دانشگاه پیام‌نور

آمار و احتمال

دکتر نرگس عباسی   دکتر علی شادرخ   دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

آمار و احتمال

دکتر نرگس عباسی   دکتر علی شادرخ   دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

۱۵۶۱

(۴۴/آ)

دانشگاه پیام‌نور ۱۵۶۱

گروه آمار (۴۴/آ)

Payam Noor University

دانشگاه پیام نور

آمار و احتمال

(رشتهٔ آمار)

دکتر نرگس عباسی   دکتر علی شادرخ   دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

Payam Noor University

گروه آمار دانشگاه پیام‌نور

(آ/۴۴) ۱۵۶۱

سرشناسه	:عباسی، نرگس، ۱۳۴۲ -
عنوان و نام پدیدآور	:آمار و احتمال/ تالیف نرگس عباسی، علی شادرخ، محمدقاسم وحیدی‌اصل ؛ ویراستار عین‌اله پاشا.
مشخصات نشر	:تهران: دانشگاه پیام نور ، ۱۳۸۸.
مشخصات ظاهری	:۳۵۷ص.جدول ، نمودار.
فروست	:دانشگاه پیام نور؛ ۱۵۶۱ .گروه آمار؛ ۴۴/آ
شابک	:978-964-387-606-7
وضعیت فهرست نویسی	:فیپا
یادداشت	:واژه نامه
موضوع	:آمار -- آموزش برنامه‌ای
موضوع	:آمار
موضوع	:آمار -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
شناسه افزوده	:شادرخ، علی، ۱۳۴۶ -
شناسه افزوده	:وحیدی اصل، محمدقاسم، ۱۳۲۶ -
شناسه افزوده	:پاشا، عین‌الله، ۱۳۲۸ -، ویراستار
شناسه افزوده	:دانشگاه پیام نور
رده بندی کنگره	:QA۲۷۶/ع۲آ۸ ۱۳۸۸
رده بندی دیویی	:۵۱۹/۵
شماره کتابشناسی ملی	:۱۸۰۰۷۸۱

دانشگاه پیام‌نور

آمار و احتمال

دکتر نرگس عباسی   دکتر علی شادرخ   دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل

ویراستار علمی: دکتر عین‌اله پاشا

حروفچینی و نمونه‌خوانی: مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

طراح جلد: سپیده‌سادات مدنی

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: انتشارات دانشگاه پیام‌نور

تعداد: * * *

چاپ.........۱۳۸۸

قیمت: * * *

کلیهٔ حقوق برای دانشگاه پیام‌نور محفوظ است.

Payam Noor

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشتهٔ دانشگاهی، به‌صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمرهٔ کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرارمی‌گیرند.

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

Payam Noor University

Payam Noor University

فهرست

Payam Noor University

Payam Noor University

Payam Noor University

Payam Noor University

بسم الله الرّحمن الرّحیم

پیشگفتار

هدف عمده از درس "آمار و احتمال" یادگیری مفاهیم آماری و پرداختن به روش‌هایی است که به براساس آن‌ها تحلیل داده‌ها صورت می‌پذیرد. برای وارد شدن به مباحث مربوط به روش‌های آماری، ابتدا می‌بایست مقدمات را فرا گرفت.

این کتاب براساس سرفصل مدون وزارت علوم تحقیقات و فنآوری برای درس آمار و احتمال یک دوره‌ی کارشناسی رشته‌ی آمار تدوین شده است. برای مطالعه‌ی این کتاب با معلوماتی از دروس ریاضی عمومی I و II کفایت می‌کند.

با مرور فهرست مطالب کتاب، از عنوان‌های کلی و جزئی درس مطلع می‌شوید. درک مطالب هر فصل وقتی میسر می‌شود که مطالب فصل‌های قبل از آن را به خوبی فهمیده باشید. پس از دریافت چهارچوب هر فصل، به تدریج به مطالعه‌ی‌عمیق مطالب اهتمام ورزید و تمرین‌های مربوط را حل کنید. با پاسخ‌گویی به پرسش‌ها و حل تمرین‌ها، می‌توانید از کیفیت پیشرفت خود و درک و فهم مطالب، آگاه شوید. ضمناً به تمرین‌های هر فصل در پایان کتاب، پاسخ داده شده است. همچنین در بخشی دیگر برخی پرسش‌های چهارگزینه‌ای مرتبط با مطالب کتاب جمع‌آوری شده که حل آنها را به خواننده وامی‌گذاریم. برای بخش‌هایی که از نرم‌افزار مینیتب استفاده شده است توصیه می‌شود، آموزش فصل هفتم را ابتدا در کلاس‌های عملی این درس فرا گرفته، سپس وارد فصل‌های اول تا ششم شوند. لازم به ذکر است که آزمون‌های پایان هر نیم-سال ارزیابی از این فصل نخواهد شد و ارزیابی آن را به عهده‌ی اساتیدی که مجری کلاس‌های عملی هستند واگذار می‌نماییم.

در اینجا لازم می‌دانیم که مراتب قدردانی خود را از استاد گرامی جناب آقای دکتر عین‌الله پاشا استاد محترم دانشگاه تربیت معلم که زحمت ویراستاری کتاب را برعهده داشتند اعلام نماییم. همچنین از همکاران محترم مدیریت تدوین منابع درسی

خصوصاً جناب آقای اکبری کمال تشکر و سپاس را داریم. جا دارد از آقای محمد عباسی که زحمت تایپ این کتاب را کشیده‌اند قدردانی به عمل آوریم.

هرگونه پیشنهاد و انتقاد در جهت ارتقای کیفیت مطالب علمی کتاب از طرف خوانندگان محترم، مورد استقبال گرم نویسندگان قرار گرفته و موجب سپاس می‌گردد.

نویسندگان

Payam Noor University

فصل اوّل

آمار توصیفی

۱-۱ مقدمه (مروری تاریخی)

کلمه‌ی statistics که در زبان فارسی به آمار ترجمه می‌شود به دو معنی به‌کار می‌رود: یک معنای رایج آن معرف مجموعه‌ای از داده‌هایی است که دامنه‌ی وسیعی از اشیاء، نظیر اندازه‌ی جامعه‌ها، اطلاعات فعالیت‌های تولیدی، قیمت اجناس، درآمدها، میزان بارندگی و غیره را شامل می‌شود. اطلاعات آماری از این نوع به‌طور متعارف توسط دولت، بخش‌های خصوصی و قسمت‌هایی از زندگی روزمره تولید می‌شود. دیگر آنکه این کلمه به نظریه و روش‌های جمع‌آوری، توصیف، تحلیل داده‌های عددی مربوط می‌شود.

در زمان‌های قدیم دولت‌ها اطلاعات مربوط به جمعیت، ثروت، تعداد سربازها و ... را برای کنترل اوضاع کشور و جمع‌آوری مالیات، گردآوری می‌کردند. در تاریخ، چینی‌ها، چند هزار سال قبل از تولد مسیح، تعداد نفوس را برآورد کرده‌اند و مصریان نیز علاوه بر سرشماری نفوس جداول تحرک جمعیت را نیز تشکیل داده بودند. در ایران و هند نیز جمع‌آوری آمارهای اداری بیش از دوهزار سال سابقه دارد و چنین آورده‌اند که در زمان داریوش پادشاه ایران برای شمارش سربازان بدین‌گونه عمل می‌شد که آنان از جایگاه خاصی بگذرند و پاره‌سنگی در آن بگذارند.

Payam Noor University

در قرن هفدهم آمار حیاتی توسط جان گرانت انگلیسی پایه‌گذاری شد. او را پدر علم آمار حیاتی می‌دانند زیرا او بود که برای اوّلین بار آمارهای تولد و مرگ را بررسی کرد و جداول مرگ‌ومیر را تنظیم و امید به زندگی در سنین مختلف را محاسبه کرد و سرانجام در آخر قرن هفدهم اوّلین موسسه‌ی بیمه‌ی عمر در لندن پا به عرصه وجود نهاد.

نظریه‌ی آمار از نیمه‌ی قرن هفدهم با واردشدن نظریه‌ی احتمال، و مسائل بازی‌های شانسی توسعه می‌یابد. امروزه "رونالد فیشر" انگلیسی را به‌عنوان پدر علم آمار می‌شناسند. وی آمار را در زمینه‌های مختلف مانند ژنتیک، بیومتری، آموزش و پرورش، کشاورزی و مانند آن‌ها وارد کرد و در معرفی استنباط آماری شامل برآوردهای نقطه‌ای، توزیع‌های دقیق نمونه، و طرح آزمایش‌ها پیش‌گام بود.

به کارگیری روش‌های آماری در علوم اجتماعی و رفتاری کمی قبل از جنگ جهانی دوّم شروع شد. تعداد آمارگیری‌ها در زمینه‌های مختلف افزایش یافت و ضرورت تفسیر اطلاعات مربوط به روان‌شناسی و تعلیم و تربیت آشنایی با علم آمار را اجتناب‌ناپذیر کرد. امروزه موفقیت در بسیاری از زمینه‌های علمی مانند علوم انسانی، پزشکی و فنی و مهندسی بدون داشتن اطلاعات لازم از علم آمار مشکل و گاهی غیرممکن است.

۱-۱-۱ اعداد

به‌کاربردن مفهوم عدد تحولی در بیان اندیشه‌های انسانی ایجاد کرده است. همچنان‌که گذشتگان دور نمی‌توانستند، تعداد دقیق فرزندان خود را به اندیشه و گفتار درآورند، وضع بشر، مثلاً تا پیش از اختراع دماسنج، برای بیان وضع هوا مانند گذشتگان دور خود بود. اگر از وی وضع هوا را از لحاظ گرمی و سردی می‌پرسیدند، مثلاً جواب می‌داد: هوا سرد است. اگر می‌گفتند چقدر سرد است، می‌گفت: «خیلی» سرد است. امّا با اختراع دماسنج و کمّی‌شدن یا به کمیت درآمدن میزان دما، بشر قادر است به آسانی مناطق «سردسیر» و «گرمسیر» و مانند آنها را به صورتی مشخص‌تر تعریف کند و حتی رده‌بندی را بسیار دقیق‌تر و گسترده‌تر کند. بیان اینکه فلان کشور «پرجمعیت» است،

نمی‌تواند در این حد از دقت باشد که بگوییم مثلاً جمعیت آن کشور یک «میلیون نفر» است، یا متوسط تعداد کسانی که در هر هکتار می‌زیند مثلاً ۳۰۰۰ نفر است.

پس، اگر نتوانیم بگوییم که مفهوم عدد، زندگی انسان را دگرگون کرده‌است، لااقل می‌توانیم بگوییم که با متحول‌شدن زندگی انسان، عدد نقشی هرچه بهتر و بیشتر در زندگی او داشته است.

عدد در زندگی انسان نقش‌هایی گوناگون دارد. یونانیان حدود سه هزار سال پیش، عدد را تنها به‌خاطر خود عدد و برای درک روابط اعداد صحیح مورد مطالعه قراردادند و زیباترین قضیه‌های ریاضی و موضوعی به‌نام «نظریه‌ی اعداد» را پدید آورند. امّا بشر، در تمام عرصه‌های زندگی خود، چه شخصی و چه اجتماعی، به «حساب کردن» نیز نیاز داشت. این نیازهای زندگی، «چهار عمل اصلی حساب» و لذا «علم حساب» را پدید آورد که آن هم جزئی از ریاضیات است.

امّا امروزه عدد نقشی بسیار فراتر از نقش خود در علم حساب دارد. در واقع بسیاری از پدیده‌های طبیعی و اجتماعی و مانند آنها را می‌توان به کمک اعداد بیان کرد و یا به تعبیر و تفسیر این پدیده‌ها به کمک اعداد پرداخت. مثلاً بیان شدت زلزله در واحد ریشتر، میزان قوت و ضعف نسبی آن را مشخص می‌کند، امّا تعداد تلفات انسانی، تعداد بناهای تخریب شده و ... می‌تواند به بهترین نحو، ابعاد فاجعه را نشان دهد. پس در این مورد، چگونگی زلزله و عوارض و عواقب آن را با استفاده از اعداد توصیف کرده‌ایم. امروزه تلاش می‌شود که برای بیان، تجزیه و تحلیل، و تعبیر و تفسیر هر نوع پدیده‌ای از نیروی جادویی اعداد استفاده شود. البته نباید تصّورکرد که بیان هر نوع پدیده‌ای و تجزیه وتحلیل آن با همان سهولتی انجام می‌شود که در بالا در مورد زلزله انجام شد. برای آنکه تصّوری از برخی از این پدیده‌ها و پیچیدگی نسبی آنها داشته باشیم، به مثال‌های زیر توجه کنید:

الف) نقش افزایش یا کاهش درآمد کشاورزی در مهاجرت‌های روستایی،

ب) تأثیر آلودگی هوا در سطح سلامت جوامع،

ج) تأثیر استفاده از وسایل فن‌آوری پیشرفته در تغییر ساختار روابط اجتماعی.

برای آنکه بتوانیم به پرسش‌هایی از نوع بالا پاسخ دهیم، ابتدا باید اطلاعاتی در زمینه‌ی موضوع مورد بحث گردآوری کنیم. چنین اطلاعاتی، برحسب مجموعه‌ای از اعداد،

داده‌های آماری نامیده می‌شوند. نحوه‌ی گردآوری، تنظیم و تلخیص، تجزیه و تحلیل، و تعبیر و تفسیر داده‌ها، و استخراج نتایجی درباره‌ی موضوع مورد بحث، موضوع **علم آمار** را تشکیل می‌دهد.

۱-۱-۲ آمار توصیفی و آمار استنباطی

دو بخش از موضوع علم آمار، **آمار توصیفی** و **آمار استنباطی**، را در زیر شرح می‌دهیم.

آمار توصیفی شامل کلیه‌ی اعمالی است که هدف از آن‌ها خلاصه‌کردن داده‌ها یا توصیف جنبه‌های مهمّ داده‌هاست، بدون آنکه گامی فراتر از آن برداشته شود؛ یعنی بدون آنکه تلاش شود، نتیجه‌گیری‌ها یا استنباط‌هایی درباره‌ی منابعی‌که داده‌ها از آن استخراج شده‌اند، به عمل آید.

گرچه آمار توصیفی بخشی مهمّ از آمار است و هنوز هم استفاده‌ی گسترده‌ای از آن، مخصوصاً برای توصیف ویژگی‌های مهمّ داده‌ها برای عموم به عمل می‌آید، امّا در سال‌های اخیر توجه بیشتر به آمار استنباطی، یعنی روش‌هایی است که به کمک آن‌ها می‌توان اطلاعات موجود در مجموعه‌ای متناهی از داده‌ها را به مجموعه‌ای بزرگتر که داده‌ها از آن به دست آمده‌اند، تعمیم داد.

۱-۱-۳ برخی مفاهیم اوّلیه

جامعه‌ی آماری عبارت است از عناصر مورد نظر که حداقل دارای یک صفت مشخصه‌ی مشترک باشند. مانند جامعه‌ی دانشجویان دانشگاه پیام‌نور، جامعه‌ی ساکنین شهر تهران، جامعه‌ی بیماران قلبی و....

صفت مشخصه صفتی است که بین همه‌ی عناصر آماری مشترک و متمایزکننده‌ی یک جامعه‌ی آماری از سایر جوامع است. مثلاً در جامعه‌ی ایرانیان افراد جامعه نسبت به ایرانی‌بودن هیچ وجه تمایزی ندارند.

جامعه‌ی آماری به دو نوع تقسیم می‌شود: متناهی و نامتناهی. اگر مقادیر جامعه از تعداد محدود ثابتی تشکیل شود و پایان‌پذیر باشد آن را **متناهی** می‌نامیم مثلاً جمعیت ایران در سرشماری سال ۱۳۸۵ که ۷۰۰۴۹۲۶۲ نفر بوده است، یک جامعه‌ی متناهی

Payam Noor University

است. در مقابل جامعه‌های آماری **نامتناهی** را داریم، مانند جامعه‌ای با اعضای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...یا جمعیت ایران در سال آینده که یک جامعه‌ی نامتناهی را تشکیل می‌دهد.

متغیر: بررسی‌های آماری روی صفات مشخصه انجام نمی‌شود زیرا افراد جامعه نسبت به این صفات هیچ وجه تمایزی با هم ندارند. ولی اگر به افراد جامعه از زاویه‌های دیگر بنگریم تفاوت‌های زیادی می‌بینیم. آن صفاتی را که عامل این تفاوت‌ها هستند صفات متغیر می‌نامیم. پس صفات متغیر صفاتی هستند که در یک جامعه از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کنند. مثلاً در جامعه‌ی دانشجویان دانشگاه پیام‌نور، شهرستان محل سکونت و رشته‌ی انتخابی صفات متغیر هستند. به طور کلی صفاتی نظیر استعداد، هوش، نوع بیماری، گروه خونی، وضع تأهل، سن، طول عمر لامپ، تعداد دفعات تعویض قطعه‌ای از خودرو، میزان تأثیر دارویی خاص، و ...، متغیر در نظر گرفته شوند.

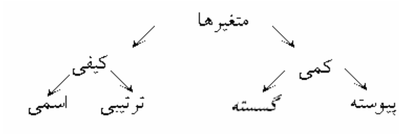
انواع متغیر: متغیرها به دو دسته تقسیم می‌شوند: متغیرهای کیفی و متغیرهای کمّی.

الف) متغیرهای کیفی: مربوط به صفاتی هستند که واحد نداشته و قابل اندازه‌گیری نیستند مانند جنس، مرغوبیت، شغل، نوع بیماری، وضع تأهل، رنگ چشم، گروه خونی و نظایر آنها (در بخش بعدی متغیرها متغیرها عمدتاً به گروه متغیرهایی که با مقیاس‌های اسمی و ترتیبی اندازه‌گیری می‌شوند، تعلق دارند).

ب) متغیرهای کمّی: مربوط به صفاتی هستند که قابل اندازه‌گیری یا شمارش هستند؛ یعنی واحد اندازه‌گیری یا شمارش دارند و قابل مقایسه و سنجش می‌باشند. مانند سن، طول عمر، درجات تحصیلی، وزن، قد، درآمد و غیره که از راه اندازه‌گیری به دست می‌آیند.

متغیرهای کمّی خود به دو دسته تقسیم می‌شوند که عبارتند از متغیرهای کمّی گسسته و متغیرهای کمّی پیوسته. ***متغیرهای کمّی گسسته*** آنهایی هستند که قابل شمارش هستند مانند سن، تعداد افراد خانوار، ظرفیت مسافر، تعداد تولید روزانه، جمعیت روستاها و.... ***متغیرهای کمّی پیوسته*** آنهایی هستند که مقادیر آنها در یک بازه

قرار دارد یا به عبارت دیگر مقادیر آنها بازه‌ای از اعداد حقیقی انتخاب می‌شوند مانند وزن، قد، طول عمر، درآمد، نمره‌ی دروس، هزینه‌ی بیمارستانی برای بیماران و نظایر آن.



۱-۱-٤ مفهوم مقیاس‌سازی

منظور از اندازه‌گیری فرآیندی است که به کمک آن به عضوی از جامعه عدد یا نمره‌ای نسبت داده می‌شود. باید توجه کرد که نمره‌هایی(اعدادی) که به این طریق به دست می‌آیند، معانی متفاوتی دارند. برای توضیح متفاوت بودن این نمره‌ها، سه پاسخ ظاهراً یکسان را که به سه پرسش متفاوت داده شده است، در نظر بگیرید. فرض کنید از کسی که در مسابقات دوی صدمتر کشور شرکت کرده است، به سه سوال زیر تنها با استفاده از عدد پاسخ گوید:

۱. با چه شماره‌ای در مسابقه شرکت کردید؟
۲. نفر چندم شدید؟
۳. در چند ثانیه به خط پایان رسیدید؟

فرض کنید پاسخ وی به هر سه سؤال «۵» باشد. با اینکه در هر سه پاسخ عدد «۵» به کار رفته است، امّا این عدد در سه معنی متفاوت به کار برده شده است. اوّلین ۵ به نشانه‌ی شماره‌ی (شناسایی) شرکت کننده است، دوّمی به نشانه‌ی مقام کسب شده در مسابقه و سومی به نشانه‌ی «زمان» پایان مسابقه است. بنابر این هر یک از ۵ها مجموعه‌ی اطلاعات متفاوتی را شامل می‌شود.

Payam Noor University

استیونس[1] (۱۹٤٦ میلادی)، چهار نوع مختلف از مقیاس‌های اندازه‌گیری را مشخص کرده‌است که هریک از آنها مجموعه‌ی اطلاعات متفاوتی را در بردارند. در هر مقیاس از عدد استفاده می‌شود ولی اطلاعات حاصل از این اعداد به کلی متفاوت است. این چهار مقیاس عبارتند از: **اسمی**، **ترتیبی**، **فاصله‌ای**، و **نسبتی**. در زیر به شرح هر یک از آنها می‌پردازیم.

۱. مقیاس اسمی

هر مقیاس را که معمولاً یک عدد طبیعی است و تنها برای شناسایی افراد یا اشیا و یا مکان‌ها به کار می‌رود، یک مقیاس اسمی می‌نامند. برای مثال، گروه‌های خونی افراد عبارتند از: A، B، AB، و O، که آن‌ها را به‌ترتیب با اعداد ۱،۲،۳،۴ مشخص می‌کنیم. این اعداد صرفاً می‌گویند که هر فردی دارای چه گروه خونی است، فردی که برچسب ۳ دارد، دارای گروه خونی AB است.

داده‌های اسمی، تنها از نظر اسمی عددی‌اند، زیرا هیچ یک از خاصیت‌های اعدادی را که در حساب معمولی با آنها سروکار داریم، ندارند و اصطلاحاً در مقیاس اسمی، کدگذاری یا اسم‌گذاری انجام می‌شود. بنابر این توجه به اینکه آیا به کار بردن اعمال حسابی در مورد داده‌ها مجاز است یا خیر، اهمّیت زیادی دارد.

۲. مقیاس ترتیبی (رتبه‌ای)

هرگاه مقیاس، یک عدد حقیقی و برتری را بیان کند آن را مقیاس ترتیبی می‌گویند. مواردی پیش می‌آید که صرف‌نظر از تفاوت محتویات یک طبقه یا محتویات طبقه دیگر، یک نوع ارتباط بین آنها برقرار است. روابط موجود بین طبقات با توجه به نوع مقیاس، اکثر مواقع صورت ترجیح دارد " به بالاتر، بیشتر، مشکل‌تر و ...." بیان می‌شود که چنین روابطی را معمولاً با علائمی نظیر" < " نشان می‌دهند. استفاده از اصطلاحاتی

1 S. S. Stevens

Payam Noor University

چون "*بالا، وسط، پایین*" و "*قوی، متوسط، ضعیف*" در تحقیقات بیانگر مقیاس ترتیبی است. در این نوع مقیاس مجاز به انجام عملیات جبری نیستیم.

برای مثال، وقتی اعداد ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ را به ترتیب به پنج فرد A، B، C، D، E اختصاص می‌دهیم به معنی آن است که پنج فرد مذکور از لحاظ صفت مورد نظر به ترتیب A، B، C، D، E قرارمی‌گیرند. لذا اگر وضع نسبی افراد یا اشیا را در مقیاس رتبه‌ای بدانیم می‌توانیم آن‌ها را به صورت‌های زیر نمایش دهیم: $B > A$؛ یعنی، B از A بزرگتر است. $B < C$؛ یعنی، B از C کوچکتر است. $B = B$؛ یعنی، B با C هم ارزش است.

در مثالی دیگر، در یک مسابقه‌ی دومیدانی دونده‌هایی را که به ترتیب اوّل، دوّم و سوّم به خط پایان می‌رسند، با اعداد ۱، ۲ و ۳ مشخص کنیم.

۳. مقیاس فاصله‌ای

وقتی که مقیاسی همه خصوصیات یک مقیاس ترتیبی را دارا باشد و علاوه بر آن فاصله‌ی بین هر دو عدد بر روی مقیاس میزان مشخصی داشته باشد، همچنین نسبت تفاضل با دو فاصله را حفظ کند آن را مقیاس فاصله‌ای می‌نامند. در این نوع اندازه‌گیری نسبت هر دو فاصله مستقل از واحد اندازه‌گیری و مستقل از نقطه‌نظر صفر است. در مقیاس فاصله‌ای مکان نقطه‌ی صفر و واحد اندازه‌گیری اختیاری و قراردادی است.

در اندازه‌گیری دما، با وجود آن‌که دما در دو مقیاس سانتی‌گراد و فارنهایت دارای نقطه‌ی صفر متفاوت است، ولی هر دو برای اندازه‌گیری حرارت به کار می‌روند. برای مثال، پنج کمیت قابل اندازه‌گیری شده x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 را در نظر می‌گیریم این کمیت‌ها را به‌اندازه‌های ۱۱، ۱۴، ۱۷، ۲۰، ۲۳ مقیاس‌سازی نموده‌ایم (یعنی x_iها در عددی ثابت ضرب و با عددی ثابت جمع شده‌اند و داده‌های جدید به دست آمده است). ملاحظه می‌شود که اختلاف اندازه‌ی کمیت دوّم از اوّل ($۱۴-۱۱=۳$) برابر سه برابر اختلاف کمیت اوّل از چهارم ($۲۰-۱۱=۹$) است.

۴. مقیاس نسبتی

به مقیاسی که علاوه بر همه‌ی خصوصیات مقیاس فاصله‌ای دارای نقطه‌ی صفر واقعی نیز هست و نسبت را حفظ می‌کند، مقیاس نسبتی می‌گویند. در مقیاس نسبتی، نسبت هر دو قطعه روی مقیاس اندازه‌گیری مستقل از واحد اندازه‌گیری است.

مقیاس‌هایی چون پوند و گرم نقطه‌ی صفر واقعی دارند و نسبت هر دو وزن دلخواه از واحد اندازه‌گیری مستقل است. بیشتر اطلاعاتی که با استفاده از وسایل فیزیکی اندازه‌گیری می‌شود از نوع مقیاس نسبی است. مثلاً، اگر در سطح مقیاس نسبتی، اعداد ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ نماینده‌ی مقدار صفت به خصوصی در اشیای A، B، C، D، E باشند می‌توان گفت که این صفت در B به اندازه‌ی ۲ برابر A و در C به‌اندازه‌ی ۳ برابر A و در E، ۲/۵ برابر B و نظایر آن وجود دارد.

جدول زیر نشان‌دهنده‌ی خلاصه مفاهیم ذکر شده درباره‌ی مقیاس‌های چهارگانه و مقایسه‌ی آنها است.

نوع مقیاس / مراتب	اسمی	رتبه ای	فاصله‌ای	نسبتی
ترتیب	ندارد	دارد	دارد	دارد
فواصل	ندارد	ندارد	دارد	دارد
مبدأ صفر قراردادی	ندارد	ندارد	دارد	دارد
مبدأ صفر مطلق	ندارد	ندارد	ندارد	دارد

۱-۱-۵ منابع داده‌ها

با توجه به گستردگی مباحث علمی، محققان منابع گوناگونی برای گردآوری داده‌ها در اختیار دارند. بدون واردشدن در جزئیات به انواع مهمّ داده‌ها برحسب منابع آنها اشاره می‌کنیم.

داده‌های اوّلیه که اطلاعات خام را که مخصوصاً برای انجام تحلیل گردآوری شده‌اند، در اختیار ما می‌گذارند. این داده‌ها یا از طریق سنجش مستقیم، مانند انجام مصاحبه، مشاهدات میدانی، اندازه‌گیری با ابزارهای ویژه، به دست می‌آیند، یا از طریق

Payame Noor University

سنجش غیرمستقیم که در آن سنجش و ثبت نتایج در مکان‌های مجزا از هم انجام می‌شود و این روش استفاده از مصاحبه‌های تلفنی، شمارنده‌های ترافیک، و ثبات‌های بارندگی خودکار را شامل می‌شود. داده‌های حاصل از روش‌های سنجش از راه دور نیز در زمره‌ی داده‌های اوّلیه محسوب می‌شوند.

داده‌های ثانویه که در آن اطلاعات که پیشتر- به هر منظور خاص- گردآوری شده‌اند، منبع اصلی تلقی شده و اطلاعات مربوط به تحلیل موردنظر از آن استخراج می‌شود. این داده‌ها یا پیامدهای غیرمستقیم فعالیت‌های دستگاه‌های اجرایی دولتی یا خصوصی، نظیر ادارات ثبت احوال و ثبت اسناد، مؤسسات نقشه‌برداری، بانک‌ها، شهرداری‌ها، و غیره‌اند یا داده‌های حاصل از سرشماری‌های رسمی سراسری و یا مقطعی مؤسساتی نظیر مرکز آمار ایران‌اند. داده‌های مندرج در تصاویر حاصل از دستگاه‌های سنجش از راه دور نیز از این جمله‌اند.

بدیهی‌است که تفاوت‌های عمده‌ای بین فرایندهای اندازه‌گیری مربوط به منابع گوناگون، و بین داده‌های اوّلیه و ثانویه موجود است. وقتی از داده‌های اوّلیه استفاده می‌کنیم، معمولاً طرح پژوهشی مربوط به تحلیل آسان‌تر است امّا فرایند اندازه‌گیری معمولاً دشوار و وقت‌گیر است. با توجه به امکان تحت کنترل داشتن فرایند گردآوری داده‌ها در این حالت، می‌توان متغیرها را به هر شکلی که در تحلیل آماری مورد نیاز باشند، انتخاب و اندازه‌گیری کرد. امّا، وقتی از داده‌های ثانویه استفاده می‌کنیم، کنترلی نسبت به متغیرها و فرایند اندازه‌گیری نداریم و این امر ممکن است موجب ایجاد مشکلاتی در موقع تجزیه و تحلیل شود. در این صورت برعهده‌ی محقق است که ابتدا از مناسب‌بودن داده‌ها اطمینان حاصل کند.

۱–۲ سازمان‌دهی داده‌ها

برای آنکه بتوان نخستین گام‌ها را برای تجزیه و تحلیل داده‌ها برداشت و نتایجی درباره‌ی خصوصیات جامعه‌ای که این اطلاعات از آن استخراج شده‌اند، به دست آورد، لازم است که این داده‌ها سازماندهی (تنظیم) و تلخیص شوند.

۱-۲-۱ مرتب‌کردن داده‌های عددی

فرض‌کنید داده‌های زیر میزان بارندگی سالانه ۱۰۰ شهر را برحسب سانتی‌متر در منطقه‌ای نشان بدهد:

۴۴/۰	۳۵/۴	۲۸/۴	۳۷/۰	۴۶/۰	۳۵/۴	۱۹/۴	۲۰/۴	۵۶/۴	۴۳/۲
۳۶/۲	۳۸/۴	۴۹/۲	۳۱/۸	۸۶/۴	۱۲/۶	۲۷/۴	۱۴/۰	۳۹/۴	۳۹/۴
۱۵/۸	۲۸/۸	۳۸/۰	۴۴/۰	۳۸/۴	۷۴/۰	۲۳/۰	۱۱/۴	۳۹/۸	۳۰/۲
۲۹/۲	۴۰/۶	۴۹/۶	۳۰/۴	۱۲/۲	۱۲۳/۸	۴۲/۰	۴۷/۰	۳۲/۴	۳۹/۲
۳۵/۲	۵۶/۴	۳۱/۰	۴۵/۰	۹۰/۲	۱۰۰/۰	۳۹/۰	۳۷/۰	۴۹/۴	۲۸/۲
۱۲/۶	۲۷/۰	۴۷/۸	۵۲/۶	۴۱/۰	۴۰/۰	۲۸/۰	۲۳/۶	۳۷/۶	۳۷/۸
۳۰/۰	۴۸/۵	۱۸/۰	۴۱/۰	۲۲/۶	۲۴/۲	۸۹/۶	۹۰/۴	۴۳/۰	۲۹/۸
۵۶/۲	۲۴/۸	۱۲/۶	۵۳/۶	۱۲۵/۴	۱۶/۲	۳۹/۰	۴۰/۸	۳۳/۶	۳۹/۴
۴۵/۶	۳۷/۴	۱۸/۰	۵۰/۶	۱۰۳/۴	۵۲/۴	۲۰/۲	۶۴/۶	۲۲/۲	۶۰/۰
۴۲/۲	۴۲/۰	۱۶/۲	۱۰۸/۲	۴۴/۰	۴۲/۶	۳۹/۴	۳۷/۶	۴۱/۴	۴۰/۴

شاید در نخستین مرحله، بهتر این باشد که مقادیر فرین، یعنی بیشترین و کمترین مقدار داده‌ها را در این مجموعه معین کنیم. با مقداری وارسی معلوم می‌شود که کمترین مقدار ۱۱/۴ و بیشترین مقدار ۱۲۵/۴ است. می‌توان همین شیوه را ادامه داد و دوّمین مقدار، سوّمین مقدار، و ... را از نظر بزرگی پیدا کرد یا به‌عبارت دیگر داده‌ها را به‌ترتیب صعودی مرتب‌کرد (می‌توان داده‌ها را به ترتیب نزولی نیز مرتب کرد). پس از انجام این کار فهرست زیر را خواهیم داشت:

۱۱/۴	۱۸/۰	۲۷/۰	۳۰/۴	۳۷/۰	۳۹/۲	۴۱/۰	۴۴/۰	۴۹/۶	۷۴/۰
۱۲/۲	۱۹/۴	۲۷/۴	۳۱/۰	۳۷/۴	۳۹/۴	۴۱/۰	۴۴/۰	۵۰/۶	۸۶/۴
۱۲/۶	۲۰/۲	۲۸/۰	۳۱/۸	۳۷/۶	۳۹/۴	۴۱/۴	۴۵/۰	۵۲/۴	۸۹/۶
۱۲/۶	۲۰/۴	۲۸/۲	۳۲/۴	۳۷/۶	۳۹/۴	۴۲/۰	۴۵/۶	۵۲/۶	۹۰/۲
۱۲/۶	۲۲/۲	۲۸/۴	۳۳/۶	۳۷/۸	۳۹/۴	۴۲/۰	۴۶/۰	۵۳/۶	۹۰/۴
۱۴/۰	۲۲/۶	۲۸/۸	۳۵/۲	۳۸/۰	۳۹/۸	۴۲/۲	۴۷/۰	۵۶/۲	۱۰۰/۰
۱۵/۸	۲۳/۰	۲۹/۲	۳۵/۴	۳۸/۴	۴۰/۰	۴۲/۶	۴۷/۸	۵۶/۴	۱۰۳/۴
۱۶/۲	۲۳/۶	۲۹/۸	۳۵/۴	۳۸/۴	۴۰/۴	۴۳/۰	۴۸/۵	۵۶/۴	۱۰۸/۲
۱۶/۲	۲۴/۲	۳۰/۰	۳۶/۲	۳۹/۰	۴۰/۶	۴۳/۲	۴۹/۲	۶۰/۰	۱۲۳/۴
۱۸/۰	۲۴/۸	۳۰/۲	۳۷/۰	۳۹/۰	۴۰/۸	۴۴/۰	۴۹/۴	۶۴/۶	۱۲۵/۴

با اینکه مرتب کردن داده‌ها به ترتیب نزولی یا صعودی، برای مجموعه‌های بزرگ کار چندان آسانی نیست، ملاحظه می‌کنیم که این مجموعه‌ی جدید، چندان تفاوتی با داده‌های قبلی ندارد و نمی‌توان تنها با نظرکردن به آنها از کم وکیف «توزیع» آنها

Payam Noor University

اطلاعی به دست آورد. بنابر این سودمند خواهد بود که راهی دیگر برای پردازش داده‌ها پیدا کنیم. یکی از روش‌هایی که اخیراً به وجود آمده است، نمودار **ساقه و برگ** است که تصویری از وضع کلی داده‌ها را در اختیار می‌گذارد. برای سهولت این روش را برای داده‌های مثال زیر توضیح می‌دهیم.

مثال ۱-۱. فرض کنید داده‌های زیرمربوط به تعداد شعب یک بانک در بیست شهر باشند.

۶۹	۸۴	۵۲	۹۳	۶۱	۷۴	۷۹	۶۵	۸۸	۶۳
۵۷	۶۴	۶۷	۷۲	۷۴	۵۵	۸۲	۶۱	۶۸	۷۷

رقم یکان و دهگان هر عدد را جداگانه در نظر بگیرید و اعدادی را که رقم دهگان آنها یکی هستند، یک‌جا گردآوری کنید. برای این منظور مثلاً عدد ۶۹ را به صورت ۹|۶ در نظر می‌گیریم. رقم دهگان، یعنی ۶ را در ستون اول درجای مناسب خود می‌نویسیم و رقم یکان را در سمت راست علامت | وارد می‌کنیم. برای نوشتن۶۴، چون قبلاً ۶ را در ستون اوّل نوشته‌ایم، کافی است تنها ۴، یعنی رقم یکان را در سمت راست علامت | وارد کنیم. به این ترتیب اعداد به شکل زیر گروه‌بندی می‌شوند:

۵	۲ ۷ ۵
۶	۹ ۱ ۵ ۳ ۴ ۷ ۱ ۸
۷	۲ ۹ ۴ ۴ ۷
۸	۴ ۸ ۲
۹	۳

اوّلین سطر این جدول، یعنی ۵ ۷ ۲ |۵ نشان می‌دهد که این فهرست شامل اعداد ۵۲، ۵۷، و ۵۵ است و دوّمین سطر بیان می‌کند که فهرست شامل ۸ عدد است که رقم دهگان آنها ۶ است.

Payam Noor University

این جدول، **نمایش ساقه و برگ** نامیده می‌شود، زیرا هر سطر حالت ساقه‌ای را نشان می‌دهد، و هر رقم واقع در سمت راست خط عمودی | حالت یک برگ را نشان می‌دهد. برای تشکیل دادن این جدول، ابتدا با ساقه‌ها، یعنی

۵	
۶	
۷	
۸	
۹	

شروع می‌کنیم. سپس با مراجعه به فهرست داده‌ها، به ترتیب هر عدد را در نظر گرفته و دوّمین رقم آن را به عنوان برگ در روی ساقه‌ی مربوط به آن درج می‌کنیم. نمایش ساقه و برگ همان اطلاعاتی را منعکس می‌سازد که در فهرست اصلی موجود است امّا بسیار فشرده‌تر از آن است. بخش عمده‌ی کار مرتب کردن داده‌ها، با ایجاد نمایش ساقه و برگ انجام می‌شود. با مرتب‌کردن برگ‌ها که کار نسبتاً ساده‌تری است، می‌توان کار مرتب‌کردن داده‌ها را گامی جلوتر برد. در این مثال جدول زیر را به دست می‌آوریم.

۵	۲ ۵ ۷
۶	۱ ۱ ۳ ۴ ۵ ۷ ۸ ۹
۷	۲ ۴ ۴ ۷ ۹
۸	۲ ۴ ۸
۹	۳

در واقع، نمایش ساقه و برگ و سپس مرتب‌کردن برگ‌ها شبیه‌کاری است که در فرهنگ‌های لغت انجام می‌شود، واژه‌ها ابتدا برحسب اوّلین حرف خود مرتب می‌شوند و سپس برحسب حروف دوّم و سوّم و ... البته در این حالت مانند این است که کلمه دو حرفی است.

توجه می‌کنیم که قرارگرفتن هر فهرستی از داده‌ها در یک نمایش ساقه و برگ به سادگی آنچه در مثال اخیر انجام شد، نیست. گاهی با زیادشدن ارقام و پراکندگی داده‌ها می‌توان از گردشده‌ی داده‌ها یا حذف برخی رقم‌های اعشاری، استفاده کرد.

Payam Noor University

در زیر نمودار ساقه و برگ برای مثال ۱–۱، به کمک نرم‌افزار مینیتب انجام شده است.

```
MTB > SET C1
DATA> 69 84 52 93 61 74 79 65 88 63
DATA> 57 64 67 72 74 55 82 61 68 77
DATA> END
MTB > Stem-and-Leaf C1;
SUBC>   Increment 10.
Character Stem-and-Leaf Display
Stem-and-leaf of C1       N  = 20
Leaf Unit = 1.0
   3    5 257
  (8)   6 11345789
   9    7 24479
   4    8 248
   1    9 3
```

تمرین

۱–۱. برای داده‌های جدول بارندگی سالانه‌ی ۱۰۰ شهر،

الف) نمایش ساقه و برگ را به‌صورت دستی تشکیل دهید.

ب) باردیگر به کمک نرم‌افزار با تغییر مقدار در دستور Increment، نمودارهای مختلف ساقه و برگ را رسم کنید.

۱–۲–۲ توزیع‌های فراوانی

تعداد داده‌هایی که در یک مطالعه‌ی آماری گردآوری می‌شوند، معمولاً بیشتر از آن است که تنها با نگاه‌کردن به آنها، بتوان اطلاعی درباره‌ی پدیده‌ی مورد مطالعه به دست آورد و لازم است که این داده‌ها را به نحوی سازمان دهیم. یک راه ساده برای این منظور، گردآوردن آن‌ها در قالب یک نمایش ساقه و برگ است. امّا برای مطالعه دقیق‌تر و مفصل‌تر داده‌ها، لازم **است** آن‌ها را با دقت بیشتری سازماندهی کنیم. یکی از روش‌های بسیار رایج، استفاده از **توزیع‌های فراوانی** برای رده‌بندی یا گروه‌بندی داده‌هاست. به‌عنوان مثال فرض کنید که در یک نمونه‌گیری از دانشجویان دانشگاه پیام‌نور در شیراز، ۴۱ نفر رشته‌ی مهندسی کامپیوتر، ۴۷ نفر رشته‌ی علوم کامپیوتر، ۲۸ نفر

Payam Noor University

رشته‌ی ریاضی کاربردی، و ۱۱ نفر رشته‌ی ریاضی محض بوده‌اند. دسته‌بندی این افراد به‌صورت زیر است.

جدول ۱-۱. دسته‌بندی نمونه‌ای از دانشجویان دانشگاه پیام‌نور در مرکز شیراز

مهندسی کامپیوتر	۴۱
علوم کامپیوتر	۴۷
ریاضی کاربردی	۲۸
ریاضی محض	۱۱

چنین جدولی، یک **توزیع رسته‌ای** یا **توزیع کیفی** نامیده می‌شود و برای دسته‌بندی داده‌های غیرعددی در قالب رسته‌ها از آن استفاده می‌شود. معمولاً برای سازمان‌دادن داده‌های غیرعددی یا داده‌هایی که برحسب مقیاس اسمی بیان شده‌اند، از توزیع‌های رسته‌ای استفاده می‌کنیم.

برای داده‌های عددی برحسب مقیاس‌های دیگر، از **توزیع‌های کمی** یا **توزیع‌های عددی** استفاده می‌کنیم. در این حالت، به طوری که خواهیم دید، داده‌ها را در بازه‌ها یا فاصله‌هایی از اعداد قرار می‌دهیم. اعم از اینکه برای داده‌ها توزیع‌های رسته‌ای یا عددی تشکیل داده باشیم یا خیر، خواهیم گفت که داده‌ها را در یک **جدول فراوانی** خلاصه کرده‌ایم. برای آنکه نحوه‌ی تشکیل جدول‌های فراوانی را به تفصیل بررسی کنیم، مثالی می‌آوریم.

مثال ۱-۲. داده‌های جدول ۱-۲ میزان اکسید سولفور منتشر شده در هوا در ۸۰ روز (برحسب تن) را نشان می‌دهند.

Payam Noor University

۱۵/۸	۲۶/۴	۱۷/۳	۱۱/۲	۲۳/۹	۲۴/۸	۱۸/۷	۱۳/۹	۹/۰	۱۳/۲
۲۲/۷	۹/۸	۶/۲	۱۴/۷	۱۷/۵	۲۶/۱	۱۲/۸	۲۸/۶	۱۷/۶	۲۳/۷
۲۶/۸	۲۲/۷	۱۸/۰	۲۰/۵	۱۱/۰	۲۰/۹	۱۵/۵	۱۹/۴	۱۶/۷	۱۰/۷
۱۹/۱	۱۵/۲	۲۲/۹	۲۶/۶	۲۰/۴	۲۱/۴	۱۹/۲	۲۵/۶	۱۶/۹	۱۹/۰
۱۸/۵	۲۳/۰	۲۴/۶	۲۰/۱	۱۶/۲	۱۸/۰	۷/۷	۱۳/۵	۲۳/۵	۱۴/۵
۱۴/۴	۲۹/۰	۱۹/۴	۱۷/۱	۲۰/۸	۲۴/۳	۲۲/۵	۲۴/۶	۱۸/۴	۱۸/۱
۸/۳	۲۱/۹	۱۲/۳	۲۲/۳	۱۳/۳	۱۱/۸	۱۹/۳	۲۰/۰	۲۴/۷	۳۱/۸
۲۵/۹	۱۰/۵	۱۵/۹	۲۷/۵	۱۸/۱	۱۷/۹	۹/۴	۲۴/۱	۲۰/۱	۲۸/۵

جدول ۱-۲. داده‌های میزان اکسید سولفور منتشره در هوا (برحسب تن) در ۸۰ روز

برای تشکیل جدول فراوانی در نخستین گام باید تعداد رده‌ها یا گروه‌هایی را تعیین کنیم که می‌خواهیم داده‌ها را در آنها جای‌دهیم. تعیین تعداد رده‌ها تا حدی به سلیقه و نظر محقق بستگی دارد. امّا چندین قاعده‌ی کلی برای انتخاب تعداد رده‌ها پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان استفاده از هریک از فرمول‌های

$$n = ۲^k \qquad (۱-۱)$$

$$k = ۱ + ۳/۳ \log(n) \qquad (۲-۱)$$

را ذکر کرد که در آن n تعداد داده‌ها و k تعداد رده‌هاست. آنچه همواره باید به‌خاطر داشت این است که:

به ندرت تعداد رده‌ها را کمتر از ۵ و بیشتر از ۱۵ انتخاب می‌کنیم، تعداد دقیق رده‌ها به تعداد اندازه‌گیری‌ها یا مشاهدات بستگی دارد.

