقطه‌ی P از نقطه‌ی A را به صورت تابعی از $\theta$ و ثوابت بیابید.

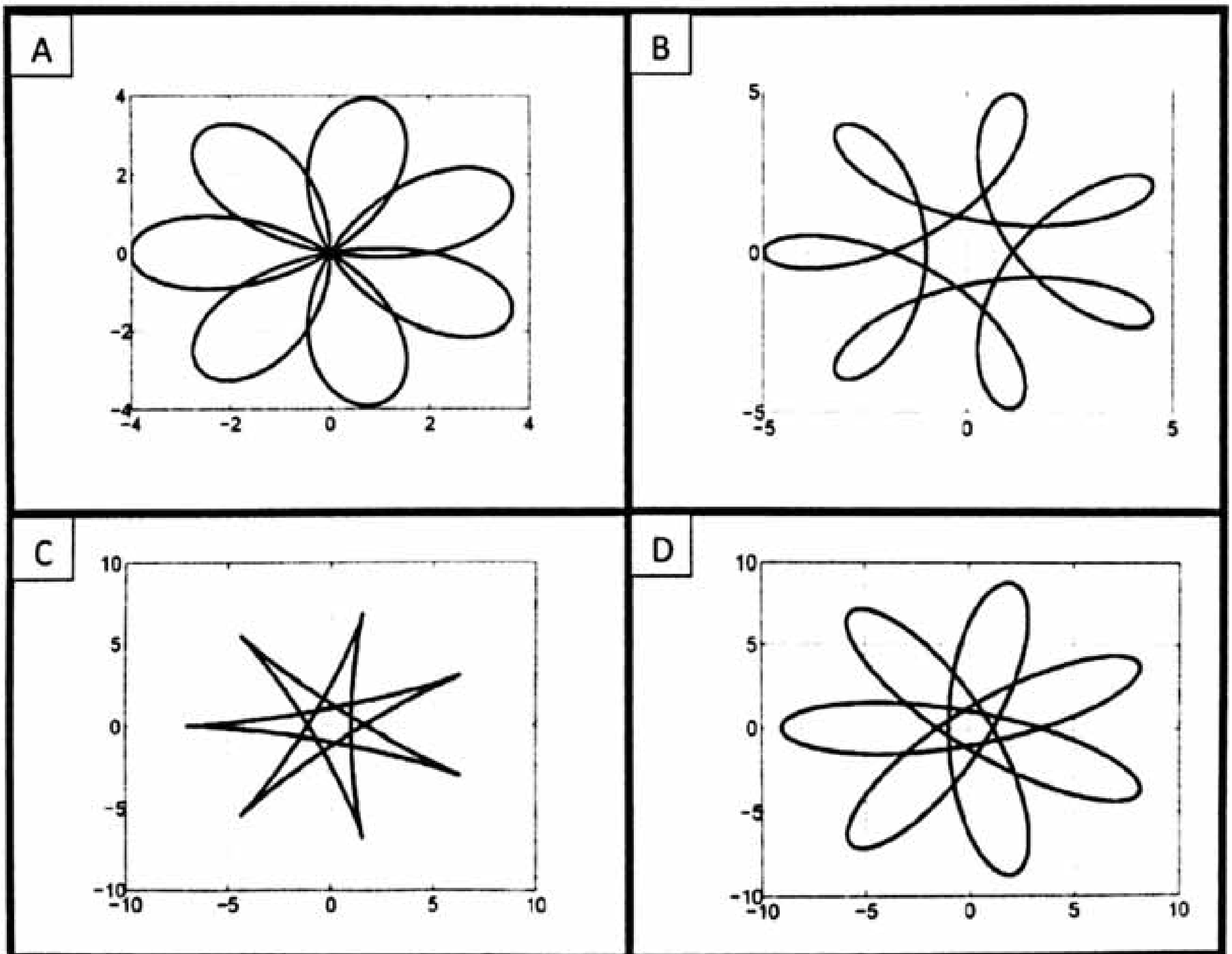
پ) (1.5 نمره) اگر $\theta$ با آهنگِ ثابت افزایش یابد، یعنی داشته باشیم $\dot{\theta} = \omega$ که در آن $\omega$ ثابتی مثبت است، بردار سرعتِ نقطه‌ی $P$ و بزرگی آن را بر حسبِ $\theta$، $\omega$ و ثوابت مسئله بیابید.

ت) (1.5 نمره) اگر داشته باشیم $\alpha = 2$ و $\beta = -1$، بردارِ سرعت و بزرگی سرعتِ نقطه‌ی $P$ را بر حسبِ $\theta$، $\omega$ و $r$ بیابید. مسافتِ کلِ طی شده توسطِ نقطه‌ی $P$ را در یک تناوبِ کاملِ $\theta$ بر حسب $r$ بنویسید.

ث) (1 نمره)اگر داشته باشیم $\alpha = 2$ و $\beta \neq -1,1$، مسیرِ نقطه‌ی $P$ چه شکلِ هندسی‌ای است؟ دلیل ارائه کنید.

ج) (1 نمره)اگر داشته باشیم $\alpha = 3$ و $\beta = 1$، طولِ مسیری را که $P$ در یک تناوبِ کاملِ $\theta$ طی می‌کند بر حسب $r$ بنویسید.

چ) (2 نمره) هر کدام از چهار شکلِ زیر، مربوط به یکی از مجموعه پارامترهایی است که در جدول داده شده است. مشخص کنید کدام مسیر مربوط به کدام مجموعه است. دلیل ارائه کنید.




| مجموعه‌های پارامترها | |
|---|---|
| $r = 3, \alpha = \frac{7}{3}, \beta = 1$ | $r = 3, \alpha = \frac{7}{3}, \beta = \frac{5}{3}$ |
| $r = 5, \alpha = \frac{7}{5}, \beta = \frac{3}{5}$ | $r = 5, \alpha = \frac{7}{5}, \beta = \frac{2}{5}$ |

مسئله ی 3)

تابع توزیع سرعت ذرات یک گاز ایده‌آل در دمای $T$

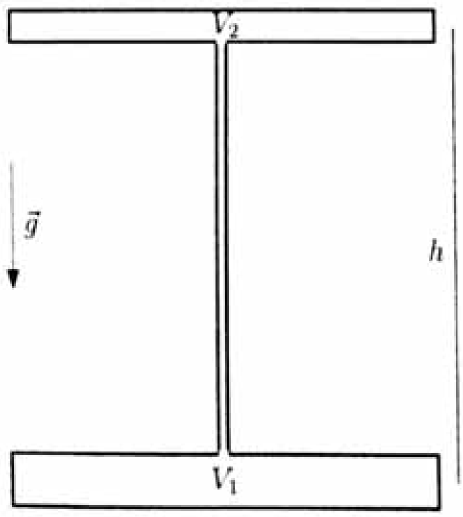
$$P(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}$$

است که $m$ جرم یک ذره و $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ است. احتمال این که مؤلفه‌های سرعت یک ذره بین $v_x$ و $v_x + dv_x$، $v_y$ و $v_y + dv_y$، $v_z$ و $v_z + dv_z$ باشد برابر است با $P(\vec{v})dv_x dv_y dv_z$ و $\int_{v_x=-\infty}^{+\infty}\int_{v_y=-\infty}^{+\infty}\int_{v_z=-\infty}^{+\infty} P(\vec{v})dv_x dv_y dv_z = 1$.

اگر ذرات گاز آزاد نباشند و انرژی پتانسیل برهم‌کنش هر ذره در یک میدان خارجی $U(\vec{r})$ باشد که $\vec{r}$ بردار مکان ذره نسبت به یک مبدأ مختصات است، آنگاه تابع توزیع ذرات به صورت زیر تعمیم داده می‌شود

$$P(\vec{r}, \vec{v}) = C\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-[mv^2/2+U(\vec{r})]/kT}$$

و $P(\vec{r}, \vec{v})dxdydzdv_x dv_y dv_z$ احتمال وجود یک ذره در عنصر حجم $dxdydz$ حول مکان $\vec{r}$ با مؤلفه‌های سرعتی بین $v_x$ و $v_x + dv_x$، $v_y$ و $v_y + dv_y$، $v_z$ و $v_z + dv_z$ است.




ظرفی مطابق شکل شامل دو قسمت به حجم $V_1$ و $V_2$ است که توسط مجرایی به هم وصل شده‌اند و روی هم رفته $N$ ذره گاز هر یک به جرم $m$ در آن‌ها در دمای $T$ و در حال تعادل قرار دارد. حجم مجرایی که دو ظرف را به هم متصل کرده در مقایسه با حجم دو قسمت ظرف آنقدر کوچک است که از ذرات گازی که در آن قرار دارند می‌توان صرفنظر کرد. ذرات گاز با هم برهم‌کنش ندارند فقط انرژی پتانسیل گرانشی هر یک از ذراتی که در حجم $V_2$ هستند نسبت به هر یک ذراتی که در حجم $V_1$ هستند به اندازه‌ی $mgh$ بیشتر است.

**آ)** ثابت $C$ را به دست آورید. (۲ نمره)

**ب)** تعداد ذرات و فشار در حجم $V_1$ و $V_2$ را به دست آورید. (۳ نمره)

**پ)** انرژی داخلی گاز و ظرفیت گرمایی گاز در حجم ثابت را به دست آورید. (۳ نمره)

**ت)** در دماهای خیلی پایین $mgh/kT \gg 1$ و در دماهای خیلی بالا $mgh/kT \ll 1$ کمیت‌های خواسته شده در قسمت ب) و پ) را به دست آورید. (۲ نمره)

مسئله 4)

دو قسمت این مسئله از هم مستقل اند.

آ) چه کسری از ملکول‌های $H_2$ و $N_2$ در سطح زمین و ماه سرعت‌شان (در راستای شعاعی از مرکز به سمت بیرون) از سرعت فرار در سطح زمین و ماه بیشتر است؟ دما در سطح زمین و ماه را 300 K در نظر بگیرید. (۵ نمره)

ب) انرژی بستگی الکترون اتم هیدرون به هسته در حالت عادی 13.6 eV است. در دمای اتاق تعداد کمی از اتم‌های هیدروژن یونیزه هستند. در آزمایشگاه اگر بخواهیم تعداد زیادی یون هیدروژن تولید کنیم گاز را در محفظه‌ای که دارای یک آند و کاتد است قرار می‌دهیم و با برقراری اختلاف پتانسیل زیاد باعث ایجاد تخلیه الکتریکی در گاز می‌شویم. فرض کنید در اثر تخلیه الکتریکی الکترون‌هایی تولید می‌شوند که تندی آن‌ها از تابع توزیع ماکسول در دمای 20000 K تبعیت می‌کند. هر کدام از این الکترون‌ها که انرژی جنبشی‌شان مساوی یا بیشتر از انرژی بستگی الکترون به هسته باشد در برخورد به هر اتم هیدروژن آن را یونیزه می‌کنند. حساب کنید چند درصد این الکترون‌ها باعث یونیزه شدن اتم‌های هیدروژن می‌شوند. فرض کنید همه‌ی الکترون‌هایی که انرژی جنبشی کافی دارند در فرایند یونیزه کردن شرکت می‌کنند. (۵ نمره)

کمیت‌های عددی و یا روابط زیر ممکن است سودمند باشند:

جرم زمین: $5.98 \times 10^{24}$ kg

شعاع زمین: $6.37 \times 10^{6}$ m

جرم ماه: $7.36 \times 10^{22}$ kg

شعاع ماه: $1.74 \times 10^{6}$ m

ثابت گرانش $6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/s^2 \cdot kg}$، ثابت بولتزمن $1.38 \times 10^{-23}$ J/K و عدد آووگادرو $6.02 \times 10^{23}$ است.

