بردارها در صفحه[11]

در این فصل نشان می‌دهیم چگونه می‌توان مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال را ازتوابع معمولی ، که اعداد را به‌اعداد می‌برند ،به‌توابع *برداری* ، که‌اعداد را به *بردارها* می‌برند، تعمیم داد . یک بردار کمیتی است که فقط با یک عدد ، به نام *اندازه* ، معین نشده و بلکه **جهت** نیز لازم دارد . پیدایش روشهای برداری تاحدود زیاد از کارهای شیمی‌دان ورياضی فیزیکدان بزرگ آمریکایی ، جوشیا ویلاردگیبس[1] (۱۹۰۳ – ۱۸۳۹) ناشی شده است ، کـه نشان داد که استفاده از آنها موجب تسهیل در حل مسائل علوم کاربسته می‌شود .

بحث ما از حساب برداری در سطح مقدماتی صورت می‌گیرد . در این فصل‌خود را به بردارها در صفحه محدود می‌کنیم ، که در آن اغلب ویژگیهای مبحث ظاهر می‌شوند . در فصل بعد ، از بعد دو به سه رفته ، و بردارها در *فضا* را درنظر می‌گیریم . گام نهایی مجاز دانستن توابع برداری با **شناسه**‌های برداری علاوه بر **مقادیر** برداری بعداً" ، پس از آنکـه تکنیکهای لازم حساب دیفرانسیل و انتگرال‌توابع چندمتغیره به دست آمد ،برداشته‌خواهد شد .

۱.۱۱ مفهوم بردار؛ اعمال بر بردارها

اسکالرها و بردارها . در علوم و صنعت تمایز بین دو نوع کمیت ، یعنی اسکالر و بردار، اهمیت دارد . منظور از *اسکالر* کمیتی است که کاملا" با یک عدد (و بـا واحـد سنجش مناسبی) مشخص می‌شود . مثلا" ، فشار یک گاز محبوس، ارتفاع یک هواپیما ، و دمای یک کوره همه اسکالرند . از آن سو ، منظور از *بردار* یعنی کمیتی که برای مشخص شدن فقط به یک عدد ، به نام *اندازهٔ* بردار،محتاج نبوده ، بلکه **جهت** نیز لازم دارد . مثلا" ، سرعت

---

1. Josiah Willard Gibbs

باد در یک ایستگاه هواشناسی ، موضع یک هدف نسبت به یک توپخانهٔ دریایی ، و نیروی وارد بر یک الکترون متحرک در یک میدان مغناطیسی همه بردار می‌باشند .

بردارها را با حروف سیاه مانند

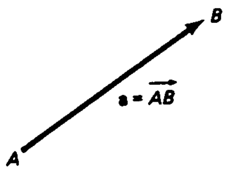
$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$$

(در چاپ) ، یا با گذاردن سهم روی حروف نازک نظیر مانند

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \ldots$$

(در دستنوشت) نشان می‌دهند. همانند اسکالرها ، آنها را با حروف نازک معمولی بدون سهم نیز نشان می‌دهند .

برای نمایش هندسی یک بردار ، یک پاره‌خط جهتدار یا سهم به کار می‌بریم که اشاره به جهت بردار داشته و طولش مساوی اندازهٔ بردار می‌باشد (توجه کنید که اندازهٔ یک بردار ذاتا" نامنفی است) . هر بردار یک **نقطهٔ شروع** و یک **نقطهٔ پایان** دارد ، نقطهٔ دوم با سر سهم نموده می‌شود . مثلا" ، از دو نقطهٔ انتهایی بردار $\mathbf{a}$ در شکل ۱ ، A نقطهٔ شروع و B نقطهٔ پایان است ؛ پاره‌خط جهتدار از A به B **به‌همین ترتیب** با $\overrightarrow{AB}$ نموده می‌شود ؛



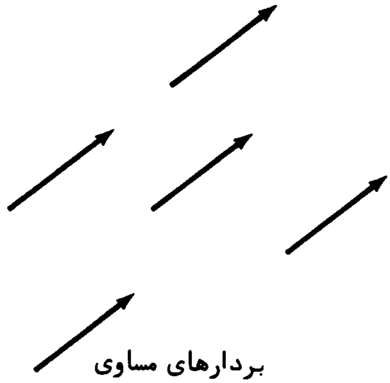
شکل ۱

و درنتیجه ، $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. اندازهٔ یک بردار با حرف نازک نظیر (هرچه باشد ،اندازه اسکالر است) ، یا با گذاردن بردار داخل علامت قدرمطلق نموده‌می‌شود . مثلا" ، در بردار شکل ۱ داریم

$$a = |\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}|.$$

دو بردار را **مساوی** گوییم اگر موازی (یا همخط) بوده ، به یک جهت اشاره کنند ،و اندازهٔ یکسانی داشته‌باشند . توجه‌کنید که **تساوی** دو بردار همانی آنها را معنی‌نمی‌دهد ، و این برخلاف تساوی کسرهایی چون $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{4}$ است که به معنی همانی می‌باشند .

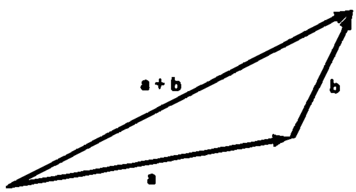
مثال ۱ . پنج بردار شکل ۲ ، که دوتای بالا همخط اند ، همه مساوی می‌باشند .



بردارهای مساوی

شکل ۲

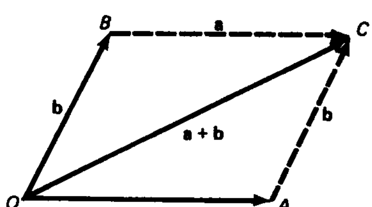
جمع بردارها. منظور از مجموع دو بردار **a** و **b** ، که با **a + b** نموده می‌شود ،یعنی بردار حاصل از قرار دادن نقطهٔ شروع **b** در نقطهٔ پایان **a** و سپس رسم برداری با نقطهٔ شروع **a** و نقطهٔ پایان **b** (ر.ک. شکل ۳) . ممکن است قبلا" با این ترسیم به صورت " قانون



جمع بردارها

شکل ۳

متوازی‌الاضلاع " فیزیک مقدماتی (که برای یافتن " برآیند " دو تغییر مکان ، دوسرعت ، دو نیرو ، و غیره به کار رفته) برخورد کرده باشید . در واقع ، هرگاه **a** و **b** راازنقطهٔشروع مشترک O ، مثل شکل ۴ ، رسم کرده و متوازی‌الاضلاع $OACB$ " پیموده شده به وسیلهٔ **a** و



تعویضپذیری جمع برداری

شکل ۴

b را بسازیم ، آنگاه **a + b** قطر OC متوازی‌الاضلاع می‌باشد (چرا ؟) . از این شکل معلوم می‌شود که

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

و

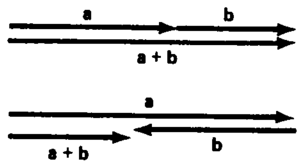
$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$

که باهم ایجاب می‌کنند که

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \qquad (۱)$$

نشانگر آنکه جمع برداری **تعویضپذیر** است .

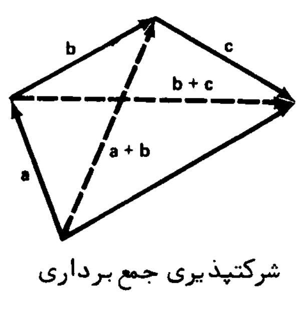
تبصره. اگر **a** و **b** موازی باشند ، مثلث شکل ۳ " فرو می‌ریزد " . در این صورت ، یکی‌از دو حالت شکل ۵ را خواهیم داشت .



شکل ۵

شکل ۶ نشان می‌دهد که جمع برداری **شرکتپذیر** نیز هست ، بدین معنی که

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \qquad (۲)$$



شرکتپذیری جمع برداری

شکل ۶

با چند بار استفاده از فرمولهای (۱) و (۲) معلوم می‌شود که مجموع هر تعداد بردار از ترتیب دسته‌بندی جملات مستقل است . بخصوص، با این مجازیم ، در نوشتن مجموع

بردارها ، پرانتزها و کروشه‌ها را حذف نماییم . مثلا " ،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = [(\mathbf{d} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}] + \mathbf{a} = [\mathbf{c} + (\mathbf{a} + \mathbf{d})] + \mathbf{b},$$

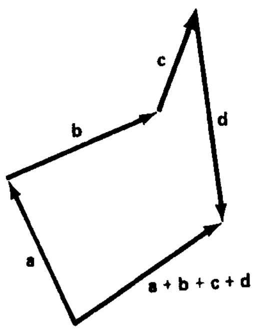
و از این قبیل .

این امر که طول یک ضلع هر مثلث نمی‌تواند از مجموع طول سایر اضلاع تجاوز کند ، ***نامساوی مثلثی***

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \tag{۳}$$

را به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ایجاب می‌نماید (ر.ک. شکل ۳) .توجه کنید که نامساوی مثلثی برای اسکالرها (قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۲۲) حالت خاصی از (۳) است که ، مثل شکل ۵، وقتی به دست می‌آید که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ همخط می‌باشند .

مثال ۲ . در شکل ۷ مجموع $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ برداری است که مسیر چندضلعی حاصل از



شکل ۷

قرار دادن نقطهٔ شروع $\mathbf{b}$ در نقطهٔ پایان $\mathbf{a}$ ، نقطهٔ شروع $\mathbf{c}$ در نقطهٔ پایان $\mathbf{b}$ ، و نقطهٔ شروع $\mathbf{d}$ در نقطهٔ پایان $\mathbf{c}$ را می‌بندد .

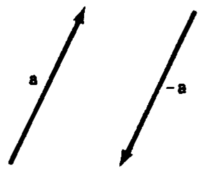
منظور از *بردار* صفر، که با $\mathbf{0}$ (صفر سیاه) نموده می‌شود یعنی " بردار " ی‌که نقاط شروع و پایانش یکی هستند . لذا ، بردار صفر دارای اندازهٔ 0 است ، ولی جهت تعریف شده‌ای ندارد . واضح است که بردار $\mathbf{0}$ همان نقش جمع برداری را دارد که عدد 0 در جمع (اسکالر) معمولی ایفا می‌کند؛ یعنی ، به ازای $\mathbf{a}$ ی دلخواه ،

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

به ازای بردار $\mathbf{a}$ ،بردار با همان اندازهٔ $\mathbf{a}$ ولی در جهت مخالف قرینهٔ $\mathbf{a}$ نام دارد

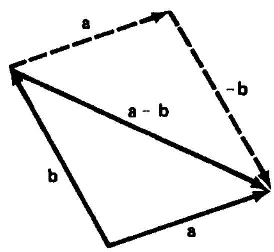
و با $\mathbf{a}-$ نموده می‌شود (ر.ک. شکل ۸) . از تعریف جمع برداری نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0},$$



شکل ۸

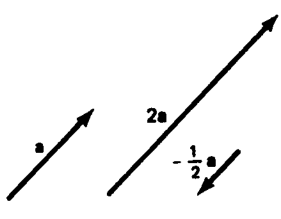
و چون $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ، قرارمی‌دهیم $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$. تفاضل $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ مساوی مجموع $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ تعریف می‌شود . برای ساختن $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ می‌توان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را طوری قرار داد که نقاط شروعشان یکی باشد ، و سپس بردار از نقطهٔ پایان $\mathbf{b}$ به نقطهٔ پایان $\mathbf{a}$ را رسم کرد . شکل ۹ دلیل کارکردن این ترسیم را نشان می‌دهد .



تفریق پاره‌خطها

شکل ۹

مضارب اسکالر یک بردار . باحاصل‌ضرب $p\mathbf{a}\ (=\mathbf{a}p)$ اسکالر ناصفر p و بردار ناصفر $\mathbf{a}$ برداری تعریف می‌شود که اندازهٔ آن $|p|$ برابر اندازهٔ $\mathbf{a}$ است (درنتیجه $|p\mathbf{a}| = |p||\mathbf{a}|$ همجهت با $\mathbf{a}$ اگر $p > 0$ و مختلف‌الجهت اگر $p < 0$ (ر.ک. شکل ۱۰)) . بخصوص، $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.



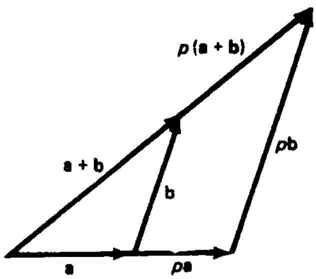
شکل ۱۰

اگر $p = 0$ یا $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ، طبق تعریف قرار می‌دهیم $p\mathbf{a} = \mathbf{0}$. به ازای دو اسکالر p و q ،فورا" می‌بینیم $p(q\mathbf{a}) = pq\mathbf{a}$ ، که در آن $pq\mathbf{a}$ حاصل‌ضرب اسکالر pq در بردار $\mathbf{a}$ است. همچنین ، به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ و اسکالرهای p, q ، قوانین پخشپذیری زیر را داریم :

$$(p + q)\mathbf{a} = p\mathbf{a} + q\mathbf{a}, \tag{۴}$$

$$p(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = p\mathbf{a} + p\mathbf{b}. \tag{۵}$$

شکل ۱۱ برقراری (۵) را توضیح می‌دهد ، و اثبات (۴) به عنوان تمرین گذارده‌شده‌است.



شکل ۱۱

تقسیم یک بردار بر یک اسکالر به‌طور طبیعی تعریف می‌شود ؛ یعنی ، با قرار دادن

$$\frac{\mathbf{a}}{p} = \frac{1}{p}\mathbf{a} \qquad (p \neq 0).$$

هر بردار به طول ۱ یک **بردار یکه** نام دارد . اگر $\mathbf{a}$ یک بردار ناصفر باشد ، بردار

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

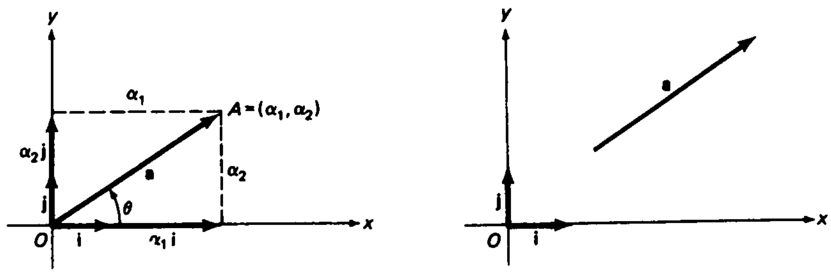
یک بردار یکه است ، زیرا

$$\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1.$$

مؤلفه‌های یک بردار. تا بحال بحث ما از بردارها صرفا" هندسی و " فارغ از مختصات " بوده است . حال دستگاهی از مختصات قائم x و y در صفحه به مبداء O اختیار می‌کنیم . فرض کنیم $\mathbf{i}$ بردار یکه در امتداد محور x مثبت و $\mathbf{j}$ بردار یکه در امتداد محور y مثبت ، مثل شکل ۱۲ (آ) باشد . در این صورت ، هر بردار $\mathbf{a}$ در صفحه نمایش منحصر به فردی به شکل زیر دارد :

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j}. \tag{۶}$$

اسکالرهای α_1 و α_2 ، به‌نام موءلفه‌های **a** ،به‌صورت زیر تعیین می‌شوند . بردار **a** را انتقال می‌دهیم ، یعنی آن را به موازات خود بدون دوران حرکت می‌دهیم ، تا آنکه‌نقطهٔ شروعش با مبداء O یکی شود . در این صورت ، نقطهٔ پایان **a** نقطهٔ $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ از صفحهٔ xy بوده ، و البته $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ، زیرا تمام انتقالهای یک بردار باهم مساویند . اما ، همانطورکه از شکل ۱۲ (ب) معلوم است ، مختصات α_1 و α_2 نقطهٔ A دقیقا" اسکالرهایی هستند که در نمایش یا " بسط " (۶) به‌کار می‌روند . به‌علاوه ، اندازهٔ **a** چیزی جز فاصلهٔ O تا A نیست؛



(ب) (آ)

شکل ۱۲

یعنی ،

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}. \tag{۷}$$

شکل همچنین نشان می‌دهد که هرگاه θ زاویهٔ بین محور x مثبت و بردار **a** باشد ، آنگاه

$$\alpha_1 = |\mathbf{a}| \cos\theta, \qquad \alpha_2 = |\mathbf{a}| \sin\theta.$$

منظور از *پایه* در صفحه یعنی دوبردار ثابت $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ ،به‌نام *بردارهای‌پایه* ،به طوری که هر بردار دلخواه **a** در صفحه نمایش منحصر به فردی به شکل

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2, \tag{۶'}$$

به نام *بسط* **a** نسبت‌به $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ ،داشته‌باشد . دراین‌صورت ، اسکالرهای α_1 و α_2 *موءلفه‌های* **a** (نسبت به $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$) نام‌دارند . می‌توان نشان داد که دو بردار ناصفر $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ یک‌پایه در صفحه تشکیل می‌دهند اگر و فقط اگر *غیر همخط* باشند؛ یعنی ، اگر و فقط اگرخطی شامل (یا موازی) هر دو بردار موجود نباشد . اگر بردارهای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ یک پایه برهم عمودباشند، پایه *متعامد* نام دارد ، و اگر علاوه‌بر عمود بودن بردارهای *یکه* نیز باشند ، پایه *متعامدیکه* نامیده می‌شود . مثلا" ، بردارهای‌یکهٔ **i** و **j** درامتداد محورهای مختصات یک‌پایهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند . توجه کنید که فرمول (۷) فقط برای پایهٔ متعامد یکه برقرار است (چرا؟) .

بردارها به عنوان جفتهای مرتب. بنابر نکات فوق، از اینجا به بعد از جفتهای‌مرتب برای نمایش نقاط و بردارها در صفحه استفاده می‌کنیم. لذا، (α_1, α_2) ممکن است به‌معنی نقطه به *مختصات* قائم α_1 و α_2 یا بردار $\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j}$ به *مؤلفه‌های* α_1 و α_2 (نسبت به پایهٔ متعامد یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ زمینه) باشد. چون $\mathbf{i} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ و $\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$، جفتهای مرتب نمایش خود بردارهای پایه مساویند با

$$\mathbf{i} = (1, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1).$$

حال اعمال جبری بر بردارها را از دیدگاه جفتهای مرتب تعبیر می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2)$ بردارهای دلخواهی باشند. در این صورت،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j}) + (\beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j}) = (\alpha_1\mathbf{i} + \beta_1\mathbf{i}) + (\alpha_2\mathbf{j} + \beta_2\mathbf{j}),$$

و لذا، به کمک (۴)،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{i} + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{j}, \tag{۸}$$

یا

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2). \tag{۸'}$$

هرگاه p اسکالر باشد، آنگاه $p\mathbf{a} = p(\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j})$؛ و لذا، به کمک (۵)،

$$p\mathbf{a} = p\alpha_1\mathbf{i} + p\alpha_2\mathbf{j}, \tag{۹}$$

یا

$$p(\alpha_1, \alpha_2) = (p\alpha_1, p\alpha_2). \tag{۹'}$$

پس از (۸') نتیجه می‌شود که به ازای هر بردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$،

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (0, 0) = (\alpha_1 + 0, \alpha_2 + 0) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

درنتیجه، $(0, 0)$ *جفت مرتبی است که بردار صفر* $\mathbf{0}$ *را نمایش می‌دهد*. برای به دست‌آوردن جفت مرتب نمایش $-\mathbf{a}$، در فرمول (۹) قرار می‌دهیم $p = -1$، به دست می‌آید $-\mathbf{a} = -\alpha_1\mathbf{i} - \alpha_2\mathbf{j}$، یا معادلاً"

$$-\mathbf{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2).$$

به‌علاوه، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$؛ درنتیجه،

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (\alpha_1, \alpha_2) + (-\beta_1, -\beta_2) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \tag{۱۰}$$

یا

$$(\alpha_1, \alpha_2) - (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2). \tag{۱۰'}$$

دوبردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2)$ مساویند اگروفقط اگر $\alpha_1 = \beta_1$ و $\alpha_2 = \beta_2$: یعنی اگر و فقط اگر هر دو با یک جفت مرتب نموده شوند. این امر از شکل ۱۲ (ب) واضح است،

زیرا بردارهای مساوی یا منطبق‌اند یا اشکال انتقال یافتهٔ هم می‌باشند. لذا، اگر $\mathbf{b} = \mathbf{a}$، بردار $\mathbf{b}$، پس از انتقال نقطهٔ شروع $\mathbf{b}$ به مبداء، بر $\overrightarrow{OA}$ منطبق می‌شود؛ درنتیجه، $\mathbf{b}$ مانند $\mathbf{a}$ با جفت مرتب $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ نموده می‌شود.

مثال ۳. فرض کنید $\mathbf{a} = (5, -1)$، $\mathbf{b} = (1, 6)$، و $\mathbf{c} = (0, -2)$. بردار $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ را حساب کرده، و سپس اندازه‌اش را بیابید.

حل. از قواعد (۸) تا (۱۰) آزادانه استفاده می‌کنیم، داریم

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c} = (5, -1) - 2(1, 6) + 4(0, -2)$$
$$= (5 - 2 + 0, -1 - 12 - 8) = (3, -21),$$

یا معادلاً

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 21\mathbf{j}.$$

بنابر فرمول (۷)، اندازهٔ این بردار مساوی است با

$$|3\mathbf{i} - 21\mathbf{j}| = \sqrt{3^2 + (-21)^2} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}.$$

مثال ۴. بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ را همجهت بردار $12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ بیابید.

حل. اندازهٔ $12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ مساوی است با

$$|12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13,$$

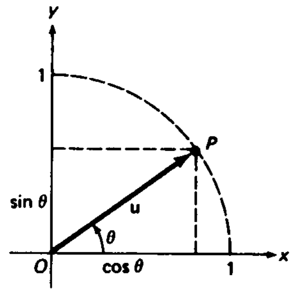
و درنتیجه،

$$\mathbf{u} = \frac{12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}}{|12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}|} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{5}{13}\mathbf{j}.$$

مثال ۵. بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ را طوری بیابید که با محور x مثبت زاویهٔ θ بسازد.

حل. اگر نقطهٔ شروع $\mathbf{u}$ را مبداء O بگیریم، نقطهٔ پایانش P به مختصات قطبی $|\mathbf{u}| = 1, \theta$ بوده و مختصات قائم آن، مثل شکل ۱۳، مساوی $|\mathbf{u}| \sin\theta = \sin\theta$، $|\mathbf{u}| \cos\theta = \cos\theta$ می‌باشند بنابراین،

$$\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}.$$



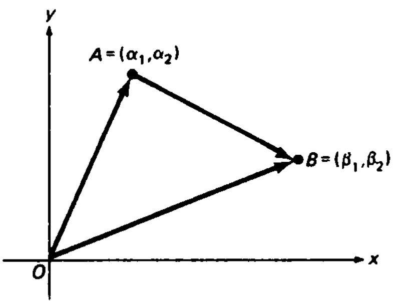
شکل ۱۳

برای بردار یکهٔ **u** در مثال ۴ داریم $\theta = \arctan \frac{5}{12} \approx 22.6^\circ$.