وقتی تعداد رده‌ها را بزرگ انتخاب می‌کنیم، با همان مشکلی روبه‌رو هستیم که قبل از تلخیص‌کردن داده‌ها و کارکردن با داده‌های اصلی در پیش است. وقتی تعداد رده‌ها کم باشد، اطلاعات نسبتاً قابل توجهی درهم ادغام و از دقت نتیجه‌گیری کاسته می‌شود.
برای داده‌های مثال حاضر، چون $n = ۸۰$، لذا می‌توان تعداد رده‌ها را ۶ یا ۷ گرفت.
پس از تعیین تعداد رده‌ها، باید خود رده‌ها یا طبقه‌هایی را که باید داده‌های ما را در بربگیرند، مشخص‌کنیم. در تعیین رده‌ها به قواعد زیر توجه می‌کنیم:
۱. رده‌ها باید طوری انتخاب شوند که همه‌ی داده‌ها را دربرگیرند.

Payam Noor University

۲. حتماً باید مطمئن شد که هر داده تنها در یک رده قرار می‌گیرد، به‌عبارت دیگر رده‌ها نباید عضو مشترک داشته باشند.

۳. درصورت امکان طول رده‌ها را برابر انتخاب می‌کنیم، و به علاوه سعی می‌کنیم که **کران رده‌ها** یا **حدود رده‌ها** مضربی از ۵، ۱۰، ۱۰۰، ... باشد. منظور از حدود هر رده، کمترین و بیشترین مقدار از داده‌هاست که می‌توانیم در رده‌ای معین قراردهیم.

در این مثال، چون کمترین مقدار داده‌ها ۶/۲ و بیشترین مقدار داده‌ها ۳۱/۸ است، پس برای این داده‌ها

مقدار کوچکترین داده − مقدار بزرگترین داده = دامنه‌ی تغییرات

= ۳۱/۸ − ۶/۲ = ۲۵/۶

بنابر این اگر طول رده‌ها را برابر بگیریم طول هر رده بنابر فرمول

$c =$ طول رده = دامنه‌ی تغییرات / تعداد رده

برابر ۴/۲ ≅ $\frac{۲۵/۶}{۶}$ خواهد بود. در این مثال برای سادگی طول مشترک داده‌ها را برابر ۴ انتخاب خواهیم کرد. اگر بنابر توصیه‌های ذکر شده، حد پایین رده‌ی اوّل، یعنی کوچکترین مقداری را که بتوان در رده‌ی اوّل قرار گیرد برابر ۵ انتخاب کنیم، در این صورت می‌توانیم از ۷ رده‌ی ۸/۹ − ۵/۰، ۱۲/۹ − ۹/۰، ...، ۳۲/۹ − ۲۹/۰ استفاده کنیم. توجه می‌کنیم که طول هر رده ۴ است زیرا مثلاً رده‌ی اوّل ۸/۹ − ۵/۰ شامل کلیه‌ی مقادیر از ۴/۹۵ تا ۸/۹۵ است به این دلیل که داده‌های ما که در این مثال کمیت‌های پیوسته هستند، به نزدیکترین یک دهم تن گرد شده‌اند. به عنوان مثال داده‌ای که به صورت ۸/۳ ثبت شده است در اصل مقداری بین ۸/۲۵ و ۸/۳۵ بوده و به نزدیکترین یک دهم تن گرد شده است. بنابر این حدود واقعی رده‌ی اوّل مقادیر ۴/۹۵ و ۸/۹۵، حدود واقعی رده‌ی دوّم ۸/۹۵ و ۱۲/۹۵، ...، و حدود واقعی رده‌ی آخر مقادیر ۲۸/۹۵ و ۳۲/۹۵ است. حدود واقعی رده‌ها را کرانه‌های رده‌ها می‌نامیم.

Payam Noor University

اینک برای داده‌های مثال حاضر، جدولی تنظیم می‌کنیم و در اوّلین ستون آن حدود رده‌ها را درج می‌کنیم. ستون دیگری به نام ستون خط‌نشان یا چوب‌خط در نظر می‌گیریم. اینک داده‌ها را یک‌به‌یک می‌خوانیم و در برابر رده‌ای که داده به آن تعلق دارد، یک خط عمودی به شکل | وارد می‌کنیم. برای سهولت در شمارش آنها، پس از هر چهار علامت خط مورب به‌صورت / به روی آنها می‌کشیم و هر چنین مجموعه‌ای به نشانه پنج مورد از داده‌هاست. حال به طوری که در جدول دیده می‌شود، تعداد «خط نشان‌ها» را شمرده در ستون سوم همین جدول وارد می‌کنیم و به این ترتیب **فراوانی** هر رده به دست می‌آید. فراوانی رده‌ی iام را با نماد f_i نمایش می‌دهیم، بدیهی است که $\sum_{i=1}^{k} f_i = n$.

جدول ۱-۳. جدول فراوانی اوّلیه مربوط به میزان اکسیدسولفور منتشره در هوا

حدود رده	خط نشان	فراوانی
۵/۰–۸/۹	𝍷𝍷𝍷	۳
۹/۰–۱۲/۹	𝍸 𝍸	۱۰
۱۳/۰–۱۶/۹	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	۱۴
۱۷/۰–۲۰/۹	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	۲۵
۲۱/۰–۲۴/۹	𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷	۱۷
۲۵/۰–۲۸/۹	𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	۹
۲۹/۰–۳۲/۹	𝍷𝍷	۲
مجموع		۸۰

برای آنکه بتوان استفاده‌های گسترده‌تری از جدول فراوانی به عمل آورد، با افزودن ستون‌های دیگری، آن را کامل‌تر می‌کنیم. برای این منظور ستون دیگری به جدول فراوانی اضافه می‌کنیم که ستون **نماینده‌ی رده‌ها** یا **مرکز رده‌ها** نامیده می‌شود. برای آنکه نماینده‌ی هر رده را به دست آوریم، حد بالای هر رده را با حد پایین همان رده جمع و حاصل را بر دو تقسیم می‌کنیم. نماینده‌ی هر رده را می‌توان با پیدا کردن

مجموع کرانه‌های پایین و بالای هر رده و تقسیم حاصل بر ۲ نیز به دست آورد. برای داده‌های مثال اخیر نماینده‌های رده‌ها به ترتیب مقادیر

$$۶/۹۵ = \frac{۵/۰+۸/۹}{۲}،\ ۱۰/۹۵ = \frac{۹/۰+۱۲/۹}{۲}،\ \dots،\ ۳۰/۹۵ = \frac{۲۹/۰+۳۲/۹}{۲}$$

هستند. نماینده‌ی رده‌ی iام را با m_i نشان می‌دهیم.

همچنین ستون دیگری به نام ستون فراوانی درصد به جدول فراوانی اضافه می‌کنیم. برای محاسبه‌ی فراوانی درصد هر رده، فراوانی رده را بر تعداد کل داده‌ها تقسیم و حاصل را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم. برای داده‌های مثال حاضر، فراوانی درصد رده‌ها به ترتیب اعداد $۳/۷۵ = \frac{۳\times۱۰۰}{۸۰}$، $۱۲/۵ = \frac{۱۰\times۱۰۰}{۸۰}$، ...، $۲/۵ = \frac{۲\times۱۰۰}{۸۰}$ خواهند بود.

جدول ۱–٤. جدول فراوانی مربوط به‌میزان اکسیدسولفور منتشره در هوا

حدود رده	کرانه‌های رده	نماینده	فراوانی	فراوانی درصد
۵/۰–۸/۹	۴/۹۵–۸/۹۵	۶/۹۵	۳	۳/۷۵
۹/۰–۱۲/۹	۸/۹۵–۱۲/۹۵	۱۰/۹۵	۱۰	۱۲/۵
۱۳/۰–۱۶/۹	۱۲/۹۵–۱۶/۹۵	۱۴/۹۵	۱۴	۱۷/۵
۱۷/۰–۲۰/۹	۱۶/۹۵–۲۰/۹۵	۱۸/۹۵	۲۵	۳۱/۲۵
۲۱/۰–۲۴/۹	۲۰/۹۵–۲۴/۹۵	۲۲/۹۵	۱۷	۲۱/۲۵
۲۵/۰–۲۸/۹	۲۴/۹۵–۲۸/۹۵	۲۶/۹۵	۹	۱۱/۲۵
۲۹/۰–۳۲/۹	۲۸/۹۵–۳۲/۹۵	۳۰/۹۵	۲	۲/۵
مجموع			۸۰	۱۰۰

داشتن فراوانی‌های درصد برای مقایسه‌ی دو مجموعه از داده‌ها بسیار مفید است. مثلاً اگر بخواهیم میزان اکسید سولفور منتشره از کارخانه‌ای را با میزان اکسید سولفور کارخانه‌ای دیگر مقایسه کنیم، حتماً باید از فراوانی‌های درصد استفاده کنیم. زیرا امکان دارد تعداد داده‌های مربوط به دو کارخانه متفاوت باشد. به علاوه برای این نوع مقایسه‌ها و موارد دیگر می‌توان از **فراوانی تجمعی** استفاده کرد که تعداد «داده‌های کمتر از» مقداری مشخص را نشان می‌دهد. برای آنکه تعداد داده‌های کمتر از حدّ پایین هر رده را حساب کنیم، فراوانی‌های تمام رده‌های پیش از آن رده را با هم جمع

Payam Noor University

می‌کنیم. بدیهی است که فراوانی تجمعی آخرین رده برابر اندازه مشاهدات، n، است. برای داده‌های مثال حاضر، جدول فراوانی تجمعی زیر را خواهیم داشت:

جدول ۱-۵. جدول فراوانی تجمعی مربوط به میزان اکسید سولفور منتشره در هوا

فراوانی تجمعی	میزان اکسید سولفور بر حسب تن
۰	کمتر از ۵/۰
۳	کمتر از ۹/۰
۱۳	کمتر از ۱۳/۰
۲۷	کمتر از ۱۷/۰
۵۲	کمتر از ۲۱/۰
۶۹	کمتر از ۲۵/۰
۷۸	کمتر از ۲۹/۰
۸۰	کمتر از ۳۳/۰

می‌توان این جدول را در جدول فراوانی قبلی، ادغام کرد و کلیه‌ی این اطلاعات را یک‌جا در جدولی جامع ارائه داد.

جدول ۱-۶. جدول کامل فراوانی مربوط به‌میزان اکسید سولفور منتشره در هوا

فراوانی تجمعی	فراوانی درصد	فراوانی	نماینده	کرانه‌های رده	حدود رده
۳	۳/۷۵	۳	۶/۹۵	۴/۹۵–۸/۹۵	۵/۰–۸/۹
۱۳	۱۲/۵	۱۰	۱۰/۹۵	۸/۹۵–۱۲/۹۵	۹/۰–۱۲/۹
۲۷	۱۷/۵	۱۴	۱۴/۹۵	۱۲/۹۵–۱۶/۹۵	۱۳/۰–۱۶/۹
۵۲	۳۱/۲۵	۲۵	۱۸/۹۵	۱۶/۹۵–۲۰/۹۵	۱۷/۰–۲۰/۹
۶۹	۲۱/۲۵	۱۷	۲۲/۹۵	۲۰/۹۵–۲۴/۹۵	۲۱/۰–۲۴/۹
۷۸	۱۱/۲۵	۹	۲۶/۹۵	۲۴/۹۵–۲۸/۹۵	۲۵/۰–۲۸/۹
۸۰	۲/۵	۲	۳۰/۹۵	۲۸/۹۵–۳۲/۹۵	۲۹/۰–۳۲/۹
	۱۰۰	۸۰			مجموع

ساختن جدول ۱-۶ را به وسیله‌ی نرم‌افزار، برای تعیین ستون فراوانی، فراوانی درصد، و فراوانی تجمعی به صورت زیر انجام می‌دهیم.

```
MTB > SET C1
DATA> 15.8 22.7 26.8 19.1 18.5 14.4 8.3 25.9
DATA> 26.4 9.8 22.7 15.2 23.0 29.0 21.9 10.5
DATA> 17.3 6.2 18.0 22.9 24.6 19.4 12.3 15.9
```

Payam Noor University

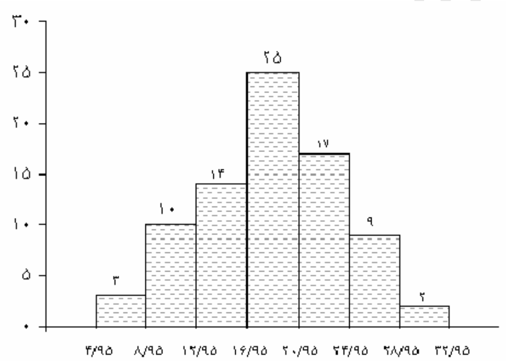
```
DATA> 11.2 14.7 20.5 26.6 20.1 17.1 22.3 27.5
DATA> 23.9 17.5 11.0 20.4 16.2 20.8 13.3 18.1
DATA> 24.8 26.1 20.9 21.4 18.0 24.3 11.8 17.9
DATA> 18.7 12.8 15.5 19.2 7.7 22.5 19.3 9.4
DATA> 13.9 28.6 19.4 25.6 13.5 24.6 20.2 24.1
DATA> 9.0 17.6 16.7 16.9 23.5 18.4 24.7 20.1
DATA> 13.2 23.7 10.7 19.0 14.5 18.1 31.8 28.5
DATA> END
MTB > NAME C1='DATA' C2='FREQ' C3='PERC' C4='CUMLFREQ'
MTB > LET C2(1)=SUM((C1>4.95)*(C1<8.95))
MTB > LET C2(2)=SUM((C1>8.95)*(C1<12.95))
MTB > LET C2(3)=SUM((C1>12.95)*(C1<16.95))
MTB > LET C2(4)=SUM((C1>16.95)*(C1<20.95))
MTB > LET C2(5)=SUM((C1>20.95)*(C1<24.95))
MTB > LET C2(6)=SUM((C1>24.95)*(C1<28.95))
MTB > LET C2(7)=SUM((C1>28.95)*(C1<32.95))
MTB > LET C3=C2/SUM(C2)*100
MTB > LET C4=PARSUM(C2)
MTB > PRINT C2-C4
Data Display
 Row   FREQ    PERC  CUMLFREQ
   1      3    3.75        3
   2     10   12.50       13
   3     14   17.50       27
   4     25   31.25       52
   5     17   21.25       69
   6      9   11.25       78
   7      2    2.50       80
```

۱-۲-۳ توصیف داده‌ها به کمک نمودارها

نمودارها و تصاویر علاوه‌بر اینکه مشخصه‌های اصلی داده‌ها را به‌نحو بارزی آشکار می‌کنند، به‌طوری که بعداً خواهیم دید از لحاظ نظری نیز بسیار مفیدند. رایج‌ترین نمودار آماری، **بافت‌نگار** نام دارد. برای رسم بافت‌نگار، از یک دستگاه محورهای مختصات متعامد استفاده می‌کنیم. کرانه‌های رده‌ها را روی محور افقی درج می‌کنیم و سپس مستطیل‌هایی بنا می‌کنیم به طوری که طول قاعده مستطیل مربوط به رده‌ی iام، طول آن رده و ارتفاع آن، فراوانی رده باشد.

Payam Noor University

مثال ۱-۳. داده‌های مربوط به میزان اکسید سولفور منتشره در هوا را که در مثال ۱-۲ ارائه شد، یک‌بار دیگر در نظر می‌گیریم. برای رسم بافت‌نگار مربوط به داده‌ها، به‌طوری که گفتیم کرانه‌های رده‌ها را بر روی محور افقی ثبت می‌کنیم و مستطیل‌هایی بر روی این رده‌ها بنا می‌کنیم که ارتفاع آنها برابر با فراوانی رده‌ی مربوط باشد. توجه می‌کنیم که مقیاس روی دو محور را می‌توان متفاوت در نظرگرفت. بافت‌نگار مربوط به این مثال به صورت شکل ۱-۱ است.



شکل ۱-۱. نمودار بافت‌نگار مربوط به‌میزان اکسیدسولفور منتشره در هوا

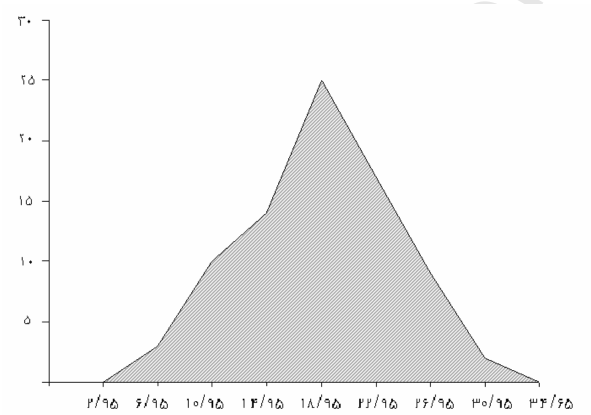
شکل ۱-۱ را با نرم‌افزار با دستورات زیر ترسیم می‌شود.

```
MTB > NAME C5='MIDPOINT'
MTB > Set C5
DATA>   1( 6.95 : 30.95 / 4 )1
DATA>   End.
MTB > Histogram 'DATA';
SUBC>   MidPoint 'MIDPOINT';
SUBC>   Bar.
```

نرم‌افزار به طور خودکار می‌تواند بدون هیچ‌گونه محدودیتی، هیستوگرام را رسم کند اما آنچه که در اینجا ارائه شد، دستوراتی است که خروجی آن با شکل ۱-۱ کاملاً منطبق است.

نمودار دیگری که کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، **چندبر فراوانی** نام دارد. در این نمودار، مقادیر مرکز رده‌ها را روی محور افقی و فراوانی‌های مربوط را روی محور

عمودی درج می‌کنیم و نقطه‌های حاصل را به کمک خط‌های راست به‌هم وصل می‌کنیم. برای آنکه نمودار حاصل را به محور افقی «ببندیم»، دو رده‌ی فرضی، یکی به مرکز 2/95 و دیگری **به** مرکز 34/95، و هر دو با فراوانی صفر، در نظر می‌گیریم، و از اوّلین نقطه‌ی به دست آمده به نقطه‌ی (6/95 ,3) و از نقطه‌ی (30/95 ,2) به‌آخرین نقطه، یعنی (34/95 ,0) وصل می‌کنیم تا شکل ۱–۲ حاصل شود.



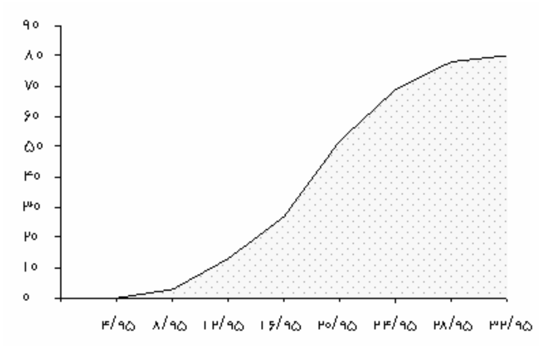
شکل ۱–۲. چندبر فراوانی توزیع داده‌های مربوط به میزان اکسید سولفور

دستورات لازم جهت ترسیم شکل ۱–۲، به شرح زیر است.

```
MTB > NAME C6='CUTPOINT'
MTB > Set C6
DATA>   1( 4.95 : 32.95 / 4 )1
DATA>   End.
MTB > Histogram 'DATA';
SUBC>   MidPoint  'CUTPOINT';
SUBC>   Connect.
```

اگر به همان صورت که در مورد چندبر فراوانی عمل کردیم، نموداری برای فراوانی تجمعی به دست‌آوریم، نمودار حاصل **اوجایو** نامیده می‌شود. برای رسم اوجایو مربوط به فراوانی تجمعی میزان اکسید سولفور منتشره در هوا، نقاطی را در دستگاه

مختصات در نظر می‌گیریم که طول هر نقطه، کران بالای هر رده و عرض آن فراوانی تجمعی آن رده باشد. در این صورت شکل ۱–۳ را به دست می‌آوریم.



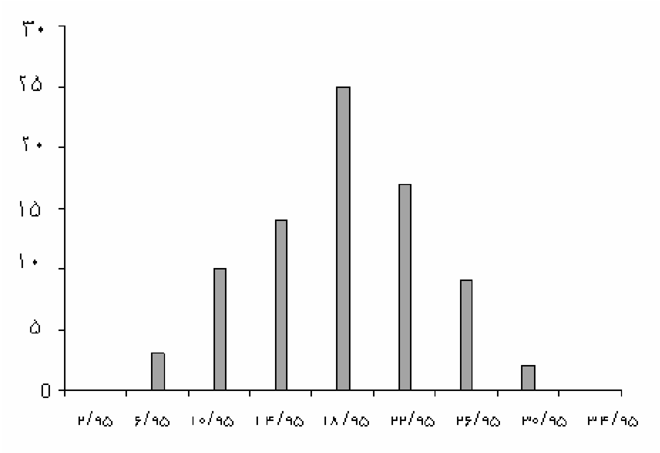
شکل ۱–۳. اوجایو توزیع داده‌های مربوط به میزان اکسید سولفور

شکل ۱–۳ را با دستورات زیر، بار دیگر رسم می‌کنیم.

```
MTB > Histogram 'DATA';
SUBC>   Cumulative;
SUBC>   Percent;
SUBC>   MidPoint  'CUTPOINT';
SUBC>   Connect.
```

می‌توان به جای بافت‌نگار، از **نمودار میله‌ای** نیز استفاده کرد. برای این منظور عیناً مانند زمانی عمل می‌کنیم که می‌خواهیم بافت‌نگار را رسم کنیم، با این تفاوت که به جای استفاده از کرانه‌های رده‌ها، از نماینده‌ی رده‌ها استفاده می‌کنیم. با اینکه هم برای داده‌های پیوسته و هم گسسته از بافت‌نگار و نمودار میله‌ای هر دو استفاده می‌شود، معمولاً از نمودار میله‌ای برای نمایش داده‌های گسسته و از بافت‌نگار برای داده‌های پیوسته استفاده می‌کنیم. نمودار میله‌ای داده‌های مربوط به‌میزان اکسیدسولفور منتشره در هوا در شکل ۱–۴ رسم شده‌است.

Payam Noor University

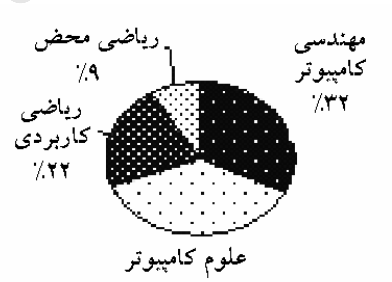


شکل ۱-۴. نمودار میله‌ای داده‌های مربوط به میزان اکسید سولفور

نمودار دیگری که اغلب در روزنامه‌ها و گزارش‌های مختلف مشاهده می‌شود، **نمودار کلوچه‌ای** یا **نمودار دایره‌ای** نام دارد و عمدتاً برای ارائه‌ی فراوانی نسبی یا فراوانی درصد به کار می‌رود. برای رسم نمودار دایره‌ای، کل زاویه‌ی مرکزی 360° مربوط به یک دایره را به نسبت فراوانی‌های نسبی یا درصد تقسیم می‌کنیم و سپس قطاع‌هایی در دایره رسم می‌کنیم که زاویه‌ی مرکزی هریک از آنها برابر با اعداد به دست آمده باشد. اگر فراوانی نسبی رده‌ای (نسبت فراوانی هر رده به تعداد کل مشاهده‌ها) f_i باشد، زاویه‌ی مرکزی قطاع مربوط به آن را برابر

$$\alpha_i = 360 \times f_i$$

می‌گیریم.



شکل ۱-۵. نمودار کلوچه‌ای مربوط به‌نمونه‌ای از دانشگاه پیام‌نور مرکز شیراز

شکل ۱-۵ نمودار کلوچه‌ای، مربوط به نمونه‌ای از دانشجویان دانشگاه پیام‌نور مرکز شیراز است.

با ورود دو ستون، یکی برای تعیین رده‌ها و دیگری تعیین فراوانی، نمودار ۱–۵ به دست می‌آید.

```
MTB > %Pie C7;
SUBC>   Counts C8.
```

چنانچه که داده‌های اصلی را بدون جدول‌بندی شده وارد نرم‌افزار نموده‌اید لزومی به استفاده از دستور در خط دوّم نمی‌باشد.

تمرین

۱–۲. داده‌های زیر اندازه‌ی قد ۱۰۰ پس ۲۰ ساله در شهر شیراز است.

۱۷۲	۱۵۸	۱۶۲	۱۶۳	۱۷۲	۱۶۲	۱۶۳	۱۸۴	۱۶۶	۱۵۷
۱۸۴	۱۶۵	۱۵۴	۱۷۰	۱۶۹	۱۶۷	۱۷۰	۱۷۷	۱۶۴	۱۶۳
۱۷۰	۱۶۹	۱۵۹	۱۷۷	۱۶۲	۱۸۰	۱۶۵	۱۵۳	۱۷۴	۱۵۳
۱۵۰	۱۷۲	۱۸۲	۱۸۴	۱۷۲	۱۶۹	۱۷۲	۱۷۰	۱۶۹	۱۵۸
۱۶۴	۱۶۶	۱۷۴	۱۷۵	۱۷۶	۱۵۲	۱۸۴	۱۶۲	۱۷۹	۱۵۱
۱۷۱	۱۶۴	۱۶۲	۱۷۱	۱۷۵	۱۵۹	۱۷۰	۱۵۴	۱۷۷	۱۶۲
۱۷۸	۱۶۹	۱۵۱	۱۶۴	۱۷۴	۱۶۱	۱۵۰	۱۷۳	۱۷۹	۱۵۹
۱۷۲	۱۵۹	۱۶۵	۱۵۶	۱۶۹	۱۶۴	۱۶۴	۱۷۷	۱۷۳	۱۶۱
۱۷۷	۱۵۳	۱۷۲	۱۵۰	۱۶۶	۱۷۱	۱۷۱	۱۶۹	۱۶۵	۱۶۰
۱۵۱	۱۷۰	۱۵۶	۱۶۵	۱۵۴	۱۵۶	۱۷۰	۱۷۲	۱۶۵	۱۸۳

الف) نمودار ساقه و برگ آن را رسم کنید.

ب) با استفاده از روش تعیین تعداد طبقات (یکی از آنها)، جدول فراوانی آن را به‌دست آورید.

ج. نمودار بافت‌نگار، چندبر آن را رسم کنید.

Payam Noor University

۱۷۲	۱۵۸	۱۶۲	۱۶۳	۱۷۲	۱۶۲	۱۶۳	۱۸۴	۱۶۶	۱۵۷
۱۸۴	۱۶۵	۱۵۴	۱۷۰	۱۶۹	۱۶۷	۱۷۰	۱۷۷	۱۶۴	۱۶۳
۱۷۰	۱۶۹	۱۵۹	۱۷۷	۱۶۲	۱۸۰	۱۶۵	۱۵۳	۱۷۴	۱۵۳
۱۵۰	۱۷۲	۱۸۲	۱۸۴	۱۷۲	۱۶۹	۱۷۲	۱۷۰	۱۶۹	۱۵۸
۱۶۴	۱۶۶	۱۷۴	۱۷۵	۱۷۶	۱۵۲	۱۸۴	۱۶۲	۱۷۹	۱۵۱
۱۷۱	۱۶۴	۱۶۲	۱۷۱	۱۷۵	۱۵۹	۱۷۰	۱۵۴	۱۷۷	۱۶۲
۱۷۸	۱۶۹	۱۵۱	۱۶۴	۱۷۴	۱۶۱	۱۵۰	۱۷۳	۱۷۹	۱۵۹
۱۷۲	۱۵۹	۱۶۵	۱۵۶	۱۶۹	۱۶۴	۱۶۴	۱۷۷	۱۷۳	۱۶۱
۱۷۷	۱۵۳	۱۷۲	۱۵۰	۱۶۶	۱۷۱	۱۷۱	۱۶۹	۱۶۵	۱۶۰
۱۵۱	۱۷۰	۱۵۶	۱۶۵	۱۵۴	۱۵۶	۱۷۰	۱۷۲	۱۶۵	۱۸۳

۱-۳. بر اساس آماری از استان سیستان و بلوچستان طی ۲۵ اسفند ماه ۱۳۸۵ تا ۱۵ فروردین ۱۳۸۶، ۳۷۷۷۲ گردشگر از موزه‌ی شهرسوخته، ۱۲۶ گردشگر از موزه‌ی زابل، ۲۴۰۰ گردشگر از موزه‌ی چابهار، ۱۱۲۴ گردشگر از موزه‌ی ایران‌شهر و ۱۵۶ گردشگر از موزه‌ی زاهدان دیدن کردند. نمودار مناسب برای توصیف داده‌های را در نظر گرفته آن را رسم کنید.

۱-۴. جدول ناقص زیر مربوط به تعداد روزهای لازم برای اتمام چهارچوب خانه‌های پیش ساخته تنظیم شده‌است.

تعدادروزها	تعداد خانه‌ها	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی
کمتر از۶ – ۵	...	...	...
کمتر از۷ – ۶	۱۹	...	۲۷
کمتر از۸ – ۷	...	۰/۳۵	...
کمتر از۹ – ۸	۱۵	۰/۱۵	...
کمتر از۱۰ – ۹	...	...	۹۱
کمتر از۱۱ – ۱۰	...	...	...
	۱۰۰	۱/۰۰	

الف) جدول را تکمیل کنید.

ب) نمودار بافت‌نگار را رسیم کنید.

۱-۵. داده‌های زیر مربوط به هزینه‌ی حمل و نقل زمینی سالیانه‌ی شرکتی برحسب میلیون ریال است.

Payam Noor University

۲۴	۲۱	۲۰	۳۱	۲۵
۴۱	۴۳	۳۲	۱۷	۲۵
۳۲	۳۰	۳۰	۲۶	۳۴
۳۶	۳۹	۲۷	۲۸	۳۱
۲۱	۱۹	۲۵	۲۶	۳۱

جدولی برمبنای پنج رده به‌طوری که شروع رده‌ی اوّل آن با پانزده باشد. همچنین نمودار مناسب برای توصیف داده‌ها را رسم کنید.

۱–۳ توصیف عددی داده‌ها

در بخش پیشین نحوه‌ی تلخیص داده‌ها، نحوه‌ی تشکیل جدول فراوانی، و شیوه‌ی توصیف داده‌ها را با رسم نمودارهای مختلف شرح دادیم. طبعاً این‌گونه نمودارها برای بیان چگونگی توزیع داده‌ها به‌قدر کافی گویا و اطلاع دهنده‌اند، امّا جای ویژگی‌هایی از داده‌ها را که به‌کمک اعداد قابل توصیف است، نمی‌گیرند. منظور از توصیف عددی داده‌ها آن است که کمیت‌هایی عددی را از روی داده‌ها به دست آوریم که به بهترین نحو معرف داده‌ها باشند. این کمیت‌ها، که **شاخص** یا **اندازه** نیز نامیده می‌شوند بر دو نوع‌اند: **شاخص‌های گرایش مرکزی** یا اندازه‌های مکانی، و **شاخص‌های پراکندگی**. در زیر به شرح هریک از انواع این اندازه‌ها می‌پردازیم.

۱–۳–۱ شاخص‌های گرایش مرکزی

اغلب لازم است که مجموعه‌ای از داده‌ها را به کمک عدد واحدی بنمایانیم که به‌گونه‌ای معرف تمام مجموعه‌ی داده‌ها باشد. اینکه عدد مزبور را چگونه انتخاب‌کنیم، بستگی به‌ویژگی خاصی دارد که می‌خواهیم به توصیف آن بپردازیم. در مطالعه‌ای معین، ممکن است علاقه‌ی ما به مقادیر فرین (کمترین و بیشترین مقدار) در مجموعه داده‌ها باشد، در مطالعه‌ای دیگر ممکن است توجه ما به عددی باشد که تنها ۱۰درصد داده‌ها از آن بیشترند، و نظایر آنها. چندین اندازه را در بخش‌های آتی مورد بحث قرارمی‌دهیم

که به‌گونه‌ای مرکز یا وسط مجموعه‌ای از داده‌ها را نشان می‌دهند و به‌همین دلیل آنها را شاخص‌های گرایش مرکزی می‌نامیم.

۱-۳-۱-۱ میانگین

در بین انواع شاخص‌های گرایش مرکزی، مشهورتر از همه **میانگین حسابی** یا به اختصار **میانگین** است. میانگین مجموعه‌ای از مقادیر عبارت از مجموع آنها تقسیم بر تعدادشان است. این همان چیزی است که کم و بیش از بدو ورود به دبستان با آن با نام معدل آشنایی داریم: برای آنکه معدل نمرات دانش‌آموزی را پیدا کنیم، مجموع نمرات وی را بر تعداد نمره‌هایش تقسیم می‌کنیم.

می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی، فرمولی کلی برای میانگین ارائه داد: فرض کنید که n عدد داشته باشیم که آنها را حروف x_1، x_2، ...، x_n نشان می‌دهیم. اگر میانگین این اعداد را با $\bar{x}$ نشان‌دهیم آنگاه

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

می‌توان با استفاده از نماد Σ، این فرمول را حتی به‌صورتی ساده‌تر نوشت:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (۱-۳)$$

مثال ۱-۴. حجم آب حاصل از ریزش در دریای خزر در پنج سال به قرار زیر بوده است:

۶۶/۹۱ ۶۵/۲۳ ۹۱/۸۷ ۸۱/۸۸ ۷۹/۷۶

میانگین حجم آب حاصل از ریزش در این پنج سال چقدر است؟

حل. بنابر فرمول میانگین داریم،

$$\bar{x} = \frac{۶۶/۹۱ + ۶۵/۲۳ + ۹۱/۸۷ + ۸۱/۸۸ + ۷۹/۷۶}{۵} = ۷۷/۱۳.$$

محاسبه‌ی میانگین با نرم‌افزار را با دستور زیر می‌توانید انجام دهید.

Payam Noor University

```
MTB > SET C7
DATA> 66.91 65.23 91.87 81.88 79.76
DATA> END
MTB > MEAN C7 K1
Column Mean
  Mean of C7    =     77.130
```

توجه دارید که مقدار میانگین در ثابتی به نام K1 ذخیره شده است.

باید توجه کنیم که فرمول میانگین که در رابطه‌ی (۱–۳) ارائه شد، برای داده‌هایی است که هنوز در جدول فراوانی گروه‌بندی نشده‌اند. اگر داده‌ها را در جدول فراوانی تلخیص کرده باشیم و داده‌های اصلی را در اختیار نداشته باشیم، دراین صورت نحوه‌ی محاسبه‌ی میانگین متفاوت است. فرض‌کنید که نماینده یا مرکز رده‌ها را با حروف m_1، m_2، ...، m_k و فراوانی‌های متناظر را به ترتیب f_1، f_2، ...، f_k نشان دهیم. در این صورت فرمول زیر برای میانگین داده‌های گروه‌بندی شده به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + \cdots + f_k m_k}{n},$$

یا به طور خلاصه،

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i m_i}{n}. \qquad (۱–٤)$$

بدیهی به‌علت فشرده شدن اطلاعات در جداول آماری و استفاده از نماینده‌های رده‌ها، مقدار میانگین با داده‌های گروه‌بندی نشده متفاوت خواهد شد.

مثال ۱–۵. میانگین داده‌های مربوط به میزان اکسید سولفور منتشره در هوا در ۸۰ روز را که در مثال ۱–۲ ارائه شده است، پیدا کنید.

حل. گرچه برای محاسبه‌ی میانگین داده‌های رده‌بندی شده تنها به نماینده‌های رده‌ها و فراوانی هر رده نیاز داریم، برای استفاده‌های آتی، جدول را به‌طور کامل مجدداً در زیر می‌آوریم.

Payam Noor University

جدول ۱-۷. جدول فراوانی با یک ستون اضافی برای محاسبه‌ی میانگین

کرانه‌های رده‌ها	m_i	f_i	$f_i m_i$
۴/۹۵ − ۸/۹۵	۶/۹۵	۳	۲۰/۸۵
۸/۹۵ − ۱۲/۹۵	۱۰/۹۵	۱۰	۱۰۹/۵۰
۱۲/۹۵ − ۱۶/۹۵	۱۴/۹۵	۱۴	۲۰۹/۳۰
۱۶/۹۵ − ۲۰/۹۵	۱۸/۹۵	۲۵	۴۷۳/۷۵
۲۰/۹۵ − ۲۴/۹۵	۲۲/۹۵	۱۷	۳۹۰/۱۵
۲۴/۹۵ − ۲۸/۹۵	۲۶/۹۵	۹	۲۴۲/۵۵
۲۸/۹۵ − ۳۲/۹۵	۳۰/۹۵	۲	۶۱/۹۰
مجموع		۸۰	۱۵۰۸

به طوری که ملاحظه می‌شود در این جدول علاوه بر اطلاعات موجود در جدول فراوانی پیشین، ستونی را اضافه کرده‌ایم که در آن نماینده‌ی هر رده در فراوانی نظیر آن ضرب و حاصل در این ستون درج شده است. مجموع اعداد واقع در این ستون همان $\sum_{i=1}^{7} f_i m_i$ است. چون در مورد این جدول فراوانی $\sum_{i=1}^{7} f_i m_i = 1508$، پس

$$\bar{x} = \frac{1508}{80} = 18/85.$$

با توجه به ستون‌های وارد شده به نرم‌افزار در بخش‌های قبلی، مقدار میانگین برای داده‌های مثال ۱-۱ که در ساختار جدولی آماری خلاصه شده است، به شرح زیر است.

```
MTB > PRINT C5 C2
Data Display
 Row  MIDPOINT   FREQ
   1     6.95      3
   2    10.95     10
   3    14.95     14
   4    18.95     25
   5    22.95     17
   6    26.95      9
   7    30.95      2
MTB > LET K2=SUM(C5*C2)/SUM(C2)
MTB > PRINT K2
Data Display
K2      18.8500
```

Payame Noor University

مجدداً تأکید می‌کنیم که این میانگین با میانگین واقعی داده‌ها کمی تفاوت دارد و دلیل آن این است که مثلاً در رده‌ی اوّل به‌جای هر سه قلم از داده‌ها که مقادیری بین ۴/۹۵ تا ۸/۹۵ دارند، عدد ۶/۹۵، یعنی نماینده‌ی این رده، را قراردادیم. برای بررسی بیشتر این نکته میانگین داده‌های خام را به دست می‌آوریم

```
MTB > MEAN C1 K3
Column Mean
  Mean of DATA   =     18.930
```

خروجی نشان می‌دهد که میانگین داده‌های خام، برابر با ۱۸/۹۳ است.

میانگین، متداول‌ترین اندازه‌ی گرایش مرکزی است. می‌توان دلایل زیر را برای مورد توجه بودن آن برشمرد:

۱. می‌توان آن را برای هر مجموعه‌ای از داده‌های عددی محاسبه کرد.

۲. مجموعه‌ای از داده‌های عددی یک و فقط یک میانگین دارد، و به‌عبارت دیگر منحصر به فرد است.

۳. می‌توان اعمال عددی بیشتری روی آن انجام داد (مثلاً اگر میانگین چند مجموعه از داده‌ها را داشته باشیم، به‌سادگی می‌توانیم میانگین مجموعه‌ای از داده‌ها را که از تلفیق کردن کلیه‌ی داده‌ها یک‌جا به دست آمده است حساب کنیم).

٤. میانگین نسبتاً قابل‌اطمینان است به‌این‌معنی که اگر چند نمونه مختلف را از جامعه‌ای استخراج کنیم، میانگین‌ها تفاوت خیلی زیادی با هم ندارند.

۵. در محاسبه‌ی میانگین همه داده‌ها به حساب می‌آیند.

٦. با اعمال تبدیل زیر بر روی داده‌ها

$$y_i = ax_i + b; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

Payam Noor University

که در آن a و b اعداد حقیقی ثابتی هستند. خصوصاً با انتخاب $b=-\bar{x}$ و $a=۱$ صفرشدن میانگین y_iها، $\bar{y}=۰$، نتیجه می‌شود.

۱-۳-۱-۲ میانه

در بالا یکی از امتیازات میانگین را در به حساب آوردن کلیه‌ی داده‌ها دانستیم. منظور این است که برای محاسبه‌ی میانگین باید همه‌ی داده‌ها را با هم جمع و بر تعداد کل آنها تقسیم کرد. این امر گرچه ممکن است از جهتی امتیاز به حساب آید، در مواردی نیز ممکن است نقطه‌ی ضعف محسوب شود. به عنوان مثال فرض کنید که اعداد زیر حقوق ماهانه‌ی (برحسب هزار تومان) اعضای شرکتی را نشان دهد که پنج عضو دارد

۲۱۵ ۱۹۵ ۲۴۵ ۱۸۵ ۹۸۵

اگر میانگین حقوق را با $\bar{x}$ نشان دهیم، آنگاه

$$\bar{x}=\frac{۲۱۵+۱۹۵+۲۴۵+۱۸۵+۹۸۵}{۵}=۳۶۵.$$

به‌طوری که ملاحظه می‌کنیم، رقم ۹۸۵۰۰۰ تومان حقوق یک فرد در مقایسه با حقوق بقیه‌ی افراد موجب شده‌است که میانگین حقوق، ۳۶۵۰۰۰ تومان از کار درآید که نماینده‌ی واقعی حقوق‌های کارمندان این شرکت نیست. دلیل این کار، همان‌طور که گفتیم، به حساب آمدن همه‌ی اعضای مجموعه‌ی داده‌ها و در نتیجه تأثیر غیرعادی اقلامی از داده‌هاست که شاید با بقیه‌ی داده‌ها هماهنگ به نظر نرسند. در چنین مواردی می‌توان اندازه گرایش مرکزی دیگری، به‌نام **میانه** را محاسبه کرد که آن نیز «وسط» یا «مرکز» داده‌ها را نشان می‌دهد. برای تعیین میانه، داده‌ها را به ترتیب صعودی یا غیرنزولی مرتب می‌کنیم. اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده‌ی وسطی میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده‌ی وسطی را میانه به حساب می‌آوریم. به عبارت دیگر اگر تعداد داده‌ها را وقتی فرد است با $n=۲k+۱$ نشان‌دهیم، آنگاه پس از مرتب کردن داده‌ها به‌ترتیب صعودی یا نزولی، k تا از داده‌ها در سمت چپ داده‌ی $(k+۱)$ام و k تا از داده‌ها در سمت راست آن قرارمی‌گیرند و لذا داده‌ی $(k+۱)$امی

میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد و $n=۲k$، در این صورت پس از مرتب‌کردن داده‌ها به صورت صعودی یا نزولی $k-۱$تا از داده‌ها در سمت چپ داده‌ی kام و $k-۱$تا از داده‌ها در سمت راست داده‌ی $(k+۱)$ام قراردارند و لذا میانه برابر با میانگین حسابی داده‌ی kام و $(k+۱)$ام است. به عنوان مثال اگر حقوق پنج عضو شرکت را که در بالا ذکر شد، به ترتیب صعودی مرتب کنیم، ارقام زیر را خواهیم داشت:

۱۸۵ ۱۹۵ ۲۱۵ ۲۴۵ ۹۸۵

چون تعداد داده‌ها فرد است، لذا میانه‌ی داده‌ها برابر ۲۱۵ است. معمولاً میانه‌ی داده‌ها را با $\tilde{x}$ (بخوانید ایکس مَدّ) نشان می‌دهیم.

مثال ۱-٦. تعداد دانشجویان ده مرکز از دانشگاه پیام‌نور در استانی معین، را به نزدیکترین صد گرد و حاصل را به صد تقسیم کرده‌ایم. اعداد زیر حاصل شده‌اند:

۷ ۱۲۰ ۴/۵ ۶۱ ۷/۸ ۳/۲ ۴۶ ۸۱ ۳ ۲/۵

میانه‌ی این مجموعه‌ی داده‌ها را به دست آورید.