جرم یک مول $H_2$ را 2 g و جرم یک مول $N_2$ را 28 g بگیرید.

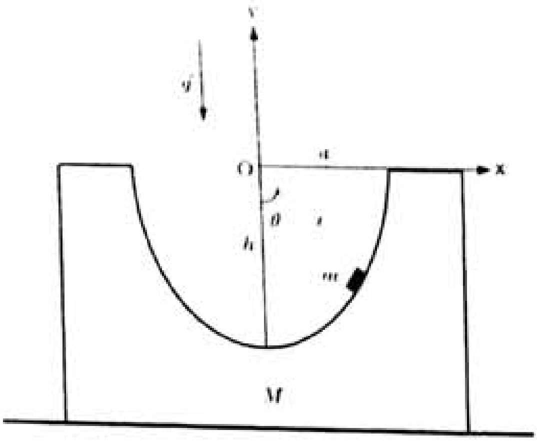
$1\ \mathrm{eV} = 1.60 \times 10^{-19}$ J

$$x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} - \frac{1}{2\alpha}\frac{d}{dx}(x e^{-\alpha x^2})$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_0} e^{-x^2} dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x_0 - x_0^3/3 + \cdots) & x_0 \ll 1 \\ 1 - \frac{e^{-x_0^2}}{x_0\sqrt{\pi}}(1 - 1/2x_0^2 + \cdots) & x_0 \gg 1 \end{cases}$$

## مسئله ی) ۱

امتحان دوم دوره تابستانی المپیاد فیزیک ۹۳




مسئله‌ی 1) در دستگاه شکل مقابل جرم کوچک $m$ از حال سکون در زاویه $\theta = \pi/2$ رها می‌شود و در صفحه‌ی قائم داخل کاسه‌ای به جرم $M$ سر می‌خورد. زاویه $\theta$ به سمت راست امتداد قائم مثبت و به سمت چپ آن منفی است. سطح اتکای کاسه با میزی که روی آن قرار دارد، افقی است و کلیه سطوح بدون اصطکاک هستند. سطح ظرف طوری تراش خورده است که طول $r$ نشان داده شده در شکل تابع معین $r(\theta)$ است که $r(0) = h$، $r(\pi/2) = a$ و $r(\theta)$ تابعی زوج است.

a) نیروی عمودی سطح در پایین‌ترین نقطه کاسه $(\theta = 0)$ را بر حسب پارامترهایی که از تابع $r(\theta)$ در آن نقطه به دست می‌آید، حساب کنید. (۵ نمره)

یادآوری: شعاع انحنای خمی با معادلات پارامتری $x = x(u)$ و $y = y(u)$ در هر نقطه از رابطه

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|y''x' - x''y'|}$$

به دست می‌آید که علامتهای $'$ و $''$ به ترتیب نشان دهنده مشتق‌های اول و دوم نسبت به پارامتر مسیر $u$ هستند.

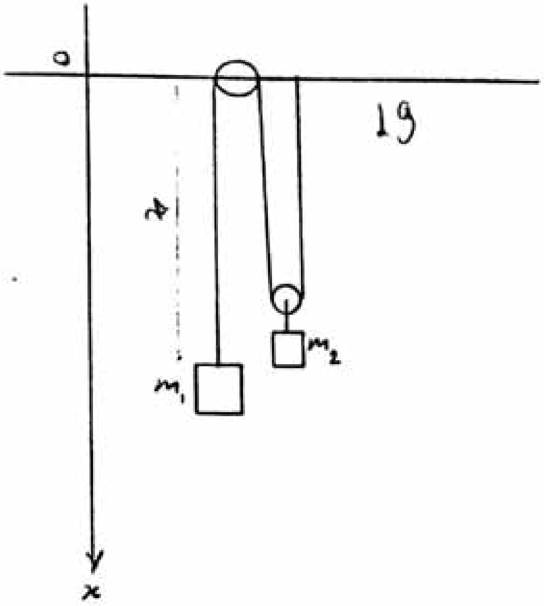
b) بسامد نوسان‌های کوچک دستگاه حول وضعیت تعادل پایدار را حساب کنید. (۳/۵ نمره)

c) برای حالت خاص $r(\theta) = (h - a)\cos\theta + a$ جواب قسمت‌های a و b را حساب کنید. (۱/۵ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

## مسئله ی ۲)

مسئله ی 2) در دستگاه شکل زیر جرم نخ $\mu$، طول نخ $l$ و جرم و شعاع قرقره‌ها ناچیز است. جرم $m_1$ از مکان اولیه $x = x_0$ و از حال سکون رها می‌شود و هر نوع اتلاف انرژی قابل چشمپوشی است. در این مسئله شما مجاز هستید از توابع مشخصی که بر حسب پارامترهای داده شده تعریف می‌کنید در بیان جواب‌ها استفاده کنید.




a) سرعت و شتاب جرم $m_1$ را در هر لحظه بر حسب $x$ به دست آورید. (۳ نمره)

b) نیروی کل سقف نگهدارنده دستگاه را در هر لحظه بر حسب $x$ به دست آورید. (۱/۵ نمره)

c) چه شرطی برقرار باشد تا دستگاه یک نقطه تعادل داشته باشد. (۱/۵ نمره)

d) با فرض آنکه $m_1 = m$، $m_2 = 3m$ و $\mu = 2m/3$ و دستگاه از وضعیت تعادل طوری شروع به حرکت کند که جرم $m_1$ به سمت بالا برود، سرعت جرم $m_1$ هنگام رسیدن به انتهای مسیر چقدر است و در چه مدتی نصفه دوم مسیرش را طی می‌کند؟ محاسبه را تا آنجا که امکان‌پذیر است ادامه دهید و جوابها را ساده کنید. (۴ نمره)

ممکن است این انتگرال به کار آید

$$\int \frac{(\sqrt{u+a})du}{u} = 2\sqrt{u+a} - 2\sqrt{a}\tanh^{-1}(\sqrt{1+u/a})$$

ادامه سوالات در صفحه بعد

## مسئله ی) ۳

در این مسئله می‌خواهیم مدل ساده‌ای از یک بالن را بررسی کنیم. بالن مثل یک بادکنک بزرگ است که محفظه‌ای برای حمل مسافر از آن آویزان شده است. یک مشعل، گاز درون بالن را گرم می‌کند. جسم بالن، نایلن است و نمی‌تواند اختلاف فشاری بین گاز درون بالن و هوای بیرون تحمل کند. نیروی ارشمیدس باعث می‌شود بالن بالا برود. در این مسئله از حجم مسافران و محفظه‌شان در مقابل حجم بالن صرف‌نظر می‌کنیم. شتاب گرانش زمین g است و فرض می‌کنیم با ارتفاع تغییر نمی‌کند.

در کل این مسئله، هوای بیرون و گاز درون بالن را گازهای ایده‌آل فرض می‌کنیم، که رابطه‌ی $P\mu = \rho R T$ برایشان برقرار است. در این رابطه، P فشار، $\mu$ جرم مولی، $\rho$ چگالی، $T$ دما و R یک ثابتِ معلوم است. برای سادگی فرض کنید هوا فقط از یک گاز تشکیل شده و جرم مولی‌اش مقدارِ معلومِ $\mu_a$ است. جرمِ مولی گازِ درون بالن هم مقدارِ معلومِ $\mu_b$ است. در این مسئله، فرض کنید دمای جو زمین با ارتفاع تغییر نمی‌کند، و همه جا $T_0$ است. فشارِ جو در سطحِ زمین را با $P_0$ نشان می‌دهیم، که مقدارش معلوم است.

در ابتدا فرض کنید بالن روی زمین است و چگالی هوا در سطحِ زمین $\rho_a(0)$ و معلوم است.

**الف)** فرض کنید مجموعِ جرمِ محفظه و مسافران M باشد. فرض کنید چگالی گازِ درون بالن در این لحظه، $\rho_b(0)$ و معلوم است. حداقل مقدارِ حجمِ بالن چه قدر باشد (بر حسبِ $(M, \rho_a(0), \rho_b(0))$ که بالن از سطحِ زمین جدا شود؟ (۱ نمره)

از این جا به بعد، حجمِ بالن را با V نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم همیشه ثابت می‌ماند، و جزوِ داده‌های مسئله است.

**ب)** با فرضِ ایستایی جَو، فشارِ جو را در ارتفاعِ z از سطحِ زمین بر حسبِ $P_0, \mu_a, g, R, T_0, z$ بیابید. ایستایی یعنی هر المان از جَو را که در نظر بگیریم، وزنش با اختلاف فشار بالا و پایین خنثی می‌شود. (۲ نمره)

**پ)** فرض کنید می‌خواهیم بالن با سرعتِ خیلی کمی بالا برود، به طوری که در هر لحظه بتوان نیروی وزنش را با نیروی بالابرنده مساوی گرفت. دمای گازِ درون بالن را بر حسبِ ارتفاع برای این منظور بیابید. (۲ نمره)

**ت)** فرض کنید گازِ درون بالن را حداکثر بتوان تا دمای $T_{max}$ بالا برد. با توجه به این محدودیت دمایی، بیشینه‌ی ارتفاعی که می‌توانیم با این روش بالن را بالا ببریم، چه‌قدر است؟ (۱ نمره)

ادامه‌ی سوالات در صفحه بعد

حالا فرض کنید در هر ارتفاع، دما را $\alpha$ برابر دمایی که در قسمت «ب» یافتید، تنظیم کنیم که $\alpha > 1$ مقداری ثابت است

ث) شتاب بالن را بر حسب ارتفاع بیابید (۲ نمره)

ج) سرعت بالن را بر حسب ارتفاع بیابید. (۳ نمره)

فرض کنید $\alpha = 1 + \epsilon$ که در آن $\epsilon$ ثابتی مثبت و خیلی کوچک است. همچنین فرض کنید ارتفاع پرواز بالن به قدری کوچک است که بتوانیم فشار هوا را با یک تابع خطی به صورت $P = P_0(1 + \beta z)$ بر حسب ارتفاع تقریب بزنیم. ادامه ی محاسبات را تا مرتبه‌ی غالب نسبت به $\epsilon$ و تا مرتبه ی مناسب نسبت به $\beta z$ که تقریب بیان شده صحیح باشد، انجام دهید

چ) سرعت بالن را بر حسب ارتفاع تا مرتبه‌ی تقریب های ذکر شده محاسبه کنید. (۱ نمره)

ح) اگر بالن در زمان صفر و از حالت سکون از سطح زمین شروع به حرکت کند، رابطه‌ای بین ارتفاع z بالن و زمان حرکت بیابید. (۲ نمره)

خ) زمانی را که طول می‌کشد بالن به بیشینه‌ی ارتفاع به دست آمده در بخش «ث» برسد،محاسبه کنید. (۱ نمره)

راهنمایی: انتگرال‌های زیر ممکن است مفید باشند.

$$\int \frac{du}{u(u+a)} = \frac{1}{a}\ln\frac{u}{u+a} + \text{ثابت}$$

$$\int \frac{du}{u+a} = \ln(u+a) + \text{ثابت}$$

ادامه سوالات در صفحه بعد

## مسئله ی ۴

<u>برای انتگرال‌هایی که با آنها روبرو می‌شوید، شاید راهنمایی‌هایی که در پایان سوال آمده کمک کند</u>

در این سوال می‌خواهیم بستگی کمیت‌های ترمودینامیکی در جو را با فرض معادله‌ی حالت وان‌دروالس بررسی کنیم. شتاب گرانش، $g$، را مستقل از ارتفاع می‌گیریم.