مثال ۶ . مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ با نقطهٔ شروع $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ و نقطهٔ پایان $B = (\beta_1, \beta_2)$ را بیابید .

حل . با رسم *بردارهای موضع* نقاط A و B ، یعنی بردارهای واصل از مبداء O به A و B ، معلوم می‌شود که ، مثل شکل ۱۴ ، $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. بنابراین ،

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\beta_1, \beta_2) - (\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2)$$



شکل ۱۴

یا $\overrightarrow{AB} = (\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{i} + (\beta_2 - \alpha_2)\mathbf{j}$. مثلاً ، هرگاه $A = (-2, 3), B = (4, -1)$ ، آنگاه $\overrightarrow{AB} = (4 - (-2), -1 - 3) = (6, -4) = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد ، بردارها ابزار توانایی در اثبات قضایای هندسی

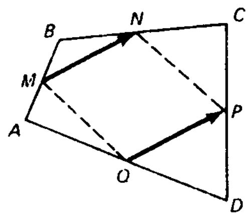
می‌باشند .

مثال ۷. نشان‌دهید که شکل حاصل‌از وصل نقاط میانی اضلاع مجاور هر چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است .

حل . فرض کنیم M ، N ، P ، و Q نقاط میانی اضلاع AB ، BC ، CD ، و DA باشند (ر.ک. شکل ۱۵) . در این صورت ،

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ})\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

بنابراین ، $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ ؛ یعنی ، دو ضلع مقابل چهارضلعی $MNPQ$ مساوی و موازیند؛ در نتیجه ، $MNPQ$ یک متوازی‌الاضلاع می‌باشد . همین برهان در بعد سه کار می‌کند؛ پس‌لازم نیست چهارضلعی $ABCD$ یک شکل مسطح باشد!



شکل ۱۵

چند مفهوم از جبرخطی . در خاتمه ، چند ایده را لمس می‌کنیم که در جبر خطی ، که‌مبحث جا افتاده‌ای در برنامهٔ ریاضیات لیسانس است ، نقش کلیدی دارند . منظور از **ترکیب‌خطی** n بردار $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ یعنی عبارتی به شکل

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n, \qquad (۱۱)$$

که در آن ضرایب $c_1, c_2, \ldots, c_n$ اسکالرند . (۱۱) خود بوضوح بردار است؛ و در واقع ، قبلاً دیدیم که هر بردار دلخواه در صفحه ترکیبی خطی از بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ می‌باشد. ترکیب خطی (۱۱) را **بدیهی** گوییم اگر تمام ضرایب $c_1, c_2, \ldots, c_n$ صفر باشند (دراین

صورت ، مساوی بردار صفر است) ، و *نابدیهی* خوانیم اگر دست کم یکی از ضرایب ناصفر باشد . بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ را *وابستهٔ خطی* گوییم اگر ترکیب خطی نابدیهی از $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ مساوی صفر باشد ؛ یعنی ، اگر بسطی به شکل (۱۱) با دست کم یک ضریب ناصفر داشته باشیم که مساوی بردار صفر باشد ؛ در غیر این صورت ، گوییم $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *مستقل خطی* می‌باشند . مثلاً ، بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ مستقل خطی‌اند ، زیرا

$$c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (c_1, c_2) = \mathbf{0}$$

اگر و فقط اگر $c_1 = c_2 = 0$ ، ولی بردارهای $\mathbf{a}_1 = (1, 2), \mathbf{a}_2 = (3, 4), \mathbf{a}_3 = (2, 3)$ وابستهٔ خطی‌اند ، زیرا

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3 &= (1, 2) + (3, 4) - 2(2, 3)\\ &= (1 + 3 - 4, 2 + 4 - 6) = (0, 0) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

به‌طورکلی ، می‌توان نشان داد که *هر سه بردار در صفحه وابستهٔ خطی بوده ، و دو بردار در صفحه مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر غیرهمخط باشند* .

مسائل

بردارهای داده شده را در یک دستگاه مختصات قائم (با اختیار مبداء به عنوان نقطهٔ شروع مشترک) رسم نمایید .

۱ . $-2\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, -3\mathbf{j}$

۲ . $\frac{3}{2}\mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, -2\mathbf{i} + \mathbf{j}, 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

در هر یک از مسائل زیر ، بردارهای $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ، $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ، $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ ، و $3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ را پیدا نمایید .

۳ . $\mathbf{a} = (1, -5), \mathbf{b} = (3, 6)$

۴ . $\mathbf{a} = (2, 0), \mathbf{b} = (0, -2)$

۵ . $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

۶ . $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$

۷ . $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

۸ . $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 9\mathbf{j}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

۹ . $\mathbf{a} = (1, 1), \mathbf{b} = (1, -1)$

۱۰ . $\mathbf{a} = (6, -5), \mathbf{b} = (-4, 3)$

بردار $\overrightarrow{AB}$ با نقاط انتهایی داده شده را بیابید .

۱۱ . $A = (-3, 0), B = (0, 6)$

۱۲ . $A = (3, 5), B = (4, 7)$

۱۳. $A = (1, -4), B = (-1, -9)$

۱۴. $A = (-5, 10), B = (0, 0)$

۱۵. $A = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), B = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$

۱۶. $A = (-\sin \frac{1}{4}\pi, \cos \frac{1}{4}\pi), B = (\cos \frac{1}{4}\pi, \sin \frac{1}{4}\pi)$

۱۷. نقطهٔ پایان بردار $-7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ عبارت است از $(3, -11)$. نقطهٔ شروعش چیست؟

۱۸. نقطهٔ شروع بردار $5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ عبارت است از $(-4, 8)$. نقطهٔ پایانش چیست؟

اندازهٔ بردار داده شده را بیابید.

۱۹. $\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$

۲۰. $\alpha\mathbf{i}$

۲۱. $-\beta\mathbf{j}$

۲۲. $-7\mathbf{i} + 24\mathbf{j}$

۲۳. $35\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

۲۴. $-\sqrt{5}\mathbf{i} + \sqrt{11}\mathbf{j}$

۲۵. اندازهٔ کدامیک از بردارهای $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ و $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ بزرگتر است؟

۲۶. برداری با نصف اندازهٔ $16\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ و جهت مخالف آن را بیابید.

بردار یکهٔ همجهت بردارداده‌شده را بیابید. زاویه‌ازمحور x مثبت به‌این جهت چقدراست؟

۲۷. $\mathbf{i} + \mathbf{j}$

۲۸. $\mathbf{i} - \mathbf{j}$

۲۹. $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

۳۰. $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

۳۱. $-6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

۳۲. $40\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

بردار یکه‌ای را بیابید که با محور x مثبت زاویهٔ داده شده را بسازد.

۳۳. $5\pi/3$

۳۴. $7\pi/6$

۳۵. $3\pi/4$

برداری به اندازهٔ 4 بیابید که با محور x مثبت زاویهٔ داده شده را بسازد.

۳۶. $3\pi/2$

۳۷. $\arctan \frac{2}{3}$

۳۸. $-\pi/4$

۳۹. فرض کنید $\mathbf{a} = (7, -1), \mathbf{b} = (13, 2), \mathbf{c} = (4, 5)$. بردار $\mathbf{x}$ را طوری بیابید که $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{x} = 3\mathbf{c} - \mathbf{x}$.

۴۰. با شروع از فرمول (۸)، تعویضپذیری و شرکتپذیری جمع برداری را به طور جبری ثابت کنید.

۴۱. فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای موضع دو نقطهٔ A و B نسبت به مبداء O باشند. نشان دهید که نقطهٔ پایان P بردار $(1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}\ (0 \le t \le 1)$ پاره‌خط AB را به‌نسبت $t:(1 - t)$ تقسیم می‌کند؛ و بخصوص، نقطهٔ میانی AB دارای بردار موضع $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ می‌باشد.

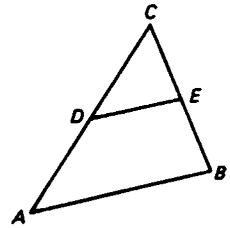
۴۲. چه وقت نامساوی مثلثی (۳) به صورت تساوی درمی‌آید؟ (فرض‌کنید $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.)

۴۳. نامساوی $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \ge ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$ را به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ثابت کنید.

به کمک بردارها ثابت کنید که

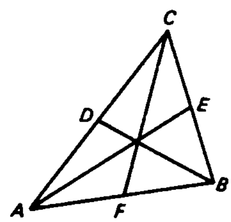
۴۴. اقطار یک متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

۴۵. پاره‌خط واصل بین نقاط میانی دو ضلع یک مثلث نصف ضلع سوم و موازی آن است (ر.ک. شکل ۱۶)



شکل ۱۶

۴۶. میانه‌های یک مثلث در نقطه‌ای متقاطعند که روی هر یک در دوسوم از رأس واقع است (ر.ک. شکل ۱۷)



شکل ۱۷

راهنمایی. از مسئلهٔ ۴۱ استفاده کنید.

۴۷. نشان دهید که بردارهای $\mathbf{e}_1 = (1, 1)$ و $\mathbf{e}_2 = (1, 2)$ یک پایهٔ غیرمتعامد تشکیل می‌دهند. بردار $\mathbf{a} = (-3, 5)$ را نسبت به $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بسط دهید.

۴۸. هر یک از بردارهای $\mathbf{a} = (3, -2)$, $\mathbf{b} = (-2, 1)$, $\mathbf{c} = (7, -4)$ را به صورت ترکیبی‌خطی از دو تای دیگر بیان نمایید.

۴۹. تمام بردارهایی را بیابید که با بردار $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ پایهٔ متعامد تشکیل دهند.

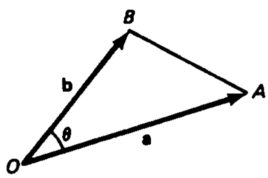
۵۰. فرض کنید $\mathbf{a} = (3, -1)$, $\mathbf{b} = (1, -2)$, $\mathbf{c} = (-1, 7)$. بردار $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ را به‌صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بیان نمایید.

۵۱. ناخدای یک قایق ماهیگیری، که با سرعت ۱۰ گره به‌شرق می‌رود، درمی‌یابدکه ظاهرا "باد مستقیما" از شمال به جنوب می‌وزد. وقتی سرعت قایق دوبرابر شود، ظاهرا" از شمال شرقی می‌وزد. سرعت واقعی باد چقدر است؟

۵۲ . هواپیمایی با سرعت 240 km/hr در بادی با سرعت 60 km/hr که مستقیماً " از شرق به غرب می‌وزد به سوی شمال درحال پرواز است . سرعت هواپیما نسبت به هوا و جهت این سرعت را پیدا نمایید .

۲.۱۱ حاصل‌ضرب نقطه‌ای

مفهوم " حاصل‌ضرب نقطه‌ای " دوبردار در مسئلهٔ هندسی یافتن مؤلفهٔ یک بردار در امتداد برداری دیگر و نیز در مسئلهٔ فیزیکی یافتن کار انجام شده به‌وسیلهٔ نیرویی‌که در جهت حرکت یک جسم بر آن اثر نمی‌کند ظاهر می‌شود (هر دو مسئله درآخر این بخش حل خواهند شد) . برای تعریف حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار ، لازم است زاویهٔ بین‌آنها را بدانیم . فرض‌کنیم دوبردار ناصفر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ طوری قرار داشته باشند که نقاط شروعشان O بوده و ، مثل شکل ۱۸ ، $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$.



زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مساوی θ است .

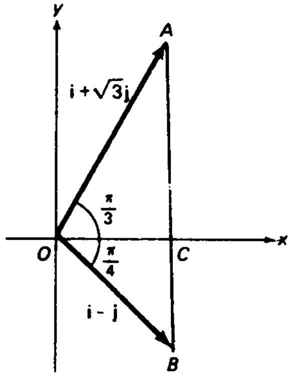
شکل ۱۸

دراین صورت ،منظور از زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ (با هر ترتیب) یعنی زاویهٔ θ در رأس O مثلث AOB . اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ موازی باشند ، یعنی $\mathbf{a} = p\mathbf{b}$ که در آن p اسکالر است ، مثلث " فرو می‌ریزد " ، و در این حالت تعریف می‌کنیم $\theta = 0$ اگر $p > 0$ و $\theta = \pi$ اگر $p < 0$. توجه کنید که θ همواره در بازهٔ $0 \le \theta \le \pi$ قرار دارد .

مثال ۱ . زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ را بیابید .

حل . باتوجه به شکل ۱۹ ، معلوم می‌شود که زاویهٔ AOC مساوی است با $\arctan\sqrt{3} = \pi/3$ ، ولی زاویهٔ BOC برابر است با $\arctan 1 = \pi/4$. لذا ، زاویهٔ AOB بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مجموع زیر می‌باشد :

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} = 105°.$$



شکل ۱۹

تعریف حاصل‌ضرب نقطه‌ای. اکنون *حاصل‌ضرب نقطه‌ای* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را بافرمول

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta \qquad (1)$$

تعریف می‌کنیم ،که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است . هرگاه $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ یا $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ ، آنگاه θ تعریف نشده است ، و طبق تعریف قرار می‌دهیم $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. حاصل‌ضرب نقطه‌ای ، که به خاطر آمدن نقطه در عبارت $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ این نام را یافته است ، *حاصل‌ضرب اسکالر* نیز خوانده می‌شود ، زیرا $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ یک‌عدد یعنی یک اسکالر می‌باشد[1] . از تعریف (۱) فوراً معلوم می‌شود که حاصل ضرب نقطه‌ای تعویضپذیر است :

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}.$$

زاویهٔ بین یک بردار با خودش صفر است . لذا ،

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}|^2.$$

بخصوص، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0$ اگر و فقط اگر $|\mathbf{a}|=0$ ؛ یعنی ، اگر و فقط اگر $\mathbf{a}=\mathbf{0}$. حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ مساوی صفر است اگر و فقط اگر $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{b}$ عمود باشد ، که نوشته می‌شود $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ ، و بردار صفر بر هر بردار عمود فرض می‌شود . در واقع ، فرمول

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = 0 \qquad (0\le\theta\le\pi)$$

برقرار است اگر و فقط اگر $\cos\theta=0$ ؛ و درنتیجه ، $\theta=\pi/2$ ، یا دست‌کم یکی‌ازبردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ صفر باشد؛ لذا ، در هر حالت ، $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

---

۱ . در بخش ۱۲ . ۳ نوع دیگری از حاصل ضرب دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ معرفی می‌شود ، که‌به‌جای *اسکالر بودن بردار است* و به جای $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ به صورت $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نوشته می‌شود .

شکل مولفه‌ای حاصل‌ضرب نقطه‌ای . حال برای حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ عبارتی برحسب مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نسبت به بردارهای پایه‌ٔ $\mathbf{i}=(1, 0)$ و $\mathbf{j}=(0, 1)$ پیدا می‌کنیم .

قضیه‌ٔ ۱ (**شکل مؤلفه‌ای حاصل‌ضرب نقطه‌ای**) . *هرگاه* $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}$ *یا معادلاً* $\mathbf{a}=(\alpha_1, \alpha_2)$ و $\mathbf{b}=(\beta_1, \beta_2)$ ، *آنگاه*

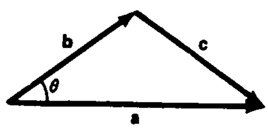
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2. \quad (۲)$$

برهان . فرض کنیم

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}=(\alpha_1-\beta_1)\mathbf{i}+(\alpha_2-\beta_2)\mathbf{j}.$$

با اعمال قانون کسینوسها (قضیه‌ٔ ۲ ، صفحه‌ٔ ۹۲) بر مثلث شکل ۲۰ به اضلاع $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ ، به دست می‌آوریم

$$|\mathbf{c}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta,$$



شکل ۲۰

که در آن θ زاویه‌ٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است . بنابراین ،

$$|\mathbf{c}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

درنتیجه ،

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{c}|^2). \quad (۳)$$

ولی

$$|\mathbf{a}|^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2, \qquad |\mathbf{b}|^2=\beta_1^2+\beta_2^2,$$

$$|\mathbf{c}|^2=(\alpha_1-\beta_1)^2+(\alpha_2-\beta_2)^2=\alpha_1^2-2\alpha_1\beta_1+\beta_1^2+\alpha_2^2-2\alpha_2\beta_2+\beta_2^2,$$

و با گذاردن این عبارات در (۳) به جای $|\mathbf{a}|^2$ ، $|\mathbf{b}|^2$ ، و $|\mathbf{c}|^2$ ، فوراً (۲) به دست خواهد آمد .

نتیجه . *هرگاه* p *و* q *اسکالر باشند ، آنگاه به ازای بردارهای دلخواه* $\mathbf{a}$ *و* $\mathbf{b}$ ،

$$(p\mathbf{a})\cdot(q\mathbf{b})=pq(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \quad (۴)$$

حاصل‌ضرب نقطه‌ای در قوانین پخشپذیری

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}, \quad (۵)$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \quad (۵')$$

به ازای بردارهای دلخواه a ، b ،و c نیز صدق می‌کنند .

برهان . فرض کنیم

$$\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j},\qquad \mathbf{b}=\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j},\qquad \mathbf{c}=\gamma_1\mathbf{i}+\gamma_2\mathbf{j}$$

(γ گامای کوچک یونانی است) . در این صورت ،

$$p\mathbf{a}=p\alpha_1\mathbf{i}+p\alpha_2\mathbf{j},\qquad q\mathbf{b}=q\beta_1\mathbf{i}+q\beta_2\mathbf{j},$$

و

$$\mathbf{b}+\mathbf{c}=(\beta_1+\gamma_1)\mathbf{i}+(\beta_2+\gamma_2)\mathbf{j}.$$

لذا ،

$$(p\mathbf{a})\cdot(q\mathbf{b})=(p\alpha_1)(q\beta_1)+(p\alpha_2)(q\beta_2)=pq(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)=pq(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

که (۴) را ثابت می‌کند . همچنین ،

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\alpha_1(\beta_1+\gamma_1)+\alpha_2(\beta_2+\gamma_2)=\alpha_1\beta_1+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_2\gamma_2,$$

ولی

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)+(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2),$$

که (۵) را ثابت خواهد کرد ، زیرا طرفهای راست این دو فرمول مساوی می‌باشند . بالاخره برای اثبات (۵') ، از (۵) و تعویضپذیری حاصل‌ضرب نقطه‌ای استفاده می‌کنیم :

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.$$

مثال ۲ . بنابر فرمول (۲) ، حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{a}=(2,5)$ و $\mathbf{b}=(4,-1)$ عبارت است از $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2(4)+5(-1)=8-5=3$.

مثال ۳ . بااستفاده‌از قوانین پخشپذیری (۵) و (۵') ، معلوم می‌شود که به ازای بردارهای دلخواه a ، b ، c ، و d ،

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$$

بخصوص ،

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2&=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\\&=|\mathbf{a}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

در اینجا $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ یعنی $2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ و ، به‌طورکلی ، $p\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ یعنی $p(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

به ازای بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}=(1,0)$ و $\mathbf{j}=(0,1)$ داریم

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1(1)+0(0)=1,\qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=1(0)+0(1)=0,\qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=0(0)+1(1)=1,$$

یا ، به‌طور فشرده‌تر ،

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0\qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1.$$

این فرمولهای اساسی را باید حفظ کرد . با استفاده از آنها معلوم می‌شود که هرگاه $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}$ ، آنگاه

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}=(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j})\cdot\mathbf{i}=\alpha_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\alpha_1,$$

و به همین نحو ،

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}=(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j})\cdot\mathbf{j}=\alpha_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+\alpha_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\alpha_2.$$

مثال ۴ . بردارهای $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+t\mathbf{j}$ به ازای چه مقدار از پارامتر t موازیند ؟ برهم عمودند ؟

حل . بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ موازی (یا همخط) اند اگر و فقط اگر به ازای اسکالر ناصفری چون $p\neq 0$ ، $\mathbf{a}=p\mathbf{b}$ ؛ یعنی ، $3\mathbf{i}+\mathbf{j}=p(-2\mathbf{i}+t\mathbf{j})$. با گرفتن مؤلفه و حل دستگاه معادلات حاصل $-2p=3,\ pt=1$ ، معلوم می‌شود که $p=-\frac{3}{2},\ t=1/p=-\frac{2}{3}$. بردارها بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ ؛ یعنی ، $(3\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot(-2\mathbf{i}+t\mathbf{j})=-6+t=0$ یا $t=6$.

فرض کنیم θ زاویهٔ بین بردارهای ناصفر $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}$ باشد . پس از تعریف (۱) حاصلضرب نقطه‌ای نتیجه می‌شود که

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\tag{۶}$$

اما $|\cos\theta|\le 1$ ؛ و درنتیجه ،

$$\left|\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\right|\le 1,$$

یا معادلاً

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|.\tag{۷}$$

فرمولهای (۶) و (۷) برحسب مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ خواهند شد

$$\cos\theta=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}\tag{۶'}$$

و

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \le \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}. \qquad (۷')$$

نامساوی (۷′) حالت خاصی از *نامساوی کشی ــ شوارتز*[1] است (ر.ک. مسئلهٔ ۴۷) . توجه کنید که در (۷) تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\cos\theta = \pm 1$؛ یعنی، اگر و فقط اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ؛ دراین‌حالت **a** و **b** موازی و همجهت‌اند اگر $\theta = 0$ ومختلف‌الجهت‌اند اگر $\theta = \pi$. همچنین ،توجه‌کنید که زاویهٔ θ حاده است $(0 < \theta < \pi/2)$ اگر $0 < \cos\theta < 1$ و منفرجه است $(\pi/2 < \theta < \pi)$ اگر $-1 < \cos\theta < 0$.

مثال ۵. زاویهٔ θ بین بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ را بیابید .

حل. دراینجا داریم

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1(2) - 1(1) = 1, \qquad |\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$
$$|\mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

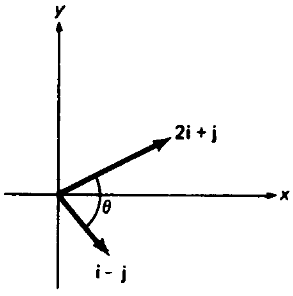
بنابراین ، طبق (۶) ،

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

که ایجاب می‌کند که

$$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} \approx 71.6^\circ$$

(ر.ک. شکل ۲۱) .