حل. تعداد این داده‌ها $n=۱۰$ و بنابراین زوج است. اگر این اعداد را به ترتیب صعودی مرتب کنیم، مجموعه‌ی اعداد زیر را خواهیم داشت:

۲/۵ ۳ ۳/۲ ۴/۵ ۷ ۷/۸ ۴۶ ۶۱ ۸۱ ۱۲۰

در اینجا دو عدد ۷ و ۷/۸ در وسط داده‌ها قرارگرفته‌اند ($k-۱=۴$ عدد کمتر از ۷ و ۴ عدد بزرگتر از ۷/۸ است). در نتیجه میانه‌ی داده‌ها به صورت زیر به دست می‌آید

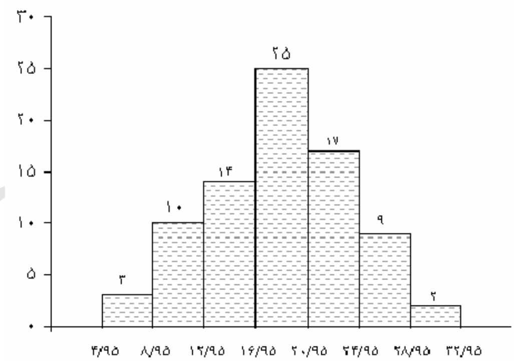
$$\tilde{x}=\frac{۷+۷/۸}{۴}=۷/۴.$$

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، مرتب کردن داده‌ها به ترتیب صعودی یا نزولی کار چندان آسانی نیست، البته می‌توانیم نمایش ساقه و برگ داده‌ها را تهیه و مرکز داده‌ها را به‌دست آوریم. امّا توجه داریم که معمولاً برای مقاصد دیگر هم، داده‌ها را معمولاً در جدول توزیع فراوانی گروه‌بندی می‌کنیم، بنابر این لازم است روش تعیین میانه‌ی داده‌های جدول‌بندی شده را نیز بدانیم.

وقتی مجموعه‌ای از داده‌ها را در جدول فراوانی خلاصه کرده باشیم، پیداکردن مقدار دقیق میانه امکان پذیر نیست، زیرا مقادیر واقعی داده‌هایی را که در رده‌ها قرار گرفته‌اند، دراختیار نداریم، امّا می‌توان رده‌ای را که میانه در آن قرارگرفته است، پیدا کرد. بنابراین در این حالت میانه را به صورت دیگری تعریف می‌کنیم: میانه‌ی مجموعه‌ای از داده‌های رده‌بندی شده، عددی است که نصف مساحت مستطیل‌های بافت‌نگار در سمت چپ آن و نصف دیگر در سمت راست آن قرار دارد. این تعریف، معادل با این فرض است که مقادیر داده‌هایی که در رده‌ی حاوی میانه قرار دارند، به طور یکنواخت، یعنی با فاصله‌های برابر از هم، توزیع شده‌اند.

برای پیداکردن خط تقسیم بین دو نیمه‌ی بافت‌نگار (که هر نیمه نماینده‌ی نصف داده‌های رده‌بندی، یعنی $\frac{n}{2}$، است)، باید با شروع از سمت چپ (یا راست) به طرف مرکز بافت‌نگار پیش رویم و به نقطه‌ای برسیم که $\frac{n}{2}$ داده‌ها در چپ (یا راست) آن قراردارند.

مثال ۱–۷. داده‌های مربوط به میزان اکسیدسولفور مثال ۱–۲ را که بافت‌نگار آن در شکل ۱–۱ رسم شده است، در نظر می‌گیریم. این بافت‌نگار به شکل زیر است:



برای این داده‌ها $n=۸۰$ و بنابراین $\frac{n}{۲}=۴۰$. پس باید مثلاً از سمت چپ (نقطه‌ی ۴/۹۵) شروع‌کنیم و فراوانی‌های رده‌ها را با هم جمع کنیم تا به رده‌ای برسیم که میانه در آن قرار دارد. در این مثال،

$$۳+۱۰+۱۴=۲۷<۴۰<۳+۱۰+۱۴+۲۵=۵۲$$

پس میانه در رده‌ای با کرانه‌های ۱۶/۹۵ و ۲۰/۹۵ قراردارد. تعداد ۲۷=۱۴+۱۰+۳ تا از داده‌ها در سمت چپ نقطه‌ی ۱۶/۹۵ قراردارند، طول این رده (مانند همه‌ی رده‌ها در این مثال) ۴ است و ۲۵ مورد از داده‌ها در رده‌ی با کرانه‌های ۱۶/۹۵ و ۲۰/۹۵ قراردارند. چون طول رده ۴ است، پس به هر داده $\frac{۴}{۲۵}$ از این طول اختصاص می‌یابد. امّا $۴۰-۲۷=۱۳$، پس باید $۱۳\times\frac{۴}{۲۵}$ را به عدد ۱۶/۹۵ اضافه کنیم تا نقطه‌ای به دست آید که ۴۰ تا از داده‌ها از آن کمترند و ۴۰ مورد دیگر از داده‌ها از آن بیشترند. بنابر این میانه‌ی داده‌های مربوط به این مثال، برابر است با

$$\widetilde{x}=۱۶/۹۵+۱۳\times\frac{۴}{۲۵}=۱۹/۰۳.$$

درحالت کلی، برای محاسبه‌ی مقدار میانه، فراوانی‌های رده‌ها را مثلاً با شروع از طرف مبدأ مختصات با هم جمع می‌کنیم. فرض‌کنید که

$$f_۱+f_۲+\cdots+f_{k-۱}<\tfrac{n}{۲}\leq f_۱+f_۲+\cdots+f_k$$

در این صورت میانه در رده‌ی kام قرار دارد. اگر کران پایین این رده را با L_k، فراوانی آن را با f_k و طول رده را c نشان دهیم و

$$j=\tfrac{n}{۲}-(f_۱+f_۲+\cdots+f_{k-۱})$$

آنگاه

$$\widetilde{x}=L_k+\frac{j}{f_k}\times c.$$

مثال ۱–۸. جدول فراوانی زیر، توزیع سنی کارگرانی را که در یک کارخانه‌ی صنعتی به کار اشتغال دارند، نشان می‌دهد. میانه‌ی این توزیع را پیدا کنید.

سن (بر حسب سال)	فراوانی	فراوانی تجمعی
۲۰ − ۲۴	۱۲۹	۱۲۹
۲۵ − ۲۹	۲۲۱	۳۵۰
۳۰ − ۳۴	۳۱۰	۶۶۰
۳۵ − ۳۹	۱۶۳	۸۲۳
۴۰ − ۴۴	۱۰۵	۹۲۸
۴۵ − ۴۹	۶۲	۹۹۰
۵۰ − ۵۴	۱۰	۱۰۰۰
جمع	۱۰۰۰	

حل. به طوری که ملاحظه می‌کنیم، در این جدول $n=۱۰۰۰$، پس $\frac{n}{۲}=۵۰۰$. با توجه به اینکه

$$۱۲۹+۲۲۱=۳۵۰<۵۰۰\leq ۳۵۰+۳۱۰$$

پس میانه در رده‌ی سوم قراردارد. حد پایین این رده ۳۰ و کران پایین آن ۲۹/۵ است (توجه کنید که درفرمول محاسبه‌ی میانه، کران پایین رده را به کار برده‌ایم و نه حد پایین آن را). بنابراین

$$j=۵۰۰-۳۵۰=۱۵۰,\quad c=۵,\quad f_{۳}=۳۱۰,$$
$$\tilde{x}=۲۹/۵+\frac{۱۵۰}{۳۱۰}\times ۵=۳۱/۹۲.$$

۱–۳–۱–۳ مُد

یکی دیگر از شاخص‌های گرایش‌مرکزی، که «مرکز» مجموعه‌ای از داده‌ها را توصیف می‌کند، مُد است. مُد مجموعه‌ای از داده‌ها، مقداری از داده‌هاست که بیشترین فراوانی را داشته باشد. می‌توان مزیت مد را در این دانست که

Payam Noor University

۱. نیازی به محاسبه ندارد.

۲. می‌توان را برای داده‌های کیفی نیز تعیین کرد.

مثال ۱-۹. از ۱۰ دانشجو سؤال شده است که به کدام ورزش علاقه دارند و پاسخ‌های زیر دریافت شده است:

فوتبال، فوتبال، والیبال، فوتبال، بسکتبال، شطرنج، فوتبال، والیبال، والیبال، فوتبال.

ملاحظه می‌کنیم که فراوانی فوتبال پنج است و لذا مُد این مجموعه داده‌ها فوتبال است.

مثال ۱-۱۰. نمره‌ی نهایی ۲۰ دانشجو در درس ریاضی عمومی به شرح زیراست. مد این داده‌ها را پیدا کنید.

۱۴/۵	۱۲/۰	۸/۵	۱۷/۰	۷/۵	۱۴/۰	۱۲/۰	۱۲/۰	۱۵/۰	۱۱/۰
۱۲/۰	۱۶/۰	۱۲/۰	۷/۰	۵/۵	۱۴/۰	۹/۰	۸/۰	۱۲/۰	۷/۵

با اندک وارسی ملاحظه می‌شود که تعداد دفعات تکرار یا فراوانی ۱۲، عدد ۶ است، لذا مُد این مجموعه‌ی داده‌ها ۱۲ است.

اگر داده‌ها در جدول فراوانی درج شده باشند، مجدداً باید به تعیین مُد تقریبی اکتفا کنیم. معمولاً فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی مُد داده‌های رده‌بندی شده ارائه می‌شود. برای سهولت مُد دسته‌ای از داده‌های رده‌بندی شده را نماینده یا مرکز رده‌ای تعریف می‌کنیم که بیشترین فراوانی را داشته باشد. در نمودارهای بافت‌نگار، مستطیلی که بزرگترین طول را داشته باشد، نماینده‌ی رده‌ی مربوط نمایانگر مُد خواهد بود.

مثال ۱-۱۱. در مثال ۱-۲، داده‌های مربوط به میزان اکسید سولفور، بیشترین فراوانی ۲۵، مربوط به رده‌ای است که کرانه‌های آن اعداد ۱۶/۹۵ و ۲۰/۹۵ است، پس مد این مجموعه‌ی داده‌ها عدد $x_{mo} = ۱۸/۹۵$، یعنی مرکز همین رده است.

۱-۳-۱-٤ دیگر شاخص‌های گرایش مرکزی

میانگین، میانه، و مد هریک به گونه‌ای «مرکز» توزیع را نمایان می‌کنند. با این حال برای برخی داده‌ها به انواع دیگر اندازه‌های گرایش مرکزی نیاز داریم. در زیر دو مورد از این اندازه‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم و مثال‌هایی از کاربرد آنها ارائه می‌کنیم.

میانگین همساز مجموعه‌ای از داده‌ها، معکوس میانگین حسابی معکوس‌های داده‌هاست. به عبارت دیگر اگر داده‌ها را با x_1، x_2، ...، x_n و میانگین همساز را با $\bar{x}_H$ نشان دهیم، آنگاه

$$\frac{1}{\bar{x}_H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i},$$

یا

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}.$$

واضح است شرط $x_i \neq 0$ به ازای $i = 1,2,\ldots,n$، الزامی است. برای داده‌های رده‌بندی شده، فرمول محاسبه‌ی میانگین همساز به صورت زیر در می‌آید:

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i} f_i}$$

که در آن m_i مرکز رده‌ی iام و f_i فراوانی این رده است.

وقتی مجموعه‌ی داده‌ها دارای واحدهای اندازه‌گیری ترکیبی است مثلاً کیلومتر در ساعت، از میانگین همساز استفاده می‌شود. وقتی مجموعه‌ی داده‌ها مربوط به آهنگ تغییر باشد، میانگین همساز مفیدتر از میانگین حسابی است.

مثال ۱-۱۲. سرعت خودرویی در ساعت اوّل ۴۸ کیلومتر در ساعت و ساعت دوّم ۸۰ کیلومتر در ساعت است، در این‌صورت میانگین همساز $\frac{2}{\frac{1}{48}+\frac{1}{80}} = 60$ محاسبه می‌شود. حال، همین محاسبات را با دستورات نرم‌افزار مرور می‌کنیم.

```
MTB > SET C8
DATA> 48 80
DATA> END
MTB > LET C9=1/C8
MTB > MEAN C9 K4
Column Mean
  Mean of C9     =    0.016667
MTB > LET K5=1/K4
MTB > PRINT K5
Data Display
K5       60.0000
```

مثال ۱–۱۳. سه کارگر به‌ترتیب دیواری به بلندی یک متر را در $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، و $\frac{۱}{۴}$ ساعت می‌سازند. اگر این سه کارگر با هم کارکنند چقدر طول می‌کشد تا یک متر دیوار بنا شود.

حل. پاسخ این سؤال عبارت‌است $\frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۲+۳+۴} = \bar{x}_H$. توجه دارید میانگین $\bar{x} = \frac{۱۳}{۱۲}$ نشان دهنده‌ی متوسط سرعت بالا بردن یک متر دیوار برای یک نفر است.

میانگین هندسی n عدد مثبت، ریشه‌ی nام حاصل‌ضرب آنهاست. به عبارت دیگر اگر عددهای مثبت را با $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n و میانگین هندسی را با $\bar{x}_G$ نشان دهیم، آنگاه

$$\bar{x}_G = (x_۱ \, x_۲ \cdots x_n)^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{x_۱ \, x_۲ \cdots x_n}.$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین رابطه‌ی اخیر داریم

$$\log(\bar{x}_G) = \frac{۱}{n}(\log(x_۱) + \log(x_۲) + \cdots + \log(x_n))$$

$$= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} \log(x_i).$$

پس میانگین هندسی، آنتی لگاریتم میانگین حسابی لگاریتم‌های داده‌هاست.

اگر داده‌ها در یک جدول فراوانی تلخیص شده باشند، برای محاسبه‌ی میانگین هندسی، تعریف زیر را به کار می‌بریم:

$$\log(\bar{x}_G) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{k} f_i \log(m_i)$$

که در آن m_i مرکز رده‌ی iام و f_i فراوانی این رده است.

میانگین‌هندسی در پیدا کردن متوسط آهنگ‌های تغییر، مثلاً در جمعیت و غیره یا محاسبه‌ی میانگین نسبت تغییرات مانند افزایش قیمت‌ها و غیره، مفید است.

مثال ۱–۱۴. فرض کنید که جمعیت یک روستا ۱۰۰۰ و آهنگ سالانه‌ی رشد جمعیت در طول چهار سال ۸% باشد. جمعیت این روستا در پایان این چهار سال چقدر خواهد بود؟

حل. جمعیت این روستا در شروع و پایان هریک از این چهار سال، به ترتیب عبارت خواهد بود از

$$1000,\quad 1000\times(1/08)^1,\quad 1000\times(1/08)^2,\quad 1000\times(1/08)^3,\quad 1000\times(1/08)^4$$

میانگین هندسی این پنج عدد، ریشه‌ی پنجم حاصل‌ضرب این اعداد است، پس

$$\begin{aligned}\bar{x}_G &= \left(1000\times 1000\times(1/08)^1\times 1000\times(1/08)^2\times 1000\times(1/08)^3\times 1000\times(1/08)^4\right)^{\frac{1}{5}}\\ &= \left((1000)^5\times(1/08)^{1+2+3+4}\right)^{\frac{1}{5}}\\ &= 1000\times(1/08)^2 = 1166.\end{aligned}$$

محاسبه‌ی میانگین هندسی با مینیتب نیازی به عملیات فوق ندارد و صرفاً بااستفاده از فرمول مربوطه قابل انجام است.

```
MTB > SET C10
DATA> 0:4
DATA> END
MTB > LET C11=1000*((1.08)**C10)
MTB > PARPROD C11 C12
MTB > LET K6=C12(5)**(1/5)
MTB > PRINT K6
Data Display
K6      1166.40
```

نکته. در مشاهدات مثبت، رابطه‌ای بین میانگین‌های حسابی، هندسی، و همساز به شکل زیر برقرار است

$$\bar{x} \ge \bar{x}_G \ge \bar{x}_H.$$

Payam Noor University

۱-۳-۲ شاخص‌های پراکندگی

یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های تقریباً هر مجموعه‌ای از داده‌ها، آن است که مقادیر داده‌ها همانند نیستند. در واقع، میزان ناهمانند بودن، یا تغییرات بین داده‌ها اهمّیتی اساسی در آمار دارد. شاخص‌های گرایش مرکزی، جنبه‌ای مهم از مجموعه‌ی داده‌ها را توصیف می‌کنند که همان «معدل» یا «وسط» داده‌هاست امّا اطلاعی درباره‌ی این مشخصه‌ی اساسی دیگر به ما نمی‌دهند. بنابراین، می‌خواهیم راهی پیدا کنیم که این پراکندگی در داده‌ها، یا تفرق آنها را نشان دهد.

مثال ۱-۱۵. نمرات دو دانشجو رشته علوم کامپیوتر، در جدول زیر درج شده است.

	ریاضی عمومی	فیزیک	اصول کامپیوتر	آمارواحتمال
دانشجو A	۱۳	۱۳	۱۲	۱٤
دانشجو B	۱۸	۱۳	۸	۱۳

ملاحظه می‌کنیم که میانگین دو دانشجو در این چهار درس ۱۳ است درحالی که دانشجوی A در همه دروس نمره‌ی قبولی دارد، ولی دانشجوی B در درس ریاضی عمومی قوی و درس اصول کامپیوتر ضعیف است. بنابراین باز هم نیاز به وجود شاخصی که اختلاف موجود بین این دو مجموعه داده‌های متفاوت ولی با میانگین یکسان را نشان دهد، آشکار می‌شود. توجه‌کنید که علاوه بر میانگین، مُد، و میانه‌ی نمرات هر دانشجو ۱۳ است.

مثال ۱-۱۵، نشان می‌دهد که مفهوم پراکندگی نقشی مهمّ در تحلیل آماری دارد. در زیر اندازه‌هایی برای پراکندگی ارائه می‌کنیم.

۱-۳-۲-۱ دامنه

ساده‌ترین معیار سنجش پراکندگی، دامنه است که با پیدا کردن تفاضل بزرگترین مقدار داده‌ها از کوچکترین مقدار داده‌ها به دست می‌آید.

Payam Noor University

در مثال ۱–۱۵، دامنه‌ی نمره‌های دانشجوی A، ۲=۱۲−۱۴ و دامنه‌ی نمره‌های دانشجوی B، ۱۰=۸−۱۸ است. به‌طوری که ملاحظه می‌کنیم «پراکندگی» نمرات دانشجوی B بیشتر از دانشجوی A، است. با آنکه دامنه به‌سادگی به دست می‌آید، عیب عمده‌ی آن این است که تنها داده‌های فرین، یعنی بیشترین و کمترین مقدار داده‌ها را به‌حساب می‌آورد و کاری به مقادیر بینابینی داده‌ها ندارد. همچنین در برخی مواقع وقتی اندازه‌ی نمونه بزرگ باشد مقدار دامنه افزایش می‌یابد. با این حال، وقتی که تعداد داده‌ها کم است، دامنه معیاری مناسب برای پراکندگی است.

برای داده‌های مثال ۱–۱ به کمک نرم‌افزار دامنه را به‌دست می‌آوریم.

```
MTB > LET K7=MAX(C1)-MIN(C1)
MTB > PRINT K7
Data Display
K7      25.6000
```

۱–۳–۲–۲ انحراف معیار

برای معرفی انحراف معیار که مفیدترین معیار سنجش پراکندگی است، می‌توانیم میزان دوری یا نزدیکی داده‌ها را از میانگین به‌عنوان ملاکی در نظرگیریم. برای توضیح مطلب، فرض‌کنید که داده‌های موردنظر را با مقادیر x_1، x_2، ...، x_n و میانگین آنها را با $\bar{x}$ نشان دهیم. اگر **انحراف** هر داده را از میانگین، یعنی مقادیر $x_1-\bar{x}$، $x_2-\bar{x}$، ...، $x_n-\bar{x}$ را حساب کنیم، به نظر می‌رسد که همین انحراف‌ها از میانگین می‌توانند به‌عنوان معیاری برای سنجش پراکندگی داده‌ها به کار روند. به‌عبارت دیگر هرقدر که تفاوت این انحراف‌ها از هم بیشتر باشد، داده‌ها پراکنده‌ترند و هرقدر که این انحراف‌ها تفاوت کمتری باهم داشته باشند، داده‌ها متمرکزترند. چون مقایسه این n انحراف با هم کار دشواری است، برای سهولت در وهله‌ی اوّل سعی می‌کنیم میانگین این n انحراف را به دست آوریم، یعنی

$$\frac{x_1-\bar{x}+x_2-\bar{x}+\cdots+x_n-\bar{x}}{n}$$

Payam Noor University

را محاسبه می‌کنیم. به‌سادگی ملاحظه می‌شود که بنابر تعریف میانگین، صورت این عبارت برابر صفر است و لذا میانگین انحراف‌ها از میانگین صفر است. پس می‌توان نتیجه گرفت: داده‌ها مجموعاً همان‌قدر که در جهت منفی از $\bar{x}$ انحراف دارند مجموعاً همان‌قدر هم در جهت مثبت از $\bar{x}$ انحراف دارند و لذا مجموع انحراف‌ها صفر است.

برای رفع این مشکل، باید توجه‌کرد که علاقه‌ی ما به میزان دوری داده‌ها از میانگین است و نه جهت دوری داده‌ها از آن. به عبارت دیگر می‌توانیم علامت جبری انحراف‌ها از میانگین را نادیده بگیریم و مثلاً

$$\frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\cdots+|x_n-\bar{x}|}{n}$$

را محاسبه کنیم. این میانگین قدرمطلق انحراف‌ها که به **انحراف میانگین** موسوم است، کاربردهایی در آمار دارد، امّا چون قدرمطلق در این تعریف مشکلاتی را ایجاد می‌کند از در نظر گرفتن آن صرف‌نظر کرده و سعی می‌کنیم مشکل علامت‌ها را در مقادیر انحراف از میانگین به گونه‌ای دیگر حل کنیم. برای این منظور، مقادیر انحراف از میانگین را به توان دوّم می‌رسانیم، یعنی مقادیر

$$(x_1-\bar{x})^2,\ (x_2-\bar{x})^2,\ldots,\ (x_n-\bar{x})^2$$

را محاسبه می‌کنیم. حال برای محاسبه‌ی میانگین مجذور انحراف‌ها از میانگین، باید مجموع آنها را محاسبه و بر n، یعنی تعداد داده‌ها، تقسیم کنیم. به‌دلایلی که در اینجا نیازی به ذکر نیست، مجموع را به‌جای تقسیم بر n بر $n-1$ تقسیم می‌کنیم. مقدار حاصل، یعنی

$$\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}$$

را **واریانس نمونه‌ای** یا به اختصار **واریانس** می‌نامیم و آن را با s^2 نشان می‌دهیم. پس با استفاده از نماد مجموع‌یابی Σ داریم

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}.$$

Payam Noor University

چون واریانس برحسب مجذور واحدی که داده‌ها برحسب آن بیان شده‌اند، محاسبه می‌شود، برای آنکه از واحد اصلی استفاده کنیم، جذر مثبت واریانس را محاسبه و آن را با s نشان می‌دهیم و **انحراف معیار نمونه‌ای** یا صرفاً **انحراف معیار** می‌نامیم. پس

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}.$$

مثال ۱–۱۶. در مثال ۱–۱۵، ملاحظه کردیم که میانگین نمرات هر دو دانشجو ۱۳ است. مقدار انحراف معیار برای دانشجوی A برابر است با

$$s_1=\sqrt{\frac{(14-13)^2+(12-13)^2+(13-13)^2+(13-13)^2}{4-1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=0/816.$$

همچنین انحراف معیار برای دانشجو B برابر است با:

$$s_2=\sqrt{\frac{(13-13)^2+(8-13)^2+(13-13)^2+(18-13)^2}{4-1}}=\sqrt{\frac{50}{3}}=4/082.$$

ملاحظه می‌شود که انحراف‌معیار نمرات دانشجوی B به مراتب بیشتر از انحراف معیار دانشجوی A است و لذا این معیار پراکنده‌تر بودن نمرات دانشجوی B را درمقایسه با نمرات دانشجوی A به خوبی نشان می‌دهد.

از لحاظ محاسباتی، پیداکردن انحراف هر داده از میانگین داده‌ها و پیدا کردن مجموع مجذورهای انحراف‌ها برای محاسبه‌ی انحراف معیار شاید کمی مشکل باشد. به‌جای آن می‌توان تعریف میانگین را به کار برد و با اندکی اعمال جبری، فرمول انحراف معیار را به صورت معادل زیر در آورد.

$$s=\sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n(n-1)}}.$$

مثال ۱–۱۷. برای نرم‌افزاری، طول مدت اجرای پنج محاسبه‌ی آماری متفاوت برحسب یک دهم ثانیه، به‌شرح زیراست

$$۰/۹۸ \quad ۰/۹۴ \quad ۱/۹۶ \quad ۱/۴۸ \quad ۲/۰۵$$

میانگین و انحراف معیار این مجموعه‌ی داده‌ها را محاسبه کنید.

حل. بنابر تعریف، داریم

$$\bar{x} = \frac{۰/۹۸ + ۰/۹۴ + ۱/۹۶ + ۱/۴۸ + ۲/۰۵}{۵} = ۱/۴۸۲$$

و چون

$$\sum_{i=۱}^{۵} x_i^۲ = (۰/۹۸)^۲ + (۰/۹۴)^۲ + (۱/۹۶)^۲ + (۱/۴۸)^۲ + (۲/۰۵)^۲ = ۱۲/۰۷۸۵$$

و

$$(\sum_{i=۱}^{۵} x_i)^۲ = (۰/۹۸ + ۰/۹۴ + ۱/۹۶ + ۱/۴۸ + ۲/۰۵)^۲ = ۵۴/۹۰۸۱$$

پس

$$s = \sqrt{\frac{۵ \times (۱۲/۰۷۸۵) - (۵۴/۹۰۸۱)}{۵ \times ۴}} = ۰/۵۲۴.$$

با نرم‌افزار مینیتب مقدار انحراف معیار را به دست می‌آوریم.

```
MTB > SET C13
DATA> 0.98 0.94 1.96 1.48 2.05
DATA> END
MTB > STD C13 K8
Column Standard Deviation
  Standard deviation of C13    =    0.52366
```

اگر داده‌ها در جدول فراوانی رده‌بندی شده باشند، در این صورت با قراردادن مرکز هر رده به‌جای داده‌های واقع در آن رده و در نظر گرفتن فراوانی هر رده، فرمول انحراف‌معیار برای داده‌های رده‌بندی شده به صورت زیر است

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{k} (m_i - \bar{x})^۲ f_i}{n - ۱}}.$$

یا اگر بخواهیم محاسبات را ساده‌تر کنیم، می‌توانیم فرمول معادل زیر را به کار بریم

$$s=\sqrt{\frac{n\left(\sum_{i=۱}^{k} m_i^{۲} f_i\right)-\left(\sum_{i=۱}^{k} m_i f_i\right)^{۲}}{n(n-۱)}}.$$

مثال ۱–۱۸. می‌خواهیم واریانس و انحراف‌معیار داده‌های مربوط به میزان اکسید سولفور منتشره در هوا را که در مثال ۱–۲ مطرح شده است، محاسبه کنیم. برای این منظور در جدول فراوانی داده‌های مذکور، ستون جدیدی اضافه می‌کنیم و در آن مقادیر $m_i^{۲} f_i$ را درج می‌کنیم، جدول به صورت زیر خواهد بود.

کرانه‌های رده‌ها	m_i	f_i	$f_i m_i$	$m_i^{۲} f_i$
۴/۹۵ − ۸/۹۵	۶/۹۵	۳	۲۰/۸۵	۱۴۴/۹۰۷۵
۸/۹۵ − ۱۲/۹۵	۱۰/۹۵	۱۰	۱۰۹/۵۰	۱۱۹۹/۰۲۵۰
۱۲/۹۵ − ۱۶/۹۵	۱۴/۹۵	۱۴	۲۰۹/۳۰	۳۱۲۹/۰۳۵۰
۱۶/۹۵ − ۲۰/۹۵	۱۸/۹۵	۲۵	۴۷۳/۷۵	۸۹۷۷/۵۶۲۵
۲۰/۹۵ − ۲۴/۹۵	۲۲/۹۵	۱۷	۳۹۰/۱۵	۸۹۵۳/۹۴۲۵
۲۴/۹۵ − ۲۸/۹۵	۲۶/۹۵	۹	۲۴۲/۵۵	۶۵۳۶/۷۲۲۵
۲۸/۹۵ − ۳۲/۹۵	۳۰/۹۵	۲	۶۱/۹۰	۱۹۱۵/۸۰۵۰
مجموع		۸۰	۱۵۰۸	۳۰۸۵۷/۰۰۰۰

جدول ۱–۸. جدول فراوانی با دو ستون اضافی برای محاسبه‌ی میانگین و واریانس

بنابراین

$$s=\sqrt{\frac{۸۰\times(۳۰۸۵۷)-(۱۵۰۸)^{۲}}{۸۰\times ۷۹}}=۵/۵۵.$$

به‌طوری که از مقادیر واقع در آخرین ستون جدول فراوانی بالا آشکار می‌شود، محاسبات مربوط به انحراف معیار، زمانی که نماینده‌های داده‌ها ارقام اعشاری و فراوانی‌ها نسبتاً بزرگ باشند، کار خسته‌کننده‌ای است. برای ساده کردن محاسبات، می‌توان از روش کدگذاری استفاده کرد، به‌شرط اینکه طول رده‌ها برابر باشند (که در

Payam Noor University

مثال بالا چنین است). در روش کدگذاری، نماینده‌ی یکی از رده‌ها (ترجیحاً رده‌ی وسطی یا یکی از رده‌های واقع در اواسط جدول) را ۰ اختیار می‌کنیم. سپس نماینده‌های رده‌های بالای این رده را اعداد صحیح منفی، یعنی ۱−، ۲−، ... و نماینده‌های رده‌های واقع در زیر این رده را اعداد صحیح مثبت، یعنی ۱، ۲، ... اختیار می‌کنیم. اگر این نماینده‌های جدید رده‌ها را با $u_1, u_2, \ldots, u_n$ نشان دهیم، فرمول میانگین به صورت

$$\bar{x} = m_0 + \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i f_i}{n} c$$

درمی‌آید. که در آن m_0 نماینده رده‌ای است که در کدگذاری نماینده‌ی جدید ۰ را برای آن در نظر گرفته‌ایم و c طول مشترک رده‌هاست. همچنین فرمول انحراف معیار به صورت زیر است.

$$s = c\sqrt{\frac{n\left(\sum_{i=1}^{k} u_i^2 f_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} u_i f_i\right)^2}{n(n-1)}}$$

نحوه‌ی محاسبه میانگین و انحراف معیار را به کمک روش کدگذاری، در مثال زیر تشریح می‌کنیم.

مثال ۱–۱۹. مطابق داده‌های مثال ۱–۱۸ به روش کدگذاری میانگین و انحراف معیار را به دست آورید.

حل. چون تعداد رده‌ها ۷ است، نماینده‌ی جدید رده‌ی چهارم را ۰ می‌گیریم و به ترتیبی که در بالا گفتیم نماینده‌های جدید رده‌های دیگر را به دست می‌آوریم. حال جدول زیر را تشکیل می‌دهیم

Payame Noor University

m_i	u_i	f_i	$f_i u_i$	$u_i^۲ f_i$
۶/۹۵	−۳	۳	−۹	۲۷
۱۰/۹۵	−۲	۱۰	−۲۰	۴۰
۱۴/۹۵	−۱	۱۴	−۱۴	۱۴
۱۸/۹۵	۰	۲۵	۰	۰
۲۲/۹۵	۱	۱۷	۱۷	۱۷
۲۶/۹۵	۲	۹	۱۸	۳۶
۳۰/۹۵	۳	۲	۶	۱۸
مجموع		۸۰	−۲	۱۵۲

جدول ۱-۹. جدول فراوانی داده‌های مثال ۱-۲ برای محاسبه‌ی میانگین و واریانس به‌روش کدگذاری

با قراردادن $c=۴$، $m_\circ = ۱۸/۹۵$، $n=۸۰$، $\sum_{i=۱}^{۷} u_i f_i = -۲$ در فرمول میانگین به روش کدگذاری داریم:

$$\bar{x} = m_\circ + \frac{\sum_{i=۱}^{k} u_i f_i}{n} . c = ۱۸/۹۵ + \frac{-۲}{۸۰} \times ۴ = ۱۸/۸۵.$$

همچنین با قراردادن همین مقادیر همراه با مقدار $\sum_{i=۱}^{۷} u_i^۲ f_i = ۱۵۲$ در فرمول انحراف معیار به روش کدگذاری خواهیم داشت:

$$s = ۴\sqrt{\frac{۸۰(۱۵۲) - (-۲)^۲}{۸۰ \times ۷۹}} = ۵/۵۵.$$

به‌طوری که ملاحظه می‌کنیم این مقادیر، مطابق انتظار، همان مقادیری هستند که از داده‌های اصلی به دست آمده‌اند.

برخی کاربردهای انحراف معیار را در زیر شرح می‌دهیم.

۱. ضریب تغییر

روش کدگذاری حالت خاصی از تبدیل متغیرها است. اگر مشاهدات در عددی ثابت ضرب و با عددی ثابت جمع کنیم مشاهدات جدیدی به‌دست می‌آیند.

$$y_i = ax_i + b, \quad i = 1,2,\dots,n$$

از روی خواص میانگین و واریانس، تأثیر این تبدیل بر روی آنها به شکل زیر می‌شود

$$\bar{y} = a\bar{x} + b, \qquad s_y^2 = a^2 s_x^2.$$

میانگین و انحراف معیار دارای واحد سنجش، از نوع واحد سنجش داده‌هاست. برای مثال ممکن است وزن اشیای مشخصی دارای انحراف معیار ۰/۱ اونس یا ۲۸۳۵ میلی گرم باشد که هر دو یکسان هستند، ولی هیچ‌کدام از آنها به‌راحتی مشخص نمی‌کنند که با یک پراکندگی بزرگ یا یک پراکندگی کوچک سروکار داریم. در این گونه موارد آنچه که مورد نیاز است ارائه‌ی یک مقیاس نسبی پراکندگی است. چنین مقیاسی عبارت است از **ضریب تغییر** که از تقسیم انحراف معیار بر میانگین حاصل می‌گردد. معمولاً در عدد ۱۰۰ ضرب شده و به صورت درصد بیان و با حرف V نشان داده می‌شود:

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

برای اطلاعات مثال ۱–۱۷، مقدار ضریب تغییر برابر است با:

$$V = \frac{5/55}{18/85} \times 100 = 29/4$$

۲. نمره‌ی استاندارد

چنانچه تبدیل خاصی روی x_1 x_2 ...، x_n اعمال شود:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}, \quad i = 1,2,\dots,n$$

داده‌های z_1 z_2 ...، z_n را استاندارد شده می‌گوییم و دارای ویژگی میانگین صفر و واریانس یک، $\bar{z} = 0$ و $s_z^2 = 1$، هستند. هرگاه بخواهیم دو مشاهده از دو نمونه‌ی مختلف را با هم مقایسه کنیم، استاندارد شده آنها کار را آسان می‌کند. مثلاً، میانگین و انحراف معیار نمرات پایان ترم درس زبان خارجه به ترتیب ۶۰ و ۱۶ و میانگین انحراف معیار نمرات پایان ترم درس ریاضی عمومی به ترتیب ۵۸ و ۱۰ است. اگر دانشجویی هر دو درس را امتحان داده باشد و نمره‌ی زبان خارجه ۷۲ و نمره‌ی ریاضی عمومی ۶۸ باشد، وضعیت تحصیلی‌اش در کدام درس بهتر است؟

نمره‌ی استاندارد زبان خارجه: $z_{۱} = \dfrac{۷۲-۶۰}{۱۶} = ۰/۷۵$

نمره‌ی استاندارد ریاضی عمومی: $z_{۲} = \dfrac{۶۸-۵۸}{۱۰} = ۱$

ملاحظه می‌شود که اگرچه نمره‌ی درس زبان خارجه از نمره‌ی درس ریاضی عمومی او بیشتر است، ولی وضعیت وی درکلاس ریاضی عمومی بهتر از کلاس زبان خارجه است. زیرا در درس ریاضی عمومی به اندازه‌ی یک انحراف معیار بالای میانگین، $۵۸+۱۰=۶۸$، قرار دارد در حالی که در درس زبان خارجه به اندازه‌ی $۰/۷۵$ انحراف معیار در بالای میانگین، $۶۰+۰/۷۵\times۱۶=۷۲$، قرار دارد.

۳. قضیه‌ی چبیشف

چنانچه پراکندگی دو نمونه از یک جمعیت را با یکدیگر مقایسه کنیم، می‌گوییم نمونه‌ای که دارای انحراف معیار بزرگتری است، پراکندگی‌اش بیشتر است. همچنین عنوان کردیم که هرچه داده‌ها به میانگین نزدیکتر باشند و یا پیرامون میانگین تجمع کرده باشند، انحراف معیار به صفر نزدیک است و چنانچه داده‌ها از میانگین دور باشند، آنگاه انحراف معیار بزرگ است. این موضوع به گونه‌ای علمی توسط ریاضی‌دان روسی به نام چبیشف با عنوان قضیه‌ی چبیشف بیان شده است.

قضیه‌ی ۱-۱. برای هر مجموعه از داده‌ها و هر عدد ثابت $k \geq ۱$، حداقل $۱۰۰\times(۱-\frac{۱}{k})$ درصد داده‌ها باید به فاصله‌ی k برابر انحراف معیار در هر دو طرف میانگین قرار گیرند.

قضیه‌ی چبیشف برای حالت‌های خاص k، چنین بیان می‌شود:

الف) ممکن تعداد خیلی کم داده‌ها به بازه‌ی $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ تعلق داشته باشند.

ب) حداقل ۷۵درصد، $\frac{۳}{۴}\times۱۰۰=$ داده‌ها به بازه‌ی $(\bar{x}-۲s, \bar{x}+۲s)$ تعلق خواهند داشت.

Payam Noor University

ج) حداقل ۸۸/۹درصد، $\frac{۸}{۹}\times ۱۰۰ =$ داده‌ها به بازه‌ی $(\bar{x}-۳s,\bar{x}+۳s)$ تعلق خواهند داشت.

مثلاً، در دستگاه اتوماتیک بسته‌بندی زعفران به‌گونه‌ای تنظیم شده است که درون هر بسته به طور متوسط ۱۶ گرم زعفران و با انحراف معیار ۰/۰۲گرم، زعفران قرار می‌دهد. حداقل درصد بسته‌های تولیدی‌اش که دارای وزنی بین ۱۵/۹۵ تا ۱۶/۰۵ گرم باشند ۸٤درصد است (توجه دارید که در این مثال $k=۲/۵$ در نظر گرفته شده است).

قضیه‌ی چبیشف برای هر نوع داده‌ای قابل کاربرد است، اما چنین بیان می‌شود که حداقل چند درصد داده‌ها به فاصله‌ی معینی تعلق دارند و مقدار دقیق را تعیین نمی‌کند. برای بیشتر داده‌ها، درصد واقعی داده‌هایی که به فاصله‌ی معینی تعلق می‌گیرند، بیش از آنچه که قضیه‌ی چبیشف بیان می‌کند، می‌باشد.

برای بیشتر داده‌ها راه کار دقیق‌تری از قضیه‌ی چبیشف با عنوان دستور تجربی بیان شده است. در حقیقت یک نتیجه‌ی نظری است که براساس توزیع نرمال (فصل ششم) بیان می‌شود.

دستور تجربی: برای داده‌هایی که منحنی فراوانی آنها زنگی شکل است، داریم:

الف) تقریباً ۶۸درصد داده‌ها به بازه‌ی $(\bar{x}-s,\bar{x}+s)$ تعلق دارند.

ب) تقریباً ۹۵درصد داده ها به بازه‌ی $(\bar{x}-۲s,\bar{x}+۲s)$ تعلق دارند.

ج) تقریباً ۹۹/۷درصد (تقریباً تمام داده‌ها) داده‌ها بازه‌ی $(\bar{x}-۳s,\bar{x}+۳s)$ تعلق دارند.

با اطلاعات مثال ۱–۱ و شکل ۱–۱ که تقارن تقریبی در نمودار به چشم می‌خورد، می‌توان وضعیت توزیع مشاهدات را در بازه‌های مطرح شده برآورد نمود.

الف) تقریباً ۶۸درصد داده‌ها به بازه‌ی

$$(۱۸/۸۵-۵/۵۵,۱۸/۸۵+۵/۵۵)=(۳/۳,۲٤/٤)$$

تعلق دارند.

ب) تقریباً ۹۵درصد داده‌ها به بازه‌ی

$$(۱۸/۸۵-۲\times ۵/۵۵, ۱۸/۸۵+۲\times ۵/۵۵)=(-۲/۲۵, ۲۹/۹۵)=(۰, ۲۹/۹۵)$$

تعلق دارند.

ج) تقریباً ۹۹/۷درصد (تقریباً کل) داده‌ها بازه‌ی

$$(۱۸/۸۵-۳\times ۵/۵۵, ۱۸/۸۵+۳\times ۵/۵۵)=(۰, ۳۵/۵)$$

تعلق دارند.

۱-۳-۲-۳ چندک‌ها و دیگر شاخص‌های پراکندگی

به‌خاطر می‌آوریم که میانه‌ی مجموعه‌ای از داده‌ها مقداری بود که نصف داده‌ها در یک طرف و نصف دیگر در طرف دیگر آن قرار داشتند. به‌همین قیاس می‌توان **چندک‌ها** را تعریف کرد که عبارت از مقادیری هستند که بخش معینی از داده‌ها در یک طرف آن و بخش باقی‌مانده در طرف دیگر آن قرار دارند. از جمله‌ی چندک‌های مهم می‌توان از **چارک‌ها**، **دهک‌ها**، و **صدک‌ها** نام برد. این مفاهیم را تنها برای داده‌های رده‌بندی شده تعریف می‌کنیم.

چارک‌اوّل نقطه‌ای بر روی محور طول‌هاست که در آن نقطه، مساحت زیر بافت‌نگار به نسبت‌های ۱ و ۳ تقسیم می‌شود، یعنی $\frac{۱}{۴}$ مساحت زیر بافت‌نگار در سمت چپ این نقطه و $\frac{۳}{۴}$ سطح باقی‌مانده در طرف دیگر این نقطه قراردارد. **چارک دوّم** همان میانه است و **چارک سوم** نقطه‌ای است که $\frac{۳}{۴}$ مساحت زیر بافت‌نگار در سمت چپ آن و $\frac{۱}{۴}$ در سمت راست آن قرار دارد. چارک اوّل را با $Q_۱$ و چارک دوّم (یا همان میانه) را با $Q_۲$ و چارک سوم را با $Q_۳$ نشان می‌دهیم.

برای محاسبه‌ی $Q_۱$، ابتدا $\frac{n}{۴}$ را محاسبه می‌کنیم و سپس فراوانی‌ها را با شروع از سمت چپ با هم جمع می‌کنیم. فرض‌کنید که

$$f_۱+f_۲+\cdots+f_{k-۱}<\frac{n}{۴}\le f_۱+f_۲+\cdots+f_k.$$

در این صورت چارک اوّل در رده‌ی kام است. اگر کران پایین این رده را با L'_k نشان دهیم و

$$m = \frac{n}{۴} - (f_۱ + \cdots + f_{k-۱})$$

آنگاه

$$Q_۱ = L'_k + \frac{m}{f_k} \times c$$

که در آن c طول مشترک رده‌ها و f_k فراوانی رده‌ی kام است که چارک اوّل در آن قرار دارد.

عیناً به همین منوال می‌توانیم چارک سوم، $Q_۳$، را نیز محاسبه کنیم. در این حالت $\frac{۳n}{۴}$ را محاسبه و با شروع از سمت چپ، فراوانی‌های رده‌ها را با هم جمع می‌کنیم. اگر k رده‌ای باشد به‌طوری که

$$f_۱ + f_۲ + \cdots + f_{k-۱} < \frac{۳n}{۴} \le f_۱ + f_۲ + \cdots + f_k$$

آنگاه $Q_۳$ در رده‌ی kام است. اگر کران پایین این رده را با k نشان دهیم و

$$l = \frac{۳n}{۴} - (f_۱ + \cdots + f_{k-۱})$$

آنگاه

$$Q_۳ = L''_k + \frac{l}{f_k} \times c$$

یکی دیگر از شاخص‌های پراکندگی، **برد میان چارکی** است که به صورت $Q_۳ - Q_۱$ تعریف می‌شود. برد میان چارکی طول بازه‌ای است که پنجاه درصد داده‌ها در آن قرار دارند. برخی پژوهشگران از **نیم برد میان چارکی** استفاده می‌کنند که به صورت $\frac{Q_۳ - Q_۱}{۲}$ تعریف می‌شود، و **انحراف چارکی** نیز نامیده می‌شود. یک اندازه‌ی پراکندگی نسبی، که ضریب تغییر چارکی نام دارد به‌صورت نسبت نیم برد میان چارکی بر میانگین $Q_۱$ و $Q_۳$ ضرب در ۱۰۰، یعنی به صورت $۱۰۰ \times \frac{Q_۳ - Q_۱}{Q_۳ + Q_۱}$، تعریف می‌شود.