فرض می‌کنیم جو را به لایه‌های کوچکی تقسیم کرده‌ایم و در هر لایه فشار، دما و چگالی تنها به ارتفاع آن لایه از سطح زمین بستگی دارد. ارتفاع از سطح زمین را با $z$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب از این پس داریم $P(z)$، $\rho(z)$ و $T(z)$

| |
|---|
| الف) (۰.۵ نمره) فرض کنید هر لایه از جو تعادل مکانیکی دارد. قانون دوم نیوتون را برای هر لایه بنویسید |

معادله‌ی حالت وان‌دروالس چنین است:

$$(P + a\frac{n^2}{V^2})(V - nb) = nRT \qquad (1)$$

که در آن $P$ فشار، $n$ تعداد مول گاز، $V$ حجم، $T$ دما، $R$ ثابت گازهای کامل است. $a$ و $b$ ثوابتی هستند که از کمیت‌های ترمودینامیک مستقل‌اند و تنها به جنس گاز برمی‌گردند.

| |
|---|
| ب) (۰.۵ نمره) در معادله‌ی حالت وان‌دروالس حجم و تعداد مول را حذف کنید و معادله‌ی حالت را برحسب چگالی و جرم مولی، $M$، بنویسید. |

فرض کنید بر هر لایه از جو معادله‌ی حالت وان‌دروالس حاکم است و ثوابت $a$، $b$ و جرم مولی گاز مستقل از ارتفاع هستند. برای به دست آوردن بستگی کمیت‌ها به ارتفاع، مساله را در دو حالت حل می‌کنیم: هم‌دما بودن جو و بی‌درو بودن.

| |
|---|
| ج) (۳ نمره) با فرض ثابت بودن دمای جو، $T$، معادله‌ای جبری (و نه دیفرانسیلی!) برای $\rho(z)$ بنویسید که از حل آن چگالی بر حسب ارتفاع به دست بیاید. چگالی در سطح زمین را $\rho(0)$ بگیرید. |

به طور معمول گفته می‌شود که کمیت‌های $a$ و $b$ کوچک‌اند. اما این کمیت‌ها بُعد فیزیکی دارند!

| |
|---|
| د) (۱ نمره) با استفاده از آنچه در قسمت ج) یافتید (یا روشی دیگر) به طور جداگانه مشخص کنید که کمیت‌های $a$ و $b$ نسبت به چه کمیت‌های فیزیکی کوچک هستند. اگر لازم شد، چگالی نوعی گاز را مقدار آن در سطح زمین بگیرید. |

**ادامه سوالات در صفحه بعد**

انرژی گاز وان‌درواس به این شکل است

$$U = \frac{3}{2}nRT - a\frac{n^2}{V} \qquad (۲)$$

ه) (۱ نمره) برای فرآیند بی‌دررویی که گاز وان‌دروالس طی می‌کند، تابعی بر حسب چگالی و دما بنویسد که در طی فرآیند ثابت باشد.

و) (۱ نمره) برای یک فرآیند بی‌دررو با استفاده از قسمت و) دما را از معادله‌ی حالت حذف کنید و فشار را به عنوان تابعی از چگالی و ثوابت بنویسید. دما در سطح زمین را $T(0)$ و چگالی در سطح زمین را $\rho(0)$ بگیرید.

ز) (۳ نمره) فرض کنید رابطه‌ی قسمت و) برای جو برقرار است. معادله‌ای جبری( و نه دیفرانسیلی!) برای $\rho(z)$ بنویسید که از حل آن چگالی بر حسب ارتفاع به دست بیاید. دما در سطح زمین را $T(0)$ و چگالی در سطح زمین را $\rho(0)$ بگیرید.

راهنمایی برای انتگرال گیری

شما می‌توانید برای انتگرال گیری از توابع جبری که به شکل کسر ظاهر می‌شوند، از تجزیه‌ی کسری استفاده کنید، برای مثال:

$$r \neq s, n \in N \Longrightarrow \frac{1}{(x-r)(x-s)^n} = \frac{A}{x-r} + \frac{B_1}{(x-s)} + \frac{B_2}{(x-s)^2} + \dots + \frac{B_n}{(x-s)^n} \qquad (۳)$$

که ثوابت، $A_1$ و $B_1$ تا $B_n$ باید تعیین شوند.

اگر $(s \in R)$ داریم

$$\int dx \frac{x^{\frac{2}{3}}}{(1-sx)^{\frac{5}{3}}} = \frac{3}{5}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{(1-sx)^{\frac{2}{3}}} \qquad (۴)$$

$$\int dx \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}(1-sx)^{\frac{5}{3}}} = \frac{3}{10}x^{\frac{1}{3}}\frac{(5-3sx)}{(1-sx)^{\frac{2}{3}}} \qquad (۵)$$

« باآرزوی موفقیت شما »

| سوالات امتحان تئوری سوم<br>نام :<br>نام خانوادگی : | بسمه تعالی<br>باشگاه دانش پژوهان جوان | المپیاد: فیزیک<br>زمان پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه<br>تاریخ آزمون: ۹۳/۵/۲۹<br>۴ مساله در ۵ صفحه است. |
|---|---|---|

**تذکر:**

**۱- مشخصات خود به هیچ وجه روی برگه های پاسخنامه ننویسید.**

**۲- جهت پاسخ گویی از لاک غلط گیر یا مداد استفاده ننمایید.**

**۳- پاسخ هر سوال را با خط خوانا در برگه پاسخنامه مخصوص به خود بنویسید.**

---

اختیاری

**مساله ۱)** سطحی افقی بی نهایت طویلی را در نظر بگیرید که با سرعت افقی ثابت $u$ در جهت $\hat{x}$ در حال حرکت است شتاب گرانش به سمت پایین، در جهت $-\hat{y}$، و مقدار آن $g$ است. جسمی از ارتفاع $h_0$ بالای سطح، از حالت سکون رها می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی سطح با جسم را $\mu$ فرض کنید. زمان هر برخورد جسم با سطح را ناچیز فرض کنید با این فرض می‌توان از اثر نیروی وزن در زمان برخورد صرف نظر کرد. در هر برخورد، سرعت جسم در راستای عمود بر سطح تغییر جهت می‌دهد و اندازه‌ی آن در مقدار ثابت $e$ ضرب می‌شود. سرعت عمودی جسم درست پس از برخورد $n$ ام را با $v_{y_n}$ و سرعت افقی جسم درست پس از برخورد $n$ ام را با $v_{x_n}$ نمایش می‌دهیم.

الف) $v_{y_n}$ را به دست آورید. (۱ نمره)

فرض کنید به ازای برخوردهای با شماره ی $n$ که $n < N$، جسم در تمام مدت زمان برخورد روی سطح می‌لغزد و به ازای برخوردهای با شماره‌ی $n > N$ روی سطح نمی‌لغزد. محاسبات بخش های «ب»، «پ» و «ت» را به ازای $n < N$ انجام دهید.

ب) $v_{x_n}$ را بر حسب $\mu$، $g$، $h_0$، $e$ و $n$ به دست آورید. (۴ نمره)

پ) $\Delta x_n$ مسافت افقی طی شده توسط جسم را بین دو برخورد $n$ ام و $n+1$ ام حساب کنید. (۱ نمره)

ت) کل مسافت افقی طی شده توسط جسم را تا لحظه‌ی برخورد $n$ ام به دست آورید. (۱ نمره)

ث) مقدار $N$ را حساب کنید. (۱/۵ نمره)

ج) کل مسافت افقی طی شده توسط جسم را تا لحظه‌ی برخورد $n$ ام به ازای $n > N$ به دست آورید. (۱/۵ نمره)

**ادامه سوالات در صفحه بعد**

## مسئله ۲

احمد احسان

محفظه‌ای به حجم $V$ در نظر بگیرید که با دریچه‌ای با مساحت کوچک $A_c$ با محیطی با دمای ثابت $T_c$ و فشار ثابت $P_c$ و با دریچه‌ی دیگری با مساحت کوچک $A_o$ با محیطی با دمای ثابت $T_o$ و فشار ثابت $P_o$ در ارتباط است. ذرات درون محفظه و دو محیط، ذراتی نقطه‌ای به جرم $m$ هستند که با برهم کنشی با دیگر ذرات ندارن و سرعت های آن‌ها از توزیع ماکسول پیروی می‌کند. فشار و دمای محفظه را به ترتیب با $P_R$ و $T_R$ نمایش می‌دهیم.

الف) $\frac{dN_R}{dt}$، آهنگ زمانی تغییر تعداد ذرات درون محفظه را بیابید. (۱ نمره)

۱ پ) متوسط انرژی جنبشی ذرات وارد شده به محفظه از دریچه‌ی به مساحت $A_c$ را بیابید. (۱ نمره)

ب) $\frac{dE_R}{dt}$، آهنگ تغییر انرژی ذرات درون محفظه را محاسبه کنید. (۱ نمره)

۲ پ) $\frac{dT_R}{dt}$، آهنگ تغییر دمای محفظه را بیابید. (۲ نمره)

ت) $\frac{dP_R}{dt}$، آهنگ تغییر فشار محفظه را محاسبه کنید. (۲ نمره)

ث) دما و فشار تعادلی محفظه را بر حسب $A_c$، $T_c$، $P_c$، $A_o$، $T_o$، $P_o$ به دست آورید. (۲ نمره)

ج) مقدار عددی فشار و دمای تعادلی محفظه را به ازای مقادیر زیر به دست آورید. (۱ نمره)

$$P_o = 1\,atm\,,\qquad T_o = 310\,K\,,\qquad A_o = 0.2\,m^2,\qquad P_c - P_o = 200\,Pa,$$
$$T_c = 280\,K,\qquad A_c = 0.5\,m^2$$

ادامه سوالات در صفحه بعد

سادہ

**مسئله ) ۳**

ظرفی مجهز به یک پیستون شامل $n$ مول گاز ایده‌آل در نظر بگیرید. پیستون را با سرعت ثابت $u$ بیرون می‌کشیم. فرض کنید سرعت پیستون آنقدر کم است که گاز داخل ظرف همواره در حالت تعادل باقی می‌ماند و نیز با وجود متحرک بودن پیستون، تابع توزیع ذرات گاز همواره به صورت

$$P(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \quad 4\pi v^2$$

خواهد بود. جرم هر یک از ذرات گاز $m$ است. اگر برخورد ذرات گاز به پیستون متحرک را کاملاً کشسان در نظر بگیریم

آ) فشار وارد بر پیستون متحرک از سوی گاز داخل ظرف را در وضعیتی که دمای گاز $T$ و حجم ظرف $V$ است تا مرتبه‌ی دوم $u/\bar{v}$ ($\bar{v} = \sqrt{8kT/\pi m}$) محاسبه کنید. (۷ نمره)

ب) از آنجا که حرکت پیستون کند است تعادل ترمودینامیکی در نقاط مختلف ظرف همواره برقرار است. ظرفیت گرمایی مولی گاز در حجم ثابت را $C_v$ در نظر بگیرید و رابطه‌ای بین دما و حجم در یک تحول بی‌دررو در این ظرف به دست آورید. (۳ نمره)

در صورت نیاز:

$$x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} - \frac{1}{2\alpha}\frac{d}{dx}(x e^{-\alpha x^2})$$

$$\frac{d}{dx}\ln(ax^2+bx+c) = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x_0 - x_0^3/3 + \cdots) & x_0 \ll 1 \\ 1 - \frac{e^{-x_0^2}}{x_0\sqrt{\pi}}(1 - 1/2x_0^2 + \cdots) & x_0 \gg 1 \end{cases}$$

ادامه سوالات در صفحه بعد

جواب

## مسئله ۴ )

برای پاسخ به این مساله به هیچ اطلاعات الکترومغناطیسی‌ای نیاز ندارید.