شکل ۲۱

1. *Cauchy–Schwarz*

تصویر یک بردار روی دیگری . فرض کنیم **a** و **b** دو بردار ناصفر باشند. در این صورت ، منظور از *مؤلفهٔ* **a** *در امتداد* **b** ، که به صورت $\mathbf{comp_b\, a}$ نوشته می‌شود ، یعنی *اسکالری* که مساوی حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a \cdot u_b}$ است ، که در آن $\mathbf{u_b}$ بردار یکه‌ای در جهت **b** می‌باشد . چون

$$\mathbf{u_b} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

داریم

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a \cdot b}}{|\mathbf{b}|},$$

یا معادلاً "

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta,$$

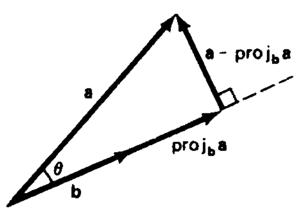
که در آن θ زاویهٔ بین **a** و **b** می‌باشد . منظور از **تصویر a روی b** ، که با $\mathbf{proj_b\, a}$ نموده می‌شود ، یعنی *برداری* با اندازهٔ $\mathbf{comp_b\, a}$ و موازی **b** ؛ یعنی ،

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = (\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a})\mathbf{u_b}.$$

می‌توان برحسب حاصل‌ضرب نقطه‌ای نوشت

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a \cdot b}}{|\mathbf{b}|}\, \mathbf{u_b} = \frac{(\mathbf{a \cdot b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}.$$

در شکل ۲۲ ، $\mathbf{proj_b\, a}$ تعبیر هندسی شده است . توجه کنید که اگر نقاط شروع **a** و **b** یکی باشند ، نقطهٔ پایان $\mathbf{proj_b\, a}$ پای عمود وارد از نقطهٔ پایان **a** به خط شامل **b** است . پس نتیجه می‌شود که بردار $\mathbf{a - proj_b\, a}$ ، طبق شکل ، بر **b** عمود می‌باشد .



تجزیهٔ a به مؤلفه‌ها در
امتداد b و عمود بر b

شکل ۲۲

لذا ، **a** را می‌توان به صورت مجموع بردار $\mathbf{proj_b\, a}$ موازی **b** و بردار $\mathbf{a - proj_b\, a}$ عمود

بر **b** نمایش داد . این بردارها به مؤلفهٔ *برداری* **a** *در امتداد* **b** (یا موازی **b**) و مؤلفهٔ *برداری* **a** **متعامد به** **b** (" متعامد" مترادف " عمود برهم " است) نیز شهرت دارند .

مثال ۶ . $\mathbf{comp_b\, a}$ و $\mathbf{proj_b\, a}$ را درصورتی‌بیابید که $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$. $\mathbf{a}$ را به‌صورت مجموعی از یک بردار موازی **b** و یک بردار متعامد به **b** نمایش دهید .

حل . چون

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3(5) + 2(-1) = 13, \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26},$$

داریم

$$\mathrm{comp}_\mathbf{b}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{13}{\sqrt{26}},$$

$$\mathrm{proj}_\mathbf{b}\,\mathbf{a} = (\mathrm{comp}_\mathbf{b}\,\mathbf{a})\mathbf{u}_\mathbf{b} = \frac{13}{\sqrt{26}}\,\frac{5\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{26}} = \frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}.$$

بردار

$$\mathbf{a} - \mathrm{proj}_\mathbf{b}\,\mathbf{a} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) - \left(\frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j}$$

متعامد به **a** است . لذا ، نمایش **a** به صورت مجموع برداری موازی **b** و برداری متعامد به **b** عبارت است از

$$\mathbf{a} = \left(\frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j}\right).$$

کار به عنوان حاصل‌ضرب نقطه‌ای . فرض کنیم جسمی تحت اثر نیروی ثابت F که در امتداد خط حرکت اثر می‌کند مسافت d را طی کرده باشد . همانطور که از مثال ۵ ، صفحهٔ ۴۳۰ ، می‌دانیم ، کار این نیرو از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$W = Fd. \tag{۸}$$

برای تعمیم این فرمول به حالتی که **F** *بردار* ثابتی است که کلاً" در امتداد حرکت اثر **نمی‌کند** ، به صورت زیر استدلال می‌کنیم . فرض کنیم تغییر مکان جسم بردار **d** بوده ، و θ زاویهٔ بین **F** و **d** باشد . همچنین ،

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp},$$

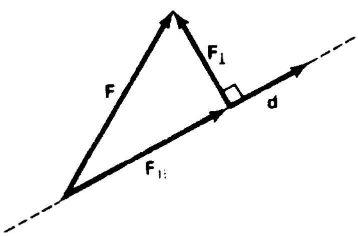
که در آن

$$\mathbf{F}_{\|} = \mathrm{proj}_{\mathbf{d}}\, \mathbf{F} = \frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{d})\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}$$

موءلفهٔ برداری $\mathbf{F}$ موازی $\mathbf{d}$ بوده و

$$\mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{F} - \mathrm{proj}_{\mathbf{d}}\, \mathbf{F}$$

موءلفهٔ برداری $\mathbf{F}$ متعامد به $\mathbf{d}$ است (ر.ک. شکل ۲۳) . موءلفهٔ $\mathbf{F}_{\perp}$ حرکتی درامتداد $\mathbf{d}$ تولید نمی‌کند؛ و درنتیجه، از دیدگاه حرکت در امتداد $\mathbf{d}$ ، نیروی $\mathbf{F}$ را می‌توان با $\mathbf{F}_{\|}$ عوض‌کرد.



شکل ۲۳

لذا، تمام کار به‌وسیلهٔ $\mathbf{F}_{\|}$ انجام شده است؛ درنتیجه، بنابر فرمول (۸) ،

$$W = \begin{cases} |\mathbf{F}_{\|}|\,|\mathbf{d}| \quad \text{،} \quad 0 \le \theta \le \pi/2 \ \text{اگر} \\ -|\mathbf{F}_{\|}|\,|\mathbf{d}| \quad \text{،} \quad \pi/2 < \theta \le \pi \ \text{اگر} \end{cases}$$

اما

$$|\mathbf{F}_{\|}|\,|\mathbf{d}| = \frac{|\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}|\,|\mathbf{d}|}{|\mathbf{d}|^2}\,|\mathbf{d}| = |\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}|$$
$$= \begin{cases} \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} \quad \text{،} \quad 0 \le \theta \le \pi/2 \ \text{اگر} \\ -\mathbf{F}\cdot\mathbf{d} \quad \text{،} \quad \pi/2 < \theta \le \pi \ \text{اگر} \end{cases}$$

و درنتیجه ،

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}. \tag{۸'}$$

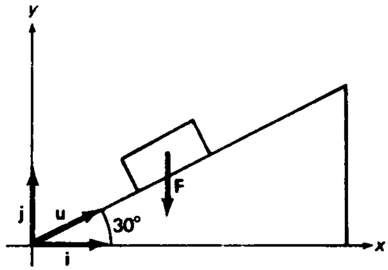
لذا، کار حاصل‌ضرب نقطه‌ای نیروی $\mathbf{F}$ و تغییرمکان $\mathbf{d}$ است .

در اینجا فرض است که $\mathbf{F}$ ثابت بوده و تغییر مکان مستقیم‌الخط است . در غیر این صورت، تعریف کار نیاز به مفهوم جدید " انتگرال خط " دارد، که در بخش ۱۰.۱۵ معرفی خواهد شد .

مثال ۷ . یک قطعه الوار به وزن 4 lb از یک سطح شیب‌دار بدون اصطکاک که باافق زاویهٔ 30°

می‌سازد به بالا برده می‌شود. چقدر کار در مقابل ثقل انجام دهیم تا الوار 5 ft بالارود؟

حل. همانند شکل ۲۴، بردارهای یکهٔ **i** و **j** را در جهات افقی و قائم معرفی می‌کنیم. در



شکل ۲۴

این صورت، بردار یکه در جهت تغییر مکان $\mathbf{u} = \cos 30° \mathbf{i} + \sin 30° \mathbf{j}$ می‌باشد. نیروی ثقل قائم و رو به پایین اثر کرده و با اندازهٔ 4 lb است؛ درنتیجه، $\mathbf{F} = -4\mathbf{j}$، و بردار تغییر مکان نظیر به بالا بردن الوار به اندازهٔ 5 ft عبارت است از $\mathbf{d} = 5\mathbf{u}$. لذا، در این تغییر مکان، کار انجام شده توسط ثقل مساوی است با

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = (-4\mathbf{j}) \cdot 5\mathbf{u} = -20\mathbf{j} \cdot (\cos 30° \mathbf{i} + \sin 30° \mathbf{j})$$
$$= -20 \sin 30° = -10 \text{ ft-lb},$$

و کار انجام شده در *مقابل* ثقل برابر است با $-\mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = 10$ ft-lb.

مسائل

حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ بردارهای داده شده و نیز زاویهٔ بین بردارها را بیابید.

۱. $\mathbf{a} = (-2, 1), \mathbf{b} = (3, 6)$
۲. $\mathbf{a} = (1, 1), \mathbf{b} = (-2, -2)$
۳. $\mathbf{a} = (1, 1), \mathbf{b} = (1, 0)$
۴. $\mathbf{a} = (3, 4), \mathbf{b} = (6, -8)$
۵. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i}$
۶. $\mathbf{a} = 16\mathbf{i}, \mathbf{b} = -19\mathbf{j}$
۷. $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
۸. $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 24\mathbf{j}, \mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

کمیات زیر را با فرض اینکه زاویهٔ بین بردارهای **a** و **b** مساوی $2\pi/3$ بوده و $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4$ پیدا نمایید.

۹. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
۱۰. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$
۱۱. $|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|^2$
۱۲. $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$

۱۳. آیا $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ که در آن $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ تساوی $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ را ایجاب می‌کند؟ جواب خود را توضیح دهید.

۱۴. نشان دهید که $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ متعامد به $\mathbf{b}$ است.

۱۵. فرض کنید $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$ بردارهای یکه‌ای باشند که $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ را بیابید.

۱۶. چه وقت فرمول $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ به ازای بردارهای ناصفر $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$ برقرارند؟

۱۷. زوایای مثلث به رئوس $A=(1,0)$، $B=(1,3)$، و $C=(2,1)$ را بیابید.

۱۸. مثال ۱ را با فرمول (۶) امتحان کنید.

۱۹. نشان دهید که بردار $\mathbf{v}=|\mathbf{b}|\mathbf{a}+|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را نصف می‌کند.

۲۰. نشان دهید که بردارهای $\mathbf{v}=|\mathbf{b}|\mathbf{a}+|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ و $\mathbf{w}=|\mathbf{a}|\mathbf{b}-|\mathbf{b}|\mathbf{a}$ متعامدند.

دو بردار یکه بیابید که به بردار داده شده متعامد باشند.

۲۱. $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ ۲۲. $-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

۲۳. $6\mathbf{i}-8\mathbf{j}$ ۲۴. $-5\mathbf{i}-12\mathbf{j}$

۲۵. دو بردار یکه بیابید که با بردار $-4\mathbf{i}+\mathbf{j}$ زاویهٔ $\pi/4$ بسازند.

۲۶. اگر $|\mathbf{a}|=3, |\mathbf{b}|=5$، بردارهای $\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}-t\mathbf{b}$ به ازای چه مقادیری از t بر هم عمودند؟

۲۷. بردارهای $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=4t\mathbf{i}-5\mathbf{j}$ به‌ازای چه‌مقداری از t موازیند؟ برهم عمودند؟

۲۸. بردارهای $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+6t\mathbf{j}$ به‌ازای چه‌مقداری از t موازیند؟ برهم عمودند؟

۲۹. زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}=\mathbf{i}+t\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ به ازای چه مقادیری از t مساوی $\pi/3$ است؟

فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ناصفری باشند. نشان دهید که

۳۰. $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برهم عمودند اگر $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$

۳۱. زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ از $\pi/2$ کوچکتر است اگر

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|>|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$$

۳۲. زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ از $\pi/2$ بزرگتر است اگر $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|<|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

۳۳. تحقیق کنید که به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=2|\mathbf{a}|^2+2|\mathbf{b}|^2$.

۳۴. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ را درصورتی بیابید که $|\mathbf{a}|=11, |\mathbf{b}|=23, |\mathbf{a}-\mathbf{b}|=30$.

۳۵. نشان دهید که اقطار یک لوزی (متوازی‌الاضلاعی به اضلاع مساوی) برهم عمودند.

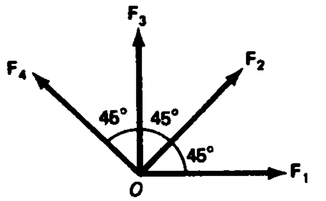
۳۶. نامساوی مثلثی $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ را به‌طور جبری ثابت کنید.

$\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$، یعنی مؤلفهٔ برداری $\mathbf{a}$ در امتداد $\mathbf{b}$، را به ازای بردارهای داده شده $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$،

و نیز مؤلفهٔ برداری $\mathbf{a}$ متعامد به $\mathbf{b}$ ، را بیابید .

۳۷. $\mathbf{a} = (3, 2), \mathbf{b} = (-1, -1)$
۳۸. $\mathbf{a} = (5, 1), \mathbf{b} = (-2, 10)$
۳۹. $\mathbf{a} = (-4, 7), \mathbf{b} = (3, 6)$
۴۰. $\mathbf{a} = (8, 0), \mathbf{b} = (4, 2)$
۴۱. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{b} = -3\mathbf{j}$
۴۲. $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
۴۳. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$
۴۴. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

۴۵. هر یک از نیروهای شکل ۲۵ به‌اندازهٔ 10 lb بوده‌و بر نقطهٔ O وارد می‌شوند. اندازهٔ نیروی برآیند $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$ را بیابید .



شکل ۲۵

۴۶. نامساوی (۷′) را مستقیماً ، بدون استفاده از بردارها ، ثابت کنید .

۴۷. ***نامساوی کشی ـ شوارتز کلی***

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}$$

را ثابت‌کنید ، که به ازای اعداد حقیقی دلخواه α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ برقرار است .

۴۸. یک بچه واگنی را با نیروی 50 lb در امتدادی که با افق زاویهٔ $60°$ می‌سازد به اندازهٔ 12 ft می‌کشد . نیرو چقدر کار انجام داده است ؟

۴۹. کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ را درصورتی بیابید که جسمی را در امتداد محور x از نقطهٔ $(-2, 0)$ تا نقطهٔ $(13, 0)$ حرکت داده باشد . در امتداد محور y از مبداء تا نقطهٔ $(0, -6)$ برده باشد . (نیرو به پوند و فاصله به فوت است .)

۵۰. اگر جرم 10-kg را از سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی که با افق زاویهٔ $45°$ ساخته است به اندازهٔ 3 m بالا بریم ، چقدر کار در مقابل ثقل انجام داده‌ایم ؟ (g ، یعنی شتاب ثقل ، را 9.8 m/sec^2 بگیرید .)

۵۱. جسمی در امتداد یک خط مستقیم از نقطهٔ $(-3, -2)$ تا $(1, 11)$ تحت اثر دو نیروی $\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{F}_2 = -7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ حرکت می‌کند . کار انجام شده توسط این دو نیرو به طور همزمان را بیابید . (نیرو به دین و فاصله به سانتیمتر است .)

۵۲. با استفاده از بردارها، ثابت کنید ارتفاعات یک مثلث دریک نقطه متقاطع اند.
۵۳. نشان دهید که بردار (A, B) بر خط $Ax + By + C = 0$ عمود است.
۵۴. با استفاده‌از بردارها، قضیهٔ ۰۱درصفحهٔ ۵۵ درموردفاصلهٔ بین‌نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1)$ و خط $Ax + By + C = 0$ را به طریقی دیگر ثابت کنید.

۳.۱۱ توابع برداری؛ سرعت و بردار یکهٔ مماس

در زبانی که تا بحال به کار برده‌ایم، تابع قاعده‌ای است که ما را از یک *اسکالر*، یعنی شناسه، به *اسکالر* دیگر، یعنی مقدار آن (که منحصرا" با شناسه‌اش معین می‌شود) می‌برد. مثلا"، اگر $f(t) = \cos t$، تابع f، وقتی شناسه‌اش t مساوی $\pi/3$است، مقدار $\frac{1}{2}$ را به خود می‌گیرد. حال که کمیاتی کلیتر از اسکالرها، یعنی بردارها، معرفی شده‌اند، طبیعی است ببینیم وقتی مقدار یا شناسهٔ یک تابع *بردار* باشد چه رخ می‌دهد. بحث را با **توابع *بردار* *مقدار***، یا به‌طورخلاصه **توابع *برداری***، یعنی توابعی باشناسهٔ‌اسکالر که‌مقادیرشان بردارند، آغاز می‌کنیم. مثلا"، تابع برداری

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$$

وقتی شناسهٔ t آن اسکالر$\pi/3$است، مقدار$\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$ را دارد. حالت پیچیده "میدان برداری" است؛ یعنی یک تابع برداری از یک شناسهٔ *برداری*، که بعدها مطرح خواهدشد (ر.ک. فصل ۱۵).

حد یک تابع برداری. حال به حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری می‌پردازیم. بحث را با مفهوم **حد** یک تابع برداری آغاز می‌کنیم. فرض کنیم بردار $\mathbf{L}$ چنان باشد که

$$\lim_{t \to a} |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| = 0, \qquad (1)$$

در آن ملاحظه می‌کنید که $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}|$ یک اسکالر است، که اندازهٔ یک بردار می‌باشد. در این صورت، گوییم وقتی $t \to a$، $\mathbf{f}(t)$ به حد $\mathbf{L}$ نزدیک می‌شود، و می‌نویسیم وقتی $t \to a$، $\mathbf{f}(t) \to \mathbf{L}$ یا

$$\lim_{t \to a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}.$$

ممکن است حدس زده باشید که تابع برداری $\mathbf{f}$ به حد $\mathbf{L}$ نزدیک می‌شود اگر و فقط اگر تک تک مؤلفه‌هایش به مؤلفه‌های $\mathbf{L}$ نزدیک گردند. قضیهٔ زیر دلیل این امر را به شما نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲ (حد یک تابع برداری برحسب مؤلفه‌های آن) . *تابع برداری*

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j},$$

که نسبت به *بردارهای‌پایهٔ* **i** و **j** *دارای‌مؤلفه‌های* $f_1(t)$ و $f_2(t)$ *است* ، *به حد* $\mathbf{L} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ نزدیک می‌شود *اگر و فقط‌اگر مؤلفه‌هایش به مؤلفه‌های* **L** *نزدیک گردند* ؛ یعنی ،

$$\lim_{t\to a} f_1(t) = A, \qquad \lim_{t\to a} f_2(t) = B. \tag{۲}$$

برهان *(اختیاری)* . ابتدا فرض می‌کنیم وقتی $t \to a$ ، $\mathbf{f}(t) \to \mathbf{L}$ یا معادلاً " وقتی $t \to a$ ، $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| \to 0$. واضح است که

$$|f_1(t) - A| = \sqrt{[f_1(t) - A]^2} \le \sqrt{[f_1(t) - A]^2 + [f_2(t) - B]^2} = |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}|,$$
$$|f_2(t) - B| = \sqrt{[f_2(t) - B]^2} \le \sqrt{[f_1(t) - A]^2 + [f_2(t) - B]^2} = |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}|,$$

که در آنها ازاین استفاده‌شده‌است‌که $f_1(t) - A$ و $f_2(t) - B$ مؤلفه‌های $\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}$ می‌باشند. اما طرفهای راست‌این نامساویها بارفتن $t \to a$ به 0 نزدیک می‌شوند ؛ و درنتیجه ،طرفهای چپ نیز چنین می‌کنند ، که موجب اثبات (۲) می‌گردد .

به عکس، فرض کنیم فرمولهای (۲) ، یا معادلاً "

$$\lim_{t\to a} |f_1(t) - A| = 0, \qquad \lim_{t\to a} |f_2(t) - B| = 0, \tag{۲'}$$

برقرار باشند . بنابر نامساوی مثلثی برای بردارها (فرمول (۳) ، صفحهٔ۱۰۴۹) ، داریم

$$|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| = |[f_1(t) - A]\mathbf{i} + [f_2(t) - B]\mathbf{j}| \le |[f_1(t) - A]\mathbf{i}| + |[f_2(t) - B]\mathbf{j}|$$
$$= |f_1(t) - A|\,|\mathbf{i}| + |f_2(t) - B|\,|\mathbf{j}| = |f_1(t) - A| + |f_2(t) - B|.$$

ولی طرف راست این نامساوی ، وقتی $t \to a$ ، به خاطر (۲') به 0 نزدیک می‌شود ؛ و در نتیجه ، طرف چپ نیز چنین می‌کند . بنابراین ، وقتی $t \to a$ ، $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| \to 0$ ؛ یعنی ، وقتی $t \to a$ ، $\mathbf{f}(t) \to \mathbf{L}$.

قضیهٔ ۲ محاسبات مثال زیر را (که در آن حد یک تابع برداری " مؤلفه به مؤلفه " گرفته می‌شود) توجیه خواهد کرد .

مثال ۱ . هرگاه

$$\mathbf{f}(t) = (t^2 + 2)\mathbf{i} + (\arctan t)\mathbf{j},$$

آنگاه

$$\lim_{t\to 1} \mathbf{f}(t) = \left[\lim_{t\to 1} (t^2+2)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to 1} \arctan t\right]\mathbf{j}$$
$$= (1^2+2)\mathbf{i} + (\arctan 1)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + \frac{\pi}{4}\mathbf{j}.$$

مشتقگیری از یک تابع برداری. پیوستگی و مشتقپذیری از توابع برداری همانند توابع اسکالر تعریف می‌شوند. لذا، گوییم تابع برداری $\mathbf{f}(t)$ در a پیوسته است اگر

$$\lim_{t\to a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(a)$$

و در a مشتقپذیر است اگر حد

$$\lim_{t\to a} \frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(a)}{t-a}, \tag{۳}$$

یا معادلاً

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{f}(a+\Delta t)-\mathbf{f}(a)}{\Delta t} \tag{۳'}$$

$(\Delta t = t-a)$ موجود و متناهی باشد. حد (۳) یا (۳') مشتق $\mathbf{f}(t)$ در a نام دارد و با $\mathbf{f}'(a)$ نموده می‌شود.

از قضیهٔ ۲ معلوم می‌شود که تابع برداری $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ در نقطهٔ a پیوسته است اگر و فقط اگر هر دو مؤلفه $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در a پیوسته باشند. به همین نحو، با اعمال قضیهٔ ۲ بر مؤلفه‌های

$$\frac{f_1(t)-f_1(a)}{t-a}, \qquad \frac{f_2(t)-f_2(a)}{t-a}$$

خارج‌قسمت تفاضلی (۳)، معلوم می‌شود که

$$\mathbf{f}'(a) = f'_1(a)\mathbf{i} + f'_2(a)\mathbf{j},$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. لذا، برای یافتن مشتق یک تابع برداری مشتقپذیر $\mathbf{f}(t)$، تابعی برداری تشکیل می‌دهیم که مؤلفه‌هایش مشتقات مؤلفه‌های $\mathbf{f}(t)$ می‌باشند. مثل همیشه، پیوستگی یا مشتقپذیری بر *بازهٔ* I یعنی پیوستگی یا مشتقپذیری در هر نقطه از I. نمادهای دیگر برای مشتق $\mathbf{f}'(t)$ عبارتند از $\mathbf{D}_t\mathbf{f}(t)$ و $d\mathbf{f}(t)/dt$.