Payam Noor University

به‌همین ترتیب می‌توان دهک‌های اوّل، دوّم، ...، نهم را تعریف کرد. این دهک‌ها به ترتیب با D_1، D_2، ...، D_9 نشان داده می‌شوند. مثلاً برای محاسبه‌ی **دهک اوّل**، D_1، کافی است $\frac{n}{10}$ را حساب کنیم و k را طوری پیدا کنیم که

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_{k-1} < \frac{n}{10} \le f_1 + f_2 + \cdots + f_k.$$

در این صورت دهک اوّل در رده‌ی kام است. اگر کران پایین این رده را با L_k نشان دهیم و

$$h = \frac{n}{10} - (f_1 + \cdots + f_{k-1})$$

آنگاه

$$D_1 = L_k + \frac{h}{f_k} \times c$$

که مجدداً c طول مشترک رده‌ها و f_k فراوانی رده‌ی kام است.

می‌توان سایر دهک‌ها را به‌همین ترتیب محاسبه و مثلاً $D_9 - D_1$ یا $D_8 - D_2$، و ... را به‌عنوان معیارهای دیگری برای سنجش پراکندگی به کار برد.

صدک‌ها عیناً به‌نحو مشابه تعریف می‌شوند که از ذکر جزئیات مربوط به آنها خودداری می‌کنیم.

مثال ۱–۲۰. مطابق مثال ۱–۲، مربوط به میزان اکسید سولفور، نمودار بافت‌نگار آن داده‌ها را در نظر بگیرید. مقادیر چارک اوّل، سوّم، ضریب تغییر چارکی، دهک اوّل و دهک نهم را به دست آورید.

حل. چون $n = 80$، پس $\frac{n}{4} = 20$. با توجه به اینکه

$$3 + 10 < 20 < 3 + 10 + 14$$

پس چارک اوّل در رده‌ی سوم قرار دارد که کران پایین آن $L_3 = 12/95$ و فراوانی آن $f_3 = 14$ است. چون $m = 20 - (3 + 10) = 7$، بنابر این

$$Q_1 = 12/95 + \frac{7}{14} \times 4 = 14/95.$$

همچنین، چون $\frac{۳n}{۴}=۶۰$، و

$$۳+۱۰+۱۴+۲۵<۶۰\leq ۳+۱۰+۱۴+۲۵+۱۷$$

پس

$$Q_۳=۲۰/۹۵+\frac{۸}{۱۷}\times ۴=۲۲/۸۳.$$

با توجه به تعریف، برد میان چارکی

$$Q_۳-Q_۱=۲۲/۸۳-۱۴/۹۵=۷/۸۸$$

است و لذا انحراف چارکی $\frac{Q_۳-Q_۱}{۲}=۳/۹۴$ و ضریب تغییر چارکی

$$\frac{Q_۳-Q_۱}{Q_۳+Q_۱}\times ۱۰۰=۲۰/۸۶$$

است. چون $\frac{n}{۱۰}=۸$ و $۳<۸<۳+۱۰$ پس دهک اوّل در رده‌ی دوّم با کران پایین $۸/۹۵$ و فراوانی ۱۰ قراردارد. چون $h=۸-۳=۵$، پس

$$D_۱=۸/۹۵+\frac{۵}{۱۰}\times ۴=۱۰/۹۵.$$

به همین قیاس، چون $\frac{۹n}{۱۰}=۷۲$ و

$$۳+۱۰+۱۴+۲۵+۱۷<۷۲\leq ۳+۱۰+۱۴+۲۵+۱۷+۹$$

لذا دهک نهم در رده‌ی ششم با کران پایین $۲۴/۹۵$ قرار دارد. در نتیجه

$$D_۹=۲۴/۹۵+\frac{۷۲-(۳+۱۰+۱۴+۲۵+۱۷)}{۹}\times ۴=۲۴/۹۵+\frac{۴}{۳}=۲۶/۲۸$$

همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، می‌توان مثلاً از $D_۹-D_۱$ نیز به عنوان معیاری برای سنجش پراکندگی استفاده کرد. دراین مثال $D_۹-D_۱=۱۵/۳۳$. توجه کنید که ۸۰% داده‌ها دربازه‌ی از $D_۱$ تا $D_۹$ قراردارد.

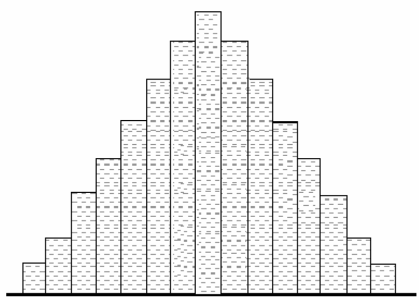
Payam Noor University

دستوری که در نرم‌افزار مینیتب را ارائه‌ی گزارشی از کمیت توصیفی، پیش‌بینی شده است. خواننده می‌تواند توضیحات بیشتر درباره‌ی خروجی زیر را در فصل هفتم بیابید.

```
MTB > Describe 'DATA'.
Descriptive Statistics
Variable      N    Mean   Median  TrMean   StDev  SEMean
DATA         80  18.930   19.050  18.963   5.670   0.634
Variable    Min     Max      Q1      Q3
DATA      6.200  31.800  14.825  23.375
```

۱-۳-۲-۴ معیارهای ویژه‌ی نمودارهای داده‌ها

تاکنون انواع معیارهایی را که به‌نحوی «مرکز» داده‌ها و «تغییرپذیری» یا «پراکندگی» داده‌ها را توصیف می‌کردند، شرح دادیم. در واقع نمی‌توان حدی‌برای تعداد راه‌های توصیف داده‌ها قائل شد، زیرا آمارادانان مرتباً روش‌های جدیدی برای توصیف مشخصه‌های عددی داده‌های مورد مطالعه‌ی خود در مسائل معین به وجود می‌آورند. در این بخش، مسأله‌ی توصیف شکل کلی توزیع داده‌ها را به اختصار مورد بحث قرار می‌دهیم.

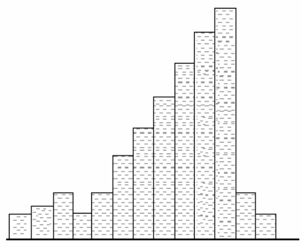


شکل ۱-۶. توزیع زنگ شکل متقارن

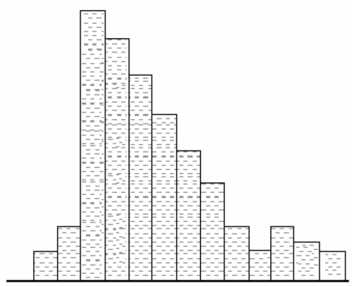
گرچه توزیع‌های فراوانی می‌توانند هر شکل و وضعی داشته باشند، اغلب توزیع‌هایی را که در عمل با آنها برخورد می‌کنیم، می‌توان با استفاده از یکی از چند نوع استاندارد توزیع‌های فراوانی به‌نحو نسبتاً رضایت‌بخشی توصیف نمود. در این انواع توزیع‌های

فراوانی، مهم‌تر از همه توزیع **زنگ شکل متقارن** است که در شکل ۱–۶ نشان داده شده است. در واقع دلایل نظری برای اینکه چرا بسیاری از توزیع‌ها از این الگو تبعیت می‌کنند، وجود دارد.

دو توزیع دیگر در شکل‌های ۱–۷ و ۱–۸ را هنوز هم می‌توان با اندک مسامحه زنگ شکل نامید، امّا این توزیع‌ها دیگر متقارن نیستند. توزیع‌های نظیر اینها که «دمچه»ای در یک طرف دارند، **چوله** نامیده می‌شوند، اگر دمچه در سمت چپ باشد، گوییم که **توزیع چولگی منفی** دارد (شکل ۱–۷) و اگر دمچه در راست باشد، گوییم **توزیع چولگی مثبت** دارد (شکل ۱–۸). توزیع‌های درآمدها یا دستمزدها اغلب به دلیل وجود تعدادی مقدار نسبتاً بزرگ، چولگی مثبت‌دارند. در این توزیع‌ها، مقادیر کوچک قادر به خنثی کردن اثر مقادیر بسیار بزرگ نیستند.



شکل ۱–۷. توزیع با چولگی منفی



شکل ۱–۸. توزیع با چولگی مثبت

راه‌های گوناگونی برای اندازه‌گیری میزان چولگی موجود است. یک روش نسبتاً آسان، بر این واقعیت مبتنی است که برای یک توزیع زنگ شکل کاملاً متقارن، از نوع توزیع توصیف شده در شکل ۱–۶، مقادیر میانگین و میانه برهم منطبق‌اند. چون وجود تعدادی مقدار نسبتاً بزرگ که مقادیر کوچک نظیر قادر به جبران آنها نیستند، موجب می‌شود که میانگین بزرگتر از میانه باشد (و وجود مقادیر نسبتاً کوچک که مقادیر نسبتاً بزرگ نظیر قادر به جبران آنها نیستند موجب می‌شود که میانگین کوچکتر از میانه باشد)، می‌توانیم از این رابطه‌ی بین میانگین و میانه استفاده و معیار ساده‌ای برای میزان چوله بودن توزیع، تعریف کنیم. این معیار، **ضریب چولگی پی‌یرسن** نامیده می‌شود و مقدار آن چنین است:

$$SK=\frac{3(\text{میانگین}-\text{میانه})}{\text{انحراف معیار}}=\frac{3(\bar{x}-\tilde{x})}{s}.$$

برای یک توزیع کاملاً متقارن، مقدار SK برابر 0 است و در حالت کلی این مقدار بین 3− و 3+ تغییر می‌کند.

مثال ۱–۲۱. مطابق مثال ۱–۲، مربوط به میزان اکسید سولفور، دیدیم که

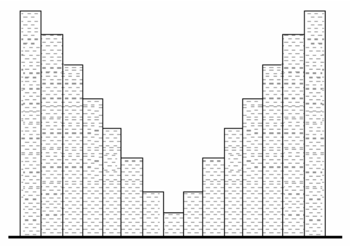
$$\bar{x}=18/85,\quad \tilde{x}=19/03,\quad s=5/55$$

بنابراین

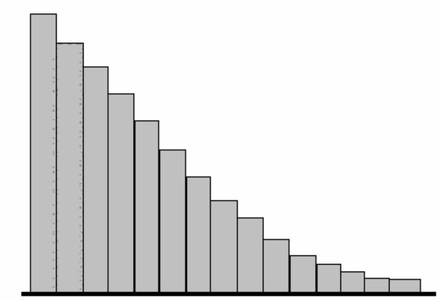
$$SK=\frac{3(18/85-19/03)}{5/55}=-0/01.$$

این مقدار بسیارکوچک است و لذا می‌توان توزیع را تقریباً متقارن دانست.

دو نوع دیگر از توزیع‌هایی که در عمل پیش می‌آیند، توزیع‌های *J معکوس شکل* و *U شکل*، که در شکل‌های ۱–۹ و ۱–۱۰ نشان داده شده‌اند. همان‌گونه که در نمودار این توزیع‌ها آشکار است، نام این توزیع‌ها تا حدی شکل توزیع ها را معین می‌کنند.



شکل ۱-۹. توزیع U شکل



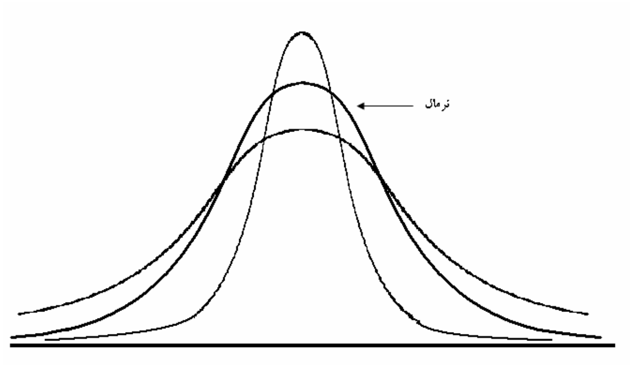
شکل ۱-۱۰. توزیع J معکوس شکل

معیار دیگری در نمودارها آماری مطرح است که به میزان **کشیدگی** یا **برجستگی** منحنی توجه دارد. معمولاً این معیار از مقایسه با منحنی نرمال به دست می‌آید. برجستگی به وسیله‌ی فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$K = \frac{M_4}{s^4} - 3$$

که درآن $M_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4$ گشتاورمرکزی مرتبه‌ی چهارم، و s انحراف معیار نمونه است. چون مقدار $\frac{M_4}{s^4}$ برای توزیع نرمال به عدد 3 نزدیک است معیار برجستگی را از تفاوت دو کمیت محاسبه می‌کنند. بسته به آنکه این کمیت مثبت و یا منفی باشد به ترتیب برجستگی بیشتر و یا کمتر از منحنی نرمال خواهند داشت.

Payam Noor University



شکل ۱-۱۱. وضعیت کشیدگی یا برجستگی منحنی‌ها نسبت به منحنی نرمال

براساس داده‌های مثال ۱-۱، و انجام دستورات زیر، در خروجی مقدار کشیدگی و چولگی به ترتیب 0/645، 0/1177− نمایش داده می‌شود.

```
MTB > %Describe 'DATA';
SUBC>  Confidence 95.0.
```

تمرین

۱-۶. برای مشاهده‌های زیر میانه، نما و چارک اوّل را محاسبه کنید.

4 0 1 3 2 5 1 0 3 1 2 4 3 1 6 0 7 3 8 2

۱-۷. سه نقطه‌ی A، B، و C به یک فاصله از یکدیگر قرار دارند. متحرکی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B، از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C و از نقطه‌ی C به‌نقطه‌ی A به ترتیب با سرعتی معادل 20 متر در ساعت، 40 متر در ساعت و 80 متر در ساعت حرکت می‌کند. سرعت متوسط این متحرک در مسیر ذکر شده را محاسبه کنید.

۱-۸. رابطه‌ی زیر را به ازای هر aای ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - a)^2.$$

۱-۹. آسانسوری به‌گونه‌ای طراحی شده‌است که بیشترین بار آن 2000 پوند باشد. اگر یک جابه‌جایی مسافران این آسانسور 8 مسافر زن که میانگین وزن آنها 123 پوند

است و ۵ مرد را که میانگین وزن آنها ۱۷۴ پوند است سوار کند، آیا آسانسور دارای بار بیش از حد مجاز است؟

۱–۱۰. سه نمایندگی فروش یخچال از شرکتی، در سه شهر بزرگ تعداد **۵۷۵**، ۴۱۰، و ۴۲۵ یخچال را به ترتیب با متوسط قیمت ۱۲۰۰۰۰ تومان، ۱۱۷۰۰۰ تومان و ۱۲۱۰۰۰ تومان فروخته‌اند. متوسط قیمت یخچال‌های فروخته‌شده چقدر است؟

۱–۱۱. اگر واریانس یک جامعه برابر با ۲ و میانگین آنها برابر با ۳ و مجموع توان‌های دوّم آنها برابر با ۵۵ باشد، اندازه‌ی جامعه چقدر است؟

۱–۱۲. اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر با $\bar{x}$ باشد، آنگاه میانگین داده‌های $(x_1+1), (x_2+1), \ldots, (x_n+1)$، چقدر است؟

۱–۱۳. اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_9$ برابر ۱۰ باشد، آنگاه میانگین داده‌های $(x_1+1), (x_2+2), \ldots, (x_9+9)$، را محاسبه کنید.

۱–۱۴. اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ برابر ۱۵ باشد، آنگاه میانگین داده‌های $(x_1+4), (x_2+8), \ldots, (x_{20}+80)$، را محاسبه کنید.

۱–۱۵. اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ برابر با ۱۵ باشد، آنگاه میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$، ۳۶، ۳۵، ۳۰، را به‌دست آورید.

۱–۱۶. اگر انحراف متوسط داده‌های x_1, x_2, x_3, x_4، ۲۵ برابر با صفر باشد، آنگاه میانگین داده‌های x_1, x_2, x_3, x_4، ۵۰، را به دست آورید.

۱–۱۷. اگر به هریک از داده‌ها عدد ۱۵ رابیفزاییم، در مقدار انحراف میانگین چه تغییری رخ می‌دهد؟

۱–۱۸. اگر انحراف‌معیار داده‌هایی $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$، ۱۵ برابر با صفر باشد، میانه‌ی داده‌های $(2x_1+1), (2x_2+1), \ldots, (2x_{10}+1)$، ۱۷، ۱۹، را محاسبه کنید.

۱–۱۹. اگر انحراف‌معیار اعداد ۳۶، ۲۴، ۲۰، ۱۲ و ۸ برابر با ۹/۸ باشد، انحراف معیار اعداد ۹، ۶، ۵، ۳ و ۲، چقدر است؟

۱–۲۰. برای ۱۲۰ مشاهده اطلاعات زیر به دست آمده است.

Payame Noor University

الف) میانگین، میانه، واریانس را به دست آورید.
ب) چارک‌های اوّل و سوم را محاسبه کنید.
ج) مقدار چولگی را به‌دست آورید.

فراوانی	رده
۵	۴۴/۵ − ۵۴/۵
۴۵	۵۴/۵ − ۶۴/۵
۴۳	۶۴/۵ − ۷۴/۵
۱۹	۷۴/۵ − ۸۴/۵
۷	۸۴/۵ − ۹۴/۵
۱	۹۴/۵ − ۱۰۴/۵
۱۲۰	جمع

۱-۲۱. طول عمر ۱۰۰ باتری خودرو به ترتیب دارای میانگین، میانه‌ی و انحراف استاندارد ۳/۵، ۳/۴۸، و ۱/۶۵ سال است.
الف) ضریب چولگی، و
ب) برجستگی،
را محاسبه کنید.

۱-٤ جدول‌های دومتغیره و معیارهای توصیفی

تاکنون درباره‌ی یک متغیر بحث کردیم، ولی در اکثر اوقات تحلیل اطلاعات درباره‌ی یک متغیرکافی نیست، زیرا ممکن است چند متغیر مورد مطالعه، به لحاظ داشتن ارتباط با یکدیگر، تغییر کنند. بنابراین مطالعه‌ی جداگانه‌ی آنها، این روابط یا بستگی‌ها را نشان نمی‌دهد و ناچاریم که چند متغیر را یک‌جا در نظر بگیریم.

در این بخش مشاهدات جفتی مربوط به دو صفت از جامعه که به صورت زیر نمونه‌گیری شده‌اند را در جدول‌های دو بعدی مرتب می‌کنیم:

$$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n).$$

Payam Noor University

۱-٤-۱ توزیع فراوانی دومتغیره

روشی را که به کار می‌بریم برای متغیرهای کیفی و کمّی، گسسته و پیوسته یکسان است. فرض کنید که متغیر X مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_s$ و متغیر Y مقادیر $y_1, y_2, \ldots, y_t$، را اختیار کنند. بنابراین هر عضو جامعه‌ای مقداری از جامعه X مثلاً x_i و اندازه‌ای دیگر از متغیر Y، مانند y_j را داراست. در نتیجه اعضای جامعه برای دو متغیر X و Y با هم مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب (X_i, Y_i) را تشکیل خواهند داد که عبارتند از: هر X_iای می‌تواند یکی از مقادیر از حوزه تغییرات متغیر X و هر Y_iای می‌تواند یکی از مقادیر متغیر Y اختیار کنند و حالت‌های ممکنه در جامعه به صورت زیرند:

$$
(X_i, Y_i): \left| \begin{array}{cccc} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \cdots & (x_1, y_t) \\ (x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \cdots & (x_2, y_t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_s, y_1) & (x_s, y_1) & \cdots & (x_s, y_t) \end{array} \right.
$$

معمولاً هنگامی که تعداد نمونه یعنی n کوچک باشد برای تعیین هر نوع رابطه، مستقیماً از همین جدول ساده استفاده می‌شود ولی اگر حجم جامعه بزرگ باشد جدول فراوانی متغیرها به صورت جدول دو بعدی نوشته می‌شود و محاسبات با استفاده از این جدول صورت می‌گیرد. امروزه به‌دست آوردن جداول توزیع فراوانی با استفاده از کامپیوتر و ماشین‌های حساب، بسیار ساده است ولی آنچه را که در اینجا ذکر می‌کنیم در بررسی‌های فردی است که با حجم نسبتاً کوچک صورت می‌گیرد. برای این کار اطلاعات مربوط به هر فرد نمونه یا جامعه را روی یک کارت نوشته سپس کارت‌ها را نسبت به یک متغیر مرتب می‌کنیم. به این ترتیب اگر نسبت به متغیر X مرتب شده باشند یک سری تغییرات از $x_1, x_2, \ldots, x_s$ خواهیم داشت، سپس گروه x_1 را جدا کرده و نسبت به تغییرات Y مجدداً مرتب می‌کنیم تا t گروه $y_1, y_2, \ldots, y_t$ به‌دنبال هم قرارگیرند و این کار را تا گروه x_5 تکرار می‌کنیم که در پایان به طور معمول $s \times t$ دسته کارت خواهیم داشت که در هر رشته Xها با هم و Yها نیز با هم برابرند و

Payame Noor University

تعداد کارت‌های هر رده فراوانی آن رده را بیان می‌کند که برای رده کارتی که $(X = x_i, Y = y_j)$ است با n_{ij} نشان داده می‌شود.

نتایج گروه‌بندی را در یک جدول دو بعدی به صورت زیر می‌آوریم.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_t	$n_{i\circ}$
x_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1t}	$n_{1\circ}$
x_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2t}	$n_{2\circ}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_s	n_{s1}	n_{s2}	$\cdots$	n_{st}	$n_{s\circ}$
$n_{\circ j}$	$n_{\circ 1}$	$n_{\circ 2}$	$\cdots$	$n_{\circ t}$	n

که برای فراوانی‌ها روابط زیر را می‌توان نوشت.

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} n_{ij} = \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} n_{ij} = n,$$

$$\sum_{i=1}^{s} n_{ij} = n_{1j} + n_{2j} + \cdots + n_{sj} = n_{\circ j},$$

$$\sum_{j=1}^{t} n_{ij} = n_{i1} + n_{i2} + \cdots + n_{it} = n_{i\circ},$$

$$\sum_{j=1}^{t} n_{\circ j} = n; \qquad \sum_{i=1}^{s} n_{i\circ} = n.$$

مثال ۱–۲۱. برای یک نمونه به اندازه‌ی $n = 26$، از دانشجویان یک کلاس، تعداد فرزندان پسر خانواده، X، و تعداد فرزندان دختر خانواده، Y، را سئوال کرده‌ایم، نتایج زیر به‌دست آمده است.

(۴، ۱)، (۵، ۱)، (۵، ۱)، (۵، ۰)، (۵، ۰)، (۵، ۱)، (۵، ۰)، (۶، ۱)، (۷، ۱)، (۶، ۱)، (۷، ۲)، (۷، ۲)، (۶، ۲)،
(۱، ۳)، (۲، ۳)، (۳، ۱)، (۲، ۳)، (۳، ۳)، (۴، ۰)، (۵، ۰)، (۳، ۱)، (۶، ۱)، (۷، ۱)، (۷، ۲)، (۷، ۲)، (۶، ۲)

توزیع فراوانی یا جدول دوبعدی به صورت زیر بیان خواهد شد.

Payam Noor University

X \ Y	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	$n_{i\circ}$
۰	۰	۰	۰	۱	۴	۰	۰	۵
۱	۰	۰	۱	۱	۳	۳	۲	۱۰
۲	۰	۰	۰	۰	۰	۲	۴	۶
۳	۲	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۵
$n_{\circ j}$	۰	۲	۳	۲	۷	۵	۶	۲۶

با نرم‌افزار مینیتب

```
MTB > READ C14 C15
DATA> 2 6
DATA> 2 7
DATA> 2 7
DATA> 1 6
DATA> 1 7
DATA> 1 6
DATA> 0 5
DATA> 1 5
DATA> 0 5
DATA> 0 5
DATA> 1 5
DATA> 1 5
DATA> 1 4
DATA> 2 6
DATA> 2 7
DATA> 2 7
DATA> 1 7
DATA> 1 6
DATA> 1 3
DATA> 0 5
DATA> 0 4
DATA> 3 3
DATA> 3 2
DATA> 3 1
DATA> 3 2
DATA> 3 1
DATA> END
    26 rows read.
MTB > Table C14 C15;
SUBC>   Counts.
Tabulated Statistics
 ROWS: C14     COLUMNS: C15
         1       2       3       4       5       6       7     ALL
```

Payam Noor University

0	0	0	0	1	4	0	0	5	
1	0	0	1	1	3	3	2	10	
2	0	0	0	0	0	2	4	6	
3	2	2	1	0	0	0	0	5	
ALL	2	2	2	2	7	5	6	26	

CELL CONTENTS --
COUNT

مثال ۱–۲۲. یک نمونه ۲۰ تایی از کارگران یک کارخانه را انتخاب و آنها را برحسب جنس، X، و به تفکیک مهارت، Y، مورد مطالعه قرار داده‌ایم که داده‌ها عبارتند از:

(زن، نیمه‌ماهر)، (زن، نیمه‌ماهر)، (مرد، ماهر)، (مرد، ماهر)، (زن، ماهر)، (زن، ساده)، (زن، ساده)، (مرد، ساده)، (مرد، ساده)، (مرد، نیمه‌ماهر)، (زن، ساده)، (زن، ساده)، (زن، ماهر)، (مرد، ، ماهر)، (مرد، ماهر)، (مرد، ساده)، (مرد، ساده)، (مرد، ساده)، (مرد، نیمه‌ماهر)، (زن، ساده)

که جدول توزیع فراوانی به صورت زیر بیان می‌شود.

x \ y	ماهر	نیمه‌ماهر	ساده
زن	۲	۲	۵
مرد	۴	۲	۵

مثال ۱–۲۳. لیست مشاهدات نمرات درس آمار و احتمال، X، و نمرات درس ریاضی عمومی، Y، دانشجویان به شرح زیر است:

x	۱۰	۱۵	۱۴	۵	۰	۱۶	۱۲	۱۰	۱۳	۱۴	۱۴	۲۰	۲۰	۱۵	۶
y	۱۰	۱۴	۱۴	۰	۰	۱۶	۱۰	۱۴	۱۲	۱۳	۱۲	۱۸	۲۰	۱۷	۳
x	۶	۶	۱۲	۱۱	۱۰	۱۷	۱۷	۱۶	۳	۳	۲	۱۴	۱۹	۵	۱۰
y	۸	۸	۱۲	۱۰	۱۴	۱۵	۱۴	۱۶	۴	۲	۲	۱۶	۲۰	۶	۷

اگر X و Y را به پنج رده با عرض مساوی تقسیم کنیم نتیجه گروه‌بندی به شرح جدول زیر خواهد بود.

Payam Noor University

x \ y	۰ − ۴	۴ − ۸	۸ − ۱۲	۱۲ − ۱۶	۱۶ − ۲۰	$n_{i\circ}$
۰ − ۴	۴	۰	۰	۰	۰	۴
۴ − ۸	۲	۱	۲	۰	۰	۵
۸ − ۱۲	۰	۱	۲	۲	۰	۵
۱۲ − ۱۶	۰	۰	۱	۶	۳	۱۰
۱۶ − ۲۰	۰	۰	۰	۱	۵	۶
$n_{\circ j}$	۶	۲	۵	۹	۸	۳۰

۱-٤-۲ معیارهای توصیفی برای دومتغیر

به شرط آنکه دو متغیر مورد مطالعه کمّی باشند، با تنظیم جداول دوبعدی مقادیر میانگین و واریانس برای هریک از صفات به دست می‌آیند.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} n_{ij} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} n_{i\circ} x_i,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} n_{ij} y_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t} n_{\circ j} x_j,$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} n_{ij} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} n_{i\circ} (x_i - \bar{x})^2,$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} n_{ij} (y_j - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} n_{\circ j} (y_j - \bar{y})^2.$$

کمّیتی ترکیبی، که می‌تواند تاثیرات دو متغیر بر یکدیگر را اندازه‌گیری کند را در زیر معرفی می‌کنیم:

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} n_{ij} (y_j - \bar{y})(x_i - \bar{x}).$$

s_{xy} کوواریانس دو متغیر X و Y است. فرمول فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} n_{ij} x_i y_j - \bar{x}\,\bar{y}.$$

Payam Noor University

انتظار داریم اگر دو متغیر هم‌سو باشند، یعنی با افزایش یکی، دیگری افزایش یابد و بالعکس، مقدار کوواریانس مثبت شود و اگر دو متغیر مورد مطالعه هم‌سو نباشند، یعنی با افزایش یکی، دیگری کاهش یابد، مقدار کوواریانس منفی شود. کمیت s_{xy} نسبت به تغییر واحد اندازه‌گیری حساسیتی مشابه واریانس دارد.

$$s_{ax+b\text{ و }cy+d} = ac\, s_{xy}.$$

مثال ۱–۲۴. با توجه به اطلاعات زیر مقدار کوواریانس بین x و y را به‌دست آورید.

x	y	$\sum xy$	$x^۲$	$y^۲$
۳	۱۱	۳۳	۹	۱۲۱
۵	۲۰	۱۰۰	۲۵	۴۰۰
۴	۱۶	۶۴	۱۶	۲۵۶
۷	۲۴	۱۶۸	۴۹	۵۷۶
۹	۲۶	۲۳۴	۸۱	۶۷۶
۶	۱۵	۹۰	۳۶	۲۲۵
۵	۲۱	۱۰۵	۲۵	۴۴۱
۴	۱۸	۷۲	۱۶	۳۲۴
۸	۲۷	۲۱۶	۶۴	۷۲۹
$\sum x = ۵۱$	$\sum y = ۱۷۸$	$\sum xy = ۱۰۸۲$	$\sum x^۲ = ۳۲۱$	$\sum y^۲ = ۳۷۴۸$

پس،

$$\bar{x} = \frac{۵۱}{۹} = ۵/۶۶۷, \quad s_x^۲ = \frac{۳۲۱}{۹} - (۵/۶۶۷)^۲ = ۳/۵۵, \quad s_x = ۱/۸۸,$$

$$\bar{y} = \frac{۱۸۷}{۹} = ۱۹/۷۷۸, s_y^۲ = \frac{۳۷۴۸}{۹} - (۱۹/۷۷۸)^۲ = ۲۵/۲۷, s_y = ۵/۰۲,$$

بنابراین،

$$s_{xy} = \frac{۱}{۹}(۱۰۸۲) - (۵/۶۶۷) \times (۱۹/۷۷۸) = ۸/۱۴۱.$$

با مینیتب کمیت کوواریانس را به دست می‌آوریم.

```
MTB > SET C16
DATA> 3 5 4 7 9 6 5 4 8
DATA> END
```

Payam Noor University

```
MTB > SET C17
DATA> 11 20 16 24 26 15 21 18 27
DATA> END
MTB > LET K7=SUM((C16-MEAN(C16))*(C17-MEAN(C17)))/N(C16)
MTB > PRINT K7
Data Display
K7      8.14815
```

اگر از دستور موجود در نرم‌افزار استفاده شود خروجی آن یک ماتریس که روی قطر اصلی واریانس هر ستون با احتساب ضریب $n-1$، خواهد شد.

```
MTB > COVARIANCE C16 C17
Covariances
          C16       C17
C16      4.00000
C17      9.16667  28.44444
```

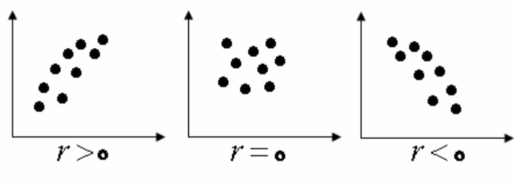
۱-٤-۳ ضریب همبستگی خطی

برای سنجش میزان وابستگی دو متغیر از معیاری به نام ضریب همبستگی خطی استفاده می‌شود که آنرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r_{xy} = r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2\ s_y^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x\ s_y}.$$

ضریب همبستگی خطی به مبدأ و واحد اندازه‌گیری داده‌ها بستگی ندارد، یعنی $r_{ax+b\ ,\ cy+d} = \pm r_{xy}$ می‌باشد.

با رسم مشاهدات، (x_i, y_i)ها، می‌توان وضعیت رابطه‌ی خطی بین دو متغیر را تا حدودی پیش‌بینی کرد. شکل‌های زیر این مطلب را بهتر نشان می‌دهند.



ضریب همبستگی خطی r در فاصله زیر تغییر می‌کند:

$$-1 \le r \le 1.$$

اگر $r=\pm 1$ باشد همبستگی خطی کامل است. دو متغیر با $r<0$، همبستگی معکوس دارند یعنی تغییرات X و Y در خلاف جهت یکدیگر و با $r>0$ همبستگی مستقیم دارد یعنی تغییرات X و Y هم‌جهت هستند. اگر $-1<r<1$ همبستگی ناقص است که با $r<0$ همبستگی ناقص و معکوس و با $r>0$ همبستگی ناقص و مستقیم است و اگر $r=0$ باشد همبستگی خطی وجود ندارد. بنابراین هر چه اندازه r به ۱+ یا ۱−نزدیک باشد همبستگی خطی شدیدتر و هر چه r به صفر نزدیک‌تر شود همبستگی ضعیف‌تر می‌شود.

مثال ۱–۲۵. دنباله‌ی مثال ۱–۲۴ مقدار ضریب همبستگی برابر است با

$$r=\frac{8/141}{(1/88)\times(5/02)}=0/86$$

این کمیت حاکی از همبستگی ناقص و مستقیم است. این مقدار با خروجی نرم‌افزار نیز قابل حصول است.

```
MTB > CORR C16 C17
Correlations (Pearson)
Correlation of C16 and C17 = 0.859
```

تمرین

۱–۲۲. برای اطلاعات مثال ۱–۲۳ ضریب همبستگی را به‌دست آورید.

Payam Noor University

Payam Noor University

فصل دوّم

قوانین شمارش

Payam Noor University

۲-۱ مقدمه

ساده‌ترین نوع محاسبه، شمارش تعداد اعضای یک مجموعه‌ی پایان‌دار است که انسان به طور طبیعی از طریق انگشتان دست یا اشیای دیگر، برای اوّلین بار به آن توجه کرده است. با این حال اگر این مجموعه‌ی پایان‌دار خیلی پرعضو باشد، به‌طوری که نتوانیم یک یک اعضای آن را نشان دهیم، عمل شمارش نه‌تنها از عهده‌ی انسان بلکه از عهده‌ی کامپیوتر هم ساخته نیست. همچنین محاسبه‌ی احتمال‌ها که در فصل بعدی خواهیم دید، اغلب منجر به شمارش حالات ممکن مختلف می‌شود. خوشبختانه به کمک اندیشه‌ی ریاضی می‌توان فرمول‌هایی ابداع کرد که از دشواری کار شمارش بکاهد. فن پیداکردن این فرمول‌ها بر اصولی بدیهی به‌نام اصول شمارش بنا شده است.

۲-۲ اصول شمارش

در اینجا «عمل» نمایشگر هر نوع شیوه، فرایند، یا روش انتخاب است. فرض‌کنید عمل A را به n_1 طریق به نام‌های x_1، x_2، ...، x_{n_1} و عمل B را به n_2 راه با نام‌های y_1، y_2، ...، y_{n_2} بتوان انجام داد.

اصل اوّل شمارش. اگر انجام عمل L منوط به انجام کار A یا B باشد، آنگاه عمل L را می‌توان به n_1+n_2 راه به‌نام‌های x_1، x_2، ...، x_{n_1}، y_1، y_2، ...، y_{n_2} انجام داد.

این اصل را «اصل جمع» می‌گویند و در آن تکیه بر روی «یا» می‌باشد.

مثال ۲-۱. فرض کنید از دانشکده به منزل (عمل L)، با تاکسی (عمل A) از سه راه یا با اتوبوس (عمل B) از دو راه امکان داشته باشد. بنابراین به پنج طریق با تاکسی یا با اتوبوس می‌توان از دانشکده به منزل رفت.

تمرین

۲-۱. اگر A یک مجموعه با عناصر $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ و B مجموعه‌ای دیگر با عناصر $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ باشد، عمل L همتای کدام عمل روی دو مجموعه‌ی A و B است.

۲-۲. چند عدد یک رقمی که مضرب ۲ یا ۷ هستند، وجود دارد؟

اصل دوّم شمارش. اگر انجام عمل L طی دو مرحله انجام‌پذیر باشد به‌طوری که در مرحله‌ی اوّل (عمل A) به n_1 راه و مرحله‌ی دوّم (عمل B) به n_2 راه صورت گیرد، آنگاه عمل مزبور به $n_1 n_2$ راه انجام می‌گیرد.

برای توجیه این قضیه، زوج مرتب (x_i, y_i) را برآمدی تعریف می‌کنیم که وقتی مرحله‌ی اوّل به امکان x_i و مرحله دوّم به امکان y_i منتج شود، رخ می‌دهد. در این صورت، مجموعه‌ی تمام برآمدهای ممکن، مرکب از $n_1 n_2$ زوج زیر است.

$$\begin{matrix} (x_1, y_1), & (x_1, y_2), & \cdots, & (x_1, y_{n_2}) \\ (x_2, y_1), & (x_2, y_2), & \cdots, & (x_2, y_{n_2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{n_1}, y_1), & (x_{n_1}, y_2), & \cdots, & (x_{n_1}, y_{n_2}) \end{matrix}$$

این اصل را «اصل ضرب» می‌گویند و در آن تکیه بر روی «و» می‌باشد.

مثال ۲-۲. فرض کنید از دانشکده به منزل (عمل L) با تاکسی از دانشکده تا پارک شهر (عمل A) از سه راه و با اتوبوس از پارک شهر تا منزل(عمل B) از دو راه امکان داشته باشد. بنابر این به شش طریق با تاکسی و با اتوبوس می‌توان از دانشکده به منزل رفت.

Payam Noor University

	x_1	x_2	x_3
y_1	(x_1, y_1)	(x_2, y_1)	(x_3, y_1)
y_2	(x_1, y_2)	(x_2, y_2)	(x_3, y_2)

تمرین

۲-۳. اگر A یک مجموعه با عناصر $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ و B مجموعه‌ای دیگر با عناصر $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ باشد، عمل L همتای کدام عمل روی دو مجموعه‌ی A و B است.

۲-٤. به چند طریق می‌توانید یکی از سه جفت کفش را با یکی از چهار جفت جوراب بپوشید؟

تعمیم اصل اوّل شمارش. اگر در انجام عملی بتوانیم یکی از k عمل را انتخاب کنیم به‌طوری که عمل اوّل بتواند به n_1 راه انجام شود، عمل دوّم به n_2 راه انجام شود، و الی‌آخر، کل عمل به $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ راه انجام می‌گیرد.

تعمیم اصل دوّم شمارش. اگر عملی مرکب از k مرحله باشد، به‌طوری که مرحله‌ی اوّل بتواند به n_1 راه انجام شود، و برای هر یک از این راه‌ها، مرحله‌ی دوّم بتواند به n_2 راه صورت گیرد، و برای هریک از راه‌های این دو مرحله‌ی نخستین، مرحله‌ی سوم بتواند به n_3 راه انجام گیرد و الی‌آخر، آنگاه کل عمل به $n_1 n_2 \cdots n_k$ راه صورت می‌پذیرد.

مثال ۲-۳. به چند راه می‌توان به آزمونی چهار گزینه‌ای با بیست پرسش پاسخ داد؟

حل. در پاسخ هر پرسش ۴ راه وجود دارد پس جواب بنابر تعمیم اصل دوّم شمارش $4 \times 4 \times \cdots \times 4 = 4^{20}$ است.

مثال ۲-٤. از میان ۴ سوپ مختلف، ۳ نوع ساندویچ، ۵ نوع دسر و ۴ نوع نوشابه، چند ناهار مختلف که شامل یک سوپ، یک ساندویچ، یک دسر و یک نوشابه است می‌توان انتخاب کرد؟

Payame Noor University

حل. بنابر تعمیم اصل دوم شمارش جواب $۴\times۳\times۵\times۴=۲۴۰$ است.

تمرین

۲-۵. اعضای شورای دانشجویی یک دانشگاه متشکل از ۳ نفر دانشجوی سال اوّل، ۴ نفر دانشجوی سال دوّم، ۵ نفر دانشجوی سال سوّم و ۲ نفر دانشجوی سال چهارم هستند. اگر بخواهیم یک شورای فرعی ۴ نفری را که دانشجویان سال‌های مختلف در آن هستند از این شورا انتخاب کنیم، چند شورای فرعی می‌توان انتخاب کرد؟

۲-٦. چند پلاک نمره‌ی اتومبیل با هفت علامت که ۳ علامت اوّل آن از حروف الفبای لاتین و ۴ علامت آخر آن از اعداد ۰ تا ۹ تشکیل شده است می‌توان تهیه کرد؟

۲-۷. چند تابع را می‌توان روی n نقطه تعریف نمود، اگر هر تابع بتواند فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار کند؟

۲-۳ جایگشت

هر آرایش از اشیای متمایز را یک «جایگشت» می‌نامیم. فرض کنید n شیء متمایز داشته باشیم، می‌توانیم این اشیاء را به صورت‌های مختلف آرایش دهیم.

مثال ۲-۵. چند جایگشت از سه حرف a، b، و c وجود دارد؟

حل. آرایش‌های ممکن عبارت‌اند از:

$$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$$

بنابراین تعداد جایگشت‌های متمایز، ۶تاست. می‌توانستیم بدون فهرست کردن جایگشت‌های مختلف، از «تعمیم اصل دوّم شمارش» استفاده کنیم و بگوییم: در مکان اوّل برای جایگاه حرف سمت چپ(راست) سه انتخاب برای گزینش یک حرف وجود دارد، و سپس دو انتخاب برای مکان دوّم موجود است. فقط یک حرف برای مکان سوّم باقی می‌ماند، لذا تعداد کل جایگشت‌ها $۳\times۲\times۱=۶$ است.

Payam Noor University

با تعمیم استدلالی که در مثال ۲–۵ به‌کار رفت، درمی‌یابیم که n شیء متمایز را می‌توان به $n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$ راه آرایش داد. این حاصل‌ضرب را با نماد $n!$ که «nفاکتوریل» خوانده‌می‌شود نمایش می‌دهیم. پس

$$۱!=۱$$
$$۲!=۲\times۱$$
$$۳!=۳\times۲\times۱$$
$$\vdots$$
$$n!=n\times(n-۱)\times\cdots\times۲\times۱$$

بنابر تعریف $۰!=۱$.

قضیه‌ی ۲–۱. تعداد جایگشت‌های متمایز n شیء متمایز برابر $n!$ است.

مثال ۲–٦. تعداد حالت‌هایی که پنج نفر در یک صف قرار می‌گیرند برابر با $۵!=۶۰$ است.

تمرین

۲–۸. با ارقام ۱,۲,...,۹ چند عدد نه رقمی که در آن ارقام تکراری نباشند می‌توانید بسازید؟

۲–۹. یک کلاس نظریه‌ی احتمال دارای ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر است. پس از برگزاری یک امتحان، نمرات آنها مرتب می‌شوند. با فرض اینکه هیچ دو دانشجویی نمره یکسان کسب نکنند،

الف) چند حالت ممکن برای مرتب کردن نمرات وجود دارد؟

ب) اگر مرتب کردن دانشجویان پسر و دانشجویان دختر بین خودشان به‌طور جداگانه انجام گیرد، در این صورت چند حالت ممکن وجود دارد؟

Payam Noor University

۲-۱۰. شخصی ۱۰ کتاب دارد و می‌خواهد در قفسه‌ی کتابخانه خود قرار دهد. از ۱۰ کتاب، تعداد ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب شیمی، ۲ کتاب تاریخ و یک کتاب زبان هستند. اگر این شخص بخواهد کتاب‌هایی با موضوع یکسان کنار هم قرارگیرند، آنگاه چند ترتیب ممکن برای قرار دادن کتاب‌ها وجود دارد؟

۲-٤ ترتیب

هرگاه از n شیء متمایز، r تا را برگزیده، $1 \le r \le n$، و تشکیل یک جایگشت دهیم، حاصل یک ترتیب r تایی از n شیء متمایز است. تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز را بدین طریق پیدا می‌کنیم: برای ساختن یک جایگشت r تایی از n شیء متمایز باید r تا از این n شیء را یک‌به‌یک انتخاب کرده مثلاً از چپ به راست پهلوی هم قراردهیم. این کار معادل با انجام پیاپی r عمل $A_1, A_2, \dots, A_{r-1}, A_r$ به‌ترتیب، به‌طریق $n, n-1, \dots, n-r+2, n-r+1$ طریق می‌باشد. بنابر تعمیم اصل دوّم شمارش، تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز می‌شود:

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+2) \times (n-r+1).$$

این حاصل‌ضرب را با ${}_n\mathrm{P}_r$ نشان می‌دهند. بنا به‌تعریف ترتیب، قرار می‌دهیم ${}_n\mathrm{P}_0 = 1$.