قانون کولن نیروی وارد بر باری ساکن، از سوی بار ساکن دیگری را مشخص می کند. می‌خواهیم نیروی الکتریکی وارد بر باری ساکن از سوی باری متحرک را به‌دست آوریم.

فرض کنید ذره‌ای با بار $q$ (ذره‌ی اول) در مکان $\mathbf{r}$ ثابت است. ذره‌ای بار $Q$ (ذره‌ی دوم) روی مسیری مشخص و از پیش تعیین‌شده‌ای حرکت می کند که آن را با $\mathbf{r}'(t)$ نشان می‌دهیم. ذره‌ی دوم برای تاثیر گذاشتن بر روی ذره‌ی اول، در فضا موج الکترومغناطیسی ایجاد می کند. این موج با سرعت نور($c$) حرکت می کند. بنابر معادلات ماکسول، برای حساب کردن تاثیر ذره‌ی دوم بر اول در لحظه‌ی $t$ باید ببینیم موج به وجود آمده از بار دوم در چه لحظه‌ای مثل $t_r$ در لحظه‌ی $t$ به بار اول می‌رسد. از آنجا که سرعت این موج ثابت است می‌توان برای این **زمان تاخیری** $t_r$، معادله‌ای ساده نوشت:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t_r)| = c(t-t_r) \qquad t > t_r \qquad (۱)$$

این رابطه می‌گوید که اگر ذره‌ی دوم در زمان تاخیری $t_r$ که در مکان $\mathbf{r}'(t_r)$ است یک موج با سرعت $c$ بفرستد، در لحظه‌ی $t$ به ذره‌ی اول می‌رسد که در مکان $\mathbf{r}$ است.

فرض کنید ذره‌ی دوم روی دایره‌ای به شعاع $a$ و با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega$ می‌چرخد. مرکز دایره را مبدا مختصات و صفحه‌ی دوران را $xy$ می‌گیریم. در ابتدا $(t=۰)$ بار در $(a,۰,۰)$ است. می‌خواهیم نیروی وارد از طرف این بار بر باری که روی محور $z$ است را حساب کنیم.

الف) (۱ نمره) مختصات بار اول را $\mathbf{r}=(0,0,z)$ بگیرید. با استفاده از معادله‌ی (۱) زمان تاخیری، $t_r$، را حساب کنید.

پاسخ قسمت الف) خود را $t_\circ$ بنامید و از این پس برای ساده‌نویسی و عدم تکرار از آن استفاده کنید.

بردار سرعت ذره‌ی دوم را با $\mathbf{v}'(t)$ نشان می‌دهیم.

تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'(t_r) \qquad (۲)$$

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{Qqc}{Rc-\mathbf{R}.\mathbf{v}'(t_r)} \qquad (۳)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{v}'(t_r)}{c^۲}\Phi(\mathbf{r},t) \qquad (۴)$$

که در آن ثابت $\varepsilon_\circ$ همان ثابتی است که در قانون کولن وجود دارد.

ادامه سوالات در صفحه بعد

## ادامه مسئله ۴ )

ب) (۲.۵ نمره) $\Phi(0,0,z,t)$ و $\mathbf{A}(0,0,z,t)$ را برای آنچه در قسمت الف) به دست آوردید حساب کنید. پاسخ را تا حد امکان ساده کنید.

نیروی الکتریکی وارد بر ذره‌ی اول چنین به دست می‌آید:

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \qquad (۵)$$

ج) (۱ نمره) با استفاده از قسمت ب) نیروی الکتریکی وارد بر ذره‌ی اول در راستای $z$ را حساب کنید.

حال می‌خواهیم بار اول را در نزدیکی‌های محور $z$ بگذاریم. فرض کنید $\sqrt{x^۲+y^۲} \ll z, a$ است. شما هم‌چنان می‌توانید برای سادگی از $t_r$ استفاده کنید.

د) (۱.۵ نمره) مختصات بار اول را $\mathbf{r} = (x,y,z)$ بگیرید. زمان تاخیری، $t_r$، را تا اولین رتبه‌ی ناصفر از $x$ و $y$ حساب کنید.

ه) (۶ نمره) $\Phi(x,y,z,t)$ و $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ را برای آنچه در قسمت د) به دست آوردید تا اولین رتبه‌ی ناصفر از $x$ و $y$ حساب کنید. پاسخ را تا حد امکان ساده کنید.

و) (۳ نمره) با استفاده از قسمت ه) مولفه‌های $x$ و $y$ نیروی وارد بر ذره ($F_x$ و $F_y$) در مکان $(۰,۰,z)$ را حساب کنید. پاسخ را تا حد امکان ساده کنید.

« موفق باشید».

| | | |
|---|---|---|
| المپیاد: فیزیک<br>سوالات امتحان: تئوری چهارم<br>نام :<br>نام خانوادگی : | باشگاه دانش پژوهان جوان | زمان پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه<br>تاریخ آزمون: ۹۳/۶/۵<br>تعداد مسائل : ۴ مسئله<br>سوالات ۶ صفحه در ۳ برگه |

تذکر:

۱- مشخصات خود به هیچ وجه روی برگه های پاسخنامه ننویسید.

۲- جهت پاسخ گویی از لاک غلط گیر یا مداد استفاده ننمایید.

۳- پاسخ هر سوال را با خط خوانا در برگه پاسخنامه مخصوص به خود بنویسید.

---

## مساله ۱)

مسئله‌ی ۱) وقتی دو لایه‌ی شاره روی هم می‌لغزند، و سرعتشان با هم فرق دارد نیرویی بینِ دو لایه وارد می‌شود که در جهتِ کم کردنِ اختلافِ سرعتِ دو لایه است. نیرو بر واحدِ سطح

$$\mu\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

است، که $\Delta v$ اختلافِ سرعتِ دو نقطه با فاصله‌ی $\Delta x$ است. پارامتری از شاره که به این خاصیت مربوط است گران‌روی نام دارد و با $\mu$ نشان داده می‌شود.

الف- بُعدِ گران‌روی را به دست آورید. (۱ نمره)

شاره‌ای با چگالی‌ی $\rho$ با بُعدِ $ML^{-3}$ و گران‌روی‌ی $\mu$ به خاطرِ اختلاف فشارِ $\Delta P$ که دو سرِ لوله‌ای استوانه‌ای به طولِ $\ell$ و شعاعِ $R$ اعمال شده، درونِ لوله در حرکتی پایاست. در حرکتِ پایا هر نقطه از شاره با سرعتی مستقل از زمان در حرکت است. به خاطرِ تقارنِ استوانه‌ای‌ی مسئله، سرعتِ هر نقطه از شاره را

$$\mathbf{v} = v(r)\mathbf{k}$$

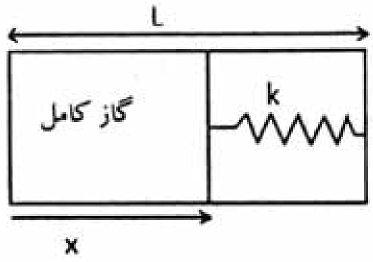
بگیرید. محورِ استوانه را در راستای محورِ $z$، یعنی در جهتِ بردارِ یکه‌ی $\mathbf{k}$ گرفته‌ایم. گرانش در مسئله نقشی ندارد.

ب- با استفاده از تحلیلِ ابعادی $v(r)$ را بر حسبِ پارامترهای مسئله، یعنی $\Delta P, \mu, \rho, \ell, R$ به دست آورید. برای هر نتیجه‌ی خود استدلال کنید. (۲ نمره)

ج- اگر فقط شعاعِ استوانه دو برابر شود ولی باقی‌ی پارامترها ثابت بمانند، سرعتِ شاره روی محورِ استوانه چند برابر می‌شود؟ توضیح دهید. (۲ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

## مسئله ۲ )




شکل ۱: سیستم در حالت افقی

بخش اول: سیستمی مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. ظرفی به طول $L$ داریم که توسط پیستونی به جرم $M$ به دو بخش تقسیم شده است. سمت راست یک فنر با ثابت $k$ و طول کشیده نشده‌ی $L$ وجود دارد. در این سمت هیچ گازی وجود ندارد. در سمت چپ $n$ مول گاز کامل با ضریب اتمسیته‌ی $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ داریم. مجموع ظرفیت گرمایی ظرف، فنر و پیستون را $C$ بگیرید. فاصله‌ی پیستون تا دیواره‌ی چپ را $x$ می‌نامیم. فرض می‌کنیم همواره تمامی اجزا - یعنی ظرف، گاز، پیستون و فنر - هم‌دما هستند. فرض کنید دمای محیط $T$ است و دیواره‌های ظرف رسانای بسیار خوب گرما هستند. تعریف می‌کنیم:

$$a := \sqrt{\frac{nRT}{k}}, \qquad \Omega := \sqrt{\frac{k}{M}}. \qquad (1)$$

تمامی پاسخ‌ها را بر حسب $a$، $\Omega$، $n$، $R$، $\gamma$ و $C$ بنویسید.

الف)(۱ نمره) مقدار $x$ در حالت تعادل را حساب کنید.

ب) (۱ نمره) بسامد نوسان‌های کوچک حول نقطه‌ی تعادل، $\omega_1$ را حساب کنید.

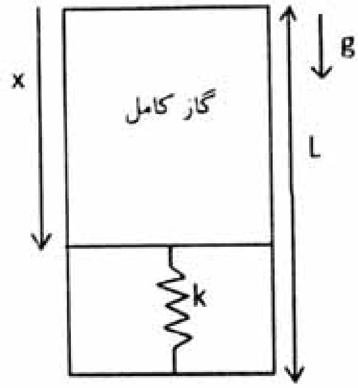
ج) (۱.۵ نمره) فرض کنید سیستم ایزوله شده است. مقدار کمی گرما، $đQ$ به آن می‌دهیم. دمای سیستم به اندازه‌ی $dT$ افزایش می‌یابد. تعریف می‌کنیم:

$$C_1 := \frac{đQ}{dT}. \qquad (2)$$

$C_1$ را حساب کنید.