مثال ۲. چون e^t و $\ln t$ هر دو بر $I=(0, \infty)$ پیوسته و مشتقپذیرند، تابع برداری

$$\mathbf{f}(t) = (e^t)\mathbf{i} + (\ln t)\mathbf{j}$$

نیز بر I پیوسته و مشتقپذیر، با مشتق

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f}(t) = \left(\frac{d}{dt}e^t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d}{dt}\ln t\right)\mathbf{j} = (e^t)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{t}\right)\mathbf{j}$$

می‌باشد.

مثال ۳. فرض کنیم $c(t)$ یک تابع اسکالر و $\mathbf{f}(t)$ یک تابع برداری بوده و هر دو بر بازهٔ I مشتقپذیر باشند. در این صورت،

$$\frac{d}{dt}[c(t)\mathbf{f}(t)] = \frac{d}{dt}[c(t)f_1(t)\mathbf{i} + c(t)f_2(t)\mathbf{j}]$$
$$= \frac{dc(t)}{dt}f_1(t)\mathbf{i} + c(t)\frac{df_1(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dc(t)}{dt}f_2(t)\mathbf{j} + c(t)\frac{df_2(t)}{dt}\mathbf{j},$$

و درنتیجه،

$$\frac{d}{dt}[c(t)\mathbf{f}(t)] = \frac{dc(t)}{dt}\mathbf{f}(t) + c(t)\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}.$$

این فرمول در حالت خاص که ثابت $= c \equiv c(t)$ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d}{dt}[c\mathbf{f}(t)] = c\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}.$$

مثال ۴. فرض کنیم $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ دو تابع برداری باشند که هر دو بر بازهٔ I مشتقپذیر بوده و مؤلفه‌هایشان به‌ترتیب $f_1(t), f_2(t)$ و $g_1(t), g_2(t)$ باشند. دراین صورت، با حذف شناسه‌ها برای سادگی، معلوم می‌شود که مشتق حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)$ مساوی است با

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \frac{d}{dt}(f_1g_1 + f_2g_2) = \frac{df_1}{dt}g_1 + f_1\frac{dg_1}{dt} + \frac{df_2}{dt}g_2 + f_2\frac{dg_2}{dt}$$
$$= \left(\frac{df_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{df_2}{dt}\mathbf{j}\right)\cdot(g_1\mathbf{i} + g_2\mathbf{j}) + (f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j})\cdot\left(\frac{dg_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dg_2}{dt}\mathbf{j}\right),$$

یعنی،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{f}}{dt}\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\frac{d\mathbf{g}}{dt}. \qquad (۴)$$

به تشابه بین این فرمول و قاعدهٔ مشابه آن برای مشتقگیری از حاصل‌ضرب دو تابع اسکالر

توجه نمایید . با اینحال ، حاصل‌ضربهای طرف راست (۴) حاصل‌ضرب معمولی نبوده بلکه حاصل‌ضربهایی *نقطه‌ای* می‌باشند .

مثال ۵ . فرض کنیم $\mathbf{f}(t)$ یک تابع برداری با اندازهٔ ثابت ولی جهت متغیر باشد . در این صورت ،

$$|\mathbf{f}(t)|^2 = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t) = c,$$

که در آن c اسکالر ثابتی است؛ و درنتیجه ،

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{f}(t)|^2 = \frac{d}{dt} c = 0.$$

این را می‌توان به کمک (۴) به صورت زیر نوشت :

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{f}|^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} = 2\mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} = 0$$

(مجددا " شناسه‌ها را حذف می‌کنیم) . بنابراین ،

$$\mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} = 0,$$

درنتیجه ، $\mathbf{f}$ به $d\mathbf{f}/dt$ متعامد می‌باشد . به عبارت دیگر ، ***یک تابع برداری با اندازهٔ ثابت همیشه به مشتق خود متعامد است*** .

انتگرالگیری از یک تابع برداری . *انتگرال معین* تابع برداری $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ با فرمول

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b f_2(t)\,dt\right)\mathbf{j}, \qquad (۵)$$

یعنی با " مؤلفه به مؤلفه " انتگرالگیری ، تعریف می‌شود . اگر تابع $\mathbf{f}(t)$ پیوسته باشد ، مؤلفه‌هایش نیز چنین‌اند؛ و درنتیجه ، هر دو انتگرال سمت راست (۵) وجود دارند ، که وجود انتگرال سمت‌چپ نتیجه‌می‌شود . اگر انتگرال $\mathbf{f}(t)$ را حد مجموع ریمان‌برداری مناسبی تعریف کنیم ، همان فرمول (۵) به دست می‌آید (ر.ک. مسئلهٔ ۳۴) .

مثال ۶ . هرگاه مثل مثال ۲

$$\mathbf{f}(t) = (e^t)\mathbf{i} + (\ln t)\mathbf{j} \qquad (0 < t < \infty),$$

آنگاه

$$\int_1^2 \mathbf{f}(t)\,dt = \left(\int_1^2 e^t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_1^2 \ln t\,dt\right)\mathbf{j}$$
$$= e^t\Big|_1^2 \mathbf{i} + (t\ln t - t)\Big|_1^2 \mathbf{j} = (e^2 - e)\mathbf{i} + (2\ln 2 - 1)\mathbf{j}.$$

منظور از یک *پاد* مشتق تابع برداری $\mathbf{f}(t)$ ، که بر بازهٔ I تعریف شده است ، یعنی تابعی چون $\mathbf{F}(t)$ که بر I تعریف شده و

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t).$$

هرگاه $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ و $F_1(t), F_2(t)$ به‌ترتیب پادمشتقهایی از $f_1(t), f_2(t)$ باشند ، آنگاه $\mathbf{F}(t) = F_1(t)\mathbf{i} + F_2(t)\mathbf{j}$ بوضوح یک پاد مشتق $\mathbf{f}(t)$ می‌باشد . از نظیر قضیه راجع به توابع اسکالر (قضیهٔ ۴ ، صفحه ۳۹۸) فورا" معلوم می‌شود که دو پادمشتق $\mathbf{f}(t)$ بر بازهٔ I فقط می‌توانند به اندازهٔ بردار ثابتی چون C فرق داشته باشند . پاد مشتق کلی $\mathbf{f}(t)$ ، یعنی $\mathbf{F}(t) + \mathbf{C}$ ، *انتگرال نامعین* $\mathbf{f}(t)$ نام دارد و با $\int \mathbf{f}(t)\,dt$ ، بدون حدود انتگرالگیری ، نموده می‌شود . انتگرالگیری نامعین موءلفه به موءلفه از $\mathbf{f}(t)$ فورا" نتیجه می‌دهد که

$$\int \mathbf{f}(t)\,dt = \left(\int f_1(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int f_2(t)\,dt\right)\mathbf{j}.$$

البته ، مشابه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توابع برداری عبارت است از

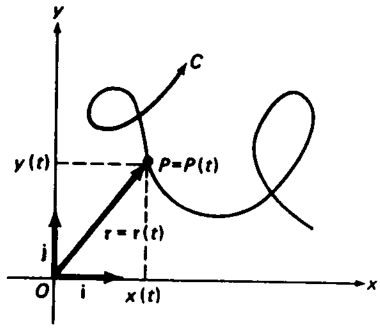
$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a) = \mathbf{F}(t)\Big|_a^b$$

مثال ۷. تابع برداری $\mathbf{F}(t) = (\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ یک پادمشتق تابع برداری $\mathbf{f}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ بر هر بازه است .

حال از توابع برداری در مطالعهٔ حرکت در صفحه استفاده می‌کنیم . فرض کنیم

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (\ t \text{ در } I\ )$$

یک تابع برداری پیوسته باشد که بر بازهٔ I تعریف شده است ، و نقطهٔ شروع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را در مبداء O صفحهٔ xy ، مثل شکل ۲۶ ، قرارداده‌ایم . در این صورت ، نقطهٔ پایان $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ نقطهٔ متغیر $P = P(t) = (x(t), y(t))$ از صفحه است ، و $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *بردار موضع* (یا *بردار شعاعی*) $P = P(t)$ نام دارد . (در اینجا از علامت $\mathbf{r}$ به جای $\mathbf{f}$ استفاده می‌کنیم ، و این



شکل ۲۶

به خاطر موارد استعمال متعدد آن در فیزیک و ریاضیات کار بسته است.) وقتی t افزایش می‌یابد، $P = P(t)$ یک منحنی مسطح به نام نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، یعنی منحنی C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \text{ (} t \text{ در } I \text{).} \tag{۶}$$

می‌پیماید. بالاخص گرفتن پارامتر t به‌عنوان زمان الهام‌بخش است، و ما این کار را با علم به اینکه این تنها امکان نیست انجام می‌دهیم.

سرعت و تندی. اگر $\mathbf{r}(t)$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

میزان تغییر زمانی بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ است که موضع نقطهٔ متغیر $P = P(t)$ را مشخص می‌کند. این کمیت، به خاطر معنی فیزیکی‌اش، به *بردار سرعت*، یا فقط سرعت، معروف است و با $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ نموده می‌شود. چون $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ، داریم

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j},$$

که از آن معلوم می‌شود که $\mathbf{v}(t)$ تعمیم سرعت یک بعدی تعریف شده در بخش ۱۰۲ به دو بعد می‌باشد.

منظور از تندی نقطهٔ متغیر $P = P(t)$ یعنی اندازهٔ بردار سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$؛ یعنی، اسکالر

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \tag{۷}$$

از حالا به بعد فرض می‌کنیم

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0 \qquad (I \text{ در } t) \tag{۸}$$

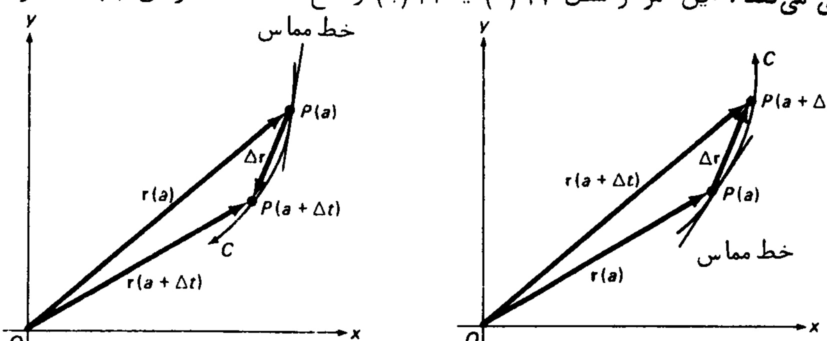
پس نتیجه می‌شود که تندی، و درنتیجه سرعت، نقطهٔ P که منحنی C را می‌پیماید هرگز صفر نیست؛ درنتیجه، نقطه هیچگاه از حرکت باز نمی‌ماند.

برای تعبیر هندسی سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$، فرض کنیم $\phi = \phi(t)$ زاویه از محور x مثبت به $\mathbf{v}$ باشد؛ این یعنی اگر نقطهٔ شروع بردار $\mathbf{v}$ در مبداء می‌بود، نقطهٔ پایانش به مختصات قطبی $|\mathbf{v}|$ و ϕ می‌شد. (ϕ را با زاویهٔ بین $\mathbf{v}$ و بردار یکهٔ $\mathbf{i}$، که برخلاف ϕ به‌بازهٔ $[0, \pi]$ محدود است، خلط نکنید.) فرض‌کنید a نقطه‌ای‌از I بوده، و $x'(a) \neq 0$. در این‌صورت،

$$\tan \phi = \frac{y'(a)}{x'(a)},$$

زیرا $\mathbf{v}(a) = x'(a)\mathbf{i} + y'(a)\mathbf{j}$. اما، همانند صفحهٔ ۷۳۲، این خارج قسمت درست‌شیب‌مماس بر منحنی C به معادلات پارامتری (۶) در نقطهٔ $P(a) = (x(a), y(a))$ است. به‌علاوه، هرگاه $x'(a) = 0$، آنگاه، به خاطر شرط (۸)، $y'(a) \neq 0$، و در این صورت $\mathbf{v}(a) = y'(a)\mathbf{j}$؛ در نتیجه، $\mathbf{v}(a)$ قائم است، ولی مماس بر منحنی C در $P(a)$ نیز قائم می‌باشد (این را با مراجعه به‌تعریف‌مماس به‌عنوان موضع‌حدی خط‌قاطع مار بر نقاط $(x(a), y(a))$ و $(x(t), y(t))$ وقتی $t \to a$، نشان دهید). لذا، در هر حال، سرعت $\mathbf{v}(a)$ همواره موازی مماس برمنحنی C در $P(a)$ است. بنابراین، اگر نقطهٔ شروعش را در $P(a)$ قرار دهیم، بردار $\mathbf{v}(a)$ همیشه در جهت مماس بر C در $P(a)$ خواهد بود.

در واقع، حتی می‌توان در مورد جهت $\mathbf{v}(a)$ از این صریحتر بود. درحقیقت، از دو جهت مخالف بر خط مماس، ***$\mathbf{v}(a)$ در جهتی اشاره دارد که در آن $P = P(t)$ با افزایش t، C را طی می‌کند***. این امر از شکل ۲۷ (آ) یا ۲۷ (ب) واضح است، که در آن جهت افزایش t



(ب) (آ)

شکل ۲۷

در هر حالت با سر سهم روی خود منحنی C نموده شده است ، و بردار خارج‌قسمت‌تفاضلی

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(a+\Delta t) - \mathbf{r}(a)}{\Delta t} \qquad (۹)$$

وقتی $\Delta t \to 0$ ، حول $P(a)$ چرخیده مآلا" به $\mathbf{v}(a)$ نزدیک‌می‌شود . در هر دو شکل Δt مثبت فرض شده است ؛ درنتیجه ، $P(a)$ در امتداد منحنی C ، که در جهت افزایش t پیموده می‌شود ، پیش از $P(a+\Delta t)$ می‌آیدو اما ، اگر Δt منفی باشد ، جهت حدی بردار (۹) وقتی $\Delta t \to 0$ همان جهت به ازای Δt مثبت است ، ولواینکه در اینجا $P(a)$ **بعداز** $P(a+\Delta t)$ بیاید ، چرا که اگر Δt منفی باشد ، می‌توان (۹) را به شکل معادل زیر نوشت :

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(a+\Delta t) - \mathbf{r}(a)}{-|\Delta t|},$$

درنتیجه ، $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ بازهم در امتداد C در جهت افزایش t اشاره دارد (چرا ؟)

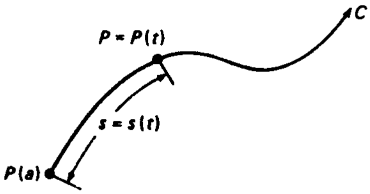
تبصره . اگر a یک نقطهٔ انتهایی I باشد ، $x'(a)$ و $y'(a)$ را مشتقات یکطرفهٔ مناسبی می‌گیریم. همچنین ، شرط (۸) را ضعیف کرده و می‌خواهیم فقط در نقاط درونی I برقرار باشد. با این کار می‌توان حالاتی را درنظر گرفت که در آنها سرعت اولیه یا نهایی یک حرکت صفر است .

تابع طول قوس . تا اینجا همه چیز خوب پیش رفته است . درک شهودی این را می‌طلبدکه تندی نقطهٔ متحرک P در امتداد منحنی C مساوی میزان تغییر زمانی مسافت پیموده شده توسط P در امتداد C باشد که از نقطهٔ ثابتی روی C سنجیده شده است (هرچه باشد،این معنی تندی در حالت خاصی است که C خط مستقیم است) . لذا ، اینک نشان می‌دهیم که تندی v ، که مساوی اندازهٔ $|\mathbf{v}|$ بردار سرعت $\mathbf{v}$ تعریف می‌شود ، مساوی مشتق ds/dt است ، که در آن s طول قوس در امتداد C است . برای این کار ، فرض کنیم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ باشد وقتی t روی بازهٔ I تغییر می‌کند ، و نیز توابع $x(t)$ و $y(t)$ بر I به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند . با انتخاب نقطهٔ ثابت a در I ، ***تابع طول قوس***

$$s = s(t) \qquad (t \geq a)$$

را طول‌قوس C بانقطهٔ‌شروع‌ثابت $P(a) = (x(a), \ y(a))$ ونقطهٔ‌پایان‌متغیر $P(t) = (x(t), \ y(t))$ تعریف می‌کنیم . در شکل ۲۸ ، $s(t)$ تعبیر هندسی شده است .بنابر فرمول (۲)،صفحهٔ ۷۴۱،

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du, \qquad (۱۰)$$



تعبیر هندسی تابع طول قوس

شکل ۲۸

که در آن u را متغیر انتگرالگیری گرفته‌ایم تا با حد بالایی انتگرالگیری t خلط نشود . با مشتقگیری از (۱۰) نسبت به t ، به دست می‌آوریم

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \qquad (۱۰')$$

(قضیهٔ ۵ در صفحهٔ ۴۰۵ را به‌کار برید) ، و از مقایسهٔ این فرمول با (۷) نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید :

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}. \qquad (۱۱)$$

با استفاده از توابع برداری ، می‌توان (۱۰) را به شکل فشردهٔ

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du,$$

یا معادلا "

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(u)|\, du,$$

نوشت ، که از آن برقراری فرمول (۱۱) فورا " مشهود خواهد بود .

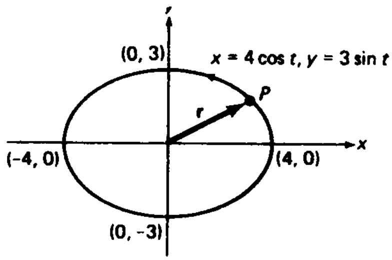
مثال ۸. سرعت و تندی نقطهٔ P به بردار موضع

$$\mathbf{r} = (4 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} \qquad (t \geq 0) \qquad (۱۲)$$

را بیابید . چه وقت و کجا تندی ماکزیمم و مینیمم می‌شود ؟

حل . وقتی t افزایش می‌یابد ، P بیضی به معادلهٔ دکارتی $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$ را با شروع از نقطهٔ $(4, 0)$ درلحظهٔ $t = 0$ و حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت مرتبا " می‌پیماید

(ر.ک. شکل ۲۹) .



شکل ۲۹

با مشتقگیری از (۱۲) ، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-4 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j}.$$

تندی اندازهٔ $\mathbf{v}$ و مساوی است با

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(-4 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} = \sqrt{16 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}.$$

چون

$$v^2 = 16 \sin^2 t + 9 \cos^2 t = 7 \sin^2 t + 9(\sin^2 t + \cos^2 t) = 7 \sin^2 t + 9,$$

ماکزیمم v^2 مساوی 16 است ، و وقتی حاصل می‌شود که $\sin t = \pm 1, \cos t = 0$ و مینیمم v^2 برابر 9 است ، و وقتی به دست می‌آید که $\sin t = 0, \cos t = \pm 1$. لذا ، تندی ماکزیمم 4 و در نقاط انتهایی $(0, \pm 3)$ محور اقصر بیضی رخ می‌دهد ، و تندی مینیمم 3 و در نقاط انتهایی $(\pm 4, 0)$ محور اطول روی خواهد داد .

تعریف بردار یکهٔ مماس. مثل قبل ، فرض کنیم بردار سرعت $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ناصفر بوده ، و نقطهٔ شروعش $P = P(t)$ ونقطهٔ پایانش بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد . همچنین ، C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد . در این صورت ، $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ مماس بر C در نقطهٔ P بوده و در جهت افزایش t اشاره دارد . با تقسیم بردار $\mathbf{v}$ بر اندازه‌اش، بردار یکهٔ

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \qquad (۱۳)$$

به دست می‌آید ، که مانند خود $\mathbf{v}$ بر C در نقطهٔ P مماس بوده و در جهت افزایش t اشاره دارد . بنابراین ، $\mathbf{T}$ *بردار یکهٔ مماس* برمنحنی C در نقطهٔ P می‌باشد . پس از (۱۳) نتیجه

می‌شود که

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|},$$

ولی می‌توان فرمول ساده‌تری برای $\mathbf{T}$ به دست آورد؛ یعنی،

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \qquad (۱۴)$$

و این با توصیف C به وسیلهٔ پارامتر طول قوس s انجام می‌گیرد. به این ترتیب که گوییم تابع $s = s(t)$ پیوسته و مشتقپذیر است، و صعودی نیز هست، چرا که انتگرالده (۱۰) همواره مثبت است (چرا؟). بنابراین، $s(t)$ دارای تابع معکوس پیوسته و مشتقپذیر $t = t(s)$ با مشتق

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt}$$

است (ر.ک. قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۴۶۰). در این صورت، به کمک (۱۱)، داریم

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

که در آن قاعدهٔ زنجیره‌ای برای توابع برداری (ر.ک. مسئلهٔ ۲۱) در آخرین مرحله به کار رفته است، و برهان فرمول (۱۴) کامل خواهد بود.

لذا، *بردار یکهٔ مماس* $\mathbf{T}$ *مشتق بردار موضع* $\mathbf{r}$ *نسبت به طول قوس* s *است*. فرمول (۱۴) برحسب مؤلفه‌های x و y بردار موضع $\mathbf{r}$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}. \qquad (۱۴')$$

بخصوص، این ایجاب می‌کند که

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

زیرا $\mathbf{T}$ بردار یکه می‌باشد.

تابع مشتقگیری شده در فرمول (۱۴) برحسب تابع اصلی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ به صورت تابع مرکب $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$ است، که در آن $t = t(s)$ معکوس تابع طول قوس $s = s(t)$ می‌باشد. محاسبهٔ صریح تابع $s = s(t)$ اغلب مشکل یا غیرممکن است، ولی این از ارزش توجه به C با پارامتر طول قوس s نخواهد کاست.

مثال ۹. بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}$ را برای نمودار

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{j} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j} \qquad (t \geq 0),$$

هم به‌عنوان تابع $\mathbf{T}(t)$ از پارامتر t و هم تابع $\mathbf{T}(s)$ از طول‌قوس s که‌ازنقطهٔ $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} = (1, 0)$ سنجیده شده پیدا نمایید.