قضیه‌ی ۲-۲. تعداد ترتیب‌های r تایی از n شیء متمایز برای $r = 0, 1, 2, \dots, n$ عبارت است از

$${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

برهان. فرمول ${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ را نمی‌توان برای $r = 0$ به کار برد، امّا فرمول زیر را می‌توان به کار برد.

$${}_n\mathrm{P}_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1.$$

برای $r = 0, 1, 2, \dots, n$، داریم

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{P}_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}.\end{aligned}$$

Payam Noor University

مثال ۲-۷. از فهرست نام ۲۴ عضو یک باشگاه، برای انتخاب رئیس، نایب رئیس، خزانه‌دار، و منشی ۴ نام استخراج می‌شود. به‌چند راه مختلف این کار را می‌توان انجام داد؟

حل. تعداد جایگشت‌های ۲۴ شیء متمایز که ۴ به ۴ اختیار می‌شوند برابر است با

$$ {}_{۲۴}P_{۴} = \frac{۲۴!}{۲۰!} = ۲۴ \times ۲۳ \times ۲۲ \times ۲۱ = ۲۵۵۰۲۴. $$

بسته‌های نرم‌افزاری آماری، و بسیاری از ماشین حساب‌های دستی برای محاسبه‌ی فرمول‌هایی با نمایش فاکتوریل برنامه‌ریزی شده‌اند. برای مثال با استفاده از مینیتب مقدارهای !۱۹، و ${}_{۱۹}P_{۴}$ را به دست می‌آوریم.

```
MTB > SET C1
DATA> 1:19
DATA> end
MTB > PARPROD C1 C2
MTB > LET K1=C2(19)
MTB > LET K2=C2(19)/C2(15)
MTB > PRINT K1 K2
Data Display
K1      2.027418E+16
K2      93024.0
```

به کمک مینیتب، شمارش ویژگی‌های مشخص برای اطلاعات وارد شده به نرم‌افزار امکان‌پذیر است. برای مثال در یک سری داده، تعداد مشاهداتی که کوچکتر، بزرگتر، و یا بین دو عدد قرار دارند قابل تعیین است. همچنین نسبت دادن یک آرایش تصادفی به اعداد، از توانمندی‌های این نرم‌افزار به شمار می‌آید. توضیحات بیشتر در این خصوص را در فصل هفتم آورده شده است.

تمرین

۲-۱۱. در یک مسابقه‌ی شطرنج از ۱۰ بازیکن، ۴ نفر روسی، ۳ نفر آمریکایی، ۲ نفر انگلیسی، و یک نفر برزیلی هستند. اگر نتیجه مسابقه براساس مرتب کردن ملیت بازیکن‌ها اعلام شود، چند نتیجه ممکن وجود دارد؟

۲–۱۲. چند علامت مختلف را که هر کدام شامل قرارگرفتن ۹ پرچم در یک خط هستند به وسیله‌ی ۴ پرچم سفید، ۳ پرچم قرمز، ۲ پرچم آبی می‌توان تهیه نمود؟ پرچم‌های هم‌رنگ یکسان هستند.

۲–۱۳. یک شعبه‌ی محلی انجمن ریاضی به چند طریق می‌تواند برای سه گردهمایی مختلف، سه سخنران را تعیین کند، به شرطی که هر پنج سخنران برای هر یک از تاریخ‌های ممکن، حاضر به انجام سخنرانی باشند؟

۲–۵ جایگشت دوری

جایگشت‌های اشیا روی دایره‌ای مرتب شده‌اند جایگشت‌های دوری خوانده می‌شوند. اگر اشیا متناظر در دو آرایش، اشیای قبل و بعد یکسانی داشته باشند دو آرایش را مختلف تلقی نمی‌کنیم (و آنها را یک بار به حساب می‌آوریم). برای مثال اگر چهار نفر دور میزی گرد نشسته باشند وقتی هرکس به صندلی سمت چپ خود منتقل شود، جایگشتی مختلف به وجود نمی‌آید. بنابر این اگر شخصی را به دلخواه در مکان ثابتی درنظر بگیریم، سه نفر دیگر را طی سه مرحله می‌توانیم بنشانیم که حاصل تعداد این سه مرحله، شش جایگشت دوری است.

با تعمیم استدلالی که در این مثال ارائه شد، نتیجه‌ای را که در قضیه‌ی ۲–۳ بیان شده است، به دست می‌آوریم.

قضیه‌ی ۲–۳. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز که روی یک دایره مرتب شده‌اند برابر است با $(n-۱)!$.

مثال ۲–۸. به چند طریق می‌توان پنج آگهی تبلیغاتی را دور یک میدان نصب کرد؟

حل. براساس تعداد جایگشت‌های دوری، پاسخ $(۵-۱)!=۴!=۲۴$ است.

تمرین

۲–۱٤. چند جایگشت دوری از ۴ نفر که دور یک میز گرد نشسته‌اند وجود دارد؟

Payam Noor University

۲-۱۵. اگر در یک گروه شش‌تایی دو شیء کاملاً مشابه یکدیگر بودند، چند جایگشت دوری خواهیم داشت؟

۲-۶ ترکیب

اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم از این n شیء فقط r شیء را انتخاب کنیم به‌طوری که ترتیب r شیء مهمّ نباشد مسلماً به صورت‌های مختلف می‌توانیم این r شیء را برگزینیم. هر یک از این صورت‌ها را یک ترکیب r تایی از n شیء می‌نامیم.

تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء، تنها یک ترکیب r تایی است. بنابراین تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز که معمولاً آن را با $\binom{n}{r}$ یا ${}_nC_r$ نشان‌می‌دهند، برابر می‌شود با

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}. $$

قضیه‌ی ۲-٤. تعداد ترکیب‌های r شیء از n شیء متمایز برای $r = ۰, ۱, ۲, \dots, n$ عبارت است از

$$ \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}. $$

مثال ۲-۹. در ۶ پرتاب یک سکه به چند راه ۲ شیر و ۴ خط ظاهر می‌شوند؟

حل. می‌توان گفت در چند راه مختلف ۲ پرتاب را که در آن شیر ظاهر می‌شود وجود دارد:

$$ \binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۲!\ ۴!} = ۱۵ $$

این نتیجه را می‌توانستیم با فرایند پرزحمت‌تر با شمارش حالت‌های مختلف، یعنی

$$ HHTTTT, HTHTTT, \dots $$

که در آن H نمایش شیر و T نمایش خط است به دست آوریم.

Payam Noor University

مثال ۲-۱۰. می‌خواهیم از یک گروه ۲۰ نفری یک شورای ۳ نفره را تشکیل دهیم. به چند طریق مختلف این کار امکان‌پذیر است؟

حل. تعداد حالت ممکن برابر است با

$$\binom{۲۰}{۳}=\frac{۲۰\times ۱۹\times ۱۸}{۳\times ۲\times ۱}=۱۱۴۰.$$

تمرین

۲-۱۶. از یک گروه متشکل از ۵ زن و ۷ مرد، چند شورای مختلف ۵ عضوی متشکل از ۲ زن و ۳ مرد می‌توان انتخاب نمود؟ اگر ۲ نفر از مردها با یکدیگر خصومت داشته و نخواهند با هم در شورا انتخاب شوند، آنگاه چند شورا را می‌توان انتخاب نمود؟

۲-۱۷. در یک آزمون که شامل ۱۰ سئوال دو گزینه‌ای است به چند طریق می‌توان، با انتخاب تصادفی ۴ پاسخ صحیح داد؟

۲-۷ تعمیم ترکیب

یک ترکیب rتایی از nشیء دارای این تعبیر است که مجموعه‌ای از nشیء را به دو زیرمجموعه‌ی rشیء و $n-r$شیء افراز می‌کنیم. پس تعداد ترکیب‌های rتایی از nشیء یعنی تعداد راه‌هایی که می‌توان یک مجموعه‌ی nشیء را به دو زیرمجموعه‌ی rشیء و $n-r$ شیء افراز کرد. حال این تعبیر را تعمیم می‌دهیم. می‌خواهیم تعیین کنیم که یک مجموعه‌ی nشیء را به چند راه می‌توانیم به k زیرمجموعه که در اوّلی $n_۱$شیء، در دوّمی $n_۲$شیء، ...، و در kامی n_kشیء وجود دارد افراز کنیم.

قضیه‌ی ۲-۵. تعداد ترکیب‌های nشیء که $n_۱$تای آنها از نوع اوّل، $n_۲$تای آنها از نوع دوّم، ...، n_kتای آنها از نوع kام است، و $n_۱+n_۲+\cdots+n_k=n$، برابر است با

$$\binom{n}{n_۱,n_۲,\ldots,n_k}=\frac{n!}{n_۱!\ n_۲!\ \cdots\ n_k!}.$$

مثال ۲-۱۱. به چند طریق می‌توان ۲۰ دانشجو را در کلاسی که در ردیف اوّل آن ۵ صندلی، در ردیف دوّم آن ۶ صندلی، و در ردیف سوم آن ۹ صندلی دارد، نشانید؟

حل. در واقع مجموعه‌ای ۲۰نفری را به چند راه می‌توان به زیرمجموعه‌های ۵نفری، ۶نفری و ۹نفری افراز کرد:

$$\binom{۲۰}{۵,\ ۶,\ ۹}=\frac{۲۰!}{۵!\,۶!\,۹!}=۱۸۹۸۷۸۷۸۰.$$

مثال ۲-۱۲. یک مرکز پلیس در شهری کوچک دارای ۱۰ افسر پلیس است. اگر برنامه‌ی مرکز این باشد که ۵ افسر وظیفه نظارت بر خیابان‌ها، ۲ افسر پاسداری از مرکز، و ۳ افسر به صورت ذخیره باشند، به چند حالت ممکن می‌توان ۱۰ افسر را به ۳ گروه تقسیم نمود؟

حل. تعداد حالت‌های ممکن برابر است با $۲۵۲۰=\frac{۱۰!}{۵!\,۲!\,۳!}$.

تمرین

۲-۱۸. مجموعه‌ای از چهار شیء را به چند راه می‌توان به ۳ زیرمجموعه که به ترتیب شامل دو، یک، و یک شیء باشد افراز کرد؟

۲-۸ ضرایب دوجمله‌ای

اگر n عدد صحیح مثبتی باشد و $(x+y)^n$ را جمله‌به‌جمله درهم ضرب کنیم، هر جمله حاصل‌ضربی از xها و yهاست، به طوری که از هریک از n عامل $(x+y)$، یک x یا یک y در این جمله می‌آید. مثلاً بسط

$$\begin{aligned}(x+y)^۳&=(x+y)(x+y)(x+y)\\&=xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy\\&=x^۳+۳x^۲y+۳xy^۳+y^۳\end{aligned}$$

جملاتی به شکل $y^۳,\ xy^۲,\ x^۲y,\ x^۳$ را نتیجه می‌دهد. ضرایب این جملات ۱، ۳، ۳، و ۱ هستند، و برای مثال ضریب $xy^۲$، برابر $۳=\binom{۳}{۲}$، یعنی تعداد راه‌هایی است که

می‌توان دو عاملی که yها را می‌دهند انتخاب کرد. همین‌طور ضریب $x^۲y$ برابر $\binom{۳}{۱}=۳$، یعنی تعداد راه‌هایی است که می‌توان یک عامل فراهم‌کننده‌ی y را انتخاب کرد، و ضرایب $x^۳$ و $y^۳$ به ترتیب $\binom{۳}{۰}=۱$ و $\binom{۳}{۳}=۱$ هستند.

کلی‌تر آن‌که اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد و $(x+y)^n$ را جمله‌به‌جمله درهم ضرب کنیم، ضریب $x^{n-r}y$ برابر $\binom{n}{r}$، یعنی تعداد راه‌هایی است که می‌توان r عامل فراهم‌کننده‌ی yها را انتخاب کرد. از این‌رو $\binom{n}{r}$ را **ضریب دوجمله‌ای** می‌نامیم. حال می‌توانیم قضیه‌ی زیر را بیان کنیم.

قضیه‌ی ۲–۶. برای هر عدد صحیح مثبت n،

$$(x+y)^n = \sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r}\, y^n.$$

محاسبه‌ی ضرایب دوجمله‌ای را اغلب با استفاده از سه قضیه‌ی زیر می‌توان ساده کرد.

قضیه‌ی ۲–۷. برای هر عدد صحیح مثبت n،

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}; \qquad r=۰,۱,۲,\ldots,n.$$

برهان. می‌توانیم استدلال کنیم که وقتی زیرمجموعه‌ای از rشیء را از مجموعه‌ی nشیء متمایز انتخاب می‌کنیم، زیر مجموعه‌ای با $n-r$شیء باقی می‌ماند، و بنابر این راه‌های باقی‌ماندن (یا انتخاب کردن) $n-r$شیء برابر تعداد راه‌های انتخاب rشیء است. برای این‌که قضیه را به صورت جبری ثابت کنیم، می‌نویسیم:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,[n-(n-r)]!}$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!\; r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

از قضیه‌ی ۲–۷ نتیجه می‌شود که اگر ضرایب دوجمله‌ای را وقتی n زوج است برای $r = ۰, ۱, \ldots, \frac{n}{۲}$ و وقتی n فرد است برای $r = ۰, ۱, \ldots, \frac{n-۱}{۲}$ محاسبه کنیم، ضرایب دوجمله‌ای باقی‌مانده را می‌توان با استفاده از این قضیه به دست آورد.

مثال ۲–۱۳. به فرض اینکه $\binom{۴}{۰} = ۱$، $\binom{۴}{۱} = ۴$، $\binom{۴}{۲} = ۶$ مقادیر $\binom{۴}{۳}$ و $\binom{۴}{۴}$ را بیابید.

حل. $\binom{۴}{۳} = \binom{۴}{۴-۳} = \binom{۴}{۱} = ۴$ و $\binom{۴}{۴} = \binom{۴}{۴-۴} = \binom{۴}{۰} = ۱$.

قضیه‌ی ۲–۸. برای هر عدد صحیح مثبت n،

$$\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r} + \binom{n-r}{r-۱}; \qquad r = ۱, ۲, \ldots, n-۱.$$

برهان. در $(x+y)^n$ قرار می دهیم $x = ۱$، و می نویسیم

$$(۱+y)^n = (۱+y)(۱+y)^{n-۱} = (۱+y)^{n-۱} + y(۱+y)^{n-۱}.$$

ضریب y^r در $(۱+y)^n$ را با ضریب y^r در $(۱+y)^{n-۱} + y(۱+y)^{n-۱}$ برابر می گیریم. چون ضریب y^r در $(۱+y)^n$ برابر با $\binom{n}{r}$ و ضریب y^r در $(۱+y)^{n-۱} + y(۱+y)^{n-۱}$ برابر مجموع ضریب y^r در $(۱+y)^{n-۱}$ یعنی $\binom{n-۱}{r}$ و ضریب $y^{r-۱}$ در $(۱+y)^{n-۱}$ یعنی $\binom{n-۱}{r-۱}$ است، به دست می‌آوریم.

$$\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r} + \binom{n-۱}{r-۱}$$

که برهان را کامل می‌کند.

به روشی دیگر، هر یک از n شیء را اختیار می‌کنیم، اگر یک شیء مشخص را در میان r شیء منظور نکنیم $\binom{n-۱}{r}$ راه برای انتخاب r شیء وجود دارد، اگر آن شیء

مشخص را در میان rشیء منظورکنیم $\binom{n-1}{r-1}$ راه برای انتخاب $r-1$شیء دیگر وجود دارد. بنابراین $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$ راه برای انتخاب rشیء موجود است.

برای بیان سومین قضیه درباره‌ی ضرایب دوجمله‌ای، تعریف می‌کنیم که هرگاه n، یک عدد صحیح مثبت و r، عددی صحیح و مثبت و بزرگتر از n باشد، $\binom{n}{r}=0$. (بدیهی است امکان ندارد بتوانیم زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ای انتخاب کنیم که تعداد عناصرش از خود مجموعه بیشتر باشد.)

قضیه‌ی ۲-۹. برای هر k، m، و n صحیح مثبت،

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}=\binom{m+n}{k}.$$

برهان. این قضیه را با برابر گرفتن ضرایب y^k در عبارت‌های دو طرف معادله‌ی

$$(1+y)^{m+n}=(1+y)^m(1+y)^n$$

ثابت می‌کنیم. ضریب y^k در $(1+y)^{m+n}$ برابر با $\binom{m+n}{k}$ است و ضریب y^k در

$$(1+y)^m(1+y)^n=[\binom{m}{0}+\binom{m}{1}y+\cdots+\binom{m}{m}y^m]\times[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}y+\cdots+\binom{n}{n}y^n]$$

مجموع حاصل‌ضرب‌هایی است که از ضرب جمله‌ی ثابت اوّلین عامل در ضریب y^kی عامل دوّم، ضرب ضریب yی اوّلین عامل در ضریب y^{k-1} عامل دوّم، ...، و ضرب ضریب y^kی اوّلین عامل در جمله‌ی ثابت عامل دوّم به دست می‌آید. بنابر این ضریب y^k در $(1+y)^m(1+y)^n$ برابر است با

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\cdots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}=\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}$$

و برهان کامل می‌شود.

Payam Noor University

با استفاده از فرمول تعمیم ترکیب، می‌توان ضرایب بسط $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^n$ را تعیین کرد. ضریب چندجمله‌ای، جمله‌ی $x_1^{r_1}\, x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}$ در بسط $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^n$ برابر است با

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}=\frac{n!}{r_1!\; r_2!\ldots r_k!},$$

در صورتی که شرط $n=r_1+r_2+\cdots+r_k$ برقرار باشد.

مثال ۲–۱٤. در بسط $(x_1+x_2+x_3)^6$ ضریب $x_1^3\; x_2\; x_3^2$ چیست؟

حل. چون $n=6$ ، $r_1=3$، $r_2=1$، $r_3=2$، پس

$$\frac{6!}{3!\;1!\;2!}=60.$$

تمرین

۲–۱۹. در فرمول قضیه‌ی ۲–٦، با قراردادن مقادیر مناسب به‌جای x و y نشان‌دهید که

الف) $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}=2^n$ ، ب) $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}=0$ ، ج) $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(a-1)^r=a^n$.

۲–۲۰. با به‌کاربردن مکرر قضیه‌ی ۲–۸ نشان دهید که

$$\binom{n}{r}=\sum_{i=1}^{r+1}\binom{n-i}{r-i+a}.$$

۲–۲۱. با به کار بردن قضیه ۲–۹ نشان دهید که

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2=\binom{2n}{n}.$$

۲–۲۲. با قراردادن $x=1$ در رابطه‌ی قضیه‌ی ۲–٦، و سپس مشتق‌گیری از عبارت‌های دو طرف نسبت به y و بالاخره قرار دادن $y=1$، نشان‌دهید که $\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r}=n\,2^{n-1}$.

۲–۲۳. اگر α، عدد صحیح مثبت یا صفر نباشند، بسط دوجمله‌ای $(1+y)^{\alpha}$ به‌ازای $-1<y<1$ به صورت سری نامتناهی

Payam Noor University

$$1+\binom{\alpha}{1}y+\binom{\alpha}{2}y^{2}+\binom{\alpha}{3}y^{3}+\cdots+\binom{\alpha}{r}y^{r}+\cdots$$

تعریف می‌شود،

$$\binom{\alpha}{r}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r-1)}{r!}$$

این تعریف تعمیم یافته ضرایب دوجمله‌ای را برای محاسبه‌ی موارد زیر به کار برید.

الف) $\binom{\frac{1}{2}}{4}$ و $\binom{-3}{3}$.

ب) $\sqrt{5}$، با نوشتن $\sqrt{5}=2(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$، و با استفاده از چهار جمله‌ی اوّل بسط دوجمله‌ای $(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$.

۲-۲٤. با رجوع به تعریف تعمیم یافته‌ی ضرایب دوجمله‌ای تمرین قبل، نشان دهید که

الف) $\binom{-1}{r}=(-1)^{r}$،

ب) به ازای $n>0$، $\binom{-n}{r}=(-1)^{r}\binom{n+r-1}{r}$.

۲-۲۵. در بسط $(x+y+z)^{8}$، ضریب $x^{3}\,y^{2}\,z^{3}$ را بیابید.

۲-۲٦. در بسط $(2x+3y+4z+w)^{9}$، ضریب $x^{3}\,y^{2}\,z^{3}$ را بیابید.

۲-۲۷. با بیان تمام ضرایب دوجمله‌ای برحسب فاکتوریل‌ها و ساده کردن آنها به طور جبری، نشان دهید که

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2,\ldots,n_k}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1,\ldots,n_k}+\cdots+\binom{n-1}{n_1,n_2,\ldots,n_k-1}.$$

Payam Noor University

فصل سوّم

احتمال

Payam Noor University

۳-۱ مقدمه

در این فصل سعی می‌شود به اختصار مفاهیم مقدماتی احتمال شامل پیشامد، چگونگی تخصیص احتمال به آنها، روابط پیشامدها، قواعدی از احتمال، احتمال شرطی، و قضیه‌ی بیز را بیان کرده مثال‌هایی ارائه می‌کنیم.

۳-۲ آزمایش تصادفی

در بیشتر شاخه‌های علوم، آزمایش‌ها ابزارهای حیاتی هستند. آزمایش‌ها به دو گروه با نتیجه‌ی قطعی یا نتیجه‌ی تصادفی تقسیم می‌شوند. در آمار و احتمال با آزمایش‌های تصادفی سروکار داریم. در این‌گونه آزمایش‌ها قبل از انجام آنها نمی‌توانیم نتایج را با یقین کامل پیش‌بینی کنیم.

– در بین ۱۰۰ شیء همانند را که با ماشینی ساخته شده‌اند، نمی‌توانیم تعداد اشیای سالم یا معیوب را از قبل دقیقاً معین نماییم.

– در پرتاب تاس همگن نمی‌توانیم با اطمینان بگوییم که کدام یک از ارقام ۱ تا ۶ ظاهر می‌شوند.

– در انتخاب مهره از ظرفی که محتوی ۱۰ مهره‌ی همانند به شماره‌های ۱ تا ۱۰ است، نمی‌توان نتیجه‌ی انتخاب را از قبل مشخص کرد.

آزمایش‌هایی که در بالا درباره‌ی آنها صحبت کردیم، دارای ویژگی‌های مشترک

خاصی هستند. برای هر آزمایش، ما از قبل تمام برآمدهای ممکن را نمی‌دانیم و به این خاطر است که بعد از انجام هر آزمایش، هیچ برآمد رخ داده‌ای شگفت‌انگیز نیست. امّا با این وجود، ما در حین انجام آزمایش نمی‌دانیم که برآمد معین چه خواهد بود یا به عبارت دیگر در زمان انجام آزمایش یک عدم اطمینان درباره‌ی نتیجه وجود دارد. علاوه براین، آزمایش می‌تواند تحت شرایط یکسان، تکرار شود. این ویژگی‌ها شرح یک آزمایش تصادفی(یا آماری) هستند.

تعریف ۳-۱. یک آزمایش تصادفی(یا آماری) آزمایشی است که در آن

الف) تمام برآمدهای ممکن آزمایش از قبل مشخص می‌باشند،

ب) هر بار انجام آزمایش، منتج به نتیجه‌ای می‌شود که از قبل قطعی نیست،

ج) آزمایش می‌تواند تحت شرایط یکسان تکرار شود.

از این به بعد مراد ما از آزمایش، همان آزمایش تصادفی است و به هر فرآیند مشاهده یا اندازه‌گیری یا شمارش، آزمایش می‌گوییم.

۳-۳ فضای نمونه‌ای و برآمد

نتایجی که از یک آزمایش به دست می‌آیند، **برآمدهای آزمایش** نامیده می‌شوند. مجموعه‌ی تمام برآمدهای ممکن آزمایش را **فضای نمونه‌ای** می‌خوانند و معمولاً آن را با حرف S نشان می‌دهند. در فضای نمونه‌ای، هر برآمد را یک **عنصر فضای نمونه‌ای** یا صرفاً یک **نقطه‌ی نمونه‌ای** می‌نامند. اگر فضای نمونه‌ای دارای تعداد متناهی از عناصر باشد، می‌توان این عناصر را با نماد معمولی مجموعه، فهرست کرد.

مثال ۳-۱. فضای نمونه‌ای برای برآمدهای ممکن پرتاب یک سکه را می‌توان به صورت $S=\{H,T\}$ نوشت، که در آن H و T به ترتیب نمایش شیر و خط را می‌دهند.

مجموعه‌ی حاصل از برآمدها، یعنی S، ممکن است متناهی، نامتناهی شمارا یا نامتناهی باشد.

مثال ۳-۲. فضای نمونه‌ای از آزمایش پرتاب یک سکه و یک تاس عبارت است از

$$S = \{(۱,H),(۱,T),(۲,H),...,(۶,T)\}.$$

این مجموعه ۱۲ عضو دارد، پس یک فضای نمونه‌ای متناهی است.

مثال ۳-۳. سکه‌ای را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا برای اوّلین بار شیر مشاهده شود. فضای نمونه‌ای این آزمایش دارای تعدادی متناهی عنصر نیست.

$$S = \{H, TH, TTH, ...\}.$$

این یک مثال از فضای نمونه‌ای نامتناهی شمارا است. اعضای این مجموعه را می-توان با مجموعه‌ی اعداد طبیعی متناظر نمود.

مثال ۳-٤. مدت زمان اقامت شهروندان در وسایل نقلیه در طول یک روز می‌تواند بازه‌ی $[۰,۲۴]$ برحسب ساعت باشد. بنابراین $S=[۰,۲۴]$ یک فضای نمونه‌ای نامتناهی است.

تمرین

۳-۱. فضای نمونه‌ای حاصل از پرتاب ۲ تاس را بنویسید.

۳-۲. بر روی قوطی کنسرو لوبیا، عبارت «وزن ۲۵۰ ± ۵ گرم» چاپ شده است، فضای نمونه‌ای وزن قوطی‌های کنسرو را بنویسید.

۳-۳. فضای نمونه‌ای را برای تعداد تصادف‌های روزانه در جاده‌ی آبادان–اهواز را بنویسید.

۳-٤. برای تعداد بازدیدکنندگان هر گروه از اثر باستانی پاسارگاد در ایام نوروز، فضای نمونه‌ای مناسبی بنویسید.

۳-۵. فضای نمونه‌ای نوع خودروهایی را که از مرز زمینی وارد شهر مقدس کربلا می‌شوند، را مشخص نمائید.

۳-٦. سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم، اگر شیر بیاید، تاسی را یک بار می‌ریزیم، اگر خط بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای مربوط را بنویسید.

Payam Noor University

۳–٤ پیشامد

یک **پیشامد** زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است و معمولاً با حروف A، B، C،... نشان می‌دهیم. گوییم پیشامد A رخ می‌دهد، هرگاه برآمد آزمایش عضوی از آن باشد.

مثال ۳–۵. در پرتاب یک تاس، $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، پیشامد A عبارت است از مشاهده‌ی عددی فرد. بنابراین A دارای عناصر ۱، ۳، و ۵ است.

$$A=\{۱,۳,۵\}\ \subset S.$$

هر برآمدی مانند ۱ یا ۳ یا ۵ منجر به‌رخ‌دادن A می‌شود. پیشامد B که نتیجه‌ی پرتاب تاس عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد به صورت $B=\{۳,۶\}$ است.

مثال ۳–٦. صفحه‌ی ساعتی به‌صورت دایره است. اگر بر اثر تصادف تیری به سمت صفحه ساعت اصابت شود، اصابت تیر به ناحیه‌ی بین دو عقربه که ساعت ۱۲:۱۵ را تعیین می‌کند یک پیشامد محسوب می‌شود.

مثال ۳–۷. در میان بسته‌های کبریت پیشامد آنکه تعداد نخ‌های یک قوطی کبریت کمتر از ۳۰ باشد.

اگر پیشامد A تنها یک عنصر داشته باشد پیشامد ساده می‌نامند.

مثال ۳–۸. در پرتاب یک تاس، آمدن عدد ۶ یک پیشامد ساده است.

$$A=\{۶\}.$$

اگر مجموعه‌ی A که زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است، تهی باشد، آن را **پیشامد محال** می‌نامند و با ϕ نشان می‌دهند و اگر A برابر S باشد آن را **پیشامد حتمی** می‌نامند.

مثال ۳–۹. در پرتاب یک تاس، مشاهده‌ی عدد ۲/۵ یک پیشامد محال و پیشامد ظاهرشدن یک عدد طبیعی کوچکتر از ۷ یک پیشامد حتمی است.

Payam Noor University

اگر هر عضو که در A است در B نیز باشد، می‌گویند A **زیرپیشامد** B است و می‌نویسند $A \subset B$.

مثال ۳-۱۰. خودروهایی را که در یک بزرگ‌راه در حال حرکت هستند در نظر بگیرید. ملاحظه می‌نمایید که A زیرپیشامد B است.

$A = \{$ خودروهایی که سرعت آنها حداقل ۶۰ کیلومتر بر ساعت $\}$

$B = \{$ خودروهایی که سرعت آنها حداقل ۴۰ کیلومتر بر ساعت $\}$

اگر A زیرپیشامد B و B زیرپیشامد A باشد می‌گویند A و B **پیشامدهای برابر**ند و می‌نویسند $A = B$.

مثال ۳-۱۱. در کتابخانه‌ای در طبقه دوّم قفسه‌ایی به کتاب‌های تخصصی رشته‌ی آمار اختصاص داده‌اند. دو پیشامد زیر معادلند:

$A = \{$ کتب طبقه دوّم قفسه $\}$,

$B = \{$ کتب تخصصی رشته‌ی آمار $\}$.

اجتماع دو پیشامد از تمام عنصرهای A یا B یا هردو تشکیل می‌شود و آن را با $A \cup B$ نشان داده، پیشامد «A» یا «B» می‌نامند. این پیشامد موقعی رخ می‌دهد که لااقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند.

مثال ۳-۱۲. در آزمایش تصادفی از پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد مجموع دو پرتاب عدد هفت، و B پیشامد نتیجه‌ی یکی از تاس‌ها وجه سه باشد، پیشامد اجتماع این دو عبارت‌است از:

$$A = \{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$

$$B = \{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۱,۳),(۲,۳),(۴,۳),(۵,۳),(۶,۳)\}$$

$$A \cup B = \{(۱,۶),(۲,۵),(۵,۲),(۶,۱),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),$$
$$(۳,۵),(۳,۶),(۱,۳),(۲,۳),(۴,۳),(۵,۳),(۶,۳)\}.$$

اشتراک پیشامد از تمام پیشامدهای ساده که در A و در B تشکیل می‌شود و آنرا با $A \cap B$ نشان‌داده پیشامد «A» و «B» می‌نامند. این پیشامد موقعی رخ می‌دهد که A و B هر دو با هم رخ‌دهند.

مثال ۳-۱۳. در مثال ۳-۱۲، ملاحظه می‌گردد:

$$A \cap B = \{(۳,۴),(۴,۳)\}.$$

اگر A و B دو پیشامد از S باشند و $A \cap B = \phi$ آنگاه A و B را دو پیشامد «**جدا**» یا **ناسازگار** می‌نامند. در این حال رخ‌دادن هر دو با هم محال می‌باشد و معمولاً می‌گویند A و B ناسازگارند.

مثال ۳-۱٤. در پرتاب سه سکه سالم پیشامدهای زیر همگی ناسازگارند:

$$A = \{HHH, HHT\};\ B = \{HTH, THH, TTH\};\ C = \{TTT, HTT, THT\}.$$

(آیا شرحی برای این سه پیشامد دارید؟)

تفاضل A از پیشامد B از تمام عناصر که در A بوده ولی در B نباشند تشکیل می‌شود، و آن را با $A - B$ نشان داده، پیشامد «A نه B» می‌نامند. اگر $A \subset B$ باشد $A - B = \phi$ و به $B - A$ را یک تفاضل واقعی می‌نامند زیرا B تمام A را دربردارد.

مثال ۳-۱۵. در پرتاب دو تاس، A پیشامد آنکه در بار دوّم عدد شش مشاهده شود و B پیشامد آنکه در بار اوّل عدد شش مشاهده شود آنگاه

$$A - B = \{(۱,۶),(۲,۶),(۳,۶),(۴,۶),(۵,۶)\},$$

به‌عبارت دیگر $A - B$، پیشامد آن است که فقط در بار دوّم عدد شش ظاهر می‌شود.

تفاضل پیشامد A از فضای نمونه، یعنی $S - A$ را **متمم** پیشامد A می‌گویند و آن‌را با A' نشان داده، پیشامد «نه A» می‌نامند. واضح است

Payam Noor University

$$A \bigcup A' = S \qquad , \qquad A \bigcap A' = \phi.$$

مثال ۳–۱۶. دو پیشامد زیر در پرتاب n بار یک سکه، متمم یکدیگرند:

A: پیشامد آنکه حداقل در یکی از پرتاب‌ها شیر مشاهده شود،

B: پیشامد آنکه نتیجه تمامی پرتاب‌ها خط باشد.

تفاضل متقارن دو پیشامد A و B عناصر آن یا عضوی از A، یا عضوی از B، ولی نه عضو هردو تشکیل می‌شود و آن را با $A\Delta B$ نشان می‌دهند و پیشامد «یا A یا B» می‌نامند. واضح است که $A\Delta B$ و $B\Delta A$ با هم برابرند و از این‌رو کلمه‌ی متقارن را به کار می‌برند.

مثال ۳–۱۷. در مثال ۳–۱۵، دو پیشامد ذکر شده را در نظر بگیرید:

$$A\Delta B = \{(۱,۶),(۲,۶),(۳,۶),(۴,۶),(۵,۶),(۶,۵),(۶,۴),(۶,۳),(۶,۲),(۶,۱)\},$$

می‌توان از نتیجه این عملیات متوجه شد که هم‌زمان هر دو تاس عدد شش مشاهده نمی‌شود.

تمرین

۳–۷. اگر $S = \{x | ۰ < x < ۱۰\}$، $A = \{x | ۳ < x \leq ۸\}$، و $B = \{x | ۵ < x < ۱۰\}$، پیشامدهای زیر را تعیین کنید .

الف) $A \bigcup B$ ب) $A \bigcap B$ ج) $A \bigcap B'$ د) $A' \bigcup B$

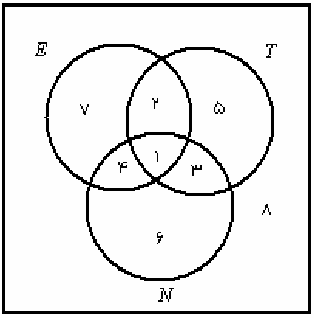
۳–۸. از گروه ۲۰۰ نفری دانشجویان یک دانشکده، ۱۳۸ نفر درس آمار، ۱۱۵ نفر درس جامعه‌شناسی، و ۹۱ فرد در هر دو درس ثبت‌نام کرده‌اند. چند نفر از این دانشجویان در هیچ یک از این دروس ثبت‌نام نکرده‌اند؟

۳–۹. در شکل ۳–۱، E، T، و N پیشامدهایی به‌ترتیب هستند که خودروهایی که به تعمیرگاهی آورده‌اند نیاز به‌تعمیر کامل موتور، تعمیر جعبه‌دنده، یا تایرهای نو دارند. پیشامدهایی را که با

الف) ناحیه ۱،

Payam Noor University

ب) ناحیه 3،
ج) ناحیه 7،
د) نواحی 1 و 4 باهم،
ت) نواحی 2 و 5 باهم،
و) نواحی 3، 5،و 6 باهم،
نشان داده می‌شوند در قالب کلمات بیان کنید.



شکل ۳-۱. شکل مورد نیاز برای تمرین ۳-۹

۳-۱۰. با رجوع به تمرین قبل و شکل مربوطه، ناحیه یا ترکیبی از نواحی را فهرست کنید که معرف پیشامدهایی برای خودروهایی توصیف شده باشد.
الف) تعمیر جعبه دنده، ولی نه تعمیر کامل موتور و نه نیاز به تایر نو،
ب) تعمیر کامل موتور و تعمیر جعبه دنده،
ج) تعمیر جعبه دنده یا نیاز به تایر نو ولی نه تعمیر کامل موتور،
د) نیاز به تایر نو.

۳-۵ احتمال

احتمال‌ها، مقادیر یک تابع مجموعه‌ای‌اند که **اندازه‌ی احتمال** هم خوانده می‌شوند، زیرا همان‌طور که خواهیم دید، این تابع، اعداد حقیقی را به زیرمجموعه‌های مختلف فضای نمونه‌ای S نسبت می‌دهد. اصول موضوع احتمال که ما در اینجا فرمول‌بندی می‌کنیم فقط وقتی به کار می‌روند که فضای نمونه‌ای S گسسته باشد به عبارت دیگر فضای نمونه‌ای که تعداد عناصر آن متناهی، $S=\{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$، یا شمارش پذیر نامتناهی،

$S=\{O_1,O_2,O_3,\ldots\}$، باشد. علامت $P(A)$ برای نشان‌دادن احتمال پیشامد A به‌کار می‌رود.

اصل موضوع ۱. احتمال یک پیشامد، عددی حقیقی نامنفی است، یعنی برای هر زیرمجموعه‌ی A از S، $P(A)\geq 0$.

اصل موضوع ۲. $P(S)=1$.

اصل موضوع ۳. اگر A_1، A_2، A_3،...، دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار در S باشند، آنگاه

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots.$$

اصول موضوع ذاتاً نیازی به برهان ندارند، امّا اگر بخواهیم نظریه‌ی حاصل را به‌کار بریم، وقتی به احتمال‌ها یک مفهوم «حقیقی» می‌دهیم باید نشان دهیم که اصول موضوع صادق هستند.

به طورشهودی، ابتدا احتمال منسوب به یک پیشامد را به عنوان معیاری عددی در نظر می‌گیریم که با آن، میزان انتظار برای وقوع پیشامد را وقتی آزمایش اجرا می‌شود اندازه می‌گیرند. به منظور تعیین این میزان، طبیعی است که نسبت دفعات وقوع پیشامد در تکرار آزمایش را در نظر گیریم. تصور شهودی ما از اندازه‌ی عددی احتمال یک پیشامد، نسبت دفعاتی است که انتظار می‌رود آن پیشامد وقتی که آزمایش تحت شرایط یکسان تکرار گردد، رخ بدهد.

فرآیند مناسب برای تعیین احتمال پیشامدها، بستگی به‌طبیعت آزمایش و فضای نمونه‌ی مربوط است. در بعضی موارد، می‌توان نسبت دفعاتی را که انتظار می‌رود هر برآمد مقدماتی رخ بدهد، با استنتاج منطقی و بدون آنکه آزمایش عملاً اجرا شود، تعیین کرد. درموارد دیگر، لازم است آزمایش را برای تعداد زیادی از دفعات تکرار کرد تا اطلاعاتی درمورد فراوانی وقوع برآمدهای گوناگون به‌دست آید. تشریح این دو نوع حالت، ما را به‌سوی تعریف رسمی احتمال راهنمایی می‌کند.

چون نسبت‌ها همواره مثبت یا صفرند، اوّلین اصل موضوع با تعبیر فراوانی در هماهنگی کامل است. اصل موضوع دوّم به‌طور غیرمستقیم بیان می‌کند که حتمیت با

Payam Noor University

احتمال ۱، یکی است، روی هم رفته همیشه می‌پذیریم که باید یکی از امکانات موجود در S رخ دهد، و به این پیشامد که حتمی است احتمال ۱ را نسبت می‌دهیم. تا آنجا که به تعبیر فراوانی مربوط است، احتمال ۱ اشاره براین دارد که پیشامد مورد بحث در ۱۰۰درصد مواقع رخ خواهد داد، یا به عبارت دیگر، این پیشامد مطمئناً رخ می‌دهد.

با در نظر گرفتن سومین اصل موضوع در ساده‌ترین حالت، یعنی برای دو پیشامد ناسازگار A_1 و A_2، می‌توان به سادگی دید که این اصل موضوع از نظر تعبیر فراوانی برآورده می‌شود. اگر پیشامدی مثلاً در ۲۸ درصد مواقع، و پیشامد دیگری در ۳۹ درصد مواقع رخ دهد، و هردو پیشامد نتوانند به طور هم‌زمان رخ دهند (یعنی، دوبه‌دو ناسازگار باشند)، آنگاه یکی یا دیگری در $۲۸+۳۹=۶۷$ درصد مواقع رخ خواهد داد. بنابراین سوّمین اصل موضوع صادق است و وقتی بیش از دو پیشامد دوبه‌دو ناسازگار وجود داشته باشند، همین نوع استدلال به‌کار می‌رود.

قبل از اینکه برخی نتایج فوری اصول موضوع احتمال را مطالعه کنیم، بر این نکته تأکید می‌کنیم که این سه اصل موضوع به ما نمی‌گویند چگونه احتمال‌ها را به پیشامدها تخصیص دهیم، بلکه فقط راه‌های انجام این کار را محدود می‌کنند.

مثال ۳–۱۸. در یک آزمایش، فضای نمونه‌ای ممکن به چهار پیشامد دوبه‌دو ناسازگار A، B، C، و D را افراز شده است. برای هریک از موارد زیر، توضیح دهید که چرا راهی مجاز برای تخصیص احتمال‌ها وجود ندارد.

الف) $P(A)=۰/۱۲$، $P(B)=۰/۶۳$، $P(C)=۰/۴۵$، $P(D)=-۰/۲۰$،

ب) $P(A)=\frac{۹}{۱۲۰}$، $P(B)=\frac{۴۵}{۱۲۰}$، $P(C)=\frac{۲۷}{۱۲۰}$، $P(D)=\frac{۴۶}{۱۲۰}$.

حل. الف) $P(D)=-۰/۲۰$ ناقض اصل موضوع ۱ است.

ب) $P(S)=P(A\cup B\cup C\cup D)=\frac{۹}{۱۲۰}+\frac{۴۵}{۱۲۰}+\frac{۲۷}{۱۲۰}+\frac{۴۶}{۱۲۰}=\frac{۱۲۷}{۱۲۰}\neq ۱$ به عبارت دیگر فضای نمونه مقدار احتمالی بزرگتر از یک دارد.

البته، درکاربرد واقعی، احتمال‌ها برمبنای تجارب‌گذشته، برمبنای تحلیل محتاطانه‌ی تمام شرایط زیربنایی، برمبنای داوری‌های ذهنی، یا برمبنای مفروضات – گاهی با فرض هم‌شانس بودن (یا به معنای دیگر، برابری احتمال‌ها برای) تمام برآمدهای ممکن، نسبت داده می‌شوند.

در تخصیص احتمال به پیشامدها در یک فضای نمونه‌ای، ضروری نیست که احتمال هر زیرمجموعه‌ی ممکن را توصیف کنیم، و این جای خوشبختی است، زیرا یک فضای نمونه‌ای با فقط ۲۰ برآمد ممکن، $۲^{۲۰} = ۱۰۴۸۵۷۶$ زیرمجموعه دارد و تعداد زیرمجموعه‌ها وقتی ۵۰ برآمد ممکن، ۱۰۰ برآمد ممکن، یا بیشتر موجود باشند، بسیار سریع افزایش می‌یابد. اغلب به‌جای فهرست‌کردن احتمال‌های تمام زیرمجموعه‌های ممکن، احتمال‌های پیشامدهای، یا عناصر فضای نمونه‌ای S را فهرست می‌کنیم، و آنگاه قضیه‌ی زیر را به کار می‌بریم.

قضیه‌ی ۳–۱. اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسسته‌ی S باشد، آنگاه $P(A)$ برابر است با مجموع احتمال‌های پیشامدهای ساده‌ی تشکیل دهنده‌ی A.

برهان. فرض می‌کنیم $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$،... دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از پیشامدهای ساده باشد که پیشامد A را تشکیل می‌دهند. پس

$$A = O_۱ \cup O_۲ \cup O_۳ \cup \cdots$$

و چون پیشامدهای ساده، O_iها، برحسب تعریف دوبه‌دو ناسازگارند، از اصل سوم احتمال نتیجه می‌شود که

$$P(A) = P(O_۱) + P(O_۲) + P(O_۳) + \cdots$$

و این رابطه، برهان را کامل می‌کند.

برای استفاده از این قضیه، باید قادر به تخصیص احتمال‌ها به پیشامدهای ساده آزمایش باشیم. اینکه چگونه می‌توان این کار را در برخی حالات‌های خاص انجام داد، با مثال‌های زیر تشریح می‌شود.