ادامه سوالات در صفحه بعد

## ادامه مسئله ۲ )




شکل ۲: سیستم در حالت عمودی

بخش دوم: حال سیستمی مطابق شکل ۲ در نظر بگیرید. ظرفی به طول $L$ داریم که توسط پیستونی به جرم $M$ به دو بخش تقسیم شده است. در بخش پائینی یک فنر با ثابت $k$ و طول کشیده نشده‌ی $L$ وجود دارد. در این بخش هیچ گازی وجود ندارد. در بخش بالایی $n$ مول گاز کامل با ضریب انتسیه‌ی $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ داریم. مجموع ظرفیت گرمایی ظرف، فنر و پیستون را $C$ بگیرید. فاصله‌ی پیستون تا دیواره‌ی بالایی را $x$ می‌نامیم. فرض می‌کنیم همواره تمامی اجزا - یعنی ظرف، گاز، پیستون وفنر - هم‌دما هستند. شتاب گرانش $g$ است. فرض کنید دمای محیط $T$ است و دیواره‌های ظرف رسانای بسیار خوب گرما هستند. تعریف می‌کنیم:

$$b := \frac{Mg}{k}. \qquad (۳)$$

تمامی پاسخ‌ها را بر حسب $a$، $b$، $\Omega$، $n$، $R$، $\gamma$ و $C$ بنویسید.

| |
|---|
| د) (۱.۵ نمره) مقدار $x$ در حالت تعادل را حساب کنید. |

| |
|---|
| ه) (۲ نمره) بسامد نوسان‌های کوچک حول نقطه‌ی تعادل، $\omega_1$ را حساب کنید. |

و) (۱.۵ نمره) فرض کنید سیستم ایزوله شده است. مقدار کمی گرما، $đQ$ به آن می‌دهیم. دمای سیستم به اندازه‌ی $dT$ افزایش می‌یابد. تعریف می‌کنیم:

$$C_1 := \frac{đQ}{dT}. \qquad (۴)$$

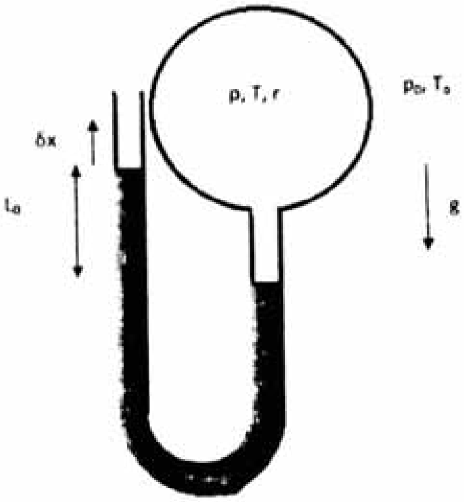
$C_1$ را حساب کنید.

بخش سوم:

| |
|---|
| ز) (۱.۵ نمره) جرم پیستون، $M$ و ثابت فنر، $k$ را بر حسب $n$، $R$، $T$، $g$، $\omega_1$، $C_1$ و $C_2$ بنویسید. |

ادامه سوالات در صفحه بعد

## مسئله ) ۳




شکل ۱: لوله‌ی $U$ شکل و بادکنک

مطابق شکل ۱ لوله‌ی $U$ شکل و بادکنکی را که به یک سمت آن بسته شده در نظر بگیرید. درون بادکنک و بخشی از لوله را با $n$ مول گاز کامل با ضریب اتمسبه‌ی $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ پُر کرده‌ایم.

درون لوله مایعی با چگالی $\rho$ ریخته شده و سطح مقطع لوله $A$ است. لوله با مایع هیچ اصطکاکی ندارد.

بادکنک را همواره کُره‌ای به شعاع $r$ می‌گیریم. بادکنک را سطحی کشسان می‌گیریم، چنان که وقتی شعاع آن $r$ است، اگر یک المان کوچک از سطح آن به مساحت $dS$ را بگیریم از طرف سایر بخش‌ها نیرویی برابر با $2\frac{\tau}{r}dS$ بر آن به سمت مرکز کُره وارد می‌شود. انرژی الاستیک بادکنک را $\tau S$ می‌گیریم که $S$ مساحت کُل بادکنک است. $\tau$ را ثابت و مستقل از شعاع بادکنک، دما و فشار بگیرید. فرض می‌کنیم که همواره دمای بادکنک و گاز یکسان است. گرما از طریق سطح بادکنک با ضریب همرفت $h$ با محیط بیرون تبادل می‌شود. در صورت لزوم مساحت کُره را $A = 4\pi r^2$ بگیرید.

فشار هوای بیرون $p_\circ$، دما $T_\circ$ و شتاب گرانش $g$ است.

از ظرفیت گرمایی بادکنک، جیوه و لوله صرف نظر می‌کنیم. لوله عایق گرما است. جرم بادکنک قابل صرف نظر است. از انبساط جیوه نیز صرف نظر کنید. اگر لازم بود از انحنای بخش پائینی لوله صرف نظر کنید.

| |
|---|
| الف) (۱ نمره) در حالت تعادل فشار داخل بادکنک، $p_e$ و اختلاف ارتفاع جیوه در دو ستون لوله، $L_\circ$ را بر حسب شعاع کُره، $r_\circ$ و ثوابت مساله بنویسید. |

فرض کنید با اختلالی کوچک شعاع بادکنک، فشار گاز داخل بادکنک و دمای آن تغییر می‌کند. این تغییرات کوچک

ادامه سوالات در صفحه بعد

## ادامه مسئله ) ۳

هستند. فرض کنید:

$$p = p_e + \delta p, \qquad T = T_0 + \delta T, \qquad r = r_0 + \delta r \tag{۱}$$

ب) (۱ نمره) قانون دوم نیوتون را برای المان کوچکی از سطح بادکنک بنویسید.

ارتفاع ستون جیوه بخش چپ لوله نیز به اندازه‌ی کوچک $\delta x$ بالا می‌آید. فرض کنید تغییرات چنان کند است که معادله‌ی حالت گاز کامل اعتبار دارد. تمامی معادلات را بر حسب تغییرات کوچک تا رتبه‌ی اول بنویسد. حجم اولیه‌ی گاز $V_0$ و طول کل جیوه $L$ است. از این پس تمامی آنچه خواسته شده را بر حسب $\delta r$، $\delta x$، $r_0$، $\gamma$ و کمیت‌های زیر بنویسید:

$$\alpha := \frac{A}{4\pi r_0^2}, \qquad \beta := \frac{\tau}{r_0 p_e}, \qquad \lambda := \frac{4\pi r_0^3}{3V_0},$$

$$\zeta := \frac{\rho g r_0^2}{\tau}, \qquad \Omega := \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{\tau}{\rho L}}, \qquad \upsilon_0 := \frac{hT_0}{p_e}, \qquad \delta\theta := \frac{\delta T}{T_0}. \tag{۲}$$

ج) (۲ نمره) معادله‌ی حرکت جیوه را بنویسید.

د) (۲ نمره) قانون اول ترمودینامیک برای مجموعه‌ی بادکنک و گاز را بنویسید.

ه) (۳ نمره) با استفاده از معادلات بخش‌های قبل یک معادله‌ی دیفرانسیل برای $\delta x$ بنویسید.

و) (۱ نمره) فرض کنید $\Omega$ بسیار بزرگ باشد. شرطی بنویسید که جیوه از لوله بیرون نریزد یا در واقع نوسان کوچک بماند.

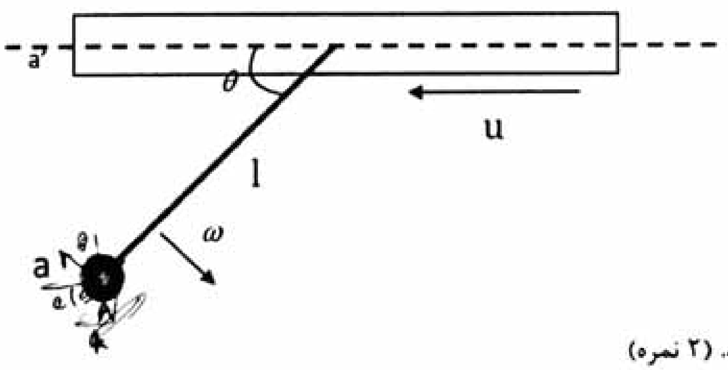
**مسئله ۴)**

در این مسئله می خواهیم سرعت زاویه‌ای دست پاول بیدرمن، رکورد دار شنای ۲۰۰ متر کرال سینه را با تقریب به دست آوریم. رکورد شنای ۲۰۰ متر در سال ۲۰۰۹ برابر با ۱۰۲/۰ ثانیه بوده است. برای این کار ابتدا باید نیرویی را که یک شاره به جسم صلب متحرک وارد می‌کند، حساب کنیم.

الف) وقتی یک جسم درون یک شاره در حال حرکت است، نیرویی به آن وارد می‌شود که در خلاف جهت سرعت جسم نسبت به شاره است. در شاره ای مانند آب، این نیرو که آن را با $F_D$ نمایش می‌دهیم، به چگالی شاره، $\rho$، سرعت جسم نسبت به شاره، $v$ و مساحت تصویر جسم متحرک در صفحه‌ی عمود بر جهت سرعت، $A$ بستگی دارد. با تحلیل ابعادی، کلی ترین رابطه‌ی را که می توان برای این نیرو بر حسب کمیت‌های مشخص شده نوشت، به دست آورید. پاسخ شما به بخش‌های «ب» و «پ» می‌تواند شامل ثوابت و یا توابع مجهول در تحلیل ابعادی باشد. (۲ نمره)

ب) حال می‌خواهیم نیروی وارد بر شناگر را حساب کنیم. مطابق شکل فرض می‌کنیم شناگر در حالی که با سرعت $u$ در آب به چگالی $\rho$ به جلو می‌رود، یکی از دست‌هایش را با سرعت زاویه ای $\omega$ می‌چرخاند. دست شناگر را به صورت میله‌ای به طول $l$ مدل می‌کنیم که در انتهای آن کف دست به مساحت $a$ قرار دارد. با توجه به مدل ارائه شده و رابطه‌ای که برای نیرو به دست آوردید، نیروی جلوبرنده‌ای را که از طرف آب به دست شناگر وارد می شود، بر حسب زاویه‌ی $\theta$ که در شکل مشخص شده و سایر پارامترهایی که تا اینجای سوال معرفی شده است، بنویسید. (۳ نمره)

پ) در شنای کرال، در هر لحظه فقط یکی از دو دست شناگر درون آب حرکت می‌کند. همچنین فرض کنید سهم حرکت پا و دست در نیروی جلوبرنده برابر است. از نیروی به دست آمده روی $\theta$ در بازه‌ی ۰ تا $\pi$ متوسط گیری کنید و متوسط نیروی کل جلوبرنده را محاسبه کنید. در ادامه‌ی مسئله به تقریب، متوسط زمانی نیروی جلوبرنده را با متوسط زاویه‌ای به دست آمده برابر می‌گیریم. (۲ نمره)




ت) مساحت سر شناگر را که درون آب و در راستای عمود بر جهت حرکت شناگر است، $a'$ فرض کنید. رابطه ای برای $\omega$ بر حسب کمیت‌های $u$، $a$، $a'$، $l$ و $\rho$ به دست آورید. (۲ نمره)

ث) با استفاده از مقادیر عددی داده شده و تخمین مقادیر برخی از کمیت‌ها، مقدار عددی$\omega$ را بر حسب رادیان بر ثانیه و دور بر ثانیه حساب کنید. توجه داشته باشید که قد پاول بیدرمن ۱/۹ متر است. (۱ نمره)

**« موفق باشید».**

| المپیاد: فیزیک | باشگاه دانش پژوهان جوان | زمان پاسخگویی: ۳۰۰ دقیقه |
|---|---|---|
| سوالات امتحان: نهایی تئوری۱ | | تاریخ آزمون: ۹۳/۶/۱۵ |
| نام : | | تعداد مسائل : ۵ مسئله |
| نام خانوادگی : | | سوالات ۵ صفحه در ۳ برگه |

تذکر:

۱- مشخصات خود به هیچ وجه روی برگه های پاسخنامه ننویسید.

۲- جهت پاسخ گویی ازلاک غلط گیر یا مداد استفاده ننمایید.