حل. مشتق $\mathbf{r}(t)$ مساوی است با

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (-\sin t + \sin t + t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t - \cos t + t \sin t)\mathbf{j}\\ &= (t\cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j},\end{aligned}$$

با اندازهٔ

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2} = t,$$

و درنتیجه،

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}.$$

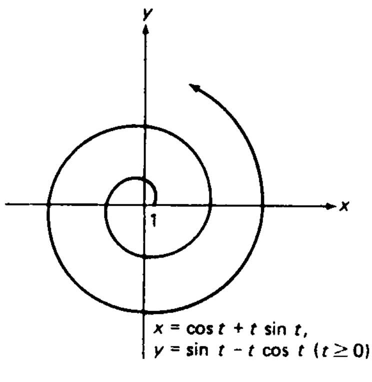
به‌علاوه،

$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_0^t u\, du = \frac{1}{2}t^2,$$

و از اینرو، $t = \sqrt{2s}$ ؛ درنتیجه،

$$\mathbf{T}(s) = (\cos\sqrt{2s}\,)\mathbf{i} + (\sin\sqrt{2s}\,)\mathbf{j}.$$

نمودار تابع $\mathbf{r}(t)$ منحنی مارپیچی است که در شکل ۳۰ نموده شده است.



شکل ۳۰

مسائل

حد داده شده را محاسبه کنید.

۱. $\lim\limits_{t\to 2} (t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j})$ ✓

۲. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\mathbf{i} - 2e^t\mathbf{j}\right)$ ✓

۳. $\lim_{t \to 1} \left(\frac{1}{t^2+1} \mathbf{i} + \cos \frac{\pi t}{3} \mathbf{j} \right)$ ✓ ۴. $\lim_{t \to 0^+} \left(\frac{\arccos t}{5} \mathbf{i} + \sqrt{t}\, \mathbf{j} \right)$ ✓

۵. $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{2}{\ln t} \mathbf{i} + \frac{1-t}{1+t} \mathbf{j} \right)$ ✓ ۶. $\lim_{t \to -1} \left(\frac{t^2-1}{t-1} \mathbf{i} + \frac{t^3+1}{t+1} \mathbf{j} \right)$ ✓

۷. آیا تابع برداری $\mathbf{f}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + (\ln (\ln t))\mathbf{j}$ در $t = e$ ؛ در $t = 1$ پیوسته است ؟

نشان دهید هرگاه وقتی $t \to a$ ، $\mathbf{f}(t) \to \mathbf{L}$ و $\mathbf{g}(t) \to \mathbf{M}$ ، آنگاه

۸. $\lim_{t \to a} c\mathbf{f}(t) = c\mathbf{L}$ (c اسکالر است)

۹. $\lim_{t \to a} [\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)] = \mathbf{L} + \mathbf{M}$

۱۰. $\lim_{t \to a} [\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)] = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}$

۱۱. $\lim_{t \to a} |\mathbf{f}(t)| = |\mathbf{L}|$

از تابع برداری داده شده مشتق بگیرید .

۱۲. $(2t^3 - 5)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}$ ✓ ۱۳. $(t \ln t)\mathbf{i} + (t^2 e^t)\mathbf{j}$ ✓

۱۴. $(\tan t)\mathbf{i} + (\ln (\ln t))\mathbf{j}$ ✓ ۱۵. $(\sec t)\mathbf{i} - (\sinh t)\mathbf{j}$ ✓

۱۶. $(\arctan t)\mathbf{i} + (\cos (\sin t))\mathbf{j}$ ✓ ۱۷. $(e^t \sin t)\mathbf{i} + (e^{-t} \cos t)\mathbf{j}$ ✓

نشان دهید که

۱۸. مشتق یک تابع برداری ثابت بردار صفر است .

۱۹. هرگاه $\mathbf{f}(t)$ در a مشتقپذیر باشد ، آنگاه $\mathbf{f}(t)$ در a پیوسته است .

۲۰. هرگاه $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ در a مشتقپذیر با مشتقات $\mathbf{f}'(a)$ و $\mathbf{g}'(a)$ باشند ، آنگاه $\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$ در a مشتقپذیر با مشتق $\mathbf{f}'(a) + \mathbf{g}'(a)$ می‌باشد .

۲۱. هرگاه $\mathbf{f}(t)$ تابع مشتقپذیری از t بوده و t تابع مشتقپذیری از u باشد ، آنگاه

$$\frac{d\mathbf{f}}{du} = \frac{d\mathbf{f}}{dt}\frac{dt}{du} \quad \text{(قاعدهٔ زنجیره‌ای برای توابع برداری)}$$

مشروط براینکه u چنان باشد که $t(u)$ در قلمرو $\mathbf{f}(t)$ واقع باشد .

پادمشتق $\mathbf{F}(t)$ تابع برداری دادهٔ شدهٔ $\mathbf{f}(t)$ را طوری بیابید که در شرط تصریح شده صدق کند.

۲۲. $\mathbf{f}(t) = 2t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j},\ \mathbf{F}(1) = 4\mathbf{j}$ ✓

۲۳. $\mathbf{f}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (e^t)\mathbf{j},\ \mathbf{F}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ✓

۲۴. $\mathbf{f}(t) = (2/t)\mathbf{i} + (\ln t)\mathbf{j},\ \mathbf{F}(e) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ✓

۲۵. $\mathbf{f}(t) = \sec t[(\tan t)\mathbf{i} + (\sec t)\mathbf{j}],\ \mathbf{F}(\pi/3) = \mathbf{0}$

انتگرال داده شده از یک تابع برداری را محاسبه کنید.

۲۶. $\int_1^2 (3t\mathbf{i} - 4t^2\mathbf{j})\,dt$

۲۷. $\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}\right) dt$

۲۸. $\int [(t \ln t)\mathbf{i} + (\csc^2 t)\mathbf{j}]\,dt$

۲۹. $\int_0^{10} |(\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}|\,dt$

۳۰. $\int_0^1 (2^t\mathbf{i} + 3^{-t}\mathbf{j})\,dt$

۳۱. $\int [(\sin^2 t)\mathbf{i} + (\cos^2 t)\mathbf{j}]\,dt$

۳۲. فرض کنید $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ توابعی برداری بوده و هر دو بر $[a, b]$ پیوسته باشند. نشان دهید که

$$\int_a^b c\mathbf{f}(t)\,dt = c\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt \quad (\text{یک اسکالر است } c)$$

و

$$\int_a^b [\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt + \int_a^b \mathbf{g}(t)\,dt.$$

۳۳. فرض کنید $\mathbf{f}(t)$ بر $[a, b]$ پیوسته بوده، و $\mathbf{c}$ بردار ثابتی باشد. نشان دهید که

$$\int_a^b \mathbf{c}\cdot\mathbf{f}(t)\,dt = \mathbf{c}\cdot\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt.$$

۳۴. فرض کنید $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$ $\mu = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n\}$، و p_i نقطهٔ دلخواهی در زیربازهٔ $[t_{i-1}, t_i]$ باشد. نشان دهید هرگاه $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$ تابع برداری پیوسته بر $[a, b]$ بوده و $\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt$ به صورت $\lim\limits_{\mu\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{f}(p_i)\Delta t_i$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \int_a^b f_2(t)\,dt\right).$$

سرعت $\mathbf{v}$ و تندی $v = |\mathbf{v}|$ نقطهٔ $P = P(t)$ با بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را بیابید. مسیر پیموده شده به‌وسیلهٔ P را طوری رسم کنید که جهت افزایش t را نشان دهد.

۳۵. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

۳۶. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$

۳۷. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$

۳۸. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$

۳۹. $\mathbf{r}(t) = (2\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$

۴۰. $\mathbf{r}(t) = (3\cosh t)\mathbf{i} + (4\sinh t)\mathbf{j}$

بردار واحد مماس $\mathbf{T}$ بر نمودار تابع برداری داده شدهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را، هم‌به‌صورت تابع $\mathbf{T}(t)$

از پارامتر t و هم به صورت تابع $\mathbf{T}(s)$ از طول قوس s که از نقطه با بردارموضع $\mathbf{r}(0)$ سنجیده می‌شود ، پیدا نمایید .

۴۱. $\mathbf{r}(t) = 5t\mathbf{i} + \mathbf{j}$

۴۲. $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} - 8t\mathbf{j}$

۴۳. $\mathbf{r}(t) = (\cos 3t)\mathbf{i} + (\sin 3t)\mathbf{j}$

۴۴. $\mathbf{r}(t) = (4 \sin t)\mathbf{i} + (4 \cos t)\mathbf{j}$

۴۵. $\mathbf{r}(t) = \frac{3}{2}t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \quad (t > 0)$

۴۶. $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j}$

۴۷. مسیر پیموده شده توسط نقطه به بردار موضع

$$\mathbf{r}(t) = (4 \cos^3 t)\mathbf{i} + (4 \sin^3 t)\mathbf{j} \qquad (t \geq 0)$$

را توصیف کنید . چه وقت و کجا تندی نقطهٔ P ماکزیمم و مینیمم خود را می‌گیرد ؟ آیا P هیچگاه از حرکت می‌ایستد ؟

۴.۱۱ بردار یکهٔ قائم ، انحنا و شتاب

برای مطالعهٔ بیشتر حرکت در صفحه ، فرض کنیم بردار موضع

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (\text{در } I \; t),$$

بردار سرعت

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j},$$

تابع طول قوس

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(u)|\, du, \tag{1}$$

و بردار یکهٔ مماس

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

همانند بخش پیش باشند . پریم نمایش مشتقگیری نسبت به پارامتر t است ، که ما آن را زمان می‌گیریم ، و a نقطهٔ ثابتی از بازهٔ I است که تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ بر آن تعریف شده است . مثل قبل ، فرض می‌کنیم $\mathbf{r}(t)$ بر I مشتقپذیر بوده و در شرط

$$|\mathbf{r}'(t)|^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$$

در هر نقطهٔ درونی I صدق می‌کند (ر.ک. تبصرهٔ صفحهٔ ۱۰۸۰) ، ولی علاوه‌براین فرض می‌کنیم مشتقات دوم $x''(t)$ و $y''(t)$ بر I موجود و پیوسته باشند . همچنین ، به‌یاد می‌آوریم که فرمول (۱) ایجاب می‌کند که

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|. \tag{2}$$

مثل قبل ، فرض کنیم $P = P(t) = (x(t), y(t))$ نقطهٔ پایان بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ است که نقطهٔ شروعش درمبداء O صفحهٔ xy می‌باشد . دراین صورت ، با افزایش t ، $P(t)$ نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، یعنی منحنی مسطح C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \ (\ I \text{ در } t\ )$$

را می‌پیماید . نقطهٔ شروع بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ نقطهٔ $P(t)$ بوده ، و وقتی t افزایش یابد ، جهت $\mathbf{T}$ معمولاً " از یک‌نقطه به نقطهٔ دیگر در امتداد C تغییر می‌کند . لذا ، علی‌رغم اینکه اندازهٔ $\mathbf{T}$ مقدار ثابت 1 را دارد ، مشتق $\mathbf{T}$ نسبت به t عموماً " ناصفر است . چون $|\mathbf{T}|^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ ، داریم

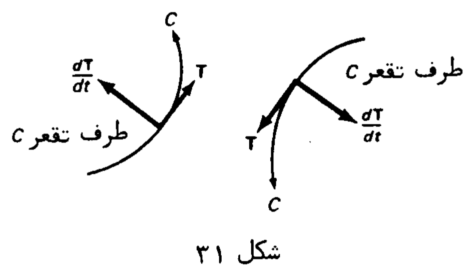
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0,$$

و درنتیجه ،

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0 \qquad (۲)$$

(قس . مثال ۵ ، صفحهٔ ۱۰۷۵) . لذا ، بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}$ همیشه به مشتقش $d\mathbf{T}/dt$ ، که عموماً " بردار یکه نیست ، متعامد است ، و وقتی جهت $\mathbf{T}$ تغییر می‌کند ، جهت $d\mathbf{T}/dt$ تغییر خواهد کرد .

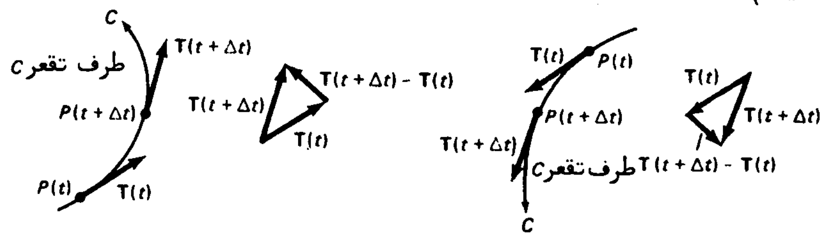
در شکل ۳۱ ، فرمول (۲) تعبیر هندسی شده است ، و در آن سر سهم روی C جهت پیموده شدن C ضمن افزایش t را نشان می‌دهد . بردار $d\mathbf{T}/dt$ همیشه اشاره به **طرف تقعر**



شکل ۳۱

C دارد ؛ یعنی ، طرفی که وقتی منحنی C توسط نقطهٔ متحرک $P(t)$ پیموده می‌شود به آن می‌گردد . برای مشاهدهٔ دلیل آن ، شکل ۳۲ را درنظر می‌گیریم ، که در آن $\mathbf{T}(t)$ بردار یکهٔ مماس در لحظهٔ t بوده و $\mathbf{T}(t + \Delta t)$ بردار یکهٔ مماس درزمان بعدی $t + \Delta t$ است . ازشکل واضح است که جهت خم شدن منحنی وقتی $P(t)$ آن را می‌پیماید همان جهت بردار تفاضلی $\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)$ است ، که این خود همان جهت مشتق $d\mathbf{T}/dt$ را دارد (حکم اخیر را

توجیه کنید) .



شکل ۳۲

مثال ۱ . بردارهای $\mathbf{T}$ و $d\mathbf{T}/dt$ را برای تابع برداری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} \tag{۳}$$

بیابید .

حل . نمودار (۳) دایره به شعاع ۱ و مرکز مبداء است که با افزایش t در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود . بردار یکهٔ مماس عبارت است از

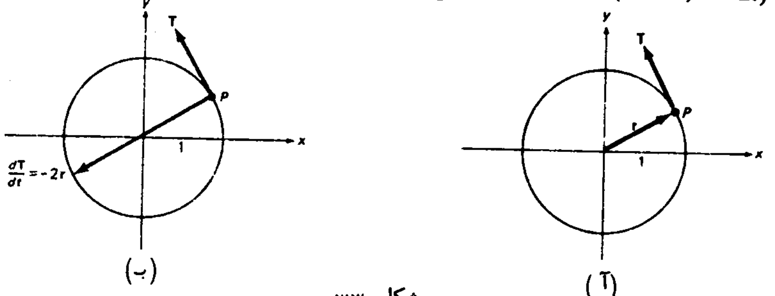
$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(-2\sin 2t)\mathbf{i} + (2\cos 2t)\mathbf{j}}{\sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}[(-2\sin 2t)\mathbf{i} + (2\cos 2t)\mathbf{j}] = (-\sin 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}$$

[ر.ک. شکل ۳۳ (آ)] ، و مشتقش مساوی است با

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -2[(\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}] = -2\mathbf{r}(t).$$

چون $-\mathbf{r}(t)$ ، یعنی قرینهٔ بردار موضع ، به مبداء اشاره دارد ، $d\mathbf{T}/dt$ به سمت مرکز دایرهٔ C ، و درنتیجه به طرف تقعر C ، می‌باشد . این امر در شکل ۳۳ (ب) نموده شده است، که در آن $P = (\cos 2t, \sin 2t)$ نقطهٔ شروع مشترک بردارهای $\mathbf{T}$ و $d\mathbf{T}/dt$ می‌باشد .



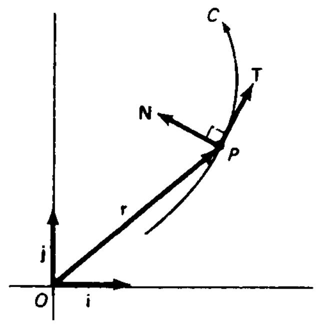
(ب) (آ)

شکل ۳۳

تعریف بردار یکهٔ قائم . حال ، علاوه‌بر بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ ، بردار یکهٔ دیگری معرفی می‌کنیم ، که با $\mathbf{N} = \mathbf{N}(t)$ نموده و **بردار یکهٔ قائم** به منحنی C در نقطهٔ $P = P(t)$ نامیده می‌شود . این بردار یکهٔ

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \qquad \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} \neq \mathbf{0}\right)$$

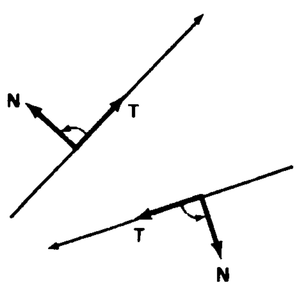
در جهت $d\mathbf{T}/dt = \mathbf{T}'(t)$ با نقطهٔ شروع P می‌باشد . چون $d\mathbf{T}/dt$ متعامد به $\mathbf{T}$ بوده و به طرف تقعر C اشاره دارد ، همین امر در مورد بردار $\mathbf{N}$ درست است (ر.ک. شکل ۳۴) .اگر C خط مستقیم باشد ،جهت $\mathbf{T}$ تغییر نمی‌کند ،و دراین صورت ، $d\mathbf{T}/dt \equiv \mathbf{0}$. دراین‌حالت



بردارهای یکهٔ مماس و قائم T و N

شکل ۳۴

$\mathbf{N}$ را بردار حاصل از دوران $\mathbf{T}$ به اندازهٔ $90°$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت ، مثل شکل ۳۵ ، می‌گیریم .



شکل ۳۵

مثال ۲ . بردار یکهٔ قائم به منحنی

$$x = 2t, \qquad y = t^2 \tag{۴}$$

را در مبداء O و نیز در نقاط $(-2, 1)$ و $(4, 4)$ بیابید .

حل. با حذف پارامتر t از معادلات (۴) ، معلوم می‌شود که منحنی سهمی به معادلهٔ دکارتی $y = \frac{1}{4}x^2$ است . بردار موضع نظیر به (۴) عبارت است از $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ با مشتق $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$. لذا ، بردار یکهٔ مماس مساوی است با

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{4 + 4t^2}} = \frac{\mathbf{i} + t\mathbf{j}}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

با مشتقگیری از $\mathbf{T}(t)$ ، بردار

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{-t\mathbf{i} + \mathbf{j}}{(1 + t^2)^{3/2}}$$

با اندازهٔ

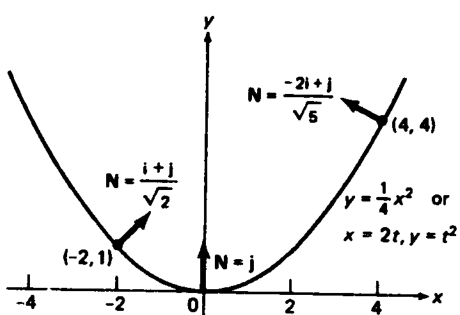
$$|\mathbf{T}'(t)| = \frac{\sqrt{(-t)^2 + 1^2}}{(1 + t^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{(1 + t^2)^{3/2}} = \frac{1}{1 + t^2}$$

به‌دست می‌آید . لذا ، بردار یکهٔ قائم به سهمی در نقطهٔ $P(t) = (2t, t^2)$ عبارت است از

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{-t\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

مبداء O نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ است ؛ و درنتیجه ، بردار یکهٔ قائم در O مساوی $\mathbf{N}(0) = \mathbf{j}$ می‌باشد . نقاط $(-2, 1)$ و $(4, 4)$ نظیر به مقادیر پارامتر $t = -1$ و $t = 2$ می‌باشند . بنابراین ،

$$\mathbf{N}(-1) = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$



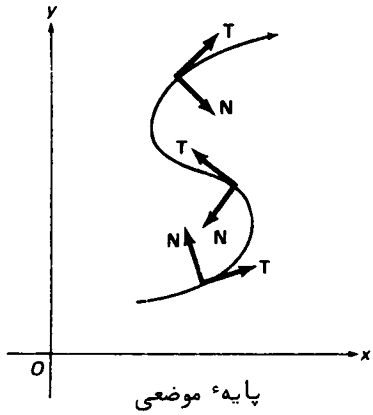
شکل ۳۶

بردار یکهٔ قائم در$(-2, 1)$ است ، ولی

$$\mathbf{N}(2) = \frac{-2\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{5}}$$

بردار یکهٔ قائم در $(4, 4)$ می‌باشد؛ ر.ک. شکل ۳۶.

بردارهای یکهٔ $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ یک پایهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند (صفحهٔ ۱۰۵۲) ، که بر خلاف پایهٔ متعامد یکهٔ ثابت $\mathbf{i} = (1, 0)$ و $\mathbf{j} = (0, 1)$ ، از یک نقطه به‌نقطهٔ دیگر در امتداد منحنی C ، طبق شکل ۳۷، تغییر می‌کند.



شکل ۳۷

به این دلیل ، پایهٔ مرکب از $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ را **پایهٔ موضعی** می‌نامند. مثلاً ، پایهٔ موضعی حرکت مستدیر مثال ۱ عبارت است از

$$\mathbf{T} = (-\sin 2t)\,\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{N} = (-\cos 2t)\mathbf{i} + (-\sin 2t)\mathbf{j}$$

(این مطلب را تحقیق کنید).