Payam Noor University

مثال ۳-۱۹. اگر سکه‌ی سالمی را دوبار پرتاب کنیم، احتمال به دست آوردن حداقل یک شیر چقدر است؟

حل. فضای نمونه‌ای برای این آزمایش عبارت است از

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

که در آن، H و T به ترتیب شیر و خط را نشان می‌دهند. چون سکه متعادل است، می‌پذیریم که وقوع این برآمدها هم‌شانس‌اند، و بنابراین به هرنقطه‌ی فضای نمونه‌ای احتمال $\frac{۱}{۴}$ را نسبت می‌دهیم، اگر A پیشامدی باشد که حداقل یک شیر به دست آید، آنگاه $A = \{HH, HT, TH\}$، و

$$P(A) = P(\{HH\}) + P(\{HT\}) + P(\{TH\})$$
$$= \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}.$$

مثال ۳-۲۰. تاسی را که احتمال وقوع هر عدد فرد با آن، دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است در نظر بگیرید. اگر در یک‌بار ریختن این تاس، G پیشامد وقوع عددی بزرگتر از ۳ باشد، $P(G)$ را بیابید.

حل. فضای نمونه‌ای عبارت است از $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$. اگر به هر عدد زوج، احتمال w و به هر عدد فرد، احتمال $۲w$ را نسبت دهیم، مطابق اصل موضوع ۲ داریم:

$$۲w + w + ۲w + w + ۲w + w = ۹w = ۱$$

پس $w = \frac{۱}{۹}$، و

$$P(G) = \frac{۱}{۹} + \frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۹} = \frac{۴}{۹}.$$

اگر فضای نمونه‌ای، گسسته ولی نامتناهی باشد، احتمال‌ها را باید به وسیله‌ی یک قاعده‌ی ریاضی ترجیحاً به‌وسیله‌ی فرمول یا معادله‌ای، به برآمدهای فردی نسبت داد.

مثال ۳-۲۱. اگر $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$،...، دنباله‌ای نامتناهی از پیشامدهای ساده‌ی یک آزمایش مفروض باشد، تحقیق کنید که

$$P(O_i) = (\frac{1}{2})^i; \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

واقعاً یک اندازه‌ی احتمال است.

حل. چون احتمال‌ها همگی مثبت‌اند، فقط باید نشان‌دهیم که $P(S) = 1$. داریم

$$P(S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

اگر فرمول تعیین مجموع جملات یک تصاعد هندسی نامتناهی را به‌کار بریم، به دست آوریم

$$P(S) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

در رابطه با مثال ۳–۲۱، کلمه‌ی «مجموع» در قضیه‌ی ۳–۱، باید به‌قسمی تعبیر شود که شامل مقدار یک سری نامتناهی نیز باشد.

اندازه‌ی احتمال مثال ۳–۲۱، مثلاً اگر O_i این پیشامد باشد که شخصی در پرتاب سکه‌ای همگن برای اوّلین بار در پرتاب iام سکه، خط بیاورد، اندازه‌ی احتمال مناسبی است. پس، احتمال آنکه اوّلین خط در سومین، چهارمین، یا پنجمین پرتاب سکه ظاهر شود برابر است با

$$(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^5 = \frac{7}{32}$$

و احتمال آنکه اوّلین خط در تعداد فردی از پرتاب‌ها رخ‌دهد برابر است با

$$(\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

اگر مانند مثال ۳–۱۹، آزمایش چنان باشد که بتوانیم برای نقاط فضای نمونه‌ای S، احتمال‌هایی برابر در نظر گیریم، می‌توانیم از حالت خاص قضیه‌ی ۳–۱ که به‌صورت زیر است، استفاده کنیم.

Payam Noor University

قضیه‌ی ۳-۲. اگر نتیجه‌ی آزمایشی بتواند به یکی از N برآمد مختلف هم‌شانس باشد، و اگر n تا از این برآمدها با هم پیشامد A را تشکیل دهند، آنگاه احتمال پیشامد A برابر است با

$$P(A)=\frac{n}{N}.$$

برهان. فرض می‌کنیم O_1، O_2،...، O_N، پیشامدهای ساده، یا پیشامدهایی با اعضای برآمدهای فردی S را نشان دهند که احتمال هرکدام $\frac{1}{N}$ است. اگر پیشامد A، اجتماع n تا از این برآمدهای دوبه‌دو ناسازگار بوده، و مهم نباشد که کدامیک از آنها این پیشامد را تشکیل دهند، آنگاه

$$\begin{aligned}P(A)&=P(O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n)\\&=P(O_1)+P(O_2)+\cdots+P(O_n)\\&=\underbrace{\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\cdots+\frac{1}{N}}_{\#n}\\&=\frac{n}{N}.\end{aligned}$$

مشاهده کنید که فرمول $P(A)=\frac{n}{N}$ در قضیه‌ی ۳-۲، با مفهوم احتمال کلاسیک یکی است(در برخی متون از قضیه‌ی ۳-۲ به عنوان تعریفی از مفهوم احتمال کلاسیک استفاده می‌کنند (بازرگان ۱۳۸٤)). البته آنچه در اینجا نشان داده‌ایم آن است که مفهوم احتمال کلاسیک با اصول موضوع احتمال سازگار است-این مطلب در مورد خاصی که برآمدهای فردی هم‌شانس‌اند از اصول موضوع احتمال نتیجه می‌شود.

مثال ۳-۲۲. در یک بازی با دسته کارت ۵۲ تایی(کارت‌ها از شماره‌های یک الی سیزده در چهار رنگ بسته‌بندی شده‌اند)، پنج کارت به تصادف اختیار می‌کنیم، اگر سه کارت دارای یک شماره و دو کارت دیگر هم دارای یک شماره باشند برنده‌ی بازی هستیم. احتمال برنده‌شدن در این بازی چقدر است؟

حل. تعداد راه‌هایی که می‌توان سه کارت با یک شماره و دو کارت با یک شماره‌ی دیگر، مثلاً سه کارت با شماره‌ی ۷ و دو کارت با شماره‌ی ۱ انتخاب کرد برابر است با $\binom{۴}{۳}\times\binom{۴}{۲}$. چون ۱۳ شماره از هر رنگ داریم ۱۳ راه انتخاب سه کارت با یک شماره و سپس ۱۲ راه انتخاب دو کارت با یک شماره وجود دارند. کل راه‌های ممکن انتخاب چنین پنج کارتی برابر

$$n = ۱۳\times ۱۲\times\binom{۴}{۳}\times\binom{۴}{۲}$$

است. از طرفی تعداد راه‌های ممکن انتخاب پنج کارت از ۵۲ کارت

$$N=\binom{۵۲}{۵}$$

است و لذا از قضیه‌ی ۳-۲ نتیجه می‌شود که احتمال برد بازی عبارت است از

$$P(A)=\frac{n}{N}=\frac{۱۳\times۱۲\times\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۲}}{\binom{۵۲}{۵}}=۰/۰۰۱۴.$$

۳-۶ برخی قواعد احتمال

با استفاده از سه اصل موضوع احتمال، می‌توانیم بسیاری از قاعده‌های دیگر را که کاربردهای مهمّی دارند، نتیجه بگیریم. بین پیامدهای فوری اصل موضوع، قضایای زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه‌ی ۳-۳. همواره داریم $P(\phi)=۰$.

برهان. چون پیشامدهای S و ϕ ناسازگارند و مطابق تعریف مجموعه‌ی تهی ϕ، $S\cup\phi=S$، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}P(S)&=P(S\cup\phi)\\&=P(S)+P(\phi)\qquad\text{(بنابه اصل موضوع ۳)}\end{aligned}$$

و در نتیجه $P(\phi)=۰$.

باید به این مطلب مهمّ توجه کرد که از $P(A)=0$ نتیجه نمی‌شود که الزاماً A مجموعه‌ای تهی است. درعمل اغلب به پیشامدهایی که، به زبان محاوره‌ای، در یک میلیون سال هم رخ نمی‌دهند، احتمال صفر را نسبت می‌دهیم. برای نمونه، مثال کلاسیکی وجود دارد که ما به این پیشامد که میمونی "*جمهوری افلاطون*" را کلمه‌به‌کلمه بدون خطا با فشار روی دکمه‌ها، تایپ کند، احتمال صفر را نسبت می‌دهیم. این واقعیت شایسته‌ی توجه است که $P(A)=0$، رابطه‌ی $A=\phi$ را، به ویژه در فضای نمونه‌ای ناشمارا، نتیجه نمی‌دهد.

قضیه‌ی ۳-٤. برای هر دو پیشامد ناسازگار از S مانند A و B داریم

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B).$$

برهان. با توجه به رابطه‌ی $A\bigcup B=A\bigcup B\bigcup\phi\bigcup\phi\ldots$ و اصل موضوع ۳،

$$\begin{aligned} P(A\bigcup B)&=P(A\bigcup B\bigcup\phi\bigcup\phi\ldots)\\ &=P(A)+P(B)+P(\phi)+P(\phi)+\cdots\\ &=P(A)+P(B). \end{aligned}$$

یک نتیجه‌ی فوری که می‌توان از قضیه‌ی ۳-٤ گرفت آن است که از ناسازگاری A' و A و اینکه $S=A\bigcup A'$، استفاده کنیم و رابطه‌ی زیر را به دست آوریم.

$$P(A')=1-P(A).$$

در رابطه با تعبیر فراوانی، این نتیجه اشاره برآن دارد که اگر پیشامدی، مثلاً در ۳۷ درصد مواقع رخ دهد، در ۶۳ درصد مواقع رخ نمی‌دهد.

قضیه‌ی ۳-۵. اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند و $A\subset B$، آنگاه $P(A)\le P(B)$.

برهان. چون $A\subset B$، می‌توانیم بنویسیم

$$B=B\bigcap S=B\bigcap(A\bigcup A')=\left(B\bigcap A\right)\bigcup\left(B\bigcap A'\right)=A\bigcup\left(B\bigcap A'\right)$$

که درستی روابط آخر به آسانی به وسیله‌ی یک نمودار ون تحقیق می‌شود. در این صورت A و $A'\cap B$ ناسازگارند، و در نتیجه

$$P(B) = P(A) + P(A'\cap B) \quad \text{(بنابه اصل موضوع ۳)}$$
$$\geq P(A). \quad \text{(بنابه اصل موضوع ۱)}$$

با استفاده از کلمات، این قضیه بیان می‌کند که اگر پیشامد A زیرمجموعه‌ای از پیشامد B باشد، آنگاه $P(A)$ بزرگتر از $P(B)$ نیست. مثلاً، احتمال کشیدن یک کارت سبز از یک دسته کارت ۵۲تایی، بزرگتر از احتمال کشیدن یک کارت سبز یا قرمز نیست. در واقع احتمال $\frac{۱}{۴}$ با احتمال $\frac{۱}{۲}$ مقایسه می‌شود.

قضیه‌ی ۳-۶. برای هر پیشامد A، $۰ \leq P(A) \leq ۱$.

برهان. با به کار بردن قضیه‌ی ۳-۵ و این واقعیت که برای هر پیشامد A در S، $\phi \subset A \subset S$، داریم

$$P(\phi) \leq P(A) \leq P(S)$$

چون $P(\phi) = ۰$ و $P(S) = ۱$ خواهیم داشت

$$۰ \leq P(A) \leq ۱.$$

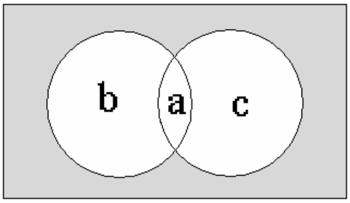
سوّمین اصل موضوع احتمال اغلب به یک **قاعده‌ی جمع خاص** اطلاق می‌شود. قاعده‌ی مزبور از این نظر خاص است که پیشامدهای $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ...، باید دوبه‌دو ناسازگار باشند. برای هر دو پیشامد A و B، **قاعده‌ی جمع عام** زیر موجود است.

قضیه‌ی ۳-۷. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B).$$

برهان. همان‌طور که در نمودار ون شکل ۳-۲ دیده می‌شود به پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار $A\cap B$، $A\cap B'$، $A'\cap B$، به ترتیب احتمال‌های a، b، c را نسبت می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$P(A\cup B)=a+b+c$$
$$=(a+b)+(c+a)-a$$
$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$



شکل ۳-۲: نمودار ون برای اثبات قضیه‌ی ۳-۷

مثال ۳-۲۳. اگر برای خانواده‌ای (که به منظور یک بررسی نمونه‌ای در یک ناحیه‌ی بزرگ شهری، به تصادف انتخاب شده است) احتمال دارا بودن یک دستگاه تلویزیون رنگی، یک دستگاه کامپیوتر و یا هردو وسیله به ترتیب $0/86$، $0/35$، و $0/29$ باشد، احتمال اینکه این خانواده یکی از دو نوع یا هر دو نوع دستگاه (حداقل یکی از دو نوع دستگاه) را داشته باشند چقدر است؟

حل. اگر A، این پیشامد باشد که خانواده‌ی مزبور دارای یک دستگاه تلویزیون رنگی است، و B، این پیشامد باشد که دارای یک دستگاه کامپیوتر است، داریم $P(A\cap B)=0/29$، $P(A)=0/86$، $P(B)=0/35$، و اگر این مقادیر را در فرمول قضیه‌ی ۳-۷، قراردهیم، نتیجه می‌شود

$$P(A\cup B)=0/86+0/35-0/29=0/92.$$

مثال ۳-۲۴. خودرویی که در کنار بزرگ‌راهی متوقف شده است با احتمال $0/23$ ترمزهای معیوب و با احتمال $0/24$ فرسودگی شدید تایر دارد. همچنین با احتمال $0/38$ ترمزهای معیوب یا فرسودگی شدید تایر یا هردو را دارد. احتمال اینکه این اتومبیل، ترمزهایش معیوب بوده و فرسودگی شدید تایر داشته باشد، چقدر است؟

حل. اگر B این پیشامد باشد که اتومبیل مزبور ترمزهایش معیوب است، و T این پیشامد باشد که تایرهایش فرسودگی شدید دارند، داریم

$$P(B) = ۰/۲۳,\quad P(T) = ۰/۲۴,\quad P(B \cup T) = ۰/۳۸.$$

از قرار دادن این مقادیر در فرمول قضیه‌ی ۳–۷ نتیجه می‌شود

$$۰/۳۸ = ۰/۲۳ + ۰/۲۴ - P(B \cap T).$$

از حل این معادله نسبت به $P(B \cap T)$، به دست می‌آوریم

$$P(B \cap T) = ۰/۲۳ + ۰/۲۴ - ۰/۳۸ = ۰/۰۹.$$

با به کار بردن مکرر قضیه‌ی ۳–۷، می‌توان قاعده‌ی جمع را به‌قسمی تعمیم داد که برای هر تعداد از پیشامدها قابل اجرا باشد. مثلاً برای سه پیشامد به دست می‌آوریم:

قضیه‌ی ۳–۸. اگر A، B، و C، سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای در S باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

برهان. $A \cup B \cup C$ را به‌صورت $A \cup (B \cup C)$ می‌نویسیم و دوبار قضیه‌ی ۳–۷ را به کار می‌بریم، یک بار برای $P(A \cup (B \cup C))$ و یک بار برای $P(B \cup C)$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup (B \cup C)) \\ &= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap (B \cup C)). \end{aligned}$$

از قانون توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع استفاده نموده و داریم

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

و نتیجه آنکه

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Payam Noor University

مثال ۳-۲۵. فرض می‌کنیم شخصی که به دندان‌پزشک خود مراجعه می‌کند احتمال اینکه دندان‌هایش را جرم‌گیری کند ۰/۴۴، احتمال اینکه دندانی برای پرکردن داشته باشد، ۰/۲۴، احتمال آنکه دندانی برای کشیدن داشته باشد ۰/۲۱، احتمال آنکه دندان‌هایش را جرم‌گیری و دندانی را پرکند، ۰/۰۸، احتمال اینکه دندان‌هایش را جرم‌گیری کند و دندانی را بکشد ۰/۱۱، احتمال اینکه دندانی برای پرکردن و دندانی برای کشیدن داشته باشد، ۰/۰۷ و احتمال اینکه دندان‌هایش را جرم‌گیری و دندانی را پرکند و دندانی را بکشد ۰/۰۳ باشد. احتمال اینکه دندان‌پزشک حداقل یکی از سه مورد را برای او انجام دهد چقدر است؟

حل. اگر C این پیشامد باشد که شخص دندان‌هایش را جرم‌گیری کند،

F این پیشامد باشد که شخص دندانی را پرکند،

E این پیشامد باشد که شخص دندانی را بکشد،

آنگاه $P(C)=۰/۴۴$ ، $P(F)=۰/۲۴$، $P(E)=۰/۲۱$، $P(C\bigcap F)=۰/۰۸$، $P(C\bigcap E)=۰/۱۱$، $P(F\bigcap E)=۰/۰۷$، و $P(C\bigcap F\bigcap E)=۰/۰۳$، و با قراردادن در فرمول، نتیجه می‌شود که

$$P(C\bigcup F\bigcup E)=۰/۴۴+۰/۲۴+۰/۲۱-۰/۰۸-۰/۱۱-۰/۰۷+۰/۰۳=۰/۶۶.$$

تمرین

۳-۱۱. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A)=۰/۲$، $P(B)=۰/۶$ و $P(A\bigcup B)=۰/۷$، مقادیر $P(A\bigcap B)$، $P(A'\bigcap B)$، $P(A'\bigcup B')$، و $P(A'\bigcap B')$ را به‌دست آورید.

۳-۱۲. فرمولی برای محاسبه‌ی $P(A\Delta B)$ برحسب $P(A)$، $P(B)$، و $P(A\bigcap B)$ ارائه دهید (احتمال اینکه دقیقاً یکی از دو پیشامد رخ دهد).

۳-۱۳. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، احتمال پیشامدهای زیر را برحسب $P(A)$، $P(B)$، و $P(A\bigcap B)$ به دست آورید:

الف) دقیقاً i تا، $i=۰,۱,۲$، از پیشامدهای A و B رخ دهند.

Payam Noor University

ب) حداقل i تا، $i=0,1,2$، از پیشامدهای A و B رخ دهند.

ج) حداکثر i تا، $i=0,1,2$، از پیشامدهای A و B رخ دهند.

۳-۱۴. جعبه‌ای دارای ۲۴ مهره است که از ۱ تا ۲۴ شماره‌گذاری شده است. یک مهره به‌تصادف از این جعبه انتخاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده‌ی عددی بخش‌پذیر بر ۲ و B پیشامد مشاهده‌ی عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مقدار $P(A\bigcap B)$ را به دست آورید.

۳-۱۵. برای A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S، نشان دهید

الف) $P(A\bigcap B)\le P(A)+P(B)$،

ب) $P(A\bigcap B)\ge P(A)+P(B)-1$.

۳-۱۶. به کمک استقرا ثابت کنید که برای هر دنباله‌ی متناهی از پیشامدهای E_1، E_2، ...، و E_n

$$P(E_1\bigcup E_2\bigcup\cdots\bigcup E_n)\le\sum_{i=1}^{n}P(E_i).$$

۳-۱۷. بخت رخ‌دادن یک پیشامد برحسب نسبت احتمال وقوع آن به احتمال عدم وقوع آن داده می‌شود، به‌شرط آنکه هیچ یک از دو احتمال صفر نباشد. بخت را معمولاً برحسب دو عدد صحیح مثبت که عامل مشترک ندارند، بیان می‌کنند. اگر بخت اینکه پیشامدی رخ دهد برابر a به b باشد، نشان دهید که احتمال این پیشامد $p=\dfrac{a}{a+b}$ است.

۳-۱۸. توضیح دهید که چرا در هریک از احکام زیر اشتباهی وجود دارد:

الف) احتمال اینکه فرهاد در امتحان وکالت قبول شود ۰/۶۶ و احتمال اینکه رد شود ۰/۳۴- است.

ب) احتمال اینکه یک منشی در تایپ گزارشی مرتکب ۰،۱،۲،۳،۴ یابیش از ۵ اشتباه شود به ترتیب ۰/۱۲، ۰/۲۵، ۰/۳۶، ۰/۱۴، ۰/۰۹، ۰/۰۷ است.

Payam Noor University

ج) احتمال این‌که بانکی در روزی مفروض ۰، ۱، ۲ یا بیش از ۳ چک بدون‌محل دریافت کند به‌ترتیب ۰/۰۸، ۰/۲۱، ۰/۲۹، ۰/۴۰ است.

۳-۱۹. احتمال اینکه نحوه‌ی بهره‌برداری از یک دستگاه جدید اشعه‌ی ایکس، به خیلی مشکل، مشکل، متوسط، آسان و خیلی آسان درجه‌بندی شود به‌ترتیب ۰/۱۲، ۰/۱۷، ۰/۳۴، ۰/۲۹، ۰/۰۸، است. پیدا کنید احتمال اینکه نحوه‌ی بهره‌برداری دستگاه به یکی از صورت‌های زیر درجه‌بندی شود:

الف) مشکل یا خیلی مشکل،

ب) نه خیلی مشکل و نه خیلی آسان،

ج) متوسط یا بدتر،

د. متوسط یا بهتر.

۳-۲۰. شرکت ایران خودرو برای تأمین لاستیک، می‌تواند با احتمال‌های ۰/۱۵، ۰/۲۴، ۰/۰۳، ۰/۲۸، ۰/۲۲، ۰/۰۸ به ترتیب از شرکت‌های A، B، C، D، E، یا F خریداری کند. احتمال خرید لاستیک را در هریک از حالت‌های زیر تعیین کنید.

الف) از شرکت B یا E باشد،

ب) از شرکت A، C یا E باشد،

ج) از شرکت C یا F باشد،

د) از شرکت A، C، D، یا E باشد.

۳-۲۱. در کلاهی بیست تکه کاغذ سفید که از ۱ تا ۲۰، ده تکه کاغذ قرمز که از ۱ تا ۱۰، چهل تکه کاغذ زرد که از ۱ تا ۴۰، و ده تکه کاغذ آبی که از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند ریخته شده است. اگر این ۸۰ تکه کاغذ را کاملاً مخلوط کنیم به‌قسمی که تمام تکه کاغذها در موقع استخراج احتمال برابر داشته باشند، پیدا کنید احتمال استخراج یک تکه کاغذ را که

الف) آبی یا سفید باشد،

ب) به‌شماره‌ی ۱، ۲، ۳، ۴، یا ۵ باشد،

Payam Noor University

ج) قرمز یا زرد و با شماره‌ی ۱، ۲، ۳، یا ۴ باشد،

د) به‌شماره‌ی ۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵ باشد،

ه) سفید و با شماره‌ای بزرگتر از ۱۲ یا زرد و با شماره‌ی بزرگتر از ۲۶ باشد.

۳-۲۲. یک استاد زیست‌شناسی در کارهای تحقیقاتی‌اش دو دستیار دارد. احتمال اینکه دستیار مسن‌تر در روز معینی غیبت کند ۰/۰۸، و احتمال اینکه دستیار جوان‌تر در روز معینی غیبت کند ۰/۰۵، و احتمال اینکه هر دو در روز معینی غایب باشند ۰/۰۲ است. پیدا کنید احتمال اینکه

الف) حداکثر یکی از هر دو دستیار در روز معینی غایب باشند،

ب) حداقل یکی از دو دستیار در روز معینی غایب نباشد،

ج) فقط یکی از دو دستیار در روز معینی غایب باشد.

۳-۷ احتمال شرطی

در اکثر مواقع لازم می‌آید که احتمال پیشامدی مانند A، که با پیشامدی مانند B مربوط باشد، بعد از اطلاع از وقوع یا عدم وقوع پیشامد B، اصلاح گردد. به بیانی دیگر، ممکن است وقوع پیشامد B بر احتمال وقوع پیشامدی چون A تاثیر داشته باشد. بنابراین کسب اطلاعات درباره‌ی جنبه‌ای از نتایج آزمایش، ممکن است تجدیدنظر در احتمال پیشامدی را که مربوط به جنبه‌ی دیگری از نتایج است، ایجاب‌کند. احتمال تجدیدنظر شده‌ی A، وقتی معلوم شود که B رخ داده است، **احتمال شرطی A به شرط B** نامیده و با $P(A|B)$ نشان داده می‌شود.

برخی از ایده‌هایی که به احتمال‌های شرطی مربوط می‌شوند، در مثال زیر تشریح شده‌اند.

مثال ۳-۲۶. در یک تحقیق از عملکرد بانکی، پنجاه شعبه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و نتایج در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

		سرویس‌دهی به مشتریان	
		خوب	ضعیف
زمان گشایش شعبه	حداقل ۱۰ سال	۱۶	۴
	کمتر از ۱۰ سال	۱۰	۲۰

Payame Noor University

اگر فردی به تصادف یکی از این شعب را انتخاب کند، احتمال اینکه شعبه سرویس‌دهی خوبی به مشتریان ارائه دهد چقدر است؟ همچنین اگر شخصی به تصادف یکی از شعب را انتخاب کند که حداقل بیش از ده سال سابقه داشته باشد، احتمال اینکه شعبه‌ی انتخابی به مشتریان خوب سرویس‌دهی کند چقدر است؟ منظور از «تصادف» این است که در هر حالت، تمام انتخاب‌های ممکن هم‌شانس‌اند.

حل. با فرض هم‌شانسی همه‌ی مشتریان، فرمول قضیه‌ی ۳-۲ را به کار می‌بریم. اگر G، انتخاب شعبه را نشان دهد که سرویس خوب ارائه می‌دهد و اگر فرض کنیم $n(G)$ تعداد اعضای G را نشان دهد، و $n(S)$ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای باشد، به دست می‌آوریم

$$P(G)=\frac{n(G)}{n(S)}=\frac{۱۶+۱۰}{۵۰}=۰/۵۲.$$

این پاسخ سؤال اوّل است.

برای پاسخ سؤال دوّم، ما خود را به فضای نمونه‌ای کوچکتری که شامل سطر اوّل جدول است، یعنی به $۱۶+۴=۲۰$ شعب که حداقل ده سال سابقه دارند محدود می‌کنیم. از ۲۰ شعبه، ۱۶ شعبه سرویس خوب ارائه می‌دهند، و به دست می‌آوریم

$$P(G|T)=\frac{۱۶}{۲۰}=۰/۸۰,$$

که در آن T، انتخاب شعبه‌ای را نشان می‌دهد که حداقل ده سال سابقه دارد. این پاسخ سؤال دوّم است و همان‌طور که انتظار داشتیم، $P(G\,|\,T)$ خیلی از $P(G)$ بزرگتر است. چون صورت $P(G\,|\,T)$ برابر $n(T\cap G)=۱۶$، یعنی تعداد شعبی است که حداقل ده سال سابقه دارند و سرویس‌دهی خوبی دارند، و مخرج برابر $n(T)$، یعنی شعبی است که حداقل ده سال سابقه‌ی کار دارند. در واقع می‌توانیم آن را به صورت نمادی بنویسیم

$$P(G\,|\,T)=\frac{n(T\cap G)}{n(T)}.$$

پس، اگر صورت و مخرج را به $n(S)$، تعداد کل شعب موردنظر، تقسیم‌کنیم، به دست می‌آوریم

$$P(G\,|\,T)=\frac{\dfrac{n(T\bigcap G)}{n(S)}}{\dfrac{n(T)}{n(S)}}=\frac{P(T\bigcap G)}{P(T)},$$

و لذا احتمال شرطی $P(G\,|\,T)$ را برحسب دو احتمالی که برای تمام فضای نمونه‌ای S تعریف شده‌اند بیان کرده‌ایم.

با تعمیم این مثال، اکنون تعریف احتمال شرطی را به صورت زیر ارائه می‌دهیم.

تعریف ۳-۲. اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A)\neq ۰$، احتمال شرطی B به شرط A به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}.$$

مثال ۳-۲۷. با مراجعه به مثال ۳-۲۶، احتمال اینکه یکی از شعب با سابقه‌ی کمتر از ده سال، سرویس خوبی به مشتریان ارائه دهد چقدر است؟

حل. چون $P(T'\bigcap G)=\frac{۱۰}{۵۰}=۰/۲۰$ و $P(T')=\frac{۱۰+۲۰}{۵۰}=۰/۶۰$، اگر مقادیر را در فرمول قراردهیم نتیجه می‌دهد که

$$P(G|T')=\frac{P(T'\bigcap G)}{P(T')}=\frac{۰/۲۰}{۰/۶۰}.$$

گرچه ما $P(B\,|\,A)$ را با مثالی که در آن تمام حالت‌ها هم‌شانس بودند معرفی کردیم، امّا این مطلب، شرطی برای به کار بردن تعریف نیست.

مثال ۳-۲۸. با رجوع به تاس ناهمگن مثال ۳-۲۰، احتمال اینکه شماره‌ای که ظاهر می‌شود مربع کامل باشد چقدر است؟ همچنین به فرض اینکه این شماره بزرگتر از ۳ باشد، احتمال اینکه مربع کامل باشد چقدر است؟

حل. اگر A این پیشامد باشد که شماره‌ی ظاهر شده‌ی بزرگتر از ۳ است، و B این پیشامد باشد که شماره‌ی ظاهر شده مربع کامل است، داریم $A=\{۴,۵,۶\}$ ، $B=\{۱,۴\}$، و

$A\cap B=\{۴\}$. چون احتمال‌های ظاهر شدن ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ با تاس موردنظر به‌ترتیب $\frac{۲}{۹}$، $\frac{۱}{۹}$، $\frac{۲}{۹}$، $\frac{۱}{۹}$، $\frac{۲}{۹}$، $\frac{۱}{۹}$ هستند، پاسخ اوّلین سوال را به‌صورت

$$P(B)=\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

پیدا می‌کنیم. برای تعیین $P(B\mid A)$، ابتدا

$$P(A)=\frac{۱}{۹}+\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۹}=\frac{۴}{۹} \quad و \quad P(A\cap B)=\frac{۱}{۹}$$

را محاسبه می‌کنیم. لذا با قراردادن این دو مقدار در فرمول تعریف ۳–۲، به‌دست می‌آوریم

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۴}{۹}}=\frac{۱}{۴}.$$

برای اینکه تحقیق‌کنیم فرمول ۳–۲ در مثال قبل جوابی «درست» می‌دهد، تنها کافی است در فضای نمونه‌ای کوچک شده‌ی A، به دو عدد زوج احتمال υ و به عدد فرد احتمال ۲υ را نسبت دهیم، به‌قسمی که مجموع این سه احتمال مساوی ۱ باشد. در این‌صورت داریم $\upsilon+۲\upsilon+\upsilon=۱$ یا $\upsilon=\frac{۱}{۴}$، و لذا مثل قبل $P(B\mid A)=\frac{۱}{۴}$.

با ضرب طرفین فرمول تعریف ۳–۲ در $P(A)$، **قاعده‌ی ضرب** زیر را به‌دست می‌آوریم.

قضیه‌ی ۳–۹. اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A)\neq ۰$، آنگاه

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B\mid A).$$

با استفاده از کلمات، احتمال اینکه A و B با هم رخ‌دهند برابر حاصل‌ضرب احتمال A در احتمال شرطی B به شرط A است. در صورتی دیگر، اگر $P(B)\neq ۰$، احتمال آنکه A و B، هر دو رخ دهند، برابر با حاصل‌ضرب احتمال B و احتمال شرطی A به شرط B است. به صورت نمادی

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B).$$

برای به‌دست آوردن این قاعده‌ی حاصل‌ضرب، در فرمول ۳–۹ جای A و B را عوض و از واقعیت $A \cap B = B \cap A$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۳–۲۹. اگر از محموله‌ی ۲۴۰ صفحه‌ی کلید کامپیوتر، که ۱۵تای آن معیوب است، به تصادف و به‌توالی دوتای آنها را برداریم، چقدر احتمال دارد که هردو معیوب باشند؟

حل. اگر احتمال انتخاب‌ها را برابر فرض کنیم احتمال اینکه اوّلین صفحه کلید معیوب باشد $\frac{۱۵}{۲۴۰}$، و احتمال اینکه دوّمین صفحه کلید، به شرط معیوب بودن اوّلی، معیوب باشد برابر $\frac{۱۴}{۲۳۹}$ است. لذا احتمال اینکه هردو معیوب باشند $(\frac{۱۵}{۲۴۰}) \times (\frac{۱۴}{۲۳۹}) = \frac{۷}{۱۹۱۲}$ است. البته فرض بر این است که انتخاب‌ها بدون‌جایگذاری است، یعنی اینکه قبل از انتخاب صفحه کلید دوّم، صفحه کلید اوّل به‌جای خود گذاشته نمی‌شود.

مثال ۳–۳۰. پیدا کنید احتمال اینکه به تصادف، دو یک به‌توالی از یک دسته کارت ۵۲تایی کشیده شوند.

الف) اگر بدون‌جایگذاری انتخاب کنیم،

ب) اگر باجایگذاری انتخاب کنیم.

حل. الف) اگر قبل از کشیدن کارت دوّم، کارت اوّل را به‌جای خود برنگردانیم، احتمال به دست آوردن متوالی دو یک برابر است با

$$\frac{۴}{۵۲} \times \frac{۳}{۵۱} = \frac{۱}{۲۲۱}.$$

ب) اگر قبل از کشیدن کارت دوّم، کارت اوّل را به‌جای خود برگردانیم، احتمال متناظر برابر است با

$$\frac{۴}{۵۲} \times \frac{۴}{۵۲} = \frac{۱}{۱۶۹}.$$

Payam Noor University

در وضعیت‌هایی که در دو مثال قبل توصیف شدند، بین دو پیشامد A و B، یک ترتیب زمانی قطعی وجود دارد. به‌طور کلی، وقتی می‌نویسیم $P(A|B)$ یا $P(B|A)$ نیاز به‌چنین ترتیبی نیست. برای مثال، می‌توانستیم احتمال آن را بخواهیم که اوّلین کارت کشیده شده عدد یک باشد به‌شرط آنکه دوّمین کارت کشیده شده (بدون‌جایگذاری) نیز عدد یک باشد– پاسخ به این سوال نیز $\frac{۲}{۵۱}$ خواهد داد.

قضیه‌ی ۳–۹ را می‌توان به سهولت تعمیم داد، به‌قسمی که بتوان آن را برای بیش از دو پیشامد به کار برد. مثلاً برای سه پیشامد داریم:

قضیه‌ی ۳–۱۰. اگر A، B، و C سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند، به قسمی که $P(A) \neq ۰$ و $P(A \cap B) \neq ۰$، آنگاه

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B|A)\ P(C|A \cap B).$$

برهان. با نوشتن $A \cap B \cap C$ به صورت $(A \cap B) \cap C$ و با دوبار استفاده از فرمول ۳–۹، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P((A \cap B) \cap C) \\ &= P(A \cap B)\ P(C \mid A \cap B) \\ &= P(A)\ P(B|A)\ P(C \mid A \cap B). \end{aligned}$$

مثال ۳–۳۱. بسته‌ای حاوی ۲۰ فیوز است که ۵تای آنها معیوب‌اند. اگر به‌تصادف ۳ فیوز متوالیاً و بدون‌جایگذاری از بسته‌ی مزبور انتخاب کنیم، احتمال اینکه هر ۳ فیوز معیوب باشند چقدر است؟

حل. اگر A پیشامد معیوب‌بودن فیوز اوّل، B پیشامد معیوب‌بودن فیوز دوّم، و C پیشامد معیوب‌بودن فیوز سوّم باشد، آنگاه $P(A) = \frac{۵}{۲۰}$، $P(B|A) = \frac{۴}{۱۹}$، $P(C|A \cap B) = \frac{۳}{۱۸}$، و اگر آن را در فرمول قراردهیم نتیجه می‌شود

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{۵}{۲۰} \times \frac{۴}{۱۹} \times \frac{۳}{۱۸} = \frac{۱}{۱۱۴}.$$

تعمیم بیشتر قضیه‌های ۳–۹ و ۳–۱۰ به k پیشامد نیز امکان‌پذیر است.

تمرین

۳-۲۳. نشان دهید که احتمال‌های شرطی در سه اصل موضوع احتمال صادقند، به عبارت دیگر نشان دهید که اگر $P(B)\neq 0$ آنگاه

الف) $P(A|B)\geq 0$،

ب) $P(B|B)=1$،

ج) برای هر دنباله از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار A_1، A_2،...

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)+\cdots.$$

۳-۲٤. به کمک مثال‌های عددی نشان دهید که $P(B|A)+P(B|A')$،

الف) ممکن است مساوی ۱ باشد،

ب) لازم نیست مساوی ۱ باشد.

۳-۲۵. نشان دهید که به شرط $P(A\cap B\cap C)\neq 0$،

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B|A).P(C|A\cap B).P(D|A\cap B\cap C).$$

۳-۲٦. برای سه پیشامد A، B، و C، با داشتن شرایط

$$P(C|A\cap B)=P(C|B) \text{ و } P(A\cap B\cap C)\neq 0$$

نشان دهید که $P(A|B\cap C)=P(A|B)$.

۳-۲۷. برای تصدی شغلی در بخش خبری یک ایستگاه تلویزیون، ۹۰ داوطلب وجود دارند. بعضی از آنها فارغ‌التحصیل دانشگاه‌اند، و برخی نیستند، برخی از آنها حداقل سه سال سابقه کار دارند و برخی ندارند. جدولی تفکیکی به‌صورت زیر است:

	فارغ‌التحصیل دانشگاه	دانشگاه نرفته
حداقل با سه سال تجربه	۱۸	۹
کمتر ازسه سال تجربه	۳۶	۲۷

اگر ترتیب مصاحبه‌ی داوطلبان به وسیله‌ی مدیر ایستگاه، تصادفی باشد، G پیشامدی است که اوّلین داوطلب که مصاحبه می‌شود فارغ‌التحصیل دانشگاه است، و T پیشامدی است که اوّلین داوطلبی که مصاحبه می‌شود حداقل سه سال سابقه‌ی کار دارد.

Payam Noor University

هر یک از احتمال‌های زیر را مستقیماً از درایه‌ها و حاصل‌جمع‌های سطری و ستونی جدول تعیین کنید.

الف) $P(G)$،

ب) $P(T')$،

ج) $P(G \cap T)$،

د) $P(G' \cap T')$،

ه) $P(T \mid G)$،

و) $P(G' \mid T')$.

۳–۲۸. نتایج تمرین قبل را برای تحقیق درستی تساوی‌های زیر به‌کار برید.

الف) $P(T \mid G) = \dfrac{P(G \cap T)}{P(G)}$،

ب) $P(G' \mid T') = \dfrac{P(G' \cap T')}{P(T')}$.

۳–۲۹. نشان دهید که اگر $P(B \mid A) = P(B)$ و $P(B) \neq 0$، آنگاه $P(A \mid B) = P(A)$.

۳–۳۰. جعبه‌ای شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۸ مهره‌ی سیاه است. ۵ مهره به تصادف و بدون‌جایگذاری از این جعبه و بدون نگاه کردن به رنگ مهره‌ها کنار گذاشته می‌شود.

الف) اگر یک مهره مجدداً از این جعبه انتخاب شود، احتمال اینکه مهره‌ی انتخابی سفید باشد چقدر است؟

ب) اگر دو مهره مجدداً به تصادف از این جعبه انتخاب شود، احتمال اینکه دقیقاً شامل یک مهره‌ی سفید باشد چقدر است؟

۳–۳۱. جعبه‌ای شامل ۸ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است. یک نمونه‌ی تصادفی ۴تایی بدون‌جایگذاری از این جعبه انتخاب می‌شود.

الف) احتمال این را که مهره‌های دوّم و سوّم سفید باشند در حالی که بدانیم نمونه دقیقاً شامل ۳ مهره‌ی سفید است به‌دست آورید.

Payam Noor University

ب) احتمال این را که مهره‌ی اوّل سفید باشد در حالی که بدانیم نمونه شامل ۲ مهره‌ی سفید است به‌دست آورید.

۳–۳۲. سه جعبه را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که در جعبه‌ی اوّل ۳ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه، در جعبه‌ی دوّم ۶ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و در جعبه سوّم ۲ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است. اگر یک مهره به تصادف از هر جعبه انتخاب شود، احتمال اینکه مهره‌ی انتخابی از جعبه‌ی اوّل سفید باشد به شرط آن‌که دقیقاً ۲ مهره‌ی سفید انتخاب شده باشد، چقدر است؟

۳–۸ پیشامدهای مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل می‌گویند اگر رخ‌دادن یا رخ‌ندادن هریک از آنها در احتمال رخ‌دادن دیگری تأثیری نداشته باشد. برای مثال در انتخاب‌های باجایگذاری در هر مرحله نتایج از هم مستقل هستند. به‌طور نمادی، دو پیشامد A و B مستقل‌اند اگر

$$P(A \mid B) = P(A), \quad P(B \mid A) = P(B),$$

و موقعی که هر دو احتمال شرطی موجود باشند، یعنی وقتی $P(A)$ و $P(B)$ صفر نباشند، می‌توان نشان داد که هر یک از این برابری‌ها، دیگری را نتیجه می‌دهد.

حال اگر در فرمول قضیه‌ی ۳–۹، $P(B)$ را به‌جای $P(B \mid A)$ قرار دهیم، به دست می‌آوریم

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A) = P(A)\, P(B),$$

و این نتیجه را به‌عنوان تعریف صوری استقلال به کار خواهیم برد.

تعریف ۳–۳. دو پیشامد B و C مستقل‌اند اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

اگر دو پیشامد مستقل نباشند، می‌گویند وابسته‌اند. در به دست آوردن فرمول تعریف ۳–۳، فرض‌کردیم که $P(B \mid A)$ تعریف شده است و لذا فرض‌کردیم که $P(A) \neq 0$.

Payam Noor University

مثال ۳-۳۲. سکه‌ای همگن را سه بار پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S=\{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}.$$

فرض می‌کنیم که کلیه‌ی عناصر S هم‌شانس هستند. اگر A پیشامد رخ‌دادن شیر در هریک از دو پرتاب اوّل، B پیشامد رخ‌دادن خط در پرتاب سوم، و C پیشامد رخ‌دادن دقیقاً دو خط در سه پرتاب باشد، نشان دهید که

الف) پیشامدهای A و B مستقل‌اند،

ب) پیشامدهای B و C وابسته‌اند.

حل.

$$\begin{aligned}
A&=\{HHH, HHT\},\\
B&=\{HHT, HTT, THT, TTT\},\\
C&=\{HTT, THT, TTH\},\\
A\cap B&=\{HHT\},\\
B\cap C&=\{HTT, THT\}.
\end{aligned}$$

فرض هم‌شانس بودن همه‌ی هشت عنصر نتیجه می‌دهد که $P(A)=\frac{1}{4}$، $P(B)=\frac{1}{2}$، $P(C)=\frac{3}{8}$، $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$، و $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$.

الف) چون $P(A)P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=P(A\cap B)$، پیشامدهای A و B مستقل‌اند.

ب) چون $P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}\neq P(B\cap C)$، پیشامدهای B و C مستقل نیستند.

می‌توان نشان داد که اگر A و B مستقل باشند، آنگاه A و B'، A' و B، و A' و B' هم مستقل‌اند. یکی از حالت‌های ذکر شده را اثبات می‌کنیم.

قضیه‌ی ۳-۱۱. اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه A و B' نیز مستقل‌اند.

برهان. از آنجا که $A=(A\cap B)\cup(A\cap B')$، و $A\cap B$ و $A\cap B'$ ناسازگارند و چون A و B بنابر فرض مستقل‌اند، داریم

Payam Noor University

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A\cap B)\cup(A\cap B')) \\ &= P(A\cap B)+P(A\cap B') \\ &= P(A)\,P(B)+P(A\cap B'). \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} P(A\cap B') &= P(A)-P(A)\,P(B) \\ &= P(A)\,(۱-P(B)) \\ &= P(A)\,P(B'), \end{aligned}$$

و لذا A و B' مستقل‌اند.

در تمرین‌ها خواسته شده است که نشان دهید که اگر A و B مستقل باشند، آنگاه A' و B، و A' و B' نیز مستقل‌اند، و اگر A و B وابسته باشند، آنگاه A و B' وابسته‌اند.

برای تعمیم مفهوم استقلال به بیش از دو پیشامد، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۳-٤. پیشامدهای $A_۱$، $A_۲$، ...، A_k مستقل‌اند اگر و تنها اگر احتمال اشتراک هر ۲، ۳، ...، k تا از این پیشامدها مساوی حاصل‌ضرب احتمال‌های مربوط به هر پیشامد باشد.

برای حالتی که سه پیشامد A، B و C مطرح است شرایط استقلال به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A)\,P(B), \\ P(A\cap C) &= P(A)\,P(C), \\ P(B\cap C) &= P(B)\,P(C), \end{aligned}$$

و

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\,P(B)\,P(C).$$

قابل توجه است که سه یا چند پیشامد می‌توانند دو به دو مستقل باشند بدون آنکه کلاً مستقل باشند.