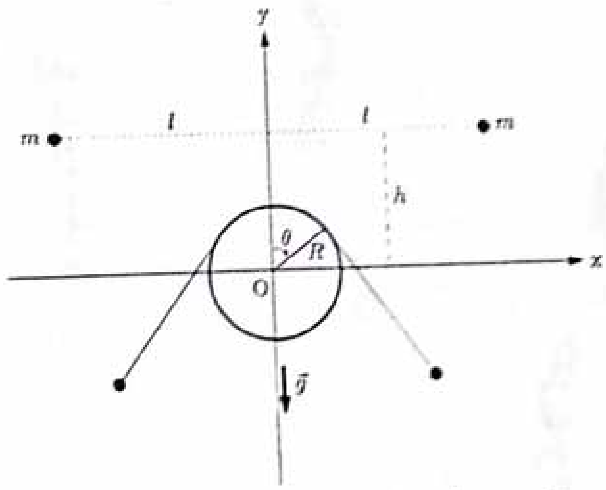
۳- پاسخ هر سوال را با خط خوانا در برگه پاسخنامه مخصوص به خود بنویسید.

---

امتحان نهایی دوره تابستانی المپیاد فیزیک ۹۳

## مساله) ۱

مسئله‌ی ۱) دو جسم نقطه ای به جرم $m$ به دو سر ریسمانی به طول $2l$ بسته شده‌اند. ریسمان از حالت افقی در ارتفاع $h$ نسبت به محور استوانه‌ی ثابتی به شعاع $R$ رها می‌شود و بر اثر گرانش سقوط می‌کند. محور استوانه بر صفحه شکل عمود است. ریسمان پس از رسیدن به استوانه از دو طرف به طور همزمان و متقارن دور آن می‌پیچد. در یک لحظه نامشخص آخرین نقطه تماس ریسمان با استوانه مطابق شکل در زاویه $\theta$ نسبت به امتداد قائم قرار دارد.




a) معادلات پارامتری مسیر ذره سمت راست را به صورت $x(\theta)$ و $y(\theta)$ به دست آورید. (۱ نمره)

b) شکل کیفی مسیر ذره سمت راست را رسم کنید و مختصات نقطه‌ای که در آن مختصه $y$ کمینه است را به دست آورید. (۱ نمره)

c) کشش نخ در نقطه‌ی ذکر شده (نقطه‌ای که مختصه $y$ کمینه است) را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

d) معادله‌ای برای محاسبه $\theta_0$، زاویه $\theta$ ای که در آن دو ذره با هم برخورد می‌کنند به دست آورید و با یک شکل واضح، روشی ترسیمی برای یافتن $\theta_0$ ارائه کنید. (۱/۵ نمره)

e) محل برخورد دو ذره را بر حسب $\theta_0$ تعیین کنید. (۰/۵ نمره)

f) طول $l$ را چنان تعیین کنید که بردار سرعت ذرات قبل از برخورد زاویه ۴۵ درجه نسبت به محور x داشته باشد. (۰/۵ نمره)

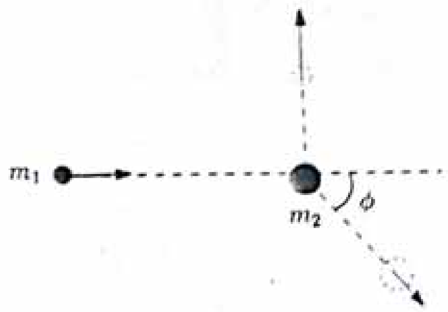
g) فرض کنید برخورد ذرات کشسان و شرایط برخورد مطابق بند قبل باشد. معادله مسیر ذره سمت راست را پس از برخورد به صورت $y(x)$ به دست آورید. (۲ نمره)

h) فرض کنید در زاویه $\theta = \theta_1$ ریسمان مجددا به حالت کشیده در می آید. معادله‌ای بنویسید که $\theta_1$ را بدهد و تا جای ممکن آن را ساده کنید. (۲ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

## مساله ) ۲

مسئله‌ی 2) ذره‌ای به جرم $m_1$ و انرژی جنبشی $T$ به ذره ساکنی به جرم $m_2$ برخورد کشسان می‌کند و تحت زاویه قائم نسبت به امتداد اولیه حرکت منحرف می‌شود.




a) با استفاده از روابط غیر نسبیتی انرژی جنبشی ذره پراکنده شده ($T_1$) و زاویه پس‌زدگی ذره ساکن نسبت به امتداد اولیه حرکت ($\phi$) را حساب کنید. چه شرطی باید برقرار باشد تا برخوردی با این شرایط صورت گیرد؟ (۲ نمره)

b) حال روابط نسبیتی به کار ببرید. شرایط برخورد مثل قبل و انرژی نسبیتی ذره فرودی $\mathcal{E}$ است. انرژی نهایی ذره پراکنده شده و زاویه پس زدگی را در این حالت نیز حساب کنید. چه شرطی برقرار باشد تا برخوردی با این شرایط صورت گیرد؟ (۴ نمره)

c) نتیجه نسبیتی قسمت b را با فرض کوچک بودن انرژی جنبشی ذره فرودی (در واحدهای طبیعی $T \ll m_1$) بسط دهید و تصحیح نسبیتی نتایج قسمت a را تا اولین مرتبه نسبت به پارامتر کوچک $\epsilon = T/m_1$ حساب کنید. (۴ نمره)

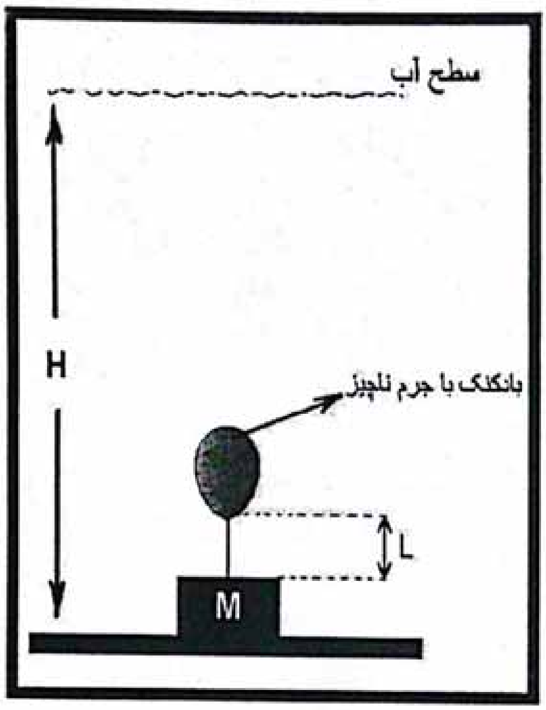
d) نتایج قسمت b رابرای حالتهای حدی $\mathcal{E} \gg m_1, m_2$ و $m_2 \gg \mathcal{E}$ بررسی کنید. تقریب مرتبه صفرم نسبت به کمیت‌های کوچک کافی است. (۲ نمره)

e) پروتونی با جرم سکون $m_1 = 938.3\ \mathrm{MeV}/c^2$ پس از عبور از اختلاف پتانسیل 200.0 MeV به نوترون ساکنی به جرم سکون $m_2 = 939.6\ \mathrm{MeV}/c^2$ برخورد کشسان می‌کند و در زاویه ۹۰ درجه منحرف می‌شود انرژی جنبشی نهایی پروتون را بر حسب MeV و زاویه پس‌زدگی نوترون نسبت به امتداد پروتون فرودی را حساب کنید. (هر الکترون ولت مقدار انرژی است که بار e در عبور از اختلاف پتانسیل یک ولت به دست می‌آورد و $\mathrm{MeV} = 10^6\ \mathrm{eV}$.) (۳ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

## مساله ) ۳

جسمی به جرمِ M و حجمِ ناچیز، مطابقِ شکل در عمقِ H از سطحِ دریا، روی بسترِ دریا قرار دارد. بادکنکی با جرمِ ناچیز، توسطِ یک نخِ بی‌جرم به طولِ L به جسم وصل است. بادکنک حاوی n مول از یک گازِ ایده‌آل است. برای گازهای ایده‌آل، رابطه‌ی $PV = nRT$ برقرار است که در آن $P$ فشار، $V$ حجم، $T$ دما، $n$ تعدادِ مول و $R$ یک ثابت است. برای ساده‌گی، فرض کنید دمای آب در همه‌ی عمق‌ها $T_0$ و چگالی‌اش همه‌جا $\rho_0$ است. جنسِ بادکنک خیلی نازک است و نمی‌تواند اختلاف فشاری بین دو سمتش تحمل کند. فرض کنید ابعادِ بادکنک نسبت به سایرِ ابعادِ طولی مسئله ناچیز است، طوری که می‌توان فشارِ آب بر همه‌ی نقاط بادکنک را مساوی فشار آب بر نقطه‌ی میانی بادکنک تقریب زد. فشارِ هوا در سطحِ آب را $P_0$ بگیرید.




**الف)** فرض کنید دیواره‌ی بادکنک رسانای خوبِ گرماست، و همیشه دمای گاز درونِ بادکنک با دمای آب برابر است. حجمِ بادکنک را بیابید. (۱ نمره)

**ب)** می‌خواهیم جرمِ M از سطح جدا شود. جرمِ M حداکثر چه قدر باشد تا این اتفاق بیفتد؟ (2 نمره)

جرمی که در قسمتِ ب یافتید را با $M_{max}$ نشان می‌دهیم. همچنین برای سادگی، L را صفر بگیرید.

**پ)** فرض کنید M کوچک‌تر از $M_{max}$ است. در هر لحظه، فاصله‌ی جرمِ M از سطحِ آب را با $x$ نشان می‌دهیم. مشتقاتِ اول و دومِ $x$ نسبت به زمان را به صورتِ تابعی از $x$ بیابید. (2 نمره)

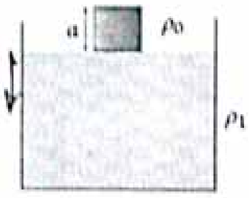
ادامه سوالات در صفحه بعد

## مساله ) ۴

الف- مطابق شکل مکعبی به طول $a$ و چگالیِ $\rho_0$ را درون مایعی با چگالیِ $\rho_1$ می‌اندازیم، به طوری‌که $\rho_1 = \frac{4}{3}\rho_0$ است. در حالت تعادل چه حجمی از جسم خارج از مایع است؟ (۱ نمره)

ب- پس از این‌که دستگاه به تعادل رسید، روی این مجموعه مقداری از مایع دیگری به چگالیِ $\rho_2$ می‌ریزیم به طوری‌که دو مایع مخلوط نمی‌شوند. و ارتفاع مایع دوم روی مایع اول $\frac{a}{3}$ شود. در این صورت چه حجمی از مکعب خارج از مایع بالایی است؟ با ریختنِ مایع جابه‌جاییِ مرکزِ مکعب نسبت به ظرف چه‌قدر است؟ (۲ نمره)

ج- مکعبی به طولِ $a$ و چگالیِ $\rho_0$ را مطابقِ شکل رویِ مایع تراکم‌پذیری که چگالیِ آن به صورت $\rho = \rho_2 + \alpha x$ است، قرار داده و رها می‌کنیم، $\rho_2 < \rho_0$ است. پس از مدتی جسم به تعادل می‌رسد. سطحِ آزادِ مایع در $x = 0$، محورِ $x$ را در راستای قائم و جهتِ مثبتِ آن را رو به پایین بگیرید. در این زمان مرکزِ مکعب در ارتفاعِ $x_0 = \frac{a}{2}$ از سطحِ آزادِ مایع است. ضریبِ $\alpha$ را به دست آورید.(۲ نمره)



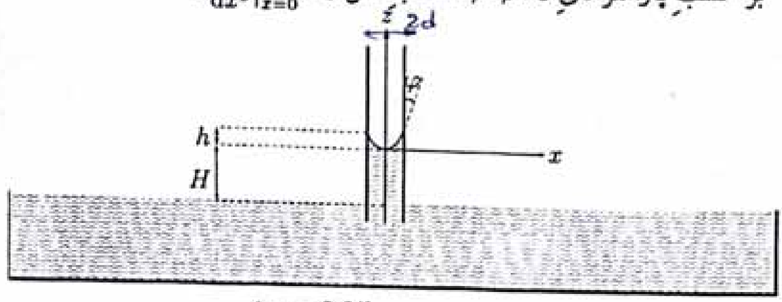

ادامه سوالات در صفحه بعد

## مساله ) ۵

مطابقِ شکل بینِ دو صفحه‌یِ تختِ خیلی بزرگِ موازی که فاصله‌یِ آن‌ها $2d$ است از مایعی با چگالیِ $\rho$، و کششِ سطحیِ $\sigma$ پُر شده است. چسبندگیِ مایع به صفحه‌ها را $\gamma$ بگیرید. مایعِ مجاورِ صفحه‌ها کمی بالا می‌رود.