انحنا . هرگاه طول قوس s را پارامتر بگیریم ، آنگاه بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ، نقطهٔ پایانش $P = P(s)$ ، بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s) = d\mathbf{r}/ds$ ، و بردار یکهٔ قائم

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(s) = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} \qquad \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} \neq \mathbf{0}\right) \tag{۵}$$

همه توابعی از s اند ، و این امر از نمادهای آنها مشهود است. پس از (۵) معلوم می‌شود که

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| \mathbf{N}.$$

فرض کنیم C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ باشد . در این صورت ، اسکالر مثبت $|d\mathbf{T}/ds|$ انحنای C در P نام دارد ، که با κ (کاپای کوچک یونانی) نموده می‌شود ، و معادلهٔ اخیر را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}. \tag{۶}$$

انحنای κ میزان خمیدگی C را ، وقتی توسط نقطهٔ متحرک $P = P(s)$ پیموده می‌شود ، می‌سنجد . در واقع ، فرض کنیم $\phi = \phi(s)$ زاویه از محور x مثبت به $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s)$ باشد ، بدین معنی که اگر نقطهٔ شروع $\mathbf{T}$ در مبداء باشد ، نقطهٔ پایان $\mathbf{T}$ دارای مختصات قطبی $|\mathbf{T}| = 1$ و ϕ می‌باشد . در این صورت ،

$$\mathbf{T} = (\cos\phi)\mathbf{i} + (\sin\phi)\mathbf{j},$$

و ، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left(-\sin\phi\,\frac{d\phi}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\cos\phi\,\frac{d\phi}{ds}\right)\mathbf{j}.$$

بنابراین ،

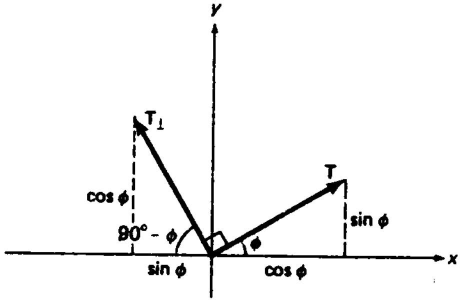
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\phi}{ds}\mathbf{T}_\perp,$$

که در آن

$$\mathbf{T}_\perp = (-\sin\phi)\mathbf{i} + (\cos\phi)\mathbf{j}$$

بردار یکهٔ حاصل از دوران $\mathbf{T}$ به اندازهٔ $90°$ خلاف جهت عقربه‌های ساعت است ، و این را می‌توان باتوجه به شکل ۳۸ دریافت . اما $|\mathbf{T}_\perp| = 1$ ؛ و درنتیجه ،

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| |\mathbf{T}_\perp| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|,$$

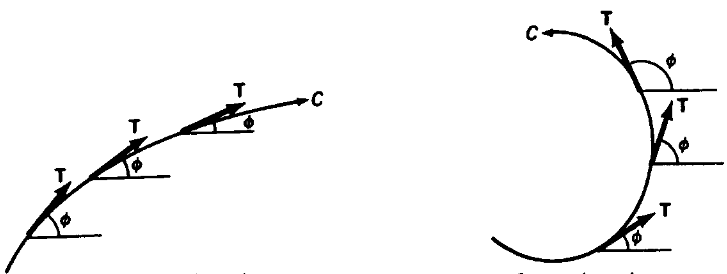


شکل ۳۸

درنتیجه ،

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|.$$

لذا ، انحنای κ قدرمطلق میزان‌تغییرزاویهٔ ϕ نسبت‌به‌طول قوس s است . هرقدر $\kappa = \kappa(s)$ بزرگتر باشد ، بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s)$ ضمن حرکت در امتداد C سریعترمی‌چرخد؛ یعنی ، C تیزتر خم می‌شود . این امر را در شکل ۳۹ توضیح داده‌ایم ، که در آن یک منحنی انحنای بزرگ داشته و سریع خم می‌شود ، ولی دیگری انحنای کوچک داشته و بتدریج خم می‌گردد .

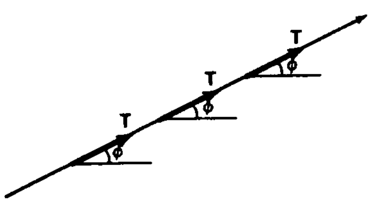


انحنای کوچک   انحنای بزرگ

شکل ۳۹

مثال ۳. نشان دهید که هر خط مستقیم دارای انحنای ثابت صفر $\kappa = 0$ است .

حل . همانطور که شکل ۴۰ نشان داده است ، در یک خط مستقیم زاویهٔ ϕ ثابت است .



انحنای ثابت صفر

شکل ۴۰

بنابراین ، $d\phi/ds = 0$ و

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = 0.$$

منحنی C معمولا" نمودار یک تابع بردار موضعی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ گرفته می‌شود ، که در آن t پارامتری غیر از طول قوس s است . در این صورت ، به‌آسانی می‌توان انحنای κ را تابعی از t گرفت . در واقع ،

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \frac{|d\mathbf{T}/dt|}{ds/dt} = \frac{1}{v}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|,$$

که در آن در اولین گام از قاعدهٔ زنجیره‌ای و در دومین گام از فرمول مشتق یک تابع معکوس استفاده می‌کنیم (توجه کنید که $ds/dt > 0$) . به بیان معادل ،چون $v = |\mathbf{r}'(t)|$ ،

$$\kappa = \kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \qquad (۷)$$

مثال ۴ . انحنای دایرهٔ

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

به شعاع a را بیابید .

حل . در اینجا

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}'(t) = a[(-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}],$$

درنتیجه ،

$$|\mathbf{r}'(t)| = a\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = a$$

و

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{T}'(t) = (-\cos t)\mathbf{i} + (-\sin t)\mathbf{j}.$$

بنابراین ، $|\mathbf{T}'(t)| = 1$ و

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a},$$

یعنی ، یک دایره به شعاع a دارای انحنای ثابت $\kappa = 1/a$ می‌باشد . لذا ، هرقدر شعاع a کوچکتر باشد ، میزان تغییر جهت بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}$ نسبت به مسافت پیموده شده در امتداد دایره بیشتر است . به این دلیل است که هرقدر شعاع دورزدن یک اتومبیل کوچکتر باشد ، جهت حرکت خود بر واحد مسافت پیموده شده سریعتر تغییر خواهد کرد .

با کمی سعی می‌توان برای انحنای κ فرمولی برحسب مشتقات اول و دوم مؤلفه‌های

$x(t)$ و $y(t)$ بردار مثبت $\mathbf{r}(t)$ به دست آورد. ابتدا ملاحظه می‌کنیم

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}},$$

که درآن شناسهٔ t مشتقات x' ، y' ، x''، و y'' به خاطر اختصار حذف شده است. با استفاده از قاعدهٔ خارج قسمت برای مشتقگیری از $\mathbf{T}$ ، پس از اعمالی جبری وحذف‌جملات،

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{dt} &= \frac{\dfrac{d(x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j})}{dt}(x'^2 + y'^2)^{1/2} - (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j})\dfrac{d}{dt}(x'^2 + y'^2)^{1/2}}{x'^2 + y'^2} \\ &= \frac{(x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j})(x'^2 + y'^2) - (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j})(x'x'' + y'y'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(x''y'^2 - x'y'y'')\mathbf{i} + (x'^2y'' - x'x''y')\mathbf{j}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(x'y'' - y'x'')(-y'\mathbf{i} + x'\mathbf{j})}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}\,|-y'\mathbf{i} + x'\mathbf{j}| = \frac{|x'y'' - y'x''|}{x'^2 + y'^2},$$

زیرا $|-y'\mathbf{i} + x'\mathbf{j}| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. لذا، بالاخره،

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}\,|\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}\,\frac{|x'y'' - y'x''|}{x'^2 + y'^2}$$

یعنی،

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \qquad (۸)$$

مثال ۵. انحنای $\kappa = \kappa(t)$ سهمی $x = 2t,\ y = t^2$ مثال۲ و نموده‌شده در شکل ۳۶رابیابید.

حل. در اینجا $x' = 2,\ x'' = 0,\ y' = 2t,\ y'' = 2$ ، و با گذاردن این مقادیر در فرمول (۸)، به دست می‌آوریم

$$\kappa = \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}. \qquad (۹)$$

از (۹) معلوم می‌شود که سهمی انحنای ماکزیمم $\kappa(0) = \frac{1}{2}$ خود را در مبداء دارد. بخشی از سهمی که نظیر به مقادیر بزرگ $|t|$ است خیلی مستقیم است؛ و لذا، (۹) نشان می‌دهد که در آنجا انحنا بسیار کوچک می‌باشد. مثلاً"، اگر $|t| = 100$، انحنا حدوداً" $\frac{1}{2000}$ می‌باشد.

هرگاه C نمودار تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه C دارای نمایش پارامتری $x = t, y = f(t)$ است. بنابراین، $x' = 1,\ x'' = 0$؛ درنتیجه، فرمول (۸) به فرمول زیر تحویل می‌شود:

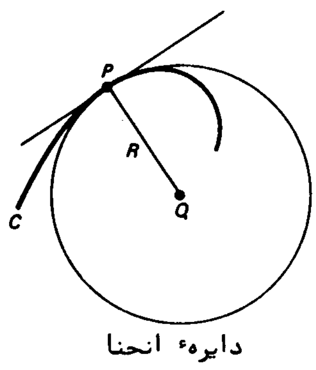
$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \qquad (۸')$$

که در آن $y' = dy/dx$ و $y'' = d^2y/dx^2$. مثلاً"، هرگاه C خط مستقیم $y = mx + b$ باشد، آنگاه، همانطور که قبلاً" در مثال ۳ دیدیم، $y'' = 0$ و (۸') ایجاب می‌کند که $\kappa = 0$.

شعاع انحنا. فرض کنیم κ انحنای منحنی C در نقطهٔ P باشد. منظور از *شعاع انحنای* C در P یعنی عدد

$$R = \frac{1}{\kappa},$$

یعنی، متقابل انحنا. از مثال ۴ معلوم می‌شود که شعاع انحنای یک دایره همان شعاع معمولی آن است. اگر κ کوچک باشد، R بزرگ است. لذا، یک منحنی بسیار مستقیم شعاع انحنای بسیار بزرگ دارد، و یک خط مستقیم $(\kappa = 0)$ را می‌توان با شعاع انحنای نامتناهی گرفت. در این وضع، در نقاطی که κ به بی‌نهایت میل می‌کند (در صورت وجود) قرار می‌دهیم $R = 0$. اگر $\kappa \neq 0$، منحنی C در نقطهٔ P شعاع انحنای متناهی دارد. در این صورت، منظور از *دایرهٔ انحنای* C در P یعنی دایره‌ای به شعاع R که از P گذشته و مرکزش Q در طرف تقعر C در امتداد قائم به C در P، مثل شکل ۴۱، قرار دارد. این دایره همان مماس



دایرهٔ انحنا
شکل ۴۱

و شعاع انحنای منحنی C در P را دارد؛ و لذا، با C در P برازش بسیار زیادی خواهد داشت. به این دلیل، دایرهٔ انحنا را **دایرهٔ بوسان** نیز می‌نامند.

مثال ۶. شعاع انحنای $R = R(t)$ بیضی

$$x = 2\cos t, \qquad y = \sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

را در نقاط $(2, 0)$ و $(0, 1)$ بیابید.

حل. توجه کنید که بیضی به معادلهٔ دکارتی $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ است. با محاسبهٔ مشتقات اول و دوم x و y، داریم

$$x' = -2\sin t, \qquad y' = \cos t,$$
$$x'' = -2\cos t, \qquad y'' = -\sin t,$$

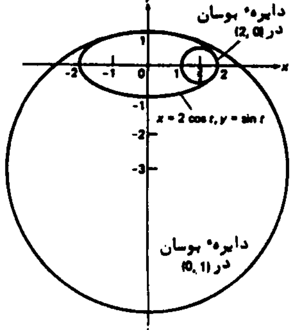
درنتیجه،

$$x'y'' - y'x'' = 2\sin^2 t + 2\cos^2 t = 2,$$
$$x'^2 + y'^2 = 4\sin^2 t + \cos^2 t = 3\sin^2 t + 1.$$

بنابراین، به کمک فرمول (۸)،

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} = \frac{1}{2}(3\sin^2 t + 1)^{3/2}.$$

نقاط $(2, 0)$ و $(0, 1)$ نظیر به مقادیر پارامتر $t = 0$ و $t = \pi/2$ اند. لذا، شعاع انحنای بیضی در $(2, 0)$ مساوی $R(0) = \frac{1}{2}$ و در $(0, 1)$ برابر $R(\pi/2) = \frac{1}{2}(4)^{3/2} = 4$ می‌باشد. دایرهٔ بوسان در $(2, 0)$ دایره‌ای است به شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز $(2 - \frac{1}{2}, 0) = (\frac{3}{2}, 0)$، و دایرهٔ بوسان در $(0, 1)$ دایره‌ای است به شعاع 4 و مرکز $(0, 1 - 4) = (0, -3)$. شکل ۴۲ بیضی را همراه با این دو دایرهٔ بوسان نشان می‌دهد.



شکل ۴۲

شتاب و مؤلفه‌هایش . بار دیگر فرض کنیم $P = P(t)$ نقطهٔ پایان بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ بوده، و پارامتر t را زمان می‌گیریم . در این صورت ، مثل حالت یک بعدی ، *شتاب* $\mathbf{a}$ نقطهٔ متحرک P مشتق زمانی سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ تعریف می‌شود . لذا ، $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ تابع برداری

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

می‌باشد .

حال $\mathbf{a}$ را نسبت به پایهٔ موضعی مرکب از بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بسط می‌دهیم . چون

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|} = \frac{\mathbf{v}}{v},$$

داریم

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T}.$$

لذا ، طبق قواعد حاصل‌ضرب و زنجیره‌ای ،

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

اما $ds/dt = v$ و $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$ ، که در آن κ انحنا می‌باشد . پس نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}, \tag{10}$$

یا معادلاً

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N}, \tag{10'}$$

که در آن $R = 1/\kappa$ شعاع انحنامی‌باشد . مؤلفه‌های (اسکالر) $\mathbf{a}$ نسبت به پایهٔ موضعی $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ *مؤلفه‌های مماسی و قائم* شتاب نام دارند ، و با a_T و a_N نموده می‌شوند . لذا ،

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N},$$

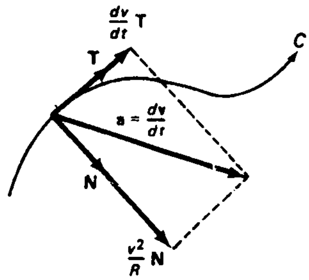
که درآن

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \qquad a_N = \kappa v^2 = \frac{v^2}{R}. \tag{11}$$

توجه کنید که (۱۱) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2}, \qquad a_N = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{11'}$$

در شکل ۴۳، بسط $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ تعبیر هندسی شده است.



شکل ۴۳

مثال ۷. شتاب ذره‌ای را بیابید که یک دایره به شعاع R را با تندی ثابت v می‌پیماید.

حل. چون v ثابت است، داریم $dv/dt \equiv 0$. به‌علاوه، شعاع انحنای دایره همان شعاع معمولی R آن است. بنابراین، طبق (۱۱')،

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{R}\mathbf{N}.$$

لذا، مؤلفهٔ مماسی شتاب صفر است، یا به طور غیرصوریتر، شتاب " مؤلفهٔ مماسی ندارد". در واقع، شتاب $\mathbf{a}$ *مرکزگرا* است، به این معنی که جهتش به سوی مرکز دایره است، و اندازه‌اش مقدار ثابت v^2/R را دارد.

مثال ۸. مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب ذره‌ای را بیابیدکه درامتداد سهمی $x = 2t,\ t = t^2$ در حرکت است.

حل. در اینجا، مثل مثال ۵،

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

و

$$\kappa = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}.$$

لذا ، طبق (۱۱) ، مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب a عبارتند از

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad a_N = \kappa v^2 = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

مثلاً ، ذره در لحظهٔ $t = 1$ با $a_T = \sqrt{2}$ و $a_N = \sqrt{2}$ در نقطهٔ $(2, 1)$ بوده ، ولی در لحظهٔ $t = 2$ با $a_T = 4/\sqrt{5}$ و $a_N = 2/\sqrt{5}$ در نقطهٔ $(4, 4)$ می‌باشد . در واقع ، چون

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}) = 2\mathbf{j},$$

شتاب به اندازهٔ ثابت 2 بوده و جهتش قائم روبه بالا می‌باشد . همچنین ، توجه کنید که مؤلفهٔ قائم شتاب را می‌توان بدون محاسبهٔ انحنای κ پیدا کرد . در واقع ، چون $|\mathbf{a}|^2 = a_T^2 + a_N^2$ (چرا؟) ، داریم

$$a_N^2 = |\mathbf{a}|^2 - a_T^2 = 4 - \frac{4t^2}{1+t^2} = \frac{4}{1+t^2},$$

و درنتیجه ، $a_N = 2/\sqrt{1+t^2}$.

مسائل

بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر نمودار تابع برداری دادهٔ شدهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را بیابید .

۱ . $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

۲ . $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ $(t > 0)$

۳ . $\mathbf{r}(t) = 2t^3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ $(t > 0)$

۴ . $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j}$

۵ . $\mathbf{r}(t) = (\sinh t)\mathbf{i} + (\cosh t)\mathbf{j}$

۶ . $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^{t}\mathbf{j}$

انحنای κ ی منحنی داده شده را در نقطهٔ نظیر به مقدار ذکر شده از پارامتر t بیابید .

۷ . $x = 3t^2, y = 3t - t^3, t = 1$

۸ . $x = \frac{1}{3}t^3, y = t, t = -1$

۹ . $x = t\cos t, y = t\sin t, t = \sqrt{3}$

۱۰ . $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t = \pi/4$

۱۱ . $x = e^t\cos t, y = e^t\sin t, t = 0$

۱۲ . $x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t, t = -2$

انحنای κ ی نمودار تابع داده شده را در نقطهٔ ذکر شده بیابید.

۱۳. $y = 4x - x^2$ در $(2, 4)$

۱۴. $y = x^3 + 1$ در $(-1, 0)$

۱۵. $y = 2/x$ در $(1, 2)$

۱۶. $y = \ln x$ در $(1, 0)$

۱۷. $y = xe^{-x}$ در $(1, 1/e)$

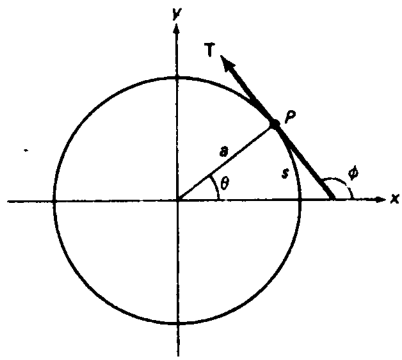
۱۸. $y = e^{-x^2}$ در $(0, 1)$

۱۹. انحنای ماکزیمم منحنی $y = e^x$ چیست و کجا صورت می‌گیرد؟

۲۰. نشان دهید که شعاع انحنای‌منحنی $y = \cosh x$ در نقطهٔ $P = (x, y)$ مساوی y^2، یعنی مجذور مختص y، است.

۲۱. فرض کنید دایره‌ای به شعاع a در امتداد یک خط مستقیم افقی بدون لغزش بغلطد. در این صورت، همانطور که در مثال ۷، صفحهٔ ۷۲۹، نشان دادیم، نقطهٔ‌ثابت P از محیط دایره چرخزاد $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ را می‌پیماید. شعاع انحنای R را در یک نقطهٔ‌دلخواه چرخزاد بیابید. کجا R مساوی صفر است؟ مساوی a است؟ ماکزیمم R چیست و کجا صورت می‌گیرد؟

۲۲. در مثال ۴ نشان دادیم که انحنای یک دایره به شعاع a مساوی $1/a$ است. با‌استفاده از شکل ۴۴، این امر را با محاسبهٔ مستقیم $|d\phi/ds|$ نشان دهید.



شکل ۴۴

معادلهٔ دایرهٔ بوسان منحنی داده شده را در نقطهٔ $(0, 1)$ بنویسید. در هر حالت، منحنی و دایره را رسم نمایید.

۲۳. $y = 1/(x^2 + 1)$

۲۴. $y = \cos(x/\sqrt{2})$

۲۵. $y = e^x$

۲۶. $y = \sec x$

۲۷. در چه نقاطی از سهمی $x^2 = 8y$ شعاع انحنا مساوی $\frac{125}{16}$ است؟

۲۸. شعاع انحنای بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را در نقاط انتهایی محورهای اطول و اقصر

آن تعیین کنید .

۲۹ . فرض کنید C نمودار معادلهٔ $x^2 + xy + y^2 = 3$ باشد . شعاع انحنای C درنقطهٔ $(1, 1)$ چقدر است ؟

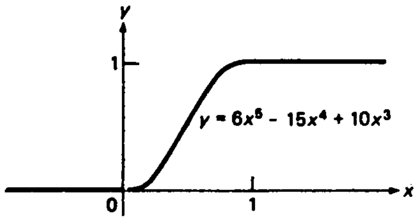
۳۰ . نشان دهید که نمودار تابع

$$y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 \qquad (0 < x < 1)$$

دو قطعهٔ جدا از هم تابع ناپیوستهٔ

$$y = \begin{cases} 0 & ، \quad x \leq 0 \text{ اگر} \\ 1 & ، \quad x \geq 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

را طوری به هم وصل می‌کند که منحنی حاصل ، که در شکل ۴۵ نموده شده ، شیب و انحنای پیوسته دارد . آیا می‌توانید مثالی‌از زندگی‌واقعی بزنید که در آن‌این‌مسئلهٔ ریاضی ظاهر شود ؟



شکل ۴۵

۳۱ تا ۳۶ . مؤلفه‌های مماسی و قائم a_T و a_N شتاب نقطهٔ $P = P(t)$ با بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ در مسائل ۱ تا ۶ را بیابید .

۳۷ . تحقیق کنید که انحنای $\kappa = \kappa(\theta)$ منحنی قطبی $r = r(\theta)$ مساوی است با

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}, \qquad \text{(یک)}$$

که درآن $r' = dr/d\theta$ و $r'' = d^2r/d\theta^2$.

با استفاده از فرمول (یک) ، انحنای منحنی قطبی داده شده را در نقطه‌ای که θ ی آن ذکر شده پیدا نمایید .

۳۸ . $r = 4\cos\theta, \theta = 10$

۳۹ . $r = 1 - \cos\theta, \theta = \pi$

۴۰ . $r = e^\theta, \theta = \ln 3$

۴۱. فرض کنید $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بردارهای یکهٔ مماس و قائم در یک نقطه از نمودار تابع با بردار موضع $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ، ϕ زاویه از محور x مثبت به $\mathbf{T}$ ، و $\mathbf{T}_\perp$ بردار یکهٔ حاصل از دوران $\mathbf{T}$ به اندازهٔ $90°$ خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد. نشان دهید که

$$\mathbf{N} = \begin{cases} \mathbf{T}_\perp \quad ، \quad d\phi/ds > 0 \ \text{اگر} \\ -\mathbf{T}_\perp \quad ، \quad d\phi/ds < 0 \ \text{اگر} \end{cases}$$

بخصوص، نشان دهید که اگر $x'y'' - y'x'' > 0$ ، $\mathbf{N}$ از $\mathbf{T}$ با تغییر $\mathbf{i}$ به $\mathbf{j}$ و $\mathbf{j}$ به $-\mathbf{i}$ به دست می‌آید، ولی اگر $x'y'' - y'x'' < 0$ ، $\mathbf{N}$ از $\mathbf{T}$ با تغییر $\mathbf{i}$ به $-\mathbf{j}$ و $\mathbf{j}$ به $\mathbf{i}$ حاصل خواهد شد.

۴۲ تا ۴۶. با استفاده از مسئلهٔ قبل، محاسباتی که در مسائل ۲ تا ۶ ما را از $\mathbf{T}$ به $\mathbf{N}$ می‌برند را ساده نمایید.