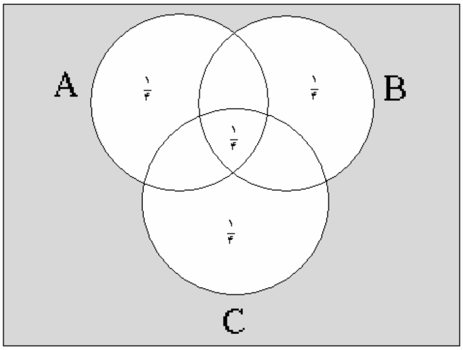
Payam Noor University

مثال ۳–۳۳. سه پیشامد با احتمال‌های مشخص شده در نمودار ون شکل ۳–۳، آمده است. تحقیق کنید که A و B مستقل‌اند، A و C مستقل‌اند، B و C مستقل‌اند، امّا A، B، و C مستقل نیستند.

حل. همان‌طور که از نمودار دیده می‌شود، $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$، $P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}$. پس

$P(A)\,P(B)=\frac{1}{4}=P(A\cap B)$، $P(A)\,P(C)=\frac{1}{4}=P(A\cap C)$،

$P(B)\,P(C)=\frac{1}{4}=P(B\cap C)$، امّا $P(A)\,P(B)\,P(C)=\frac{1}{8}\neq P(A\cap B\cap C)$.



شکل ۳–۳. نمودار ون برای مثال ۳–۳۳

ممکن است که $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$، بدون‌آنکه A، B، و C دوبه‌دو مستقل باشند. مثال زیر را ببینید.

مثال ۳–۳۴. مطلوب است احتمال به دست آوردن

الف) سه شیر در سه پرتاب تصادفی یک سکه‌ی همگن،

ب) چهار شش و سپس عددی دیگر در پنج ریختن یک تاس ناهمگن.

حل. الف) از ضرب احتمال‌های مربوط، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

ب) از ضرب احتمال‌های مربوط، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{7776}.$$

تمرین

۳–۳۳. نشان دهید که اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه

الف) دو پیشامد A' و B مستقل‌اند،

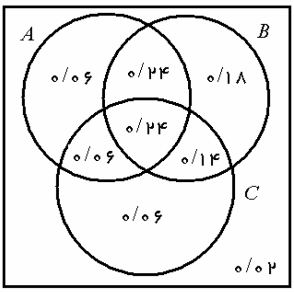
ب) دو پیشامد A' و B' مستقل‌اند.

۳–۳۴. نشان‌دهید که اگر پیشامدهای A و B وابسته باشند، آنگاه پیشامدهای A و B' وابسته‌اند.

۳–۳۵. با رجوع به شکل ۳–۴ نشان دهید که $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$، الزاماً نتیجه نمی‌دهد که پیشامدهای A، B، و C همگی دوبه‌دو مستقلند.

۳–۳۶. با رجوع به شکل ۳–۴ نشان دهید که اگر A از B مستقل و A از C مستقل باشد، آنگاه B الزاماً از C مستقل نیست.

۳–۳۷. با رجوع به شکل ۳–۴ نشان دهید که اگر A از B مستقل و A از C مستقل باشد، آنگاه A الزاماً از $B\cup C$ مستقل نیست.



شکل ۳–۴. شکل مورد نیاز برای تمرین‌های ۳–۳۵، ۳–۳۶، ۳–۳۷

۳–۳۸. اگر سه پیشامد A، B، و C مستقل باشند، نشان دهید که

الف) A و $B\cap C$ مستقل‌اند،

ب) A و $B\cup C$ مستقل‌اند،

Payame Noor University

۳–۳۹. نشان دهید که برای اینکه k پیشامد مستقل باشند باید $۲^k - k - ۱$ شرط برقرار باشد.

۳–٤۰. سکه‌ای به‌قسمی دستکاری شده است که احتمال آمدن شیر و خط به ترتیب ۰/۵۲ و ۰/۴۸ است. اگر این سکه سه بار پرتاب شود، احتمال به دست آوردن

الف) سه شیر،

ب) دو خط و یک شیر با همین ترتیب.

۳–٤۱. اگر پنج کامیون از ده کامیون حمل بار شرکتی، استانداردهای مربوط به میزان دود اگزوز را نداشته باشند و سه تا از آنها برای بررسی انتخاب شوند، احتمال آنکه هیچ از یک کامیون‌های منتخب استانداردهای مذکور را نداشته باشد چقدر است؟

۳–٤۲. اگر شخصی از ۱۵ سکه‌ی طلای موجودی یک صراف که ۶تای آنها تقلبی است ۴ سکه به‌تصادف انتخاب کند، احتمال آنکه سکه‌های منتخب همه تقلبی باشند چقدر است؟

۳–٤۳. یک فروشگاه بزرگ، ماهیانه، صورت حساب بدهی مشتریانی را که حق نسیه بردن دارند برای آنها می‌فرستند. فروشگاه دریافته است مشتریی که بلافاصله در یک ماه بدهی خود را می‌پردازند با احتمال ۰/۹ ماه بعد نیز بلافاصله بدهی خود را می‌پردازند، امّا اگر در یک ماه بدهی خود را بلافاصله نپردازد احتمال این‌که در ماه بعد بلافاصله بدهی‌اش را بپردازد ۰/۴ است.

الف) مطلوب است احتمال آنکه مشتریی که در ماهی بلافاصله بدهی خود را پرداخته است در سه ماه بعد نیز بلافاصله بدهی‌اش را بپردازد؟

ب) مطلوب است احتمال آنکه مشتریی که در ماهی بلافاصله بدهی خود را نپرداخته است در دو ماه بعد نیز بدهی‌اش را فوراً نپردازد و آنگاه ماه بعد از آن فوراً بدهی خود را بپردازد.

۳–۹ قضیه‌ی بیز

مسائل زیادی وجود دارند که در آنها برآمد نهایی یک آزمایش به آنچه در مراحل میانی

مختلف رخ می‌دهند بستگی دارد. مثال زیر، مثالی ساده است که در آن، مرحله‌ای میانی وجود دارد که متشکل از دو شق است.

مثال ۳-۳۵. کار تکمیل بنای بزرگراهی ممکن است به علت اعتصاب به تأخیر افتد. فرض کنید احتمال این‌که اعتصابی رخ دهد ۰/۶۰، احتمال این‌که اگر اعتصابی نباشد کار به موقع انجام شود ۰/۸۵، و احتمال این‌که اگر اعتصابی باشد کار به موقع انجام شود، ۰/۳۵ باشد. احتمال این‌که کار به موقع انجام شود چقدر است؟

حل. اگر A پیشامد تکمیل به‌موقع کار، و B پیشامد وقوع اعتصاب باشد، اطلاعات داده شده را می‌توان چنین نوشت:

$$P(B)=۰/۶۰,\ P(A|B)=۰/۳۵,\ \ P(A|B')=۰/۸۵.$$

با استفاده از قضیه‌های احتمال، و این واقعیت که $A\bigcap B$ و $A\bigcap B'$ ناسازگارند، و صورت دیگر قاعده‌ی ضرب، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap B')) \\ &= P(A\bigcap B)+P(A\bigcap B') \\ &= P(B)\,P(A|B)+P(B')\,P(A|B'). \end{aligned}$$

در این صورت، با قراردادن مقادیر عددی، نتیجه می‌شود که

$$P\,(A)=(۰/۶۰)\,(۰/۳۵)+(۱-۰/۶۰)\,(۰/۸۵)=۰/۵۵.$$

تعمیمی از این نوع وضعیت، موردی است که در آن مرحله‌ی میانی دارای k شق مختلف است (که رخ‌دادن آنها را با $B_۱$ ، $B_۲$ ، ... ، B_k نشان می‌دهیم). این تعمیم، به قضیه‌ی زیر که گاهی آن را **قاعده‌ی احتمال کل** یا **قاعده‌ی حذف** می‌نامند نیاز دارد.

قضیه‌ی ۳-۱۲. اگر پیشامدهای $B_۱, B_۲, \ldots, B_k$ افرازی از فضای نمونه‌ای S را تشکیل دهند و به ازای هر i، $i=۱,۲,\ldots,k$، $P(B_i)\neq ۰$، آنگاه برای هر پیشامد A در S

$$P(A)=\sum_{i=۱}^{k}P(B_i)\,P(A\,|\,B_i).$$

در اینجا Bها افرازی از فضای نمونه‌ای را تشکیل می‌دهند، اگر دوبه‌دو ناسازگار بوده و اجتماع آنها مساوی S باشد.

مثال ۳–۳۶. اعضای یک شرکت مشاور از سه آژانس، اتومبیل کرایه می‌کنند: از آژانس ۱ به میزان ۶۰درصد، از آژانس ۲ به میزان ۳۰درصد، و از آژانس ۳ به میزان ۱۰درصد. اگر ۹درصد از اتومبیل‌های آژانس ۱، ۲۰درصد از اتومبیل‌های آژانس ۲، و ۶درصد از اتومبیل‌های آژانس ۳ به تنظیم موتور نیاز داشته باشند، احتمال اینکه یک اتومبیل کرایه‌ای که به شرکت مشاور تحویل شده است به تنظیم موتور نیاز داشته باشد چقدر است؟

حل. اگر A پیشامد نیاز داشتن اتومبیلی به‌تنظیم موتور و B_1، B_2، B_3 به‌ترتیب پیشامدهای تعلق یک اتومبیل کرایه شده به آژانس‌های ۱، ۲، ۳ باشند، داریم

$$P(B_3)=0/10,\ P(B_2)=0/30,\ P(B_1)=0/60,$$
$$P(A\mid B_3)=0/06,\ P(A\mid B_2)=0/20,\ P(A\mid B_1)=0/09.$$

اگر این مقادیر را در فرمول قضیه‌ی ۳–۱۲ قراردهیم، نتیجه می‌شود که

$$P(A)=(0/60)(0/09)+(0/30)(0/20)+(0/10)(0/06)=0/12.$$

پس، ۱۲درصد از اتومبیل‌هایی که به‌شرکت تحویل می‌شوند به تنظیم موتور نیاز دارند.

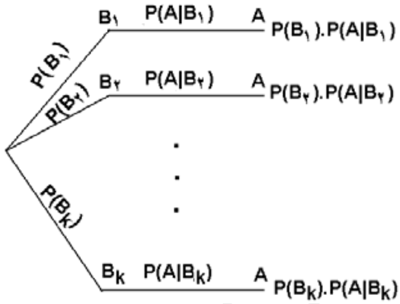
با رجوع به مثال قبلی، فرض کنیم سوال زیر موردنظر باشد: اگر یک اتومبیل کرایه که به شرکت مشاور تحویل شده است نیاز به تنظیم موتور داشته باشد، چقدر احتمال دارد که متعلق به آژانس ۲ باشد؟ برای پاسخ‌دادن به این نوع سوال‌ها، به قضیه‌ی زیر که **قضیه‌ی بیز** نامیده می‌شود نیاز داریم:

قضیه‌ی ۳–۱۳. اگر پیشامدهای B_1، B_2، ...، B_k افرازی از فضای نمونه‌ای S را تشکیل دهند و به ازای هر i، $i=1,2,\dots,k$، $P(B_i)\neq 0$، آنگاه برای هر پیشامد A در S، به قسمی که $P(A)\neq 0$،

$$P(B_r\mid A)=\frac{P(B_r)\,P(A\mid B_r)}{\sum_{i=1}^{k}P(B_i)\,P(A\mid B_i)}\ ,\qquad r=1,2,\dots,k.$$

Payame Noor University

با استفاده از کلمات، احتمال آنکه از راه شاخه‌ی rام نمودار درختی شکل ۳–۵ به پیشامد A برسیم، به شرط آنکه از راه یکی از k شاخه‌ی نمودار به A رسیده باشیم، برابر نسبت احتمال مربوط به rامین شاخه به مجموع احتمال‌های مربوط به کل k شاخه‌ی درخت است.



شکل ۳–۵. نمودار درختی برای قضیه‌ی بیز

برهان. مطابق تعریف احتمال شرطی، می‌نویسیم $P(B_r \mid A) = \dfrac{P(A \cap B_r)}{P(A)}$. لازم است فقط به‌جای $P(A \cap B_r)$ مقدار $P(B_r)P(A \mid B_r)$، و به‌جای $P(A)$، عبارت فرمول قضیه‌ی ۳–۱۲ را قرار دهیم.

مثال ۳–۳۷. با مراجعه به مثال ۳–۳۶، اگر اتومبیل کرایه‌ای که به شرکت مشاور تحویل شده است به تنظیم موتور نیاز داشته باشد، احتمال اینکه متعلق به آژانس ۲ باشد چقدر است؟

حل. با توجه به فرمول قضیه‌ی ۳–۱۳، قرارمی‌دهیم و داریم

$$P(B_۲|A) = \frac{(۰/۳۰)(۰/۲۰)}{(۰/۶۰)(۰/۹۰) + (۰/۳۰)(۰/۲۰) + (۰/۱۰)(۰/۰۶)}$$

$$= \frac{۰/۰۶۰}{۰/۱۲۰} = ۰/۵.$$

Payam Noor University

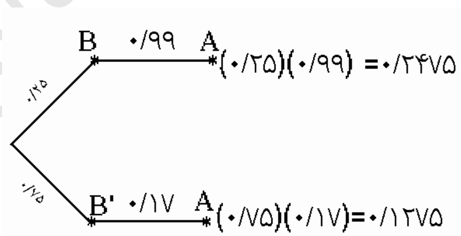
توجه کنید که گرچه فقط ۳۰درصد اتومبیل‌هایی که به شرکت کرایه داده می‌شوند متعلق به آژانس ۲ است، ولی ۵۰درصد اتومبیل‌هایی که به تنظیم نیاز دارند متعلق به این آژانس‌اند.

مثال ۳–۳۸. در استان معینی، دودزایی ۲۵درصد تمام اتومبیل‌ها بیش از حد عادی است. اگر در آزمون دودزایی وسایل نقلیه‌ی استان، اتومبیلی که بیش از حد دود تولید می‌کند با احتمالی برای ۰/۹۹ مردود شود و اگر اتومبیلی که دودزایی آن بیش از حد عادی نیست با احتمال ۰/۱۷ در این آزمون رد شود، احتمال اینکه اتومبیلی که در آزمون رد می‌شود واقعاً اتومبیلی باشد که دودزایی آن بیش از حد عادی است چقدر است؟

حل. از شکل ۳–٤ درمی‌یابیم که احتمال‌های مربوط به دو شاخه‌ی نمودار درختی عبارت‌اند از $(۰/۲۵)(۰/۹۹)=۰/۲۴۷۵$ و $(۱-۰/۲۵)(۰/۱۷)=۰/۱۲۷۵$، پس احتمال اینکه اتومبیلی که در آزمون رد می‌شود واقعاً اتومبیلی باشد که بیش از حد دود ایجاد می‌کند برابر است با

$$\frac{۰/۲۴۷۵}{۰/۲۴۷۵+۰/۱۲۷۵}=۰/۶۶.$$

البته می‌توانستیم این نتیجه را از قراردادن مستقیم در فرمول قضیه‌ی بیز، بدون نمودار درختی نیز به دست آوریم.



شکل ۳–٤. نمودار درختی برای مثال ۳–۳۸

Payam Noor University

گرچه قضیه‌ی بیز ازاصول احتمال و تعریف احتمال شرطی نتیجه می‌شود، ولی این قضیه موضوع مباحثه‌های دامنه‌داری بوده است. درباره‌ی اعتبار قضیه‌ی بیز نمی‌توان سوالی مطرح کرد، امّا بحث‌های مفصلی درباره‌ی تعبیر احتمال‌های پیشین $P(B_i)$ مطرح شده‌اند. همچنین مقدار نسبتاً زیادی از هاله‌ی اسراری که قضیه‌ی بیز را احاطه کرده‌است، ناشی از این واقعیت است که این قضیه نظیر مثال ۳–۳۸، نوعی استدلال «قهقرایی» یا «معکوس»، یعنی استدلال «از معلول به علت» را موجب می‌شود. مثلاً در مثال ۳–۳۸، رد شدن از آزمون، یک معلول، و دودزایی بیش از حد، یک علت ممکن است.

تمرین

۳–٤٤. یک کارخانه‌ی خودروسازی، بلبرینگ‌های موردنیاز خود را از سه تولیدکننده به شرح: ۵۰% از تولیدکننده‌ی ۱، ۳۰% از تولیدکننده‌ی ۲ و ۲۰% از تولیدکننده‌ی ۳، تهیه می‌کند. براساس تجربه‌ی گذشته شرکت خودروسازی می‌داند که استاندارد کنترل کیفیت این سه تولیدکننده یکسان نیست، به‌طوری که ۲% از محصولات تولیدی ۱، ۳% از محصولات تولیدی ۲، و ۴% از محصولات تولیدی ۳، معیوب هستند. چه نسبتی از بلبرینگ‌های خریداری‌شده‌ی کارخانه خودروسازی، معیوب هستند.

۳–٤۵. در تمرین ۳–٤٤، اگر بلبرینگ انتخابی معیوب باشد، احتمال اینکه بلبرینگ از محصولات تولیدی ۲ باشد چقدر است؟

۳–٤٦. جعبه‌ی I شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و جعبه‌ی II شامل یک مهره‌ی سفید و یک مهره‌ی سیاه است. دو مهره به تصادف از جعبه‌ی I انتخاب و بدون نگاه‌کردن به جعبه‌ی II منتقل می‌کنیم و یک مهره به‌تصادف از جعبه‌ی II انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه مهره‌ی سفید از جعبه II استخراج شده باشد چقدر است؟

ب) احتمال انتقال مهره‌های سفید از جعبه‌ی I به II، به شرط مشاهده‌ی مهره‌ی سفید از جعبه‌ی II، چقدر است؟

Payam Noor University

۳-٤۷. جعبه‌ی I شامل ۲ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است و جعبه‌ی II شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه است. یک جعبه به‌تصادف انتخاب و دو مهره از این جعبه انتخاب می‌شود.

الف) احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشند، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه جعبه‌ی II انتخاب شود به شرط آنکه هر دو مهره سفید باشند چقدر است؟

Payam Noor University

فصل چهارم

متغیرهای تصادفی، توزیع‌ها، و چگالی‌های احتمال

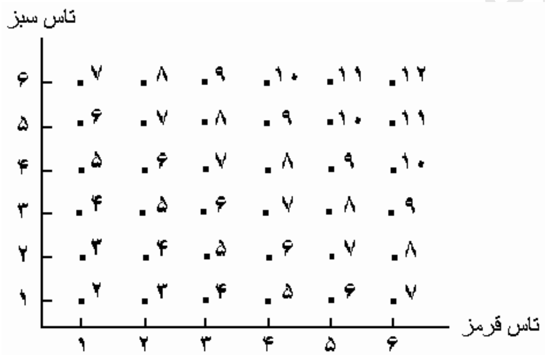
۴-۱ متغیر تصادفی

در بیشتر مسأله‌های متضمن احتمال‌ها، ما تنها به جنبه‌ای خاص (یا به دو یا چند جنبه‌ی خاص) برآمدهای آزمایش‌ها توجه داریم. برای مثال، وقتی یک جفت تاس را می‌ریزیم، معمولاً فقط مجموع دو شماره‌ای که ظاهر می‌شوند مورد توجه است، و نه برآمد هر تاس، وقتی با زن و شوهری که به‌تصادف انتخاب شده‌اند مصاحبه می‌کنیم ممکن است تعداد افراد خانواده و درآمد توأم آنها موردتوجه باشند، و نه تعداد سال‌هایی که با هم ازدواج کرده‌اند یا پس‌انداز کل آنها، و بالاخره وقتی از لامپ‌های روشنایی که در سطح انبوه تولید می‌شوند نمونه می‌گیریم ممکن است دوام یا میزان روشنایی آنها مورد توجه باشند و نه بهای آنها.

در هریک از مثال‌های بالا توجه ما به اعدادی است که با برآمدهای یک آزمایش شانسی همراه‌اند، یعنی توجه ما به مقادیری است که آنچه اصطلاحاً **متغیرهای تصادفی** خوانده‌می‌شوند اختیار می‌کنند. تعداد افراد خانواده‌ی زوجی که به تصادف انتخاب شده‌اند و درآمد توأم آنها متغیرهای تصادفی‌اند، و دوام و میزان روشنایی لامپی که به تصادف برای بررسی انتخاب می‌شود نیز متغیرهای تصادفی‌اند.

برای تصریح بیشتر، شکل ۳-۱ را در نظر بگیرید که فضای نمونه‌ای را برای آزمایش پرتاب یک جفت تاس همگن تصویر می‌کند، و فرض کنید که هریک از ۳۶

برآمد ممکن دارای احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ است. ولی توجه کنید که در شکل ۳-۱ به هر نقطه، عددی وابسته کرده‌ایم. برای مثال، به نقطه‌ی (۱,۱) عدد ۲، به نقطه‌ی (۱,۵) عدد ۶، به نقطه‌ی (۶,۲) عدد ۸، و قس‌علی‌هذا. به وضوح، ما به هر نقطه مقداری از یک متغیر تصادفی، یعنی مجموع متناظر با دو عددی را که در ریختن دو تاس ظاهر می‌شوند، نسبت می‌دهیم.



شکل ٤-۱. مجموع دو عددی که در ریختن یک جفت تاس ظاهر می‌شوند

چون «نسبت دادن یک عدد به هر نقطه‌ی (عنصر) فضای نمونه‌ای» صرفاً راه دیگری برای بیان «تعریف تابعی روی نقاط یک فضای نمونه‌ای» است، لذا تعریف زیر را ارائه می‌دهیم:

تعریف ٤-۱. اگر S یک فضای نمونه‌ای و X یک تابع حقیقی - مقدار باشد که روی عناصر S تعریف شده است، آنگاه X **متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.

ما در این کتاب، متغیرهای تصادفی را همیشه با حروف بزرگ و مقادیر آنها را با حروف کوچک متناظرشان نشان می‌دهیم. مثلاً برای نشان‌دادن مقداری از متغیر X، می‌نویسیم x.

با رجوع به مثال قبل و شکل ۳-۱ مشاهده می‌کنید که متغیرتصادفی X در زیرمجموعه‌ی

$$\{(۶,۳),(۵,۴),(۴,۵),(۳,۶)\}$$

از فضای نمونه‌ای S، مقدار ۹ را اختیار می‌کند و می‌نویسیم $X=۹$. لذا، $X=۹$ به

Payam Noor University

عنوان مجموعه‌ای از عناصر S تعبیر می‌شود که مجموع دو مؤلفه‌ی آنها ۹ است، و یا کلی‌تر، $X=x$ به‌عنوان مجموعه‌ای از عناصر فضای نمونه‌ای تعبیر می‌شود که برای آنها متغیر تصادفی X مقدار x را اختیار می‌کند. این مطلب ممکن است مبهم به‌نظر آید، ولی ریاضیدانی را به یاد می‌آورد که به‌جای اینکه بگوید « $f(x)$، مقدار تابع به ازای x است » می‌گوید « $f(x)$، تابع x است ».

مثال ٤–۱. از جعبه‌ای که محتوی پنج مهره‌ی قهوه‌ای و سه مهره‌ی سبز است، به تصادف و متوالیاً دو مهره انتخاب می‌شود. فهرست عناصر فضای نمونه‌ای، احتمال‌های متناظر آنها، و مقادیر متناظر، w، از متغیر تصادفی W را که تعداد مهره‌های قهوه‌ای انتخاب شده را نشان می‌دهد، تهیه کنید.

حل. اگر B و G به ترتیب برای نشان دادن مهره‌ی قهوه‌ای و سبز به کار روند، احتمال‌های BB، BG، GB، و GG به ترتیب عبارت‌اند از $(\frac{۵}{۸})(\frac{۴}{۷})=(\frac{۵}{۱۴})$، $(\frac{۵}{۸})(\frac{۳}{۷})=(\frac{۱۵}{۵۶})$، $(\frac{۳}{۸})(\frac{۵}{۷})=(\frac{۱۵}{۵۶})$، و $(\frac{۳}{۸})(\frac{۲}{۷})=(\frac{۳}{۲۸})$. نتایج در جدول زیر نشان داده شده‌اند.

عناصر فضای نمونه‌ای	احتمال	w
BB	$\frac{۵}{۱۴}$	۲
BG	$\frac{۱۵}{۵۶}$	۱
GB	$\frac{۱۵}{۵۶}$	۱
GG	$\frac{۳}{۲۸}$	۰

همچنین مثلاً، برای احتمال این پیشامد که متغیرتصادفی W مقدار ۲ را اختیارکند، می‌توانیم بنویسیم $P(W=۲)=\frac{۵}{۱۴}$ و یا احتمال این پیشامد که متغیر تصادفی W مقدار یک را اختیار کند برابر است با $P(W=۱)=\frac{۱۵}{۵۶}+\frac{۱۵}{۵۶}=\frac{۳۰}{۵۶}$.

مثال ٤–۲. یک سکه همگن چهار بار پرتاب می‌شود. عناصر فضای نمونه‌ای را که بنا به فرض هم‌شانس‌اند، (منظور از همگن بودن سکه همین است)، و مقادیر متناظر x از متغیر تصادفی X را که تعداد کل شیرهاست فهرست کنید.

حل. اگر H و T به ترتیب برای نمایش دادن شیر و خط به کار روند، نتایج در

جدول زیر نشان داده شده‌اند. مثلاً، برای احتمال این پیشامد که متغیر تصادفی X مقدار ۳ را اختیار کند می‌توانیم بنویسیم $P(X=۳)=\frac{۴}{۱۶}$.

x	احتمال	عناصر فضای‌نمونه‌ای
۴	$\frac{1}{16}$	$HHHH$
۳	$\frac{1}{16}$	$HHHT$
۳	$\frac{1}{16}$	$HHTH$
۳	$\frac{1}{16}$	$HTHH$
۳	$\frac{1}{16}$	$THHH$
۲	$\frac{1}{16}$	$HHTT$
۲	$\frac{1}{16}$	$HTHT$
۲	$\frac{1}{16}$	$THHT$
۲	$\frac{1}{16}$	$HTTH$
۲	$\frac{1}{16}$	$THTH$
۲	$\frac{1}{16}$	$TTHH$
۱	$\frac{1}{16}$	$HTTT$
۱	$\frac{1}{16}$	$THTT$
۱	$\frac{1}{16}$	$TTHT$
۱	$\frac{1}{16}$	$TTTH$
۰	$\frac{1}{16}$	$TTTT$

این واقعیت که تعریف ٤-۱ به توابع حقیقی محدود شده است هیچ محدودیتی را تحمیل نمی‌کند. اگر اعدادی که می‌خواهیم به برآمدهای یک آزمایش نسبت دهیم اعداد مختلط باشند، همیشه می‌توانیم قسمت‌های حقیقی و موهومی را جدا از هم به عنوان مقادیری که دو متغیر تصادفی اختیار می‌کنند در نظر بگیریم. همچنین، اگر بخواهیم برآمدهای یک آزمایش را به صورت کمّی توصیف کنیم، مثلاً برای معین کردن رنگ موی یک شخص می‌توانیم با کدگذاری رنگ‌های مختلف، شاید با نمایش آنها به

Payam Noor University

صورت اعداد ۱، ۲، ۳، و غیره، به‌دلخواه به توصیف‌های کیفی، مقادیر حقیقی بدهیم.

در همه‌ی مثال‌های این بخش، بحث خود را به فضاهای نمونه‌ای گسسته، و در نتیجه به متغیرهای تصادفی گسسته، یعنی متغیرهایی که برد آنها متناهی یا نامتناهی شماراست محدود کرده‌ایم. متغیرهای تصادفی پیوسته که روی فضاهای نمونه‌ای پیوسته تعریف شده‌اند در بخش ٤-٤ مورد بحث قرار می‌گیرند.

٤-۲ توزیع‌های احتمال

در مثال‌های ٤-۱ و ٤-۲ دیدیم، اندازه‌های احتمالی که روی یک فضای نمونه‌ای گسسته تعریف می‌شود، خود به خود احتمال هر مقدار مفروضی را که متغیرتصادفی در بردش اختیار می‌کند در اختیار می‌گذارد.

مثال ٤-۳. (دنباله‌ی مثال ٤-۲) با نسبت دادن احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ به هر عنصر، بی‌درنگ درمی‌یابیم که متغیرتصادفی X، مجموع اعداد حاصل از ریختن دو تاس، مقدار ۹ را با احتمال $\frac{۴}{۳۶}$ اختیار می‌کند. زیرا $X = ۹$ شامل ۴ نقطه از ۳۶ نقطه‌ی هم‌شانس فضای نمونه‌ای است. احتمال‌های مربوط به همه‌ی مقادیر ممکن X در جدول زیر نشان داده شده‌اند.

x	$P(X = x)$
۲	$\frac{۱}{۳۶}$
۳	$\frac{۲}{۳۶}$
۴	$\frac{۳}{۳۶}$
۵	$\frac{۴}{۳۶}$
۶	$\frac{۵}{۳۶}$
۷	$\frac{۶}{۳۶}$
۸	$\frac{۵}{۳۶}$
۹	$\frac{۴}{۳۶}$
۱۰	$\frac{۳}{۳۶}$
۱۱	$\frac{۲}{۳۶}$
۱۲	$\frac{۱}{۳۶}$

Payam Noor University

به‌جای‌اینکه احتمال‌های وابسته به مقادیر یک متغیرتصادفی را مانند مثال قبل در یک جدول نشان دهیم، معمولاً بهتر آن است که فرمولی ارائه کنیم، یعنی احتمال‌ها را به‌وسیله‌ی تابعی نشان دهیم که مقادیر آن، یعنی $f(x)$، به‌ازای هر xی که در برد متغیر تصادفی است برابر $P(X=x)$ باشد.

مثال ٤-٤. (دنباله‌ی مثال ٤-٣) برای مجموع دو عددی که در ریختن دو تاس ظاهر می‌شوند، می‌توانیم بنویسیم

$$f(x)=\frac{۶-|x-۷|}{۳۶}\ ,\ x=۲,۳,\cdots,۱۲$$

که درستی آن را می‌توان به آسانی تحقیق کرد. به وضوح

$$f(۲)=\frac{۶-|۲-۷|}{۳۶}=\frac{۶-۵}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

$$f(۳)=\frac{۶-|۳-۷|}{۳۶}=\frac{۶-۴}{۳۶}=\frac{۲}{۳۶}$$

$$\vdots$$

$$f(۱۲)=\frac{۶-|۱۲-۷|}{۳۶}=\frac{۶-۵}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

و تمام این مقادیر با آنچه در جدول قبل نشان دادیم مطابقت دارند.

تعریف ٤-۲. اگر X یک متغیرتصادفی گسسته باشد، تابعی که برای هر مقدار x در برد X با $f(x)=P(X=x)$ داده می‌شود، **توزیع احتمال** X نامیده می‌شود.

برمبنای اصول موضوع احتمال، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

قضیه‌ی ٤-۱. تابعی را می‌توان وقتی و فقط وقتی به عنوان توزیع احتمال یک متغیر تصادفی گسسته‌ی X به‌کاربرد که مقادیر آن، $f(x)$، در شرایط زیر صدق کنند:

الف) برای هر مقدار حوزه‌ی تابع، $f(x)\geq ۰$،

ب) $\sum_x f(x)=۱$، که در آن مجموع‌یابی روی تمام مقادیر حوزه‌ی تابع صورت می‌گیرد.

مثال ٤–٥. فرمولی برای توزیع احتمال تعداد کل شیرهایی که در ۴ پرتاب یک سکه‌ی همگن به دست می‌آیند پیدا کنید.

حل. بر پایه‌ی احتمال‌های جدول مثال ٤–٢، درمی‌یابیم که $P(X=۰)=\frac{۱}{۱۶}$، $P(X=۱)=\frac{۴}{۱۶}$، $P(X=۲)=\frac{۶}{۱۶}$، $P(X=۳)=\frac{۴}{۱۶}$، و $P(X=۴)=\frac{۱}{۱۶}$. از صورت‌های این پنج کسر، یعنی ۱، ۴، ۶، ۴، و ۱ که ضرایب دوجمله‌ای

$$\binom{۴}{۰},\binom{۴}{۱},\binom{۴}{۲},\binom{۴}{۳},\binom{۴}{۴}$$

هستند، متوجه می‌شویم که می‌توان برای توزیع احتمال، فرمولی به صورت

$$f(x)=\frac{\binom{۴}{x}}{۱۶}\ ,\ x=۰,۱,۲,۳,۴$$

نوشت. توجیهی نظری برای این فرمول، و بحثی کلی‌تر برای n پرتاب سکه‌ی همگن، در فصل پنجم، در توزیع‌های دوجمله‌ای داده خواهد شد.

مثال ٤–٦. آیا تابعی به صورت

$$f(x)=\frac{x+۲}{۲۵},\ \ x=۱,۲,۳,۴,۵$$

می‌تواند به عنوان تابع احتمال یک متغیرتصادفی گسسته به کار رود؟

حل. اگر مقادیر مختلف x را در $f(x)$ قراردهیم، به دست می‌آوریم:

$$f(۱)=\frac{۳}{۲۵}\ ،\ f(۲)=\frac{۴}{۲۵}\ ،\ f(۳)=\frac{۵}{۲۵}\ ،\ f(۴)=\frac{۶}{۲۵}\ ،\ \text{و}\ f(۵)=\frac{۷}{۲۵}$$

چون تمام این مقادیر نامنفی‌اند، اوّلین شرط قضیه‌ی ٤–١ برقرار است، و چون

$$f(۱)+f(۲)+f(۳)+f(۴)+f(۵)=\frac{۳}{۲۵}+\frac{۴}{۲۵}+\frac{۵}{۲۵}+\frac{۶}{۲۵}+\frac{۷}{۲۵}=۱$$

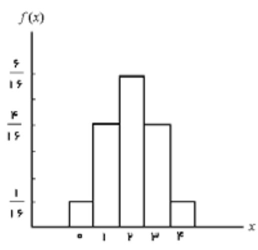
شرط دوّم قضیه‌ی ٤–١ نیز صادق است. پس تابع داده شده، می‌تواند به عنوان توزیع احتمال یک متغیر تصادفی در برد $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به کار رود. البته این‌که آیا X متغیر تصادفی مفروضی واقعاً دارای این توزیع احتمال باشد یا نه، کلاً مطلبی دیگر است.

در بعضی از مسائل، ارائه‌ی توزیع‌های احتمال به صورت نموداری موردنظر است. دو نوع نمایش نموداری که برای این منظور به‌کار می‌روند در شکل‌های ٤–٢ و ٤–٣ نشان داده شده‌اند. نمایشی که در شکل ٤–٢ نشان داده شده است **بافت‌نمای احتمال** خوانده می‌شود و توزیع احتمال مثال ٤–٣ را نمایش می‌دهد. ارتفاع هر مستطیل برابر

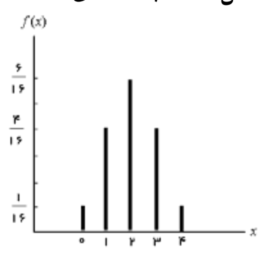
Payam Noor University

احتمال این است که X مقداری متناظر با طول نقطه‌ی وسط قاعده‌ی آن مستطیل اختیار کند. با نمایشی بازه‌ی از ۰/۵− تا ۰/۵ با ۰، بازه‌ی از ۰/۵ تا ۱/۵ با ۱، ...، بازه‌ی از ۳/۵ تا ۴/۵ با ۴، مقادیر متغیرتصادفی گسسته مفروض را به اصطلاح روی مقیاسی پیوسته «گسترده‌ایم». چون هرمستطیل بافت‌نمای شکل ٤–۲ دارای پهنای واحد است، می‌توانیم بگوییم مساحت‌های مستطیل‌ها، به‌جای ارتفاع‌های آن‌ها، برابر احتمال‌های متناظرند. برابر دانستن مساحت‌های مستطیل‌ها با احتمال‌ها، مزیت‌هایی دارد: برای مثال، وقتی می‌خواهیم نمودار توزیع احتمال گسسته را با خمی پیوسته تقریب بزنیم از این مطلب استفاده می‌کنیم. این کار را، حتی وقتی مستطیل‌های بافت‌نما پهنایی برابر واحد هم ندارند، می‌توان با تعدیل ارتفاع‌های مستطیل‌ها یا با اصلاح مقیاس محور قائم انجام داد.

نمودار شکل ٤–۳، **نمودار میله‌ای** نامیده می‌شود. مانند شکل ٤–۲، ارتفاع هر مستطیل، یا میله، مساوی احتمال مقدار متناظر متغیر تصادفی است، امّا وانمود نمی‌شود که مقیاس پیوسته‌ای وجود دارد. گرچه در این کتاب، در مواقعی از چنین نمودارهایی استفاده خواهیم کرد، امّا بافت‌نماها و نمودارهای میله‌ای عمدتاً در آمار توصیفی برای ارائه‌ی بصری اطلاعاتی که به وسیله‌ی توزیع احتمال یا توزیع واقعی داده‌ها فراهم می‌شوند به‌کار می روند.



شکل ٤–۲. بافت‌نمای احتمال



شکل ٤–۳. نمودار میله‌ای

در مسائل زیادی، دانستن احتمال اینکه مقداری از متغیر تصادفی کوچکتر از یک مقدار حقیقی x یا برابر با آن باشد مورد توجه است. لذا، احتمال این را که X مقداری کوچکتر از x یا برابر آن اختیار کند به صورت $F(x) = P(X \leq x)$ می‌نویسیم، و این تابع را که برای تمام اعداد حقیقی x تعریف شده است، **تابع توزیع تجمعی** یا **توزیع تجمعی متغیر تصادفی** X می‌نامیم.

تعریف ٤–۳. اگر X یک متغیرتصادفی گسسته باشد، تابعی که با

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \qquad -\infty < x < +\infty,$$

داده می‌شود، و درآن $f(t)$ مقدار احتمال X به ازای t است، تابع توزیع یا توزیع تجمعی X خوانده می‌شود.

بنابر اصول موضوع احتمال و بعضی از پیامدهای فوری آن، نتیجه می‌شود که قضیه‌ی ٤–۲، مقادیر $F(x)$، تابع توزیع متغیرتصادفی گسسته‌ی X، در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. $F(-\infty) = ۰$ ، $F(+\infty) = ۱$،

۲. به‌ازای هر دو عدد حقیقی a و b، اگر $a < b$، آنگاه $F(a) \leq F(b)$.

اگر توزیع احتمال متغیرتصادفی گسسته‌ی مفروضی را داشته باشیم، تابع توزیع متناظر آن عموماً ساده است.

مثال ٤–۷. تابع توزیع تعداد کل شیرهایی را که در چهار پرتاب یک سکه‌ی همگن به دست می‌آیند بیابید.

حل. از مثال ٤–۵، با دانستن

$$f(۰) = \frac{۱}{۱۶},\ f(۱) = \frac{۴}{۱۶},\ f(۲) = \frac{۶}{۱۶},\ f(۳) = \frac{۴}{۱۶},\ \text{و}\ f(۴) = \frac{۱}{۱۶},$$

نتیجه می‌شود که

Payam Noor University

$$F(۰) = f(۰) = \tfrac{۱}{۱۶},$$
$$F(۱) = f(۰) + f(۱) = \tfrac{۵}{۱۶},$$
$$F(۲) = f(۰) + f(۱) + f(۲) = \tfrac{۱۱}{۱۶},$$
$$F(۳) = f(۰) + f(۱) + f(۲) + f(۳) = \tfrac{۱۵}{۱۶},$$
$$F(۴) = f(۰) + f(۱) + f(۲) + f(۳) + f(۴) = \tfrac{۱۶}{۱۶} = ۱.$$

بنابر این تابع توزیع با

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \frac{۱}{۱۶} & ۰ \le x < ۱ \\ \frac{۵}{۱۶} & ۱ \le x < ۲ \\ \frac{۱۱}{۱۶} & ۲ \le x < ۳ \\ \frac{۱۵}{۱۶} & ۳ \le x < ۴ \\ ۱ & ۴ \le x \end{cases}$$

داده می‌شود. ملاحظه کنید که این تابع توزیع نه تنها برای مقادیری که متغیر تصادفی دارد، مقدار اختیار می‌کند، بلکه برای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است. مثلاً، می‌توانیم بنویسیم $F(۱/۷) = \frac{۵}{۱۶}$ و $F(۱۰۰) = ۱$، گرچه احتمال‌های به دست آوردن «حداکثر ۱/۷ شیر» یا «حداکثر ۱۰۰ شیر» در چهار پرتاب یک سکه‌ی همگن ممکن است هیچ معنایی واقعی نداشته باشند.

مثال ٤–۸. تابع توزیع متغیر تصادفی Wی مثال ٤–۱ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

حل. می‌توانیم بنویسیم

$f(۰) = \frac{۳}{۲۸}$ ، $f(۱) = (\frac{۱۵}{۵۶}) + (\frac{۱۵}{۵۶}) = (\frac{۱۵}{۲۸})$ ، و $f(۲) = \frac{۵}{۱۴}$ ،

به‌طوری‌که

$$F(۰) = f(۰) = \frac{۳}{۲۸},$$
$$F(۱) = f(۰) + f(۱) = \frac{۹}{۱۴},$$
$$F(۲) = f(۰) + f(۱) + f(۲) = ۱.$$

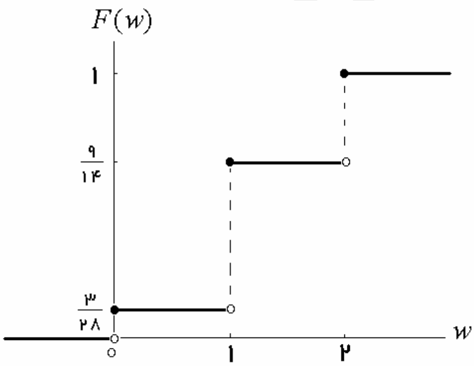
بنابر این تابع توزیع W با

Payam Noor University

$$F(w)=\begin{cases}0 & w<0\\ \frac{3}{28} & 0\le w<1\\ \frac{9}{14} & 1\le w<2\\ 1 & 2\le w\end{cases}$$

داده می‌شود.

نمودار این تابع توزیع که در شکل ۴-۴ نشان داده شده است، بدین طریق به دست می‌آید که اول نمایش نقاط $(w,F(w))$ را به ازای $w=0,1,2$ مشخص می‌کنیم سپس تابع پله‌ای را همان‌طور که نشان داده‌ایم کامل می‌کنیم. باید توجه داشته باشیم که این تابع در تمام نقاط ناپیوستگی، از دو مقدار، آن را که بزرگتر است اختیار می‌کند.



شکل ۴-۴. نمودار تابع توزیع مثال ۴-۸

می‌توانیم فرایندی را که در دو مثال قبل توضیح دادیم در جهت عکس نیز انجام دهیم، یعنی مقادیر توزیع احتمال متغیرتصادفی را از روی تابع توزیع به دست آوریم. برای این منظور قضیه‌ی زیر را به کار می‌بریم.

قضیه‌ی ۴-۳. اگربرد متغیر تصادفی X، متشکل از مقادیر $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n$ باشد، آنگاه $f(x_1)=F(x_1)$، و

$$f(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1}),\qquad i=1,2,3,\ldots,n.$$

مثال ۴-۹. اگر تابع توزیع X به صورت

$$F(x)=\begin{cases} ۰ & x<۲ \\ \frac{۱}{۳۶} & ۲\le x<۳ \\ \frac{۳}{۳۶} & ۳\le x<۴ \\ \frac{۶}{۳۶} & ۴\le x<۵ \\ \frac{۱۰}{۳۶} & ۵\le x<۶ \\ \frac{۱۵}{۳۶} & ۶\le x<۷ \\ \frac{۲۱}{۳۶} & ۷\le x<۸ \\ \frac{۲۶}{۳۶} & ۸\le x<۹ \\ \frac{۳۰}{۳۶} & ۹\le x<۱۰ \\ \frac{۳۳}{۳۶} & ۱۰\le x<۱۱ \\ \frac{۳۵}{۳۶} & ۱۱\le x<۱۲ \\ ۱ & x\ge ۱۲ \end{cases}$$

باشد، توزیع احتمال این متغیرتصادفی را بیابید.

حل.با استفاده از قضیه‌ی ٤–۳ به دست می‌آوریم $f(۲)=\frac{۱}{۳۶}$، $f(۳)=\frac{۳}{۳۶}-\frac{۱}{۳۶}=\frac{۲}{۳۶}$، $f(۴)=\frac{۶}{۳۶}-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۳}{۳۶}$، $f(۵)=\frac{۱۰}{۳۶}-\frac{۶}{۳۶}=\frac{۴}{۳۶}$،...، $f(۱۲)=۱-\frac{۳۵}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}$، و مقایسه‌ی این‌ها با احتمال‌های مثال ۳–٤، آشکار می‌کند که متغیر تصادفی که در اینجا با آن سروکار داریم همان مجموع اعدادی است که درریختن یک جفت تاس ظاهرمی‌شوند.