الف- زاویه‌ای که سطحِ مایع با هر صفحه می‌سازد، $\varphi$، را بر حسبِ $\gamma$ و $\sigma$ به دست آورید. (۱ نمره)

ب- ارتفاعِ $h$ یعنی فاصله‌یِ بینِ بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌یِ مایع بینِ دو صفحه را بر حسبِ پارامترهایِ $\sigma$ ، $\rho$ ، $\varphi$، شتابِ ثقل $g$ و $\left.\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$ به دست آورید. (۴ نمره)




راهنمایی: شعاعِ انحنایِ خمِ $z(x)$، $R=\frac{(1+z'^2)^{3/2}}{z''}$ است.

ج- حالا فرض کنید مجموعه‌یِ دو صفحه‌یِ موازی درونِ ظرفِ بزرگی که عرضِ آن از $d$ خیلی بزرگ‌تر است و پر از مایع است، فرو رفته و مایع بینِ دو صفحه کمی بالا آمده است. $H$ فاصله‌یِ مبدا از سطحِ آزادِ مایع درونِ ظرف است (آنجا که مایع افقی است.) قانونِ نیوتن برایِ بخشی از مایع که بینِ دو صفحه بالا آمده است را بنویسید. از جرمِ بخشی از مایع که بالایِ محورِ $x$ است چشم‌پوشی کنید.

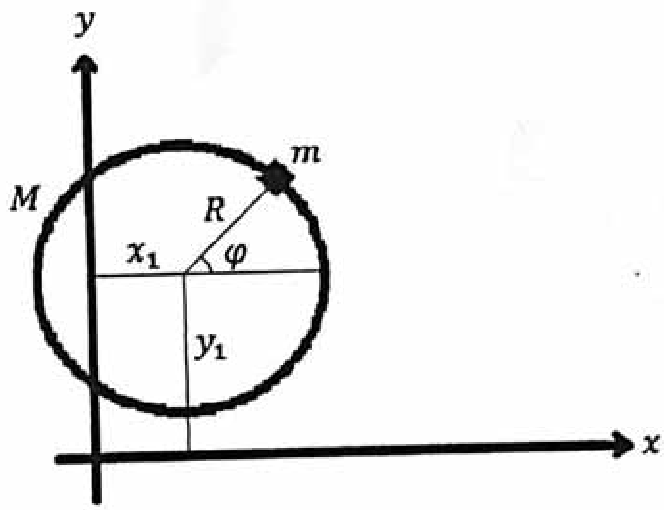
رابطه‌ای بینِ $\left.\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$ ، $H$ ، $\rho$، و همین‌طور شتابِ ثقل $g$ به دست آورید. نهایتاً $h$ را بر حسبِ $\sigma, \rho, g, d$ و $\varphi$ به دست آورید. (۵ نمره)

« موفق باشید».

| | | |
|---|---|---|
| المپیاد: فیزیک<br>سوالات امتحان: نهایی تئوری۲<br>نام :<br>نام خانوادگی : | باشگاه دانش پژوهان جوان | زمان پاسخگویی: ۳۰۰ دقیقه<br>تاریخ آزمون: ۹۳/۶/۱۶<br>تعداد مسائل : ۴ مسئله<br>سوالات ۹ صفحه در ۵ برگه |

## مساله) ۶

حلقه‌ای نازک به جرم $M$ و شعاع $R$ داریم که آزادانه در فضای بدون اصطکاک و بدون گرانشی قرار دارد. دانه‌ی تسبیحی به جرم $m$ روی حلقه قرار دارد. فرض کنید بین حلقه و دانه‌ی تسبیح نیز اصطکاکی وجود ندارد. مبدا مختصات ساکنی انتخاب می‌کنیم و مختصات مرکز حلقه را با $x_1$ و $y_1$، مختصات دانه‌ی تسبیح را با $x_2$ و $y_2$ و زاویه‌ی دانه‌ی تسبیح با راستای محور افقی را $\varphi$ می‌گیریم. در لحظه‌ی $t = 0$ حلقه ساکن است و مرکز آن در مبدأ مختصات قرار دارد. در این حالت $\varphi = 0$ است. در یک لحظه ضربه‌ای به دانه‌ی تسبیح وارد می‌کنیم تا با سرعت $v_0$ در جهت محور مثبت $y$ شروع به حرکت کند. در اثر این ضربه حلقه سرعت نمی‌گیرد.




آ) با نوشتن معادلات حرکت انتقالی برای حلقه و دانه، $\varphi$ را بر حسب زمان و دیگر پارامترهای مسئله بیابید. (۱ نمره)

ب) اندازه‌ی نیروی عمود بر سطح وارد بر حلقه را بر حسب زمان و دیگر پارامترهای مسئله حساب کنید.(۲ نمره)

پ) $x_1(t)$، $y_1(t)$، $x_2(t)$ و $y_2(t)$ را بیابید. (۲ نمره)

ت) مسیر حرکت مرکز حلقه و دانه‌ی تسبیح را به طور کیفی رسم کنید. (۲ نمره)

ث) با توجه به جواب قسمت‌های قبل می دانیم حرکت در راستای افقی تکرار شونده است. دوره‌ی تناوب آن چقدر است و در یک دوره‌ی تناوب مرکز حلقه چه مسافتی را طی می کند؟(۱ نمره)

**ادامه سوالات در صفحه بعد**

## ادامه مساله ) ۶

حال فرض کنید اصطکاک بین حلقه و جرم وجود دارد. ضریب اصطکاک $\mu$ است. حرکت را تا زمانی در نظر می‌گیریم که دانه و حلقه نسبت به هم می‌لغزند.

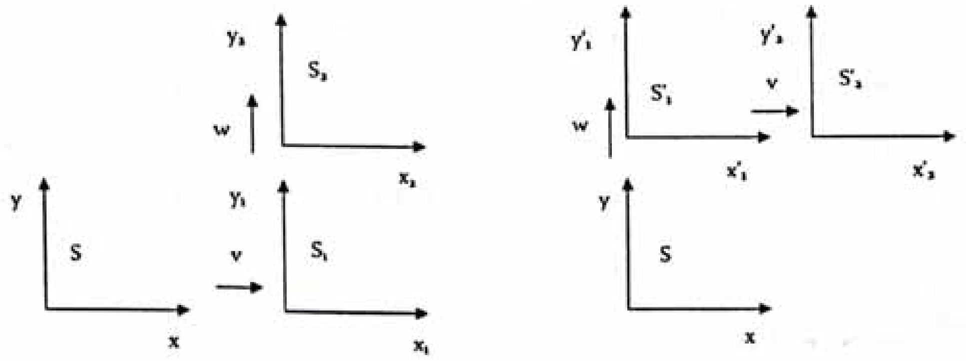
چ) با نوشتن دوباره‌ی معادلات حرکت برای حلقه و دانه معادله‌ای برای $\varphi$ بدست بیاورید و با حل آن $\varphi$ را بر حسب زمان و دیگر پارامترهای مسئله بیابید.(۳،۵ نمره)

چ) اندازه‌ی نیروی عمود بر سطح وارد بر حلقه را در این حالت بر حسب زمان و دیگر پارامترهای مسئله حساب کنید.(۱،۵ نمره)

ح) حال فرض کنید $\mu$ کوچک است. جواب قسمت‌های ج و چ را تا مرتبه‌ی اول $\mu$ بازنویسی کنید. (۲ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

## مساله ) ۷




الف                ب

شکل ۱: بخش‌های الف و ب

تبدیل لورنتز در پایان سوال آمده است.

بخش اول:

سه دستگاه $S$، $S_1$ و $S_2$ را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی صفر مبداهای آن‌ها روی هم قرار دارد. شکل ۱ را ببینید. دستگاه $S_1$ با سرعت $v$ در جهت $x$ نسبت به دستگاه $S$ حرکت می‌کند. دستگاه $S_2$ با سرعت $w$ در جهت $y_1$ نسبت به دستگاه $S_1$ حرکت می‌کند.

الف) (۱.۵ نمره) رویدادی با مختصات $(t, x, y)$ در دستگاه $S$ در نظر بگیرید. مختصات این رویداد در دستگاه $S_2$ را بر حسب مختصات در دستگاه $S$ و سرعت‌ها بنویسید. این مختصات را $(t_2, x_2, y_2)$ بنامید.

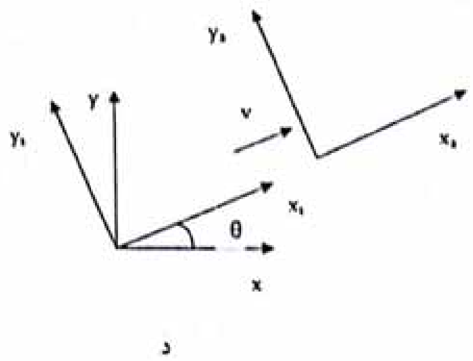
سه دستگاه $S$، $S'_1$ و $S'_2$ را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی صفر مبداهای آن‌ها روی هم قرار دارد. شکل ۱ را ببینید. دستگاه $S'_1$ با سرعت $w$ در جهت $y$ نسبت به دستگاه $S$ حرکت می‌کند. دستگاه $S'_2$ با سرعت $v$ در جهت $x'_1$ نسبت به دستگاه $S'_1$ حرکت می‌کند.

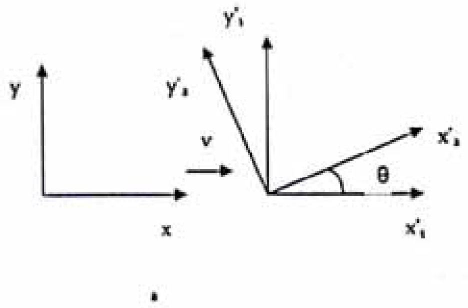
ب) (۱.۵ نمره) رویدادی با مختصات $(t, x, y)$ در دستگاه $S$ در نظر بگیرید. مختصات این رویداد در دستگاه $S'_2$ را بر حسب مختصات در دستگاه $S$ و سرعت‌ها بنویسید. این مختصات را $(t'_2, x'_2, y'_2)$ بنامید.