۵.۱۱ کاربردهایی در مکانیک

در این بخش چند مسئلهٔ دوبعدی از مکانیک‌نیوتنی را به‌کمک بردارها حل می‌کنیم. ذره‌ای به جرم m در نظر می‌گیریم که بر آن نیروی $\mathbf{F}$ اثر می‌کند. دراین صورت، ***طبق قانون دوم حرکت نیوتن*** ،

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{1}$$

که در آن $\mathbf{a}$ شتاب ذره است. این تعمیم طبیعی صورت یک بعدی قانون نیوتن است که در بخش ۷.۴ مطالعه شد، ولی اینجا نیروی $\mathbf{F}$ و شتاب $\mathbf{a}$ هردو ***بردار*** اند. فرض کنیم $\mathbf{F}$ و $\mathbf{a}$ دارای مؤلفه‌های F_1, F_2 و a_1, a_2 نسبت‌به‌پایهٔ متعامد یکهٔ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ باشند. در این صورت، معادلهٔ برداری (۱) با جفت معادلات اسکالر زیر معادل است:

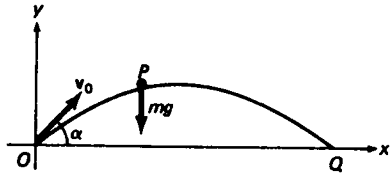
$$F_1 = ma_1, \qquad F_2 = ma_2, \tag{1'}$$

که با گرفتن مؤلفه از طرفین (۱) به دست می‌آید.

مثال ۱. حرکت یک گلوله. گلوله‌ای از یک توپ که زاویهٔ ارتفاعش α است شلیک شده است. مسیر گلوله را درصورتی بیابید که تندی اولیه‌اش v_0 باشد. از انحنا و دوران زمین، ونیز مقاومت هوا، صرف‌نظر نمایید.

حل. در صفحهٔ مسیر، یعنی در صفحهٔ قائم شامل بردار سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0$ ، یک دستگاه مختصات قائم اختیار می‌کنیم که محور y قائم و رو به بالا بوده و مبداء O در موضع توپ

باشد[1]. در این صورت، بردار $\mathbf{v}_0$، به اندازهٔ v_0، با محور x مثبت زاویهٔ α می‌سازد (ر. ک. شکل ۴۶، که درآن گلوله در یک‌لحظه در P بوده‌و مآلا" در Q فرود می‌آید)؛ درنتیجه برحسب پایهٔ متعامد یکهٔ $\mathbf{i} = (1, 0)$ و $\mathbf{j} = (0, 1)$، $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j}$. تنهانیروی



شکل ۴۶

وارد بر گلوله وزن آن است؛ یعنی، نیروی رو به پایین

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j},$$

که در آن g شتاب ثقل می‌باشد. فرض کنیم $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ بردار موضع گلوله‌نسبت‌به توپ در لحظهٔ t باشد. در این صورت، قانون نیوتن (۱) یک جفت معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به دست می‌دهد:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg,$$

یا معادلا"، پس از تقسیم بر جرم m که دیگر نقشی در مسئله ندارد،

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g, \tag{۲}$$

با انتگرالگیری از معادلات دیفرانسیل (۲)، به دست می‌آوریم

$$\frac{dx}{dt} = A_1, \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + B_1, \tag{۳}$$

و پس از انتگرالگیری نتیجه می‌دهد که

$$x = A_1t + A_2, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + B_1t + B_2. \tag{۴}$$

برای تعیین ثابتهای انتگرالگیری A_1، A_2، B_1، و B_2، شرایط اولیهٔ

$$x(0) = y(0) = 0, \qquad x'(0) = v_0 \cos \alpha, \qquad y'(0) = v_0 \sin \alpha \tag{۵}$$

---

۱. این امر که مسیر گلوله در صفحهٔ قائم ثابتی شامل بردار $\mathbf{v}_0$ قرار دارد در واقع نتیجه‌ای است از قانون نیوتن در بعد سه (ر.ک. مسئلهٔ ۳۱، صفحهٔ ۱۱۹۵).

را اعمال می‌کنیم $(x' = dx/dt, y' = dy/dt)$. این معادلات بیانگر آنند که گلوله، که ابتدا در حال سکون در لولهٔ توپ بوده، سرعت $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ را در لحظهٔ آتش $t = 0$ به دست می‌آورد. پس از روابط (۳) تا (۵) معلوم می‌شود که

$$A_1 = v_0 \cos \alpha, \qquad A_2 = 0, \qquad B_1 = v_0 \sin \alpha, \qquad B_2 = 0,$$

و با گذاردن این مقادیر در (۴) یک جفت معادلهٔ

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \qquad y = -\frac{1}{2} gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \tag{۶}$$

برای مسیر گلوله به دست می‌آید که در آن پارامتر t زمان است. با حذف t از معادلات پارامتری (۶)، معادلهٔ دکارتی

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \tag{۶'}$$

به دست می‌آید که، همانطور که از شکل برمی‌آید، نمودارش یک سهمی است (ر.ک. صفحه ۹۳۵).

در مسائل ۱ تا ۱۲، حرکت گلوله‌ها بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. حال به مسائل مربوط به حرکت مستدیر می‌پردازیم.

مثال ۲. یک قمر مصنوعی در ارتفاع ثابت ۱۰۰۰ میل مدار مستدیری را حول زمین طی می‌کند[1]. تندی مداری v ی آن را بیابید.

حل. در اینجا پایهٔ متعامد یکه را پایهٔ موضعی مرکب از بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر مدار قمر، که دایره‌ای به مرکز O زمین است، می‌گیریم؛ لذا، $\mathbf{N}$ به سمت مرکز زمین می‌باشد. تنها نیروی وارد بر قمر نیروی جاذبهٔ ثقلی زمین است. این نیرو، مثل مثال ۸، صفحهٔ ۴۳۲، مساوی است با

$$\mathbf{F} = \frac{GMm}{R^2}\mathbf{N},$$

که در آن G ثابت عمومی ثقل، M جرم زمین، و m جرم قمر می‌باشد. بنابر فرمول (۱۰')،

---

۱. *این امر که اگر قمر مصنوعی‌را با تندی مناسبی درمدار قراردهیم، مدار مستدیرخواهیم داشت، در مثال ۱۰، صفحهٔ ۱۱۸۵، نشان داده شده است.*

صفحهٔ ۱۰۹۹، شتاب قمر مساوی است با

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N},$$

که در آن R شعاع (انحنای) مدار مستدیر است؛ درنتیجه، قانون دوم نیوتن $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ یا $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ در پایهٔ موضعی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N} = \frac{GM}{R^2}\mathbf{N}$$

با گرفتن مؤلفه‌های مماسی و قائم از طرفین این معادلهٔ برداری، دو معادلهٔ اسکالر

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

و

$$v^2 = \frac{GM}{R} \tag{۷}$$

به دست می‌آید، که اولی می‌گوید که تندی قمر ثابت است. همچنین، طبق فرمول (۱۸)، صفحهٔ ۴۳۴،

$$G = \frac{gR_0^2}{M},$$

که در آن R_0 شعاع زمین و g شتاب ثقل است. پس از (۷) و معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\,R_0 \tag{۸}$$

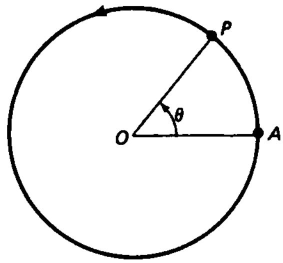
با قرار دادن $g = 32 \text{ ft/sec}^2$، $R_0 = 3960 \text{ mi}$، و $R = R_0 + 1000 = 4960 \text{ mi}$ درفرمول (۸) و توجه به این امر که $1 \text{ mi} = 5280 \text{ ft}$، مآلا" خواهیم داشت

$$v = \sqrt{\frac{32}{5280(4960)}}\,3960 \approx 4.4 \text{ mi/sec.}$$

حرکت مستدیر یکنواخت. گوییم ذرهٔ P که یک مدار مستدیر را با تندی ثابتی، مثل مثال ۲، می‌پیماید حرکت مستدیر *یکنواخت* دارد. فرض کنیم P دارای تندی v بوده و شعاع دایره R باشد. در این صورت، P یک دور کامل دایره را در زمان

$$T = \frac{2\pi R}{v} \tag{۹}$$

می‌پیماید ، که آن را دورهٔ تناوب حرکت می‌نامیم . فرض کنیم O مرکز دایره بوده ، و θ زاویه از شعاع ثابت OA تا شعاع OP دایره باشد (ر.ک. شکل ۴۷) . در این صورت ، θ یک



شکل ۴۷

تابع خطی از زمان t است ، و θ در یک دورهٔ تناوب به اندازهٔ 2π افزایش می‌یابد (فرض کنیم حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد) . بنابراین ،

$$\theta = \frac{2\pi}{T} t + \theta_0,$$

که در آن ثابت θ_0 مقدار θ در $t = 0$ است ، یا معادلاً"

$$\theta = \omega t + \theta_0,$$

که در آن کمیت

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

تندی زاویه‌ای نام دارد (ω امگای کوچک یونانی است) . لذا ،

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

و از مقایسهٔ این فرمول با (۹) معلوم می‌شود که

$$v = R\omega.$$

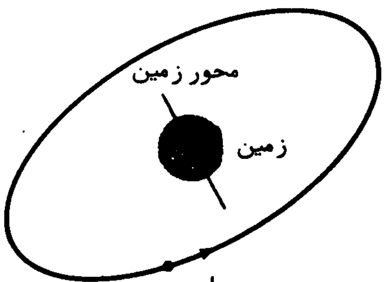
همچنین ، باید توجه داشت که مؤلفهٔ قائم شتاب یک ذره در حرکت مستدیر یکنواخت مساوی است با

$$a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2. \qquad (۱۰)$$

مثال ۳. یک قمر ارتباطات مدار مستدیری به شعاع R را در صفحهٔ استوا و با تندی ثابت

v mi/sec طی می‌کند. انتخاب R چنان است که قمر مدام روی نقطهٔ ثابتی از سطح زمین ظاهر می‌شود. ارتفاع قمر چقدر است؟

حل. چون قمر مدام در آسمان ظاهر می‌شود، حرکتش با دوران زمین هماهنگ است؛ یعنی، قمر با همان سرعتی دور زمین می‌گردد که زمین حول محور خود دوران دارد (ر.ک. شکل ۴۸). به عبارت دیگر، دورهٔ تناوب حرکت مداری $T = 1$ روز $= 24(60)^2$ sec.



شکل ۴۸

بنابراین، طبق فرمول (۹)،

$$24(60)^2 = \frac{2\pi R}{v},$$

که پس از جانشانی v از فرمول (۸)،

$$R = \frac{12(3600)v}{\pi} = \frac{12(3600)R_0}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

لذا،

$$R^{3/2} = \frac{12(3600)R_0\sqrt{g}}{\pi},$$

و درنتیجه،

$$R = \left[\frac{12(3600)(3960)}{\pi}\sqrt{\frac{32}{5280}}\right]^{2/3} \approx 26{,}190 \text{ mi}.$$

لذا، ارتفاع قمر از سطح زمین حدوداً $26{,}190 - 3960 = 22{,}230$ mi می‌باشد. به عنوان تمرین، نشان دهید که سرعت حدوداً 1.9 mi/sec است.

از فرمولهای (۷) و (۹) معلوم می‌شود که دورهٔ تناوب T قمر که حرکت مستدیر یکنواخت حول مرکز جاذبهٔ ثقلی جرم M دارد مساوی است با

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{3/2}, \tag{۱۱}$$

یا معادلاً

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3. \tag{۱۱'}$$

لذا، مربع دورهٔ تناوب قمر با مکعب شعاع مدارش متناسب است. این **قانون سوم کپلر**[1] برای حالت خاصی است که مدار قمر مستدیر است (در حالت کلی، مدار بیضی است). قوانین کپلر حرکت سیاره‌ای به تفصیل در بخش ۵.۱۲ مطرح خواهند شد.

مثال ۴. مدار ماه تقریباً مستدیر است، و دورهٔ گردش آن حول زمین تقریباً 27.3 روز است. شعاع مدار ماه چقدر است؟

حل. بنابر (۱۱)،

$$T_m = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_m^{3/2},$$

که در آن T_m و R_m دورهٔ گردش ماه و شعاع مدارش می‌باشند (G ثابت عمومی ثقل و M جرم زمین است). به همین نحو،

$$1\ (\text{روز}) = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_s^{3/2},$$

که در آن R_s شعاع مدار یک قمر در حرکت همزمان حول زمین است. از تقسیم معادلهٔ اول بر معادلهٔ دوم، معلوم می‌شود که

$$T_m = \left(\frac{R_m}{R_s}\right)^{3/2},$$

درنتیجه،

$$R_m = T_m^{2/3} R_s.$$

1. Kepler

اما ، همانطور که در مثال ۳ دیدیم ، $R_s \approx 26{,}190$ mi ؛ و درنتیجه ،

$$R_m \approx (27.3)^{2/3}(26{,}190) \approx 237{,}500 \text{ mi}.$$

مثال ۵. در آزمون خلبانی برای تحمل شتابهای زیاد ، شخصی در یک دایرهٔ افقی به‌شعاع 10 ft با دستگاه سانتریفوژ بزرگ گردانده می‌شود . در چه تندی زاویه‌ای ω شتاب $3g$ بر وی وارد می‌شود ؟

حل . با مساوی $3g$ قرار دادن شتاب قائم (۱۰) ، به دست می‌آوریم $R\omega^2 = 3g$ یا

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{R}},$$

که ، پس از قرار دادن $R = 10$ ft و $g = 32$ ft/sec^2 ، به دست می‌آوریم

$$\omega = \sqrt{9.6} \approx 3.1 \text{ rad/sec}$$

با واحد سنجشی آشناتر ، (دور بر دقیقه) $\omega = 60\sqrt{9.6}/2\pi \approx 29.6$ rpm

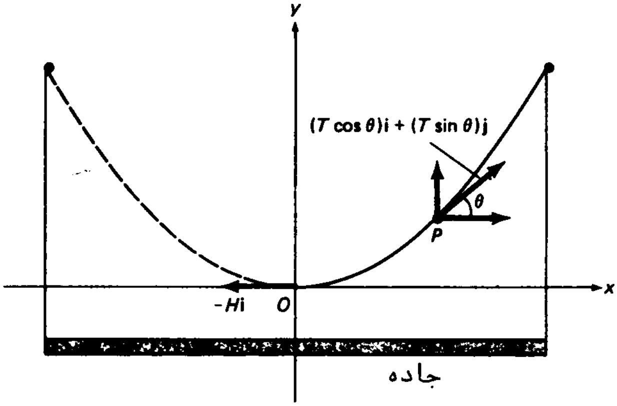
پل معلق . در خاتمه به‌چند مسئله‌ازاستاتیک‌می‌پردازیم ،که در آنها یک" دستگاه "از ذره‌ها در حال تعادل است ؛ درنتیجه ، هیچ حرکتی وجود ندارد .

مثال ۶. شکل پل معلقی را بیابید که جاده‌ای به وزن w بر واحد طول را تحمل می‌کند . از وزن خود کابل در مقایسه با وزن جاده صرف‌نظر نمایید .

حل . در صفحهٔ کابل یک دستگاه مختصات قائم اختیار می‌کنیم که محور y قائم و روبه‌بالا بوده و مبداء O در پایین‌ترین نقطهٔ کابل ، مثل شکل ۴۹ ، باشد .(اگر دو کابل‌موازی‌وجود داشته باشند ، همین مسئله را با هر کابل که نصف وزن جاده را تحمل می‌کندحل‌می‌کنیم) . فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از کابل سمت راست O باشد . در این صورت ، قطعهٔ OP از کابل تحت سه نیرو قرار دارد ، کشش افقی H که OP را به چپ در O می‌کشاند ،کشش مماسی به اندازهٔ T که OP را به راست و بالا در P می‌کشاند ، و وزن wx ، x فوت جاده که OP را به طور قائم به پایین می‌کشاند . لذا ، نیروی کل وارد بر OP مساوی است با

$$\mathbf{F} = (T\cos\theta - H)\mathbf{i} + (T\sin\theta - wx)\mathbf{j}.$$

که در آن بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ معانی عادی خود را داشته و θ میل مماس بر کابل در P



شکل ۴۹

می‌باشد (ر.ک. شکل) . برای تعادل OP لازم است $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ، زیرا در غیر این‌صورت قانون دوم حرکت نیوتن شتاب OP را به دست می‌دهد[۱] . بنابراین ،

$$T\cos\theta = H, \qquad T\sin\theta = wx, \tag{۱۲}$$

و از تقسیم معادلهٔ دوم بر معادلهٔ اول ، به دست می‌آوریم

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}x,$$

که در آن $y = y(x)$ معادلهٔ کابل در حال تعادل است . (چرا همین نتیجه درصورتی که P سمت چپ O باشد به دست می‌آید ؟) با انتگرالگیری از این معادلهٔ دیفرانسیل ، معلوم می‌شود که

$$y = \int \frac{w}{H}x\,dx + C = \frac{w}{2H}x^2 + C.$$

اما $y(0) = 0$ ، زیرا مبداء روی منحنی $y = y(x)$ اختیار شده است . لذا ، ثابت انتگرالگیری C صفر بوده و

$$y = \frac{w}{2H}x^2.$$

لذا ، کابل به شکل سهمی می‌باشد .

---

۱ . در اینجا ما عملاً " قانون نیوتن را بر دستگاه ذرات سازای OP اعمال می‌کنیم ؛ این را می‌توان با استدلالی که در آغاز بخش ۳.۱۴ شد توجیه کرد .

زنجیر آویزان . اگر جاده وجود نداشته باشد ، باید وزن خود کابل نیز به حساب آید . در این صورت ، همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد ، منحنی $y = y(x)$ دیگر سهمی نیست .

مثال ۷ . زنجیری به وزن w بر واحد طول از دو تکیه‌گاه به ارتفاع مساوی آویزان شده است (شکل ۴۹ را بدون جاده تصور کنید) . شکل زنجیر آویزان را بیابید .

حل . مثل مثال ۶ ، فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از زنجیر باشد ، و نیروهای وارد برقطعهٔ OP از زنجیر را تحلیل می‌کنیم ، که در آن مبداء O در پایین‌ترین نقطهٔ زنجیر است . مجدداً OP تحت کشش افقی H است که OP را در O می‌کشد و نیرویی مماسی به اندازهٔ T است که OP را در P می‌کشد ، ولی اینجا نیروی رو به پایین ws است (نه wx) ، که در آن s طول قطعهٔ OP می‌باشد . لذا ، به جای معادلات تعادل (۱۲) ، داریم

$$T\cos\theta = H, \qquad T\sin\theta = ws, \tag{۱۲'}$$

که با (۱۲) فقط در وجود s به جای x در معادلهٔ دوم تفاوت دارد . پس از (۱۲') معلوم می‌شود که

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}s.$$

با مشتقگیری از این معادله نسبت به x ، به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\frac{ds}{dx}. \tag{۱۳}$$

اما

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

(در فرمول (۱۰) ، صفحهٔ ۱۰۸۰ ، قرار می‌دهیم $t = x$) . بنابراین ، (۱۳) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

یا ، برحسب متغیر کمکی $p = dy/dx$ ،

$$\frac{dp}{dx} = \frac{w}{H}\sqrt{1 + p^2} \tag{۱۴}$$

با جداسازی متغیرها در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۴) و انتگرالگیری ، به‌دست می‌آوریم

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{w}{H}\,dx + C_1,$$

که در آن C_1 ثابت انتگرالگیری است . بنابراین ، به کمک فرمول (۲) ، صفحهٔ ۵۷۳ ،

$$\sinh^{-1} p = \frac{wx}{H} + C_1,$$

یا معادلاً

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{wx}{H} + C_1\right)$$

شیب $p = dy/dx$ منحنی $y = y(x)$ در پایین‌ترین نقطهٔ خود صفر است (چرا؟) ؛ درنتیجه، $p|_{x=0} = 0$ ، که ایجاب می‌کند که $C_1 = 0$. لذا ،

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh\frac{wx}{H},$$

و ، با انتگرالگیری مجدد ، خواهیم داشت

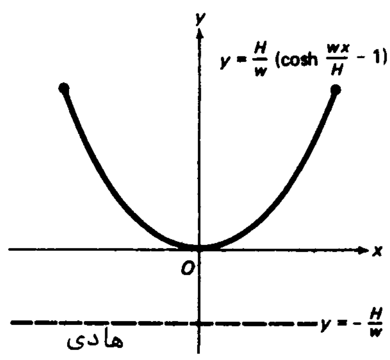
$$y = \int \sinh\frac{wx}{H}\,dx + C_2 = \frac{H}{w}\cosh\frac{wx}{H} + C_2, \qquad (۱۵)$$

که در آن C_2 ثابت انتگرالگیری دیگری‌است . برای تعیین C_2 ، شرط $y(0) = 0$ را اعمال می‌کنیم (مبداء روی منحنی است) ، که ایجاب می‌کند که

$$0 = \frac{H}{w} + C_2$$

یا $C_2 = -H/w$. بنابراین ، (۱۵) به صورت زیر درمی‌آید :

$$y = \frac{H}{w}\left(\cosh\frac{wx}{H} - 1\right). \qquad (۱۶)$$



شکل ۵۰

نمودار این معادله، که در شکل ۵۰ نموده شده، یک منحنی زنجیری نام دارد. خط افقی $y = -H/w$ هادی منحنی زنجیری است. از (۱۶) نتیجه می‌شود که هرگاه Y فاصلهٔ هادی تا نقطهٔ $P = (x, y)$ از منحنی زنجیری باشد، آنگاه

$$Y = \frac{H}{w} \cosh \frac{wx}{H}. \qquad (۱۶')$$

مسائل

همانند مثال ۱، گلوله‌ای از یک توپ به زاویهٔ ارتفاع α با تندی اولیهٔ (سرعت گریز) v_0 شلیک شده است.

۱. زمان کل پرواز گلوله از توپ تا هدف چقدر است؟

۲. ارتفاع ماکزیمم گلوله از سطح زمین و زمان صورت گرفتن آن چقدر است؟

۳. برد (افقی) توپ، یعنی مسافت $|OQ|$ در شکل ۴۶، را بیابید.

۴. نشان دهید که برد ماکزیمم توپ، وقتی زاویهٔ ارتفاع $45°$ باشد، مساوی v_0^2/g است.

۵. سرعت گریز لازم برای آنکه برد ماکزیمم توپ 20 mi باشد چقدر است؟

۶. نشان دهید که هر هدف که فاصله‌اش تا توپ از v_0^2/g (برد ماکزیمم) کمتر باشد را می‌توان با دو زاویهٔ ارتفاع مختلف مورد اصابت قرار داد.

۷. رأس و هادی مسیر سهموی گلوله را بیابید.

۸. نشان دهید که ارتفاع هادی همان ارتفاعی است که گلولهٔ شلیک شده با سرعت گریز v_0 به بالا به آن می‌رسد (و لذا، به زاویهٔ ارتفاع توپ بستگی ندارد).

۹. برد ماکزیمم یک توپ 10 mi است. برد آن در صورت شلیک با زاویهٔ ارتفاع $30°$ چقدر است؟

۱۰. دو زاویهٔ ارتفاع بیابید که یک خمپاره انداز با سرعت گریز 2000 ft/sec بتواند هدفی را در فاصلهٔ 15 mi بزند.