تمرین

٤–۱. تحقیق کنید که آیا تابع زیر یک تابع احتمال است یا نه؟

$$f(x)=\begin{cases} cx^{۲} & x=۱,۲,۳ \\ ۰ & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

٤–۲. مقدار c را طوری پیدا کنید که تابع زیر یک تابع احتمال باشد.

$$f(x)=\begin{cases} c(\frac{۱}{۶})^{x-۱} & x=۱,۲,۳,\ldots \\ ۰ & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

٤–۳. برای توابع تعریف شده X در زیر نشان دهید X یک متغیر تصادفی گسسته است و تابع احتمال آن را به دست آورید.

الف) یک سکه‌ی همگن را سه بار پرتاب می‌کنیم. X نمایانگر تعداد خط‌های مشاهده

شده است.

ب) یک تاس همگن را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم. X نمایانگر قدر مطلق تفاضل دو خال مشاهده شده است.

ج) یک تاس همگن را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا برای اوّلین بار شیر بیاید. X نمایانگر پرتاب‌های لازم قبل از مشاهده اوّلین شیر است.

د) یک تاس را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا دو خال ۶ مشاهده شود. X تعداد پرتاب‌های لازم برای مشاهده‌ی دو خال شش تعریف می‌شود.

۴-۴. جعبه‌ای شامل ۵ مهره است که از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده‌اند. دو مهره به تصادف بدون‌جایگذاری از این جعبه انتخاب می‌کنیم.

الف) X نمایانگر ماکسیمم دو عدد مشاهده شده است، تابع احتمال X را به‌دست آورید.

ب) اگر X نمایانگر مینیمم دو عدد مشاهده شده باشد، تابع احتمال X را به‌دست آورید.

ج) اگر X نمایانگر مجموع دو عدد مشاهده شده باشد، تابع احتمال X را به‌دست آورید.

۴-۵. فرض کنید ۵ نفر به همراه شما و دوستتان به تصادف در یک ردیف ایستاده باشید. اگر X نمایانگر تعداد افراد بین شما و دوست شما باشد، تابع احتمال X را به دست آورید.

۴-۶. جعبه‌ی I شامل ۲ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه و جعبه‌ی II شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. دو مهره به تصادف و بدون‌جایگذاری از هر جعبه انتخاب می‌کنیم اگر X نمایانگر مهره‌های سفید انتخابی از جعبه‌ی I و Y نمایانگر مهره‌های سفید انتخابی از جعبه‌ی II باشیم، مطلوب است

الف) تابع احتمال X،

ب) تابع احتمال Y تابع احتمال $Z = X + Y$.

۴-۷. جعبه‌ای شامل ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. دو مهره به تصادف و بدون‌جایگذاری از این جعبه انتخاب می‌کنیم. اگر X نمایانگر تعداد مهره‌های سفید در نمونه‌ی تصادفی باشد، نشان دهید X یک متغیر تصادفی گسسته است و تابع احتمال

Payam Noor University

آن را به‌دست آورید. اگر انتخاب نمونه باجایگذاری باشد چطور؟

۴-۸. اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد، مقدار c را به دست آورید.

$$f(x) = c\frac{\theta^x}{x} \qquad x = 1, 2, \ldots \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

۴-۹. اگر $r_1, r_2, \ldots$ نمایانگر اعداد گویا در بازه‌ی $[0, 1]$ و X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد، تکیه‌گاه متغیر تصادفی X کدام است؟ چرا؟

$$P(X = r_n) = 2^{-n} \quad \text{و} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

۴-۱۰. اگر N یک عددصحیح مثبت و X دارای تابع احتمال زیر باشد:

$$f(x) = c\,2^{-x}, \qquad n = 1, 2, \cdots, N.$$

الف) c را تعیین کنید.

ب) تابع توزیع X را به شکل بسته به‌دست آورید.

۴-۱۱. اگر X دارای تابع احتمال زیر باشد، مقادیر $P(X \geq 2)$، $P(0 < X \leq 2)$ و $P(|X - 1| \leq 1)$ را به دست آورید.

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	۰/۳	۰/۴	۰/۲	۰/۱

۴-۱۲. از بین اعداد ۱ تا ۹، چهار عدد را به تصادف و با هم انتخاب می‌کنیم. اگر X نمایانگر عددی باشد که از کوچک‌ترین عدد انتخابی نمونه بزرگ‌تر و از دوتای دیگر کوچک‌تر باشد، مقدار $P(X = 4)$ را به دست آورید.

۴-۱۳. ظرفی شامل ۵ مهره است که X تای آن سفید و بقیه سیاه‌اند. می‌دانیم که $P(X = 3) = \frac{2}{3}$ و $P(X = 2) = \frac{1}{3}$. از این ظرف یک مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم، ملاحظه می‌شود که رنگ آن سفید است. احتمال آن‌را که در ظرف ۳ مهره سفید وجود داشته باشد به دست آورید.

۴-۱۴. اگر تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت

Payam Noor University

$$F(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ \frac{۱}{۷} & ۰\le x<۱ \\ \frac{۳}{۷} & ۱\le x<۲/۵ \\ \frac{۵}{۷} & ۲/۵\le x<۴ \\ \frac{۱۱}{۱۴} & ۴\le x<۵/۵ \\ ۱ & ۵/۵\le x \end{cases}$$

باشد، مطلوب است

الف) تابع احتمال X،

ب) $P(۱\le X<۲/۵)$،

ج) $P(۰<X\le ۲/۵)$،

د) $P(۰<X<۲/۵)$،

ه) $P(۱\le X\le ۲/۵)$.

۴-۱۵. تحقیق کنید که $f(x)=\frac{۲x}{k(k+۱)}$ به ازای $x=۱,۲,۳,\ldots,k$ را می‌توان به‌عنوان توزیع احتمال یک متغیر تصادفی به‌کار برد.

۴-۱۶. نشان دهید که برای c نمی‌توان مقادیری یافت که به ازای آنها

$$f(x)=\frac{c}{x},$$

را بتوان به عنوان مقادیر توزیع احتمال یک متغیر تصادفی با برد نامتناهی شمارا $x=۱,۲,۳,\ldots$ به کار برد.

۴-۱۷. برای هر یک از توزیع‌های احتمال زیر بافت‌نمای احتمال را رسم کنید.

الف) $f(x)=\binom{۲}{x}\binom{۴}{۳-x}/\binom{۶}{۳}$، به‌ازای $x=۰,۱,۲$،

ب) $f(x)=\binom{۵}{x}(\frac{۱}{۵})^x(\frac{۴}{۵})^{۵-x}$ به‌ازای $x=۰,۱,۲,۳,۴,۵$.

۴-۱۸. برای هر یک از موارد زیرتعیین کنید که آیا مقادیر داده شده را می‌توان به‌عنوان مقادیر تابع توزیع یک متغیر تصادفی با برد $x=۰,۱,۲,۳,۴$ به‌کار برد یا نه.

الف) $F(۱)=۰/۳$، $F(۲)=۰/۵$، $F(۳)=۰/۸$، و $F(۴)=۱/۲$،

ب) $F(۱)=۰/۵$، $F(۲)=۰/۴$، $F(۳)=۰/۷$، و $F(۴)=۱/۰$،

ج) $F(۱)=۰/۲۵$، $F(۲)=۰/۶۱$، $F(۳)=۰/۸۳$، و $F(۴)=۱/۰$.

Payam Noor University

٤-۳ متغیرهای تصادفی پیوسته

در بخش ٤-۱ متغیر تصادفی را به صورت تابعی حقیقی معرفی کردیم که روی نقاط فضای نمونه‌ای دارای یک اندازه‌ی احتمال تعریف شده بود، و در شکل ٤-۱، با تخصیص مجموع اعدادی که در ریختن یک جفت تاس ظاهر می‌شوند به هر یک از ۳۶ نقطه‌ی هم‌شانس فضای نمونه‌ای، این مفهوم را تشریح کردیم. در حالت پیوسته، که متغیرهای تصادفی می‌توانند مقادیری را روی مقیاسی پیوسته اختیار کنند، شیوه‌ی کار به‌میزان زیاد همانند حالت گسسته است. برآمدهای آزمایش‌ها با نقاط روی پاره‌خط‌ها یا خط‌ها نمایش داده می‌شوند، و مقادیر متغیرهای تصادفی اعدادی هستند که به‌گونه‌ای مناسب به وسیله‌ی قاعده‌ها یا معادله‌ها B_x به این نقاط نسبت داده می‌شوند. وقتی مقدار متغیر تصادفی مستقیماً با یک اندازه یا مشاهده داده می‌شود، عموماً به خود زحمت نمی‌دهیم که بین مقدار متغیر تصادفی (اندازه‌ای که به‌دست می‌آوریم) و برآمد آزمایش (نقطه‌ی متناظر روی محور حقیقی) تمایزی قائل شویم. مثلاً، اگر یک آزمایش عبارت از تعیین محتوای واقعی یک شیشه ۲۳۰ گرمی قهوه باشد، نتیجه‌ی حاصل، مثلاً ۲۲۵/۳ گرم، مقدار متغیر تصادفیی است که موردنظر ماست، و حقیقتاً نیازی نیست اضافه کنیم که فضای نمونه‌ای عبارت از بازه‌ی پیوسته‌ی معینی از نقاط روی محور اعداد حقیقی است.

مسئله‌ی تعریف احتمال‌ها در رابطه با فضاهای نمونه‌ای پیوسته و متغیرهای تصادفی پیوسته متضمن پیچیدگی‌هایی است. برای توضیح مطلب وضعیت زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ٤-۱۰. فرض کنید به احتمال سانحه‌ای که در بزرگ‌راهی به طول ۲۰۰ کیلومتر رخ دهد علاقه‌مندیم، و احتمال اینکه تصادف در محل مشخصی، یا شاید روی قطعه‌ی معینی از جاده رخ دهد، مورد توجه ماست. فضای نمونه‌ای این «آزمایش»، متشکل از پیوستاری از نقاط است، نقاطی که در بازه‌ی ۰ تا ۲۰۰ کیلومتر قرار دارند، و ما برای ارائه‌ی استدلال، فرض می‌کنیم احتمال اینکه تصادفی در هر بازه‌ای به طول d رخ دهد برابر $\frac{d}{۲۰۰}$ باشد، که در آن d برحسب کیلومتر اندازه گرفته می‌شود. توجه کنید که این تخصیص احتمال‌ها با اصل‌های موضوع ۱ و ۲ سازگار است، زیرا احتمال‌های $\frac{d}{۲۰۰}$،

همگی نامنفی‌اند و $P(S) = \frac{۲۰۰}{۲۰۰} = ۱$. تا اینجا این تخصیص احتمال‌ها فقط در مورد بازه‌ی ۰ تا ۲۰۰ انجام شد، امّا اگر اصل موضوع ۳ را به کار بریم، می‌توانیم احتمال‌ها را برای اجتماع هر تعداد متناهی یا نامتناهی شمارای دنباله‌ای از بازه‌های جدا از هم نیز به کار بریم. به‌عنوان مثال، احتمال این‌که تصادفی روی هرکدام از دو بازه‌ی جدا از هم به طول‌های $d_۱$ و $d_۲$ رخ دهد برابر

$$\frac{d_۱ + d_۲}{۲۰۰}$$

است، و احتمال اینکه تصادفی روی یکی از بازه‌های متعلق به دنباله‌ای نامتناهی شمارا از بازه‌های جدا از هم به طول‌های $d_۱$، $d_۲$، ...، رخ دهد برابر است با

$$\frac{d_۱ + d_۲ + d_۳ + \cdots}{۲۰۰}.$$

در این صورت، اگر قضیه‌ی ۳–۷ را به کار بریم، می‌توانیم تخصیص احتمال را به اجتماع بازه‌هایی که از هم جدا نیستند گسترش دهیم، و چون اشتراک دو بازه، یک بازه، و متمم یک بازه نیز یک بازه، یا اجتماع دو بازه است، می‌توانیم تخصیص احتمال را به هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای تعمیم دهیم که بتوان آن زیرمجموعه را از تشکیل اجتماع‌ها یا اشتراک‌های تعداد نامتناهی یا نامتناهی شمارا از بازه‌ها، یا با تشکیل متمم‌ها به دست آورد.

پس در توسیع مفهوم احتمال به حالت پیوسته، باز اصل‌های ۱، ۲، و ۳ را به‌کار برده‌ایم، امّا برای انجام این کار در حالت‌کلی، باید از تعریفی که برای «پیشامد» کردیم، تمام زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونه‌ای را که نمی‌توان با ساختن اجتماع‌ها یا اشتراک‌های تعدادی نامتناهی یا نامتناهی شمارای بازه‌ها، یا ساختن متمم‌ها به‌دست آورد مستثنی کنیم. از نظر عملی، این استثناء اهمیتی ندارد، زیرا ما صرفاً احتمال‌هایی به این نوع مجموعه‌های پیچیده نسبت نمی‌دهیم.

با مراجعه به مثال ٤–۱۰، همچنین ملاحظه کنید که احتمال وقوع تصادفی در یک بازه‌ی خیلی کوتاه، مثلاً بازه‌ای به طول یک سانتی‌متر فقط برابر ۰/۰۰۰۰۰۰۰۵ است که خیلی کوچک است. وقتی طول بازه به صفر می‌گراید، احتمال اینکه تصادفی روی آن رخ دهد نیز به صفر می‌گراید؛ البته در حالت پیوسته، ما به نقطه‌های تنها احتمال صفر را نسبت می‌دهیم. این بدین معنا نیست که پیشامدهای متناظر نمی‌توانند رخ دهند،

بالاخره وقتی سانحه‌ای در طول ۲۰۰کیلومتر جاده رخ می‌دهد، الزاماً این تصادف در نقطه‌ای رخ می‌دهد، ولو اینکه هر نقطه احتمال صفر داشته باشد.

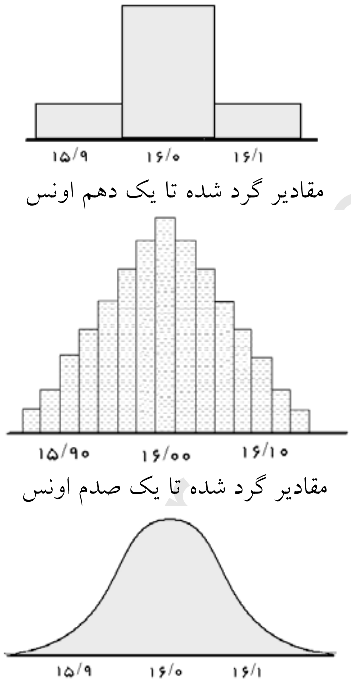
۴-۴ تابع‌های چگالی احتمال

راهی که در مثال ۴-۱۰ برای تخصیص احتمال‌ها به کار بردیم حالت بسیار خاصی است، وذاتاً شبیه راهی است که طی آن، احتمال‌های مساوی به شش وجه یک تاس، به شیرها و خطها و به ۵۲ کارت از یک نوع دسته کارت معمولی وغیره نسبت می‌دهیم. برای بحث در مسئله‌ی نسبت دادن احتمال‌ها به متغیرهای تصادفی به‌طور کلی‌تر، فرض می‌کنیم که برای متصدی قسمت پرکردن بطری‌های آب معدنی، مقدار واقعی آب معدنی که ماشین بطری پرکن در بطری‌های یک لیتری می‌ریزد مطرح باشد. به وضوح مقدار نوشابه از یک بطری به بطری دیگر تغییر می‌کند، و در واقع این مقدار، یک متغیرتصادفی پیوسته است. امّا اگر متصدی قسمت، مقادیر آب معدنی بطری‌ها را تا یک دهم لیتر گردکند با یک متغیر تصادفی گسسته سروکار دارد که دارای توزیع احتمال است، و این توزیع احتمال را می‌توان به صورت بافت‌نمایی که در آن احتمال‌ها با مساحت‌های مستطیل‌ها داده شده‌اند، مثلاً نظیر نمودار قسمت بالای شکل ۴-۵، نمایش داد. اگر او مقادیر آب معدنی را تا یک صدم لیتر گرد کند، باز با متغیر تصادفی گسسته‌ای (متفاوت با اوّلی) که دارای یک توزیع احتمال است سروکار دارد، و این توزیع احتمال را می‌توان به صورت بافت‌نمایی که در آن احتمال‌ها با مساحت‌های مستطیل‌ها داده شده‌اند، مثلاً نظیر نمودار قسمت وسط شکل ۴-۵، نمایش داد.

واضح است که اگر او مقادیر نوشابه را تا یک هزارم اونس یا تا یک ده هزارم اونس گرد کند، بافت‌نمای توزیع‌های احتمال متغیرهای تصادفی گسسته‌ی متناظر، به منحنی پیوسته‌ای که در قسمت پایین شکل ۴-۵ نشان داده‌ایم میل می‌کنند، و مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی که احتمال قرار گرفتن مقادیر آب معدنی در هر بازه‌ی معینی را نمایش می‌دهند، به مساحت سطح متناظر زیر منحنی میل می‌کند.

در واقع، تعریف احتمال در حالت پیوسته، برای هر متغیر تصادفی، وجود تابعی را که **تابع چگالی احتمال** نامیده می‌شود مفروض می‌گیرد، به قسمی که مساحت‌های زیر منحنی این تابع، احتمال‌های مربوط به بازه‌های متناظر در طول محور افقی را مشخص

می‌کنند. به بیان دیگر، انتگرال یک تابع چگالی از a تا b ($a \leq b$) احتمال این را که متغیر تصادفی متناظر، مقداری را در بازه‌ی a تا b اختیار کند به دست می‌دهد.



شکل ۵.۴. تعریف احتمال در حالت پیوسته

تعریف ۴–۴. تابع حقیقی‌مقدار f، که روی مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی تعریف شده است، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته‌ی X نامیده می‌شود اگر و تنها اگر به ازای هر دو مقدار حقیقی ثابت a و b با شرط $a \leq b$،

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

به توابع چگالی به اختصار چگالی‌های احتمال، توابع چگالی، یا ت.چ.ا. نیز اطلاق می شود.

توجه کنید که $f(c)$، مقدار تابع چگالی به‌ازای c، مانند حالت گسسته،

$P(X=c)$ را نمی‌دهد. در ارتباط با متغیرهای تصادفی پیوسته، احتمال‌ها همیشه به بازه‌ها نسبت داده می‌شوند و به ازای هر مقدار حقیقی ثابت c، $P(X=c)=\circ$. این مطلب با تعریف ٤–٤ با $a=b=c$ مستقیماً نتیجه می‌شود.

به دلیل این ویژگی، مقدار تابع چگالی احتمال را می‌توان به ازای برخی از مقادیر متغیر تصادفی تغییر داد، بدون اینکه هیچ یک از احتمال‌ها تغییر کنند، و به همین دلیل در تعریف ٤–٤ گفتیم که $f(x)$ مقدار یکی از چگالی‌های احتمال متغیر تصادفی X به ازای x است و نه چگالی احتمال آن به معنی مطلق. به دلیل همین ویژگی نیز، مهم نیست که نقاط دو سر بازه‌ی a تا b را در محاسبه‌ی احتمال منظور کنیم یا نکنیم. به صورت نمادی در قضیه‌ی ٤–٤، اگر X، متغیر تصادفی پیوسته و a و b دو عدد حقیقی ثابت با شرط $a \le b$ باشند، آنگاه

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b).$$

مشابه با قضیه‌ی ٤–١، ویژگی‌های زیر از توابع چگالی احتمال را که باز هم مستقیماً از اصول موضوع احتمال نتیجه می‌شوند بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ٤–٥. تابعی را می‌توان به عنوان تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته X به کاربرد اگر مقادیر آن، $f(x)$، در شرایط

۱. به ازای $-\infty < x < +\infty$، $f(x) \ge \circ$،

۲. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱$،

صدق کند.

مثال ٤–۱۱. اگر X دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} k\, e^{-۳x} & x > \circ \\ \circ & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

باشد، k و $P(\circ/۵ \le X \le ۱)$ را بیابید.

حل. برای اینکه دوّمین شرط قضیه‌ی ٤–٥ برقرار باشد باید داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\circ}^{+\infty} k\, e^{-۳x}dx = k \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{e^{-۳x}}{-۳}\right|_{\circ}^{t} = \frac{k}{۳} = ۱$$

و نتیجه می‌شود که $k = ۳$. برای احتمالی که خواسته‌ایم، به دست می‌آوریم

$$P(0/5 \le X \le 1) = \int_{0/5}^{1} 3\, e^{-3x} dx = -e^{-3x}\Big|_{0/5}^{1} = -e^{-3} + e^{-1/5} = 0/173.$$

گرچه متغیرتصادفی مثال قبل نمی‌تواند مقادیر منفی اختیارکند، ولی ما در حوزه‌ی چگالی احتمال آن را به گونه‌ای تصنعی بسط دادیم تا تمام اعداد حقیقی را شامل شود. این شیوه‌ای است که در تمام این کتاب از آن پیروی خواهیم کرد.

مثل حالت گسسته، مسائل زیادی وجود دارند که علاقه‌مندیم در آنها احتمال این را که مقدار متغیرتصادفی پیوسته از عدد حقیقی x، کوچکتر یا مساوی یا آن باشد بدانیم. لذا تعریف زیر را که مشابه تعریف ٤–٣ است ارائه می‌دهیم.

تعریف ٤–٥. اگر X، متغیرتصادفی پیوسته‌ای با تابع چگالی احتمال $f(t)$ باشد، تابع

$$F(x) = P\,(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt\,, \quad -\infty < x < +\infty$$

تابع توزیع یا **توزیع تجمعی** X نامیده می‌شود.

ویژگی‌های توابع توزیع که در قضیه‌ی ٤–٢ ارائه شدند، برای حالت پیوسته نیز برقرارند؛ یعنی $F(-\infty) = 0$، $F(+\infty) = 1$، و وقتی $a < b$، $F(a) \le F(b)$. به علاوه از تعریف ٤–٥ مستقیماً نتیجه می‌شود که

قضیه‌ی٤–٦. اگر $f(x)$ و $F(x)$، به‌ترتیب مقدارهای تابع توزیع احتمال و تابع توزیع X در x باشند، آنگاه به‌ازای هر دو مقدار حقیقی و ثابت a و b با شرط $a \le b$،

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a),$$

و

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

و این مشتق موجود است.

مثال ٤–١٢. تابع توزیع متغیرتصادفی X مربوط به مثال ٤–١١ را بیابید. این تابع توزیع را برای محاسبه‌ی مجدد $P(0/5 \le X \le 1)$ نیز به کار برید.

حل. به ازای $x > 0$،

Payam Noor University

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{0}^{x} 3\,e^{-3t}dt=-e^{-3t}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-3x}$$

و چون به‌ازای $x\le 0$، $F(x)=0$، می‌توانیم بنویسیم

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-3x} & x>0\end{cases}$$

برای یافتن $P(0/5\le X\le 1)$ از فرمول قسمت قضیه‌ی ٤–٦ استفاده می‌کنیم، که به دست می‌دهد

$$\begin{aligned}P(0/5\le X\le 1)&=F(1)-F(0/5)\\&=(1-e^{-3})-(1-e^{-1/5})\\&=0/173.\end{aligned}$$

این جواب با نتیجه‌ای که با استفاده از تابع چگالی احتمال در مثال ٤–١١ مستقیماً به دست آمد مطابقت دارد.

مثال ٤–١٣. یک تابع چگالی احتمال، برای متغیر تصادفیی که تابع توزیع‌اش

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\end{cases}$$

است، پیدا و نمودار آن را رسم کنید.

حل. چون تابع توزیع داده شده همه‌جا جز در $x=0$ و $x=1$، مشتق‌پذیر است. از تابع توزیع برای $x<0$، $0<x<1$ و $x>1$ مشتق می‌گیریم و ۰، ۱، و ۰ را به‌دست می‌آوریم. پس بنابر قسمت دوّم از قضیه‌ی ٤–٦، می‌توانیم بنویسیم

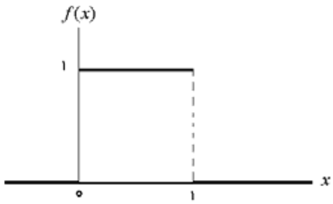
$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

و برای پرکردن دو رخنه در $x=0$ و $x=1$، مقادیر $f(0)$ و $f(1)$ را برابر صفر می‌گیریم. در واقع مهمّ نیست که چگالی احتمال در این دو نقطه چگونه تعریف شده است، امّا انتخاب مقادیر به این طریق که تابع چگالی احتمال روی یک بازه‌ی باز صفر نباشد مزیت‌هایی دارد. پس می‌توان تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی اصلی را به صورت

Payam Noor University

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاهای دیگر} \end{cases}$$

نوشت. نمودار این تابع را در شکل ٤–٦ نشان داده‌ایم.



شکل ٤–٦. نمودار تابع چگالی احتمال مثال ٤–۱۳

تمرین

٤–۱۹. چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X به صورت

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۵} & ۲<x<۷ \\ ۰ & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

داده شده است.

الف) نمودار آن را رسم و تحقیق کنید که کل مساحت زیر منحنی (بالای محور x) برابر با یک است.

ب) مقدار $P(۳<X<۵)$ را بیابید.

٤–۲۰. چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته Y به صورت

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۸}(y+۱) & ۲<y<۴ \\ ۰ & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

داده شده است. مطلوب است $P(Y<۳/۲)$ و $P(۲/۹<Y<۳/۲)$.

٤–۲۱. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت

$$f(x)=\begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}} & ۰<x<۴ \\ ۰ & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

داده شده است مطلوب است

الف) مقدار c، **ب)** $P(X<\frac{۱}{۴})$ و $P(X>۱)$.

٤–۲۲. چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X به صورت

Payam Noor University

$$f(z)=\begin{cases} k\,z\,e^{-z^{2}} & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$$

داده شده است. k را بیابیدو نمودار این چگالی احتمال را رسم کنید.

٤–۲۳. چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X به صورت

$$g(x)=\begin{cases} 6\,x\,(1-x) & 0<x<1 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

داده شده است. مطلوب است $P(X<\frac{1}{4})$ و $P(X>\frac{1}{2})$.

٤–۲٤. تابع توزیع متغیر تصادفی X را که چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3} & 0<x<1 \\ \frac{1}{3} & 2<x<4 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

داده شده است بیابید. نمودارهای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع را نیز رسم کنید.

٤–۲٥. تابع توزیع متغیر تصادفی X را که چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

داده شده است بیابید. نمودارهای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع را نیز رسم کنید.

٤–۲٦. تابع توزیع متغیر تصادفی X را که چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & 0<x\le 1 \\ \frac{1}{2} & 1<x\le 2 \\ \frac{3-x}{2} & 2<x<3 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

داده شده است بیابید. نمودارهای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع را نیز رسم کنید.

٤–۲۷. تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \dfrac{x+1}{2} & -1\le x<1 \\ 1 & 1\le x \end{cases}$$

داده شده است. مطلوب است $P(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2})$ و $P(2<X<3)$.

٤–۲۸. تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت

$$F(y)=\begin{cases}۱-\dfrac{۹}{y^{۲}} & y>۳\\ ۰ & y\leq ۳\end{cases}$$

داده شده است. مطلوب است $P(Y\leq ۵)$ و $P(Y>۸)$.

۴-۲۹. تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت

$$F(x)=\begin{cases}۱-(۱+x)e^{-x} & x>۰\\ ۰ & x\leq ۰\end{cases}$$

داده شده است. مطلوب است $P(X\leq ۲)$، $P(۱<X<۳)$، و $P(X>۴)$.

۴-۳۰. تعداد دقایقی که پروازی از شهر A به شهر B زودتر یا دیرتر انجام می‌شود متغیری تصادفی است که چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲۲۸}(۳۶-x^{۲}) & -۶<x<۶\\ ۰ & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

است، که در آن مقادیر منفی، معرف زود انجام شدن پرواز و مقادیر مثبت، معرف تأخیر در پروازند. پیدا کنید احتمال آن را که یکی از این پروازها

الف) حداقل ۲ دقیقه زودتر، ب) حداقل یک دقیقه دیرتر،

ج) مدتی از ۱ تا ۳ دقیقه زودتر، د) دقیقاً ۵ دقیقه دیرتر،

انجام گیرد.

۴-۳۱. مدت زمان سالم ماندن (برحسب ساعت) یک ماده‌ی غذایی بسته‌بندی شده‌ی فاسد نشدنی، متغیری تصادفی است که تابع احتمال آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲۰۰۰۰}{(x+۱۰۰)^{۳}} & x>۰\\ ۰ & x\leq ۰\end{cases}$$

است. پیدا کنید احتمال آن را که مدت زمان سالم ماندن یکی از این بسته‌ها

الف) حداقل ۲۰۰ساعت،

ب) حداکثر ۱۰۰ ساعت،

ج) بین ۸۰ تا ۱۲۰ ساعت.

۴-۳۲. میزان فرسودگی تایر (برحسب ۱۰۰۰ کیلومتر) برای دارندگان اتومبیل با نوع خاصی تایر، متغیری تصادفی است که تابع چگالی احتمال آن به صورت

Payam Noor University

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

داده شده است. پیدا کنید احتمال اینکه یکی از این لاستیک‌ها

الف) حداکثر ۱۸۰۰۰ کیلومتر،

ب) از ۲۷۰۰۰ تا ۳۶۰۰۰ کیلومتر،

ج) حداقل ۴۸۰۰۰کیلومتر.

۴-۳۳. در شهری معین، مصرف روزانه‌ی آب (برحسب میلیون لیتر)، متغیری تصادفی است که چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x\,e^{-\frac{x}{3}} & x>0\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

است. احتمال اینکه در روز معینی،

الف) مصرف آب در این شهر بیش از ۶ میلیون نباشد،

ب) ذخیره آب کافی نباشد، در صورتی که ظرفیت روزانه این شهر ۹میلیون لیتر باشد، چقدر است؟

۴-۳۴. طول عمر (برحسب سال) سگ‌های پنج ساله‌ی نژاد خاصی، متغیری است تصادفی که تابع توزیع آن به صورت

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leq 5\\ 1-\frac{25}{x^2} & x>5\end{cases}$$

است. پیدا کنید احتمال اینکه چنین سگ پنج ساله‌ای

الف) بیش از ده سال،   ب) کمتر از هشت سال،   ج) بین ۱۲ تا ۱۵سال،

عمر کند.

۴-۵ توزیع‌های چندمتغیره

در آغاز این فصل، متغیرتصادفی را به صورت تابعی حقیقی‌مقدار بر فضایی نمونه‌ای تعریف کردیم، و منطقی است که متغیرهای تصادفی زیادی را بتوان روی فضای نمونه-ای واحدی تعریف کرد. برای مثال، در ارتباط با فضای نمونه‌ای شکل ۴-۱، ما فقط متغیری تصادفی را در نظر گرفتیم که مقادیرش مجموع دو عدد بودند که در ریختن

Payam Noor University

یک جفت تاس ظاهر می‌شوند، امّا می‌توانستیم متغیری تصادفی را درنظر بگیریم که مقادیرش حاصل‌ضرب دو عددی باشند که در ریختن یک جفت تاس ظاهر می‌شوند، یا متغیر تصادفیی که مقادیرش ۰، ۱ یا ۲ بوده و بیانگر تعداد تاس‌هایی باشند که برای آنها عدد ۲ بیابید، و قس‌علی‌هذا. در ارتباط نزدیکتر با زندگی روزمره، ممکن است آزمایشی عبارت از انتخاب تصادفی تعدادی از ۳۴۵ دانش‌آموزی باشد که به یک مدرسه‌ی ابتدایی می‌روند، و رئیس مدرسه به تعیین بهره‌ی هوشی آنها، مراقب بهداشتی مدرسه به وزن آنها، معلّمان مدرسه به تعداد روزهایی که غیبت کرده‌اند و ... علاقه‌مند.

در این بخش ابتدا به حالت دومتغیره می‌پردازیم، یعنی به وضعیت‌هایی با یک جفت متغیر تصادفی که هم‌زمان روی یک فضای نمونه‌ای توأم تعریف شده‌اند. بعداً، این بحث را به حالت چند متغیره، که هر تعداد متناهی از متغیرهای تصادفی را شامل می‌شود، تعمیم می‌دهیم.

اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند، احتمال این را که X مقدار x و Y مقدار y را اختیار کند به صورت $P(X=x,Y=y)$ می‌نویسیم؛ بنابر این $P(X=x,Y=y)$، احتمال اشتراک پیشامدهای $X=x$ و $Y=y$ است. مانند حالت یک متغیره که با یک متغیر تصادفی سروکار داشتیم و می‌توانستیم احتمال‌های مربوط به همه‌ی مقادیر X را به وسیله‌ی یک جدول نمایش دهیم. اینک می‌توانیم در حالت دومتغیره نیز احتمال‌های مربوط به همه‌ی جفت‌های مقادیر X و Y را به وسیله‌ی یک جدول نمایش دهیم.

مثال ٤–١٤. دو مهره به تصادف از ظرفی که محتوی ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی سبز است، انتخاب می‌کنیم. اگر X و Y به ترتیب تعداد مهره‌های قرمز و مهره‌های آبی باشند که بین دو مهره‌ی منتخب از ظرف وجود دارند، احتمال‌های مربوط به همه‌ی جفت‌های مقادیر ممکن Xو Y را بیابید.

حل. جفت‌های ممکن عبارت‌اند از (۰،۰)، (۰،۱)، (۱،۰)، (۱،۱)، (۰،۲)، و (۲،۰). برای پیدا کردن احتمال‌های مربوط به (۱،۰)، مشاهده می‌کنیم که با پیشامد به‌دست‌آوردن یک مهره از سه مهره‌ی قرمز، ۰ مهره از دو مهره‌ی آبی، و در نتیجه یک مهره از چهار مهره‌ی سبز سروکار داریم. تعداد راه‌هایی که می‌توان این کار را انجام داد برابر

$\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{4}{1}=12$ است، و تعداد کل راه‌هایی که می‌توان ۲ مهره از ۹ مهره را انتخاب کرد برابر $\binom{9}{2}=36$ است. چون این امکانات بنابر فرض تصادفی بودن انتخاب‌ها هم‌شانس‌اند از قضیه‌ی ۳-۲، نتیجه می‌شود که احتمال مربوط به $(1,0)$ برابر $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ است. همین‌طور، احتمال مربوط به $(1,1)$ برابر

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{0}}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{36}$$

است و با ادامه‌ی این راه، مقادیری را که در جدول زیر نشان داده‌ایم به‌دست می‌آوریم.

		x		
		۰	۱	۲
	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
y	۱	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	۰
	۲	$\frac{1}{36}$	۰	۰

درواقع مانند حالت یک متغیره، عموماً بهتر است که چنین احتمال‌هایی را به وسیله‌ی فرمولی ارائه کنیم. به عبارت دیگر بهتر است که احتمال‌ها را به وسیله‌ی تابعی با مقادیر $f(x,y)=P(X=x,Y=y)$، برای هر جفت از مقادیر (x,y) در برد متغیرهای تصادفی X و Y بیان کنیم. به عنوان نمونه، می‌توانیم برای جفت متغیرهای تصادفی مثال ٤-١٤ به ازای $x=0,1,2$، $y=0,1,2$، $0\le x+y\le 2$، بنویسیم

$$f(x,y)=\frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{4}{2-x-y}}{\binom{9}{2}}.$$

تعریف ٤-٦. اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابعی که با $f(x,y)=P(X=x,Y=y)$ برای هرجفت مقدار (x,y) در برد X، Y داده می‌شود، توزیع احتمال توأم X و Y خوانده می‌شود.

شبیه قضیه‌ی ٤-١، از اصول موضوع احتمال نتیجه می‌شود که

Payam Noor University

قضیه‌ی ٤–٧. تابعی دومتغیره وقتی و تنها وقتی می‌تواند به عنوان توزیع احتمال توأم یک جفت متغیر تصادفی X و Y به کار رود، که مقادیر آن، $f(x,y)$، در شرایط زیر صدق کنند.

۱. به ازای هر جفت مقدار (x,y) در حوزه‌ی مربوط، $f(x,y) \geq ۰$؛

۲. $\sum_x \sum_y f(x,y) = ۱$، که مجموع‌یابی دوگانه به ازای تمام جفت (x,y)های ممکن در حوزه‌ی مربوط انجام می‌شود.

مثال ٤–۱۵. مقدار k را طوری تعیین کنید که تابع

$$f(x,y) = kxy\,,\ \ x = ۱,۲,۳\,;\ \ y = ۱,۲,۳$$

را بتوان به‌عنوان توزیع احتمال توأم به‌کار برد.

حل. اگر مقادیر مختلف x و y را در تابع قراردهیم، به‌دست می‌آوریم $f(۱,۱) = k$، $f(۱,۲) = ۲k$، $f(۱,۳) = ۳k$، $f(۲,۱) = ۲k$، $f(۲,۲) = ۴k$، $f(۲,۳) = ۶k$، $f(۳,۱) = ۳k$، $f(۳,۲) = ۶k$، $f(۳,۳) = ۹k$. برای برقراری اوّلین شرط قضیه‌ی ٤–٧، ثابت k نباید منفی باشد، و برای برقراری دوّمین شرط

$$k + ۲k + ۳k + ۴k + ۵k + ۶k + ۷k + ۸k + ۹k = ۱$$

به قسمی که $۳۶k = ۱$ و $k = \frac{۱}{۳۶}$.

مانند حالت یک متغیره، در مسائل زیادی دانستن احتمال اینکه مقادیر دو متغیر تصادفی برابر با اعداد حقیقی x و y یا کوچکتر از آنها باشند، مورد توجه است.

تعریف ٤–٧. اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابعی که به صورت به ازای $-\infty < x < +\infty$، و $-\infty < y < +\infty$

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} f(s,t)$$

داده می‌شود، و در آن $f(s,t)$ مقدار توزیع احتمال توأم X و Y در (s,t) است، تابع توزیع توأم، یا توزیع تجمعی توأم X و Y خوانده می‌شود.

مثال ٤–١٦. با مراجعه به مثال ٤–١٤، $F(۱,۱)$ را پیدا کنید.

حل.

$$\begin{aligned} F(1,1) &= P(X \le 1, Y \le 1) \\ &= f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

مانند حالت یک متغیره، تابع توزیع توأم دو متغیرتصادفی به ازای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است؛ به عنوان نمونه برای مثال ٤-١٤، $F(-2,1) = P(X \le -2, Y \le 1) = 0$ و $F(3/7, 4/5) = P(X \le 3/7, Y \le 4/5) = 1$.

حال مفاهیمی راکه تاکنون دراین بخش معرف کرده‌ایم به حالت پیوسته تعمیم می‌دهیم.

تعریف ٤-٨. یک تابع دو متغیره با مقادیر $f(x,y)$، که روی صفحه‌ی xy، تعریف شده است، تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y خوانده می‌شود، اگر و تنها اگر، برای هر ناحیه‌ی A از صفحه‌ی xy

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy.$$

قضیه‌ی ٤-٨. تابعی دو متغیره را می‌توان به عنوان تابع چگالی احتمال توأم یک جفت متغیر تصادفی پیوسته‌ی X و Y به کار برد که مقادیر آن $f(x,y)$، در شرایط زیر صدق کنند:

۱. به ازای $-\infty < x < +\infty$، $-\infty < y < +\infty$؛ $f(x,y) \ge 0$،

۲. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$.

مثال ٤-١٧. اگر تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5} x(y+x) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

باشد، $P((X,Y) \in A)$ را که در آن A، ناحیه‌ی $\{(x,y) \mid 0 < x < \frac{1}{2}, 1 < y < 2\}$ است

Payam Noor University

بیابید.

حل.

$$P[(X,Y)\in A)=P(0<X<\tfrac{1}{2}\ ,\ 1<Y<2)$$

$$=\int_1^2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{5}x\,(y+x)\,dx\,dy=\int_1^2\left(\frac{3x^2y}{10}+\frac{3x^3}{15}\bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}\right)dy$$

$$=\int_1^2\left(\frac{3y}{40}+\frac{1}{40}\right)dy=\frac{3y^2}{80}+\frac{y}{40}\bigg|_1^2=\frac{11}{80}.$$

تمرین

۴-۳۵. اگر توزیع توأم (X,Y) به صورت

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x+2y}{51} & x=1,2\ ;\ y=1,2,3\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

باشد، مقدار $F(1,2)$ چقدر است؟

۴-۳۶. اگر تابع چگالی توأم X و Y به صورت

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & x>0,\ \ y>0,\ x+y<1\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

باشد، $P(\frac{1}{2}<X<\frac{2}{3}\ ,\ \frac{1}{8}<Y<\frac{1}{3})$ را به دست آورید.

۴-۳۷. جعبه‌ای را در نظر گیرید که r مهره‌ی یکسان با شماره‌های ۱، ۲، ...، r در آن باشند. یک نمونه‌ی تصادفی n تایی از این جعبه

الف) بدون جایگذاری،

ب) با جایگذاری،

انتخاب می‌کنیم. اگر X_1 نمایانگر کوچک‌ترین عدد انتخابی در نمونه و X_2 نمایانگر بزرگترین عدد انتخابی در نمونه باشد، توزیع توأم (X_1,X_2) را بیابید.

۴-۳۸. مقدار k را به نحوی بیابید تا تابع زیر یک تابع چگالی توأم باشد.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{k}{y} & 0<x<y,\ \ 0<y<1\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

Payam Noor University

٤-٦ توزیع‌های حاشیه‌ای

برای معرفی مفهوم توزیع حاشیه‌ای، ابتدا مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ٤-۱۸. در مثال ٤-۱٤ توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y، یعنی تعداد مهره‌های قرمز و تعداد مهره‌های آبی موجود بین مهره‌ای را که به تصادف ازظرفی محتوی ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی آبی، و ۴ مهره‌ی سبز بیرون می‌آوریم، به دست آوردیم. توزیع احتمال X و توزیع احتمال Y را به طور جداگانه پیدا کنید.

حل. نتایج مثال ٤-۱٤، همراه با مجموع‌های حاشیه‌ای، یعنی مجموع‌های مربوط به هر سطر و هر ستون را در جدول زیر نشان داده‌ایم.

$y \backslash x$	۰	۱	۲	
۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
۱	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	۰	$\frac{7}{18}$
۲	$\frac{1}{36}$	۰	۰	$\frac{1}{36}$
	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	

مجموع‌های ستونی احتمال‌هایی هستند که X مقادیر ۰، ۱، و ۲ را اختیار می‌کند. به عبارت دیگر این مجموع‌ها، مقادیر

$$g(x)=\sum_{y=0}^{2} f(x,y) \qquad x=0,1,2$$

مربوط به توزیع احتمال X هستند. به‌همین ترتیب، مجموع‌های سطری، مقادیر

$$h(y)=\sum_{x=0}^{2} f(x,y) \qquad y=0,1,2$$

مربوط به توزیع احتمال Y هستند.

لذا به تعریف زیر هدایت می‌شویم.

تعریف ٤-۹. اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته، و $f(x,y)$ مقدار توزیع احتمال توأم آنها در (x,y) باشد، تابعی که برای هر x در برد X به صورت

$$g(x)=\sum_{y} f(x,y),$$

Payame Noor University

داده می‌شود، توزیع حاشیه‌ای X نام دارد. متناظراً تابعی که برای هر y در برد Y به صورت

$$h(y) = \sum_{x} f(x, y),$$

داده می‌شود، توزیع حاشیه‌ای Y نام دارد.

وقتی X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته‌اند، چگالی‌های احتمال به جای توزیع‌های احتمال، و انتگرال‌ها به جای مجموع‌ها قرار می‌گیرند، و به دست می‌آوریم:

تعریف ۴–۱۰. اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته و $f(x,y)$ مقدار چگالی احتمال توأم آنها در (x,y) باشد، تابعی که به صورت

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy, \qquad -\infty < x < +\infty$$

داده می‌شود، چگالی حاشیه‌ای X نام دارد. متناظراً، تابعی که به صورت

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx, \qquad -\infty < y < +\infty$$

داده می‌شود، چگالی حاشیه‌ای Y نام دارد.

مثال ۴–۱۹. چگالی توأم

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

داده شده است، چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y را بیابید.

حل. با انجام انتگرال‌گیری‌های لازم برای $0 < x < 1$، به دست می‌آوریم

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy = \int_{0}^{1} \frac{2}{3}(x + 2y)\, dy = \frac{2}{3}(x + 1),$$

و برای سایر مقادیر x داریم $g(x) = 0$. به‌همین طریق برای $0 < y < 1$،

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_{0}^{1} \frac{2}{3}(x + 2y)\, dx = \frac{1}{3}(1 + 4y),$$

و برای سایر مقادیر $h(y) = 0$.

وقتی با بیش از دو متغیر تصادفی سروکار داریم، نه تنها می‌توانیم از توزیع‌های حاشیه‌ای تک تک متغیرهای تصادفی صحبت کنیم، بلکه می‌توانیم از توزیع‌های حاشیه‌ای