

بسمه تعالی

تاریخ پنجشنبه ۲ آذر ۱۳۹۶

امتحان میان ترم
مدت: ۳ ساعت

ریاضیات عمومی ۱

۱ فرض کنید z یک عدد مختلط باشد به طوری که $|z| = 1$. نشان دهید دو عدد مختلط w با شرط $|w| = 1$ وجود دارند به طوری که $z = \frac{w}{\bar{w}}$. (۱۰ نمره)

۲ فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد به طوری که $f(0) = f(1)$.
الف) برای هر عدد صحیح مثبت n نشان دهید نقطه a وجود دارد به طوری که $f(a) = f(a + \frac{1}{n})$. (۱۰ نمره)
ب) فرض کنید $L > 0$ یک عدد غیر صحیح و $f(x) = \sin^2(\pi Lx) - x \sin^2(\pi L)$. نشان دهید $f(0) = f(1)$. آیا نقطه a وجود دارد به طوری که $f(a) = f(a + \frac{1}{L})$? (۱۰ نمره)

۳ الف) مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{3 \tan x - \tan 3x}$ را به دست آورید. (۱۰ نمره)
ب) تابع f سه بار مشتق پذیر است و مشتق سوم آن پیوسته است. نشان دهید

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} = f'''(x).$$

(۱۰ نمره)

۴ الف) مقدار $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را به کمک چند جمله‌ای تیلور مرتبه سوم $\sin x$ حول صفر تقریب بزنید و خطای آن را تخمین بزنید. (۱۰ نمره)
ب) مقدار $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را به کمک چند جمله‌ای تیلور مرتبه سوم $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ حول صفر تقریب بزنید و خطای آن را تخمین بزنید. (در هر دو قسمت سؤال، نوشتن عبارت تقریب کفایت می‌کند، لازم به محاسبه آن نیست). (۱۰ نمره)

۵ فرض کنید $G = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x^2 - 2y = \cos(y - 4) \right\}$.

الف) نشان دهید G نمودار تابعی مانند $y = f(x)$ است که دامنه‌اش کل \mathbb{R} است. (۶ نمره)
ب) نشان دهید تابع f همه جا مشتق پذیر است و برای $x \geq 0$ اکیدا صعودی و برای $x \leq 0$ اکیدا نزولی است. (۶ نمره)

ج) نشان دهید $f(3) = 4$ ، $f'(3) = 3$ ، $f''(3) = \frac{11}{2}$. (۶ نمره)

د) معادله خط مماس بر G در نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ را به دست آورید. (۶ نمره)

ه) فرض کنید $\begin{bmatrix} 2.9 \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \in G$. تقریب‌های درجه ۱ و ۲ برای \tilde{y} را محاسبه کنید. (۶ نمره)
(در پاسخ به هر کدام از قسمت‌های سؤال ۵ می‌توانید از قسمت‌های قبلی این سؤال استفاده کنید).