ج) (۲ نمره) اختلاف آنچه در بخش‌های الف) و ب) به دست آوردید $(t'_2 - t_2, x'_2 - x_2, y'_2 - y_2)$ را تا رتبه‌ی دوم از سرعت‌ها بسط دهید. فرض کنید $\frac{v}{c}$ و $\frac{w}{c}$ هم رتبه هستند. تبدیل بین دستگاه $S_2$ و $S'_2$ را تا رتبه‌ی دوم از

ادامه سوالات در صفحه بعد

## ادامه مساله ۷)




شکل ۲: بخش‌های د و ه

| |
|---|
| $\frac{v}{c}$ و $\frac{w}{c}$ بنویسید. این تبدیل چه تبدیلی است؟ |

بخش دوم:

سه دستگاه $S$، $S_1$ و $S_2$ را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی صفر مبداهای آن‌ها روی هم قرار دارد. شکل ۲ را ببینید. دستگاه $S_1$ نسبت به دستگاه $S$ حول محور $z$ به اندازه‌ی $\theta$ چرخیده است. دستگاه $S_2$ نسبت به دستگاه $S_1$ و در جهت محور $x_1$ با سرعت $v$ حرکت می‌کند.

| |
|---|
| د) (۱.۵ نمره) رویدادی با مختصات $(t, x, y)$ در دستگاه $S$ در نظر بگیرید. مختصات آن در دستگاه $S_2$ را بر حسب مختصات در دستگاه $S$ و پارامترهای $v$ و $\theta$ حساب کنید. این مختصات را $(t_2, x_2, y_2)$ بنامید. |

سه دستگاه $S$، $S'_1$ و $S'_2$ را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی صفر مبداهای آن‌ها روی هم قرار دارد. شکل ۲ را ببینید. دستگاه $S'_1$ نسبت به دستگاه $S$ با سرعت $v$ در جهت محور $x$ حرکت می‌کند. دستگاه $S'_2$ نسبت به دستگاه $S'_1$ به اندازه‌ی $\theta$ حول محور $z$ چرخیده است.

| |
|---|
| ه) (۱.۵ نمره) رویدادی با مختصات $(t, x, y)$ در دستگاه $S$ در نظر بگیرید. مختصات آن در دستگاه $S_2$ را بر حسب مختصات در دستگاه $S$ و پارامترهای $v$ و $\theta$ حساب کنید. این مختصات را $(t'_2, x'_2, y'_2)$ بنامید. |

ادامه سوالات در صفحه بعد

## ادامه مساله ۷)

و) (۲ نمره) اختلاف آنچه در بخش‌های د) و ه) به دست آوردید $(t'_2 - t_2, x'_2 - x_2, y'_2 - y_2)$ را تا رتبه‌ی دوم از $v$ و $\theta$ بسط دهید. فرض کنید $\frac{v}{c}$ و $\theta$ هم رتبه هستند. تبدیل بین دستگاه $S_2$ و $S'_2$ را تا رتبه‌ی دوم از $\frac{v}{c}$ و $\theta$ بنویسید. این تبدیل چه تبدیلی است؟

تبدیل لورنتز:

اگر دستگاه $S'$ نسبت به دستگاه $S$ با سرعت $v$ در جهت $x$ در حرکت باشد تبدیل بین دو دستگاه چنین است:

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1}$$

$$y' = y \tag{2}$$

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

ادامه سوالات در صفحه بعد

## مساله ۸)

دو فرستنده‌ی A و B را در نظر بگیرید. فرستنده‌ی A در مبدأ مختصات ناظر O قرار دارد و فرستنده‌ی B، در دستگاه مختصات ناظر O، روی محور $x$ و در $x = l$ واقع شده است. فرستنده‌ی A در زمان‌های $t = nT$، که $n$ عددی طبیعی است، ذراتی به جرم $m_A$ و انرژی نسبیتی $E_A$ را تولید و در جهت محور $x$ ارسال می‌کند. فرستنده‌ی B نیز در همان زمان‌های $t = nT$، ذراتی به جرم $m_B$ انرژی نسبیتی $E_B$ را تولید و در خلاف جهت محور $x$ ارسال می‌کند. یک آشکار ساز که توانایی آشکار کردن هر دو نوع ذره را دارد، در مبدأ مختصات ناظر O قرار دارد و با سرعت $u$ در جهت $\hat{x}$ نسبت به دو فرستنده در حال حرکت است. یک لامپ در آشکارساز قرار دارد که آشکارساز هنگام دریافت ذرات از نوع A، در صورت خاموش بودن لامپ، آن را روشن می‌کند. همچنین در هنگام دریافت ذرات از نوع B، در صورت روشن بودن لامپ، آن را خاموش می‌کند. دو ناظر، زمانی که مبدأ مختصاتشان بر هم منطبق می‌شود، زمان‌هایشان را در $t = t' = 0$ تنظیم می‌کنند. در $t' = 0$، لامپ آشکارساز خاموش است. به مسئله در چارچوب نسبیت خاص پاسخ دهید.

الف) از دید ناظر O، آشکارساز در چه زمان‌هایی ذرات B را دریافت می‌کند؟ (۱ نمره)

ب) در نموداری که محور عمودی آن نشان دهنده‌ی خاموش یا روشن بودن لامپ و محور افقی، نشان دهنده‌ی زمان از دید ناظر O است، وضعیت لامپ را بر حسب زمان از دید ناظر O نشان دهید. مقادیر زمان‌های گذار را بر روی نمودار مشخص کنید. (۲ نمره)

پ) از دید ناظر $O'$، آشکارساز در چه زمان‌هایی ذرات B را دریافت می‌کند؟ (۱/۵ نمره)

ت) در نموداری که محور عمودی آن نشان دهنده‌ی خاموش یا روشن بودن لامپ و محور افقی، نشان دهنده‌ی زمان از دید ناظر $O'$ است، وضعیت لامپ را بر حسب زمان از دید ناظر $O'$ نشان دهید. مقادیر زمان‌های گذار را بر روی نمودار مشخص کنید. (۲ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

**ادامه مساله ۸)**

حال فرض کنید ذرات A و B به ترتیب دارای عمرهای مشخص $\tau_A$ و $\tau_B$ هستند؛ به این معنی که از دید ناظری که ذرات نوع $A$ (B) را در حال سکون می‌بیند. ذرات پس از گذشت زمان مشخص $\tau_A$ ($\tau_B$) از زمان تولید توسط فرستنده‌ی A (B) به ذرات دیگری واپاشیده می‌شوند که دیگر توسط آشکارساز قابل مشاهده نیستند.

ث) با در نظر گرفتن فرض اضافه شده، نمودار بخش «ت» را مجدداً رسم کنید. در صورت لزوم، حالت‌های مختلف ممکن را در نظر بگیرید و شرط لازم برای رخ دادن هر حالت را بر حسب پارامترهای مسئله مشخص کنید. (۳/۵ نمره)

یادآوری: تبدیل لورنتز از دستگاه O به O′ با معادلات زیر داده می‌شود.

$$x' = \gamma(x - ut)$$

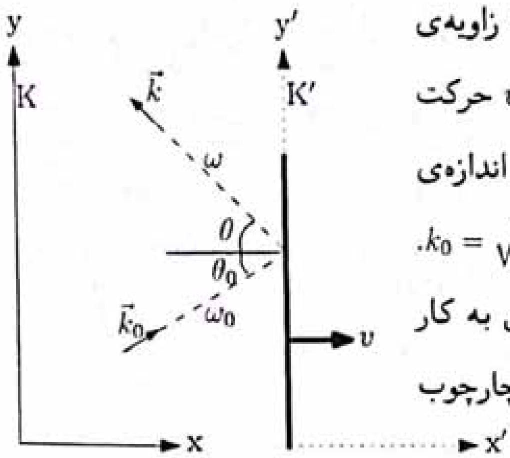
$$t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

ادامه سوالات در صفحه بعد

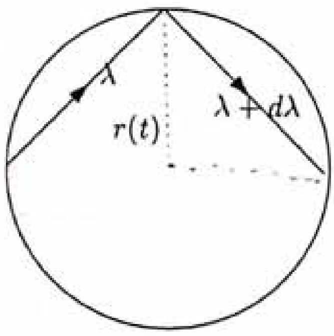
**مساله ۹)** آ) یک پرتو نور که در چارچوب مرجع K دارای بسامد زاویه‌ای $\omega_0$ و بردار موج $\vec{k}_0$ است مطابق شکل با زاویه‌ی $\theta_0$ به آینه‌ای که در جهت محور x با سرعت $v$ حرکت می‌کند، می‌تابد. رابطه‌ی بین بسامد زاویه‌ای و اندازه‌ی بردار موج $\omega_0 = c\,k_0$ است که $k_0 = \sqrt{k_{0_x}^2 + k_{0_y}^2 + k_{0_z}^2}$. قوانین تابش و بازتابی که برای آینه‌ی ساکن به کار می‌بریم اکنون در دستگاه سکون آینه یعنی در چارچوب مرجع $K'$ قابل کاربرد اند.




بسامد زاویه‌ای و بردار موج از یک چارچوب به چارچوب دیگر مانند یک چاربردار تبدیل می‌شوند که در انتهای سوال آمده است. زاویه‌ی بازتاب $\theta$ و بسامد زاویه‌ای $\omega$ پرتو را پس از بازتاب از روی آینه‌ی متحرک، در چارچوب مرجع K به دست آورید. (۴ نمره)

ب) جواب‌های قسمت آ) را تا مرتبه‌ی اول $\beta = v/c$ بنویسید. (۱ نمره)

پ) یک پوسته‌ی کروی مطابق شکل در نظر بگیرید که شعاع‌اش به آرامی و با سرعت $\frac{dr}{dt}$ افزایش می‌یابد. در نتیجه چنان که در قسمت قبل دیدیم یک پرتو نور در داخل پوسته، که در اثر برخورد به سطح متحرک پوسته بازتاب می‌شود طول موج‌اش $\lambda = 2\pi/k$ تغییر می‌کند. با استفاده از جواب قسمت ب)، $\frac{d\lambda}{dt}$ را بر حسب $\lambda$، $r(t)$ و $\frac{dr}{dt}$ بنویسید. (۲ نمره)




اکنون تابش گرمایی داخل کاواکی که برای راحتی آن را کره‌ای با دیواره‌های کاملاً بازتابان فرض می‌کنیم در نظر بگیرید. یک تحول بی‌دررو برگشت‌پذیر در نظر بگیرید که طی آن با افزایش شعاع کاواک حجم کاواک افزایش می‌یابد. مشخصه‌ی این تحول بی‌دررو برگشت‌پذیر این است که از رابطه‌ای که در قسمت قبل به دست آوردید می‌توانید استفاده کنید.

ادامه سوالات در صفحه بعد

**ادامه مساله ۹)**

می‌دانیم که تابش گرمایی داخل کاواک شامل همه‌ی طول موج‌ها است. اگر دمای دیواره‌ها و داخل کاواک $T$ باشد $u(\lambda,T)d\lambda$ را به عنوان چگالی انرژی داخل کاواک که ناشی از تابش‌هایی با طول موج بین $\lambda$ و $\lambda+d\lambda$ است تعریف می‌کنیم. آن بخشی از فشار داخل کاواک که مربوط به تابش‌های با طول موج بین $\lambda$ و $\lambda+d\lambda$ است را با $P(\lambda,T)$ نشان می‌دهیم که رابطه‌اش با $u(\lambda,T)$ به صورت $P(\lambda,T)=\frac{1}{3}u(\lambda,T)d\lambda$ است.

**ت)** از توضیحات فوق استفاده کنید و تا جایی که امکان دارد رابطه‌ی $u(\lambda,T)$ را با $\lambda$ و $T$ به دست آورید. (۳ نمره)

راهنمایی: تبدیل $(\vec{k},\omega/c)$ از چارچوب مرجع K به $(\vec{k}',\omega'/c)$ در چارچوب مرجع K′ که با سرعت $v$ در راستای x نسبت به K حرکت می‌کند به صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
k'_x &= \gamma(k_x-\beta\omega/c)\\
k'_y &= k_y\\
k'_z &= k_z\\
\omega'/c &= \gamma(\omega/c-\beta k_x)
\end{aligned}
$$

«موفق باشید».