۱۱. هواپیمایی که در ارتفاع 200 ft با تندی ثابت 300 mph به طور افقی پرواز می‌کند بمبی را روی انبار مهمات دشمن می‌اندازد. بمب وقتی رها می‌شود که خط مستقیم دید از هواپیما به انبار زاویهٔ مشخصی با افق می‌سازد. این زاویه چقدر باید باشد تا بمب "مستقیماً" به هدف بخورد؟

۱۲. یک توپ کشیده به ارتفاع 75 ft پرتاب، و در فاصلهٔ 400 ft از محل پرتاب گرفته شده است. توپ چه مدت در هوا بوده است؟ زاویهٔ α بین مسیر توپ و افق را درلحظهٔ پرتاب بیابید. تندی اولیهٔ v_0 توپ چقدر است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

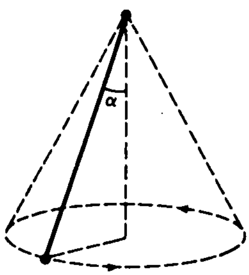
برای یک قمر مصنوعی در مداری مستدیر حول زمین و در ارتفاع داده شده (ازسطح‌زمین)، تندی v را به میل بر ثانیه و دورهٔ تناوب T را به دقیقه پیدا نمایید.

۱۳. 500 mi ۱۴. 2500 mi ۱۵. 5000 mi ۱۶. 10,000 mi

۱۷. برای یک قمر مصنوعی در مداری مستدیر که با سطح زمین تماس دارد، تندی v را به میل بر ثانیه و دورهٔ تناوب T را به دقیقه پیدا کنید. (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

۱۸. در مثال ۵ تندی زاویه‌ای لازم برای داشتن شتاب $5g$ ؛ $10g$ چقدر است؟

۱۹. در دستگاهی به نام **پاندول مخروطی**، جسمی ("گلولهٔ" پاندول) به نخی به طول L بسته شده و در دایره‌ای افقی با تندی ثابت v چنان می‌گردد که نخ یک مخروط مستدیر قائم با محور قائم جارو می‌کند (ر.ک. شکل ۵۱). v را درصورتی بیابید که نخ به طول 120 cm بوده و زاویهٔ α بین نخ و قائم 30° باشد. اگر جرم جسم 50 گرم باشد، کشش T در نخ چقدر است (از $g = 980\ \text{cm/sec}^2$ استفاده کنید.)



شکل ۵۱

۲۰. جسمی به یک طناب بسته شده و در یک دایرهٔ **قائم** به شعاع R می‌گردد. این حرکت مستدیر (که یکنواخت نیست) را فقط وقتی می‌توان داشت که تندی جسم در بالای دایره دست کم به اندازهٔ تندی بحرانی v_{cr} باشد. نشان دهید که $v_{cr} = \sqrt{gR}$.

۲۱. یک سطل پرآب در انتهای طنابی بسته شده و دور یک دایرهٔ قائم به شعاع 80 cm می‌چرخد. تندی زاویه‌ای لازم برای جلوگیری از ریزش آب چقدر است؟

۲۲. مدار زمین به یک دایره به شعاع 1.5×10^8 km خیلی نزدیک است. با این فرض که ثابت عمومی ثقل G تقریبا "$6.67 \times 10^{-20}\ \text{km}^3/\text{kg}$"است، جرم خورشید راتخمین بزنید.

۲۳. مشتری 14 ماه دارد که چهار تای آنها، یعنی "قمرهای گالیله[1]" که عبارتنداز یو ،

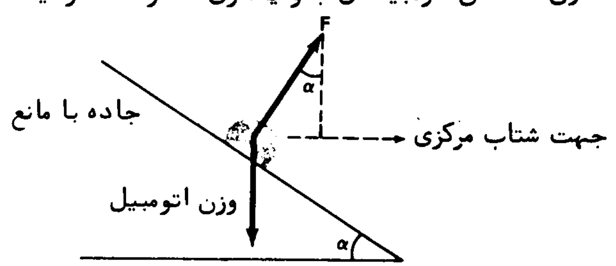
---

1. Galileo

اویروپا ، گانیمد و کالیستو ، توسط گالیله در ۱۶۱۰ کشف شدند . فرض کنیم T دورهٔ تناوب و n شعاع مداریک ماه مشتری باشدکه باشعاع مشتری سنجیده می‌شود . در این صورت ، بنابر اطلاعاتی که جان فیلم استید[1] ، ستاره‌شناس سلطنتی معاصر نیوتن ،به دست آورده است ، نسبت n^3/T^2 حدودا " $7.5 \times 10^{-9}\ \mathrm{sec}^{-2}$ "بوده و برای هر چهار قمر گالیله‌یکی‌است ،که‌قانون‌سوم‌کپلرراتأ ییدمی‌کند . با استفاده از این و مقدار G داده شده در مسئلهٔ قبل ، نشان دهید که چگالی ρ مشتری درحدود چگالی آب است .

۲۴ . وقتی یک اتومبیل در پیچ جاده حرکت می‌کند ، اصطکاک وارد بر لاستیکها از طرف جاده شتاب مرکزی تولید می‌کند . این نیرو با وزن اتومبیل متناسب بوده و ثابت تناسب μ را *ضریب اصطکاک* می‌نامند . اگر اصطکاک نباشد ، اتومبیل " روی مماس از مسیر منحرف می‌شود " ؛ یعنی ، واژگون می‌گردد . اگر $\mu = 0.5$ ، سرعت یک اتومبیل در یک جاده به شعاع انحنای 625 ft چقدر باید باشد تا واژگون نشود ؟

۲۵ . با ایجاد " مانع " در یک جاده خمیده ، مثل شکل ۵۲ ، می‌توان از واژگون شدن اتومبیل جلوگیری کرد . در این صورت



شکل ۵۲

حتی وقتی بین جاده و لاستیکها اصطکاک‌محسوسی وجود نداشته‌باشد ، مؤلفهٔ افقی نیروی قائم واکنش $\mathbf{F}$ وارد از جاده بر اتومبیل را می‌توان با شتاب مرکزی‌لازم تأمین کرد مشروط بر اینکه تندی اتومبیل چندان زیاد نباشد . *تندی متزاید* v_r منحنی با مانع تندی ماکزیممی تعریف می‌شود که در آن اتومبیل می‌تواند بدون کمک گرفتن از اصطکاک واژگون نشود (تصور کنید اتومبیل روی یک قطعه یخ خیس حرکت می‌کند) . نشان دهید $v_r = \sqrt{gR \tan \alpha}$ ، که در آن R شعاع انحنای جاده و α زاویهٔ‌مانع باشد.

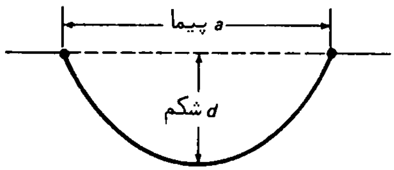
۲۶ . یک مردتنومندبر دوچرخه‌ای در دایرهٔ افقی داخل یک بشکهٔ استوانه‌ای بزرگ به شعاع R سوار است . این فقط وقتی میسر است که بین بشکه و لاستیکهای دوچرخه

---

1. John Flamsteed

اصطکاک موجود بوده و تندی دوچرخه دست کم به اندازهٔ تندی بحرانی v_{cr} باشد. نشان دهید $v_{cr} = \sqrt{gR/\mu}$، که درآن μ ضریب اصطکاک می‌باشد. (در واقع، دوچرخه نیز باید کمی به بالا کج شده باشد، ولی از این صرف‌نظر کرده و دوچرخه و راننده را یک ذره تلقی می‌کنیم.)

۲۷. فاصلهٔ a بین نقاط تکیه‌گاه یک کابل (یا زنجیر) **پیمای** آن نام دارد، وفاصلهٔ قائم d بین نقاط تکیه‌گاه و پایین‌ترین نقطهٔ کابل شکم نامیده می‌شود (ر.ک. شکل ۵۳).



شکل ۵۳

در کابل سهموی مثال ۶، رابطهٔ بین پیما و شکم چیست؟ نشان دهید که کشش ماکزیمم کابل در هر نقطه از تکیه‌گاه مساوی $\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}w^2a^2}$ است. کشش مینیمم چقدر و کجا می‌باشد؟

۲۸. پیمای یک پل معلق دو کابلی 200 ft، شکم هر کابل 50 ft، و وزن جاده 400 تن است. با فرض یکنواخت بودن جاده، کشش هر کابل در وسط آن؟ در هر نقطه از تکیه‌گاه چقدر است؟

۲۹. فرض کنید s طول منحنی زنجیری (۱۶) بین پایین‌ترین نقطه و نقطهٔ (x, y) باشد. نشان دهید که

$$s = \frac{H}{w} \sinh \frac{wx}{H}.$$

۳۰. پیما و شکم زنجیر مثال ۷ چه رابطه‌ای باهم دارند؟ نشان دهید که کشش ماکزیمم زنجیر در هر نقطه از تکیه‌گاه $H + wd$ است. کشش مینیمم چقدر و کجا صورت می‌گیرد؟

۳۱. نشان دهید که یک منحنی زنجیری کشیده (H/w بزرگ) نزدیک به سهموی است.

۳۲. یک طناب سنگین به طول 40 m دارای شکم 10 m است. پیمای آن چیست؟

اصطلاحات و مباحث کلیدی

اسکالرها و بردارها

اعمال جبری بر بردارها

بردارهای اساسی ، موءلفه‌های یک برداز
پایه‌های متعامد و متعامد یکه
نمایش بردارها به‌وسیلهٔ جفتهای مرتب
حاصل‌ضرب نقطه‌ای
تصویر یک بردار روی دیگری
کار به عنوان حاصل‌ضرب نقطه‌ای
توابع برداری
حد یک تابع برداری
مشتقگیری و انتگرالگیری از توابع برداری
سرعت و تندی
تابع طول قوس، طول قوس به عنوان پارامتر
بردار یکهٔ مماس
بردار یکهٔ قائم
انحنا، شعاع انحنا ، دایرهٔ انحنا
شتاب ، موءلفه‌های مماسی و قائم شتاب
حرکت گلوله
حرکت مستدیر یکنواخت
پل معلق و کابل آویزان

مسائل تکمیلی

فرض کنید $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ ، و $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. حاصل عبارات زیر را بیابید .

۱. $-\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ ‏ ۲. $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ‏ ۳. $4\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$

۴. $\dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}$ ‏ ۵. $\dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{|\mathbf{b} + \mathbf{c}|}$ ‏ ۶. $\dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{|\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}|}$

۷. چه شرطی بر $|\mathbf{a}|$ و $|\mathbf{b}|$ تضمین می‌کند که $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را نصف می‌کند ؟

۸. فرض کنید $OABCDE$ یک‌شش ضلعی منتظم به‌طول ضلع 1 باشد. $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{EO}$ ، $\overrightarrow{OD}$ ، و $\overrightarrow{DA}$ را به صورت ترکیباتی‌خطی از بردارهای یکهٔ $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ بیان نمایید .

۹. رئوس یک چندضلعی منتظم $P_1, P_2, \ldots, P_n$ و مرکز آن O است . نشان دهید که $\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 + \cdots + \overrightarrow{OP}_n = 0$.

۱۰. شخصی می‌تواند قایقی را با تندی 5 mph پارو بزند . او می‌خواهد از یک رودخانهٔ

مستقیم به پهنای 1 میل که در آن آب با سرعت 3-mph جریان دارد بگذرد . در چه جهتی باید پارو بزند تا هرچه زودتر از رودخانه عبور کند ؟ در چه جهتی باید پارو بزند که مستقیما " به نقطهٔ مقابل در آن طرف برسد ، و این کار چقدر طول خواهد کشید ؟

۱۱ . $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ را درصورتی بیابید که $|\mathbf{a}| = 13, |\mathbf{b}| = 19, |\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 24$.

۱۲ . نشان دهید که $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - \frac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$.

۱۳ . $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ و $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ را درصورتی بیابید که $|\mathbf{a}| = 5$ ، $|\mathbf{b}| = 8$ ، و زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مساوی $2\pi/3$ باشد .

۱۴ . نشان دهید که هر چهارضلعی‌که اقطارش منصف هم‌باشندباید متوازی‌الاضلاع باشد .

۱۵ . بردارهای $\mathbf{a} = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ به ازای چه مقادیری از t موازیند ؟ برهم عمودند؟

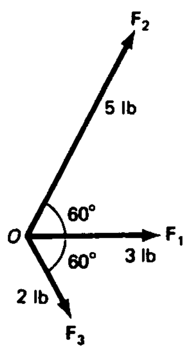
۱۶ . فرض کنید $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ دو بردار یکه باشند که باهم زاویهٔ $\pi/3$ می‌سازند . طول اقطار متوازی‌الاضلاع پیموده‌شده به‌وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{a} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ و $\mathbf{b} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$ رابیابید.

۱۷ . زاویهٔ حادهٔ بین اقطار یک مستطیل به طول 5 و عرض 3 چقدر است ؟

۱۸ . زاویهٔ بین پاره‌خطهای مرسوم از یک رأس مستطیل به طول 6 و عرض 4 تا نقاط میانی اضلاع مقابل چقدر است ؟

۱۹ . یک اتومبیل به وزن 2100-lb با تندی ثابت 25 mph از یک شیب 30° بالا می‌رود . توان مینیمم موتور اتومبیل چقدر است ؟ از اصطکاک صرف‌نظر کنید .

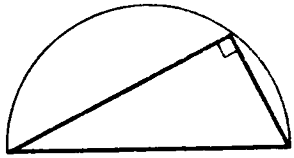
۲۰ . اندازه و جهت برآیند سه نیروی شکل ۵۴ را که همه بر O اثر می‌کنند پیدا نمایید .



شکل ۵۴

۲۱ . $\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\,\overrightarrow{CD}$ و $\text{proj}_{\overrightarrow{CD}}\,\overrightarrow{AB}$ را به ازای نقاط $A = (1, 2)$ ، $B = (2, 3)$ ، $C = (3, 4)$ ، و $D = (4, 1)$ حساب کنید .

۲۲. با استفاده از بردارها، نشان دهید که هر زاویهٔ محاط شده در یک نیمدایره قائمه است (ر.ک. شکل ۵۵).



شکل ۵۵

۲۳. فرض کنید $\mathbf{r}$ بردار موضع یک نقطهٔ متغیر در صفحه بوده، و $\mathbf{a}$ بردار موضع نقطهٔ ثابتی باشد. با استفاده از حاصلضرب نقطه‌ای، معادلهٔ برداری دایرهٔ مار بر مبداء و مرکز نقطهٔ پایان $\mathbf{a}$ را بنویسید.

۲۴. با استفاده از بردارها، نشان‌دهید که خط‌واصل بین مراکز دوایر متقاطع برخط‌واصل بین نقاط‌اشتراک عمود است.

حدود زیر را حساب کنید.

۲۵. $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1-\cos t}{t}\mathbf{i}+\dfrac{t-\sin t}{t^3}\mathbf{j}\right)$

۲۶. $\lim\limits_{t\to -\infty}\left(\dfrac{2}{\tanh t}\mathbf{i}+\dfrac{|t|}{t}\mathbf{j}\right)$

۲۷. $\dfrac{d}{dt}[(\arcsin t)\mathbf{i}-(\arccos t)\mathbf{j}]$

۲۸. $\dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{t+1}\,\mathbf{i}+\dfrac{2}{t+1}\mathbf{j}\right)$

۲۹. $\dfrac{d}{dt}[(t^2e^t)\mathbf{i}+(\tanh^{-1}t)\mathbf{j}]$

۳۰. $\int_0^1\left(\dfrac{1}{1+t^2}\mathbf{i}-\dfrac{1}{4-t^2}\mathbf{j}\right)dt$

۳۱. $\int_0^{\pi/3}[(\tan t)\mathbf{i}+(\sec t)\mathbf{j}]\,dt$

۳۲. $\int[(t\sin t)\mathbf{i}+(te^{-t})\mathbf{j}]\,dt$

۳۳ . آیا $\mathbf{r}\cdot(d\mathbf{r}/dt)\equiv 0$ ایجاب می‌کند که اندازهٔ تابع برداری $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ ثابت باشد ؟ جواب خود را توضیح دهید .

۳۴ . جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل برداری $d\mathbf{r}/dt = c\mathbf{r}$ بیابید که در شرط اولیهٔ $\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0$ صدق کند . در اینجا c یک اسکالر ثابت بوده ، و $\mathbf{r}_0$ بردار ثابتی می‌باشد .

بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر منحنی داده شده در نقطهٔ نظیر به مقدار ذکر شده از پارامتر t را بیابید .

۳۵ . $x = t^4 - 2t^2,\ y = t^3 + 1,\ t = -1$ ۳۶ . $x = t + \cos t,\ y = \sin t,\ t = \pi/6$

۳۷ . $x = \ln(t+1),\ y = e^t,\ t = 0$ ۳۸ . $x = \sec t,\ y = \tan t,\ t = \pi/4$

۳۹ . انحنای $k = \kappa(x)$ منحنی $y = \ln(\sec x)$ را بیابید .

۴۰ . نشان دهید که شعاع انحنای $R = R(\theta)$ لمنیسکات $r^2 = \cos 2\theta$ در هر نقطه غیرازمبداء با مختص شعاعی r تناسب معکوس دارد .

برای دایرهٔ بوسان منحنی داده شده در نقطهٔ $(1,1)$ معادله بنویسید . در هر حالت، منحنی و دایره را رسم کنید .

۴۱ . سهمی $y = x^2$ ۴۲ . هذلولی $xy = 1$

۴۳ . توپی را از یک پنجره به ارتفاع 64 ft به طور افقی به خارج پرتاب می‌کنیم . توپ در در فاصلهٔ 100 ft از دیوار ساختمان به زمین می‌خورد . تندی اولیهٔ توپ چقدر است ؟

۴۴ . گلوله‌ای از یک خمپاره‌انداز با سرعت گریز 600 m/sec با زاویهٔ ارتفاع $60°$ شلیک شده است . گلوله چقدر بالا می‌رود ؟ فاصلهٔ محل فرود گلوله تا خمپاره‌انداز چقدراست ، و چقدر در هوا می‌ماند ؟ (از $g = 9.8\ \text{m/sec}^2$ استفاده کنید .)

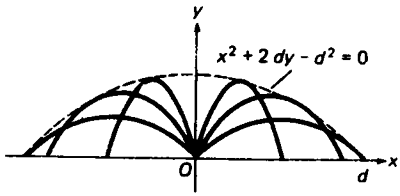
۴۵ . شخصی که در یک اتومبیل روباز در یک جادهٔ مستقیم حرکت می‌کند تفنگ خود را به طور قائم به بالا شلیک می‌کند . اگر تندی اتومبیل تغییر نکند ، کجا گلوله به زمین می‌رسد ؟ (از مقاومت هوا صرف نظر می‌شود .)

۴۶ . یک شکارچی با تیر و کمان مستقیما " جانوری را که از یک شاخه درخت آویزان است نشانه می‌رود . تیر درست به شاخه نرسیده ، بلکه در عوض به تنهٔ درخت جایی زیر شاخه می‌خورد . نشان دهید اگر جانور اشتباه کرده و در لحظهٔ پرتاب تیر خود را از شاخه رها کند مورد اصابت قرار خواهد گرفت .

۴۷ . یک توپ با برد ماکزیمم d واقع در مبداء در چه دو زاویهٔ ارتفاعی می‌تواند هدف واقع در $(\frac{1}{2}d, \frac{1}{4}d)$ را بزند ؟

۴۸ . نشان دهید که توپ مسئلهٔ قبل می‌تواند هرهدف داخل یا روی سهمی $x^2 + 2dy - d^2 = 0$ را بزند ولی ، همانطور که شکل ۵۶ نشان می‌دهد ، هیچ هدف داخل این سهمی را

نخواهد زد .



شکل ۵۶

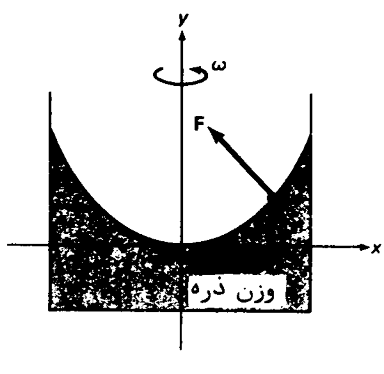
۴۹ . یک خلبان برای یک لحظه می‌تواند شتاب $8g$ ولی نه بیشتر را تحمل کند . اگر تندی هواپیما 420 mph باشد . شعاع انحنای ماکزیممی که خلبان می‌تواند هواپیما را در آخر شیرجه به بالا برگرداند چقدر است ؟

۵۰ . تندی متزاید (ر.ک. مسئلهٔ ۲۵ ، صفحهٔ ۱۱۱۷) یک جادهٔ مستدیر به شعاع 2250 ft که در زاویهٔ $30°$ سد شده است چقدر است ؟

۵۱ . مقطع مستدیر یک راه آهن ، به شعاع 1 mi ، برای اطمینان تا تندی 120 mph سد شده است . فاصلهٔ بین ریلها $4\text{ ft } 8\frac{1}{2}$ است (فاصلهٔ متعارف) . " ابر ارتفاع " h ، یعنی ارتفاع ریل خارجی بالای ریل داخلی ، را پیدا کنید .

۵۲ . یک سطل استوانه‌ای که قدری آب دارد باتندی زاویه‌ای ثابت ω حول محورش می‌گردد. آب ، که ابتدا در حالت سکون است ، مآلاً " سرعت دورانی سطح را می‌یابد . نشان دهید که شکل تعادل سطح آب یک سهمی‌گون دوار است . ω را درصورتی بیابید که قطر سطل 1 ft و سطح آب در مرکز سطل 4 in زیر سطح آب در محیط باشد .

راهنمایی . مختصات قائم x و y را مثل شکل ۵۷ اختیارکرده ، و فرض می‌کنیم $y = y(x)$ فصل مشترک صفحهٔ xy با سطح آب باشد . بر ذرهٔ آب $P = (x, y)$ روی سطح نیروی



شکل ۵۷

قائم واکنش **F** وارد می‌شود که از ناحیهٔ بقیهٔ مایع است، و **F** باید وزن ذره را خنثی کرده و شتاب‌مرکزی وی را تأمین نماید. نشان دهید که این به‌یک‌معادلهٔ دیفرانسیل برای $y = y(x)$ منجر می‌شود که حل ساده‌ای دارد.

یک طناب سنگین به طول 105 ft بین دو تکیه‌گاه به فاصلهٔ 100 ft آویزان است.

۵۳. شکم طناب چقدر است؟

۵۴. اگر وزن طناب 2 lb/ft باشد، کشش مینیمم در طناب چقدر است؟ کشش‌ماکزیمم چقدر است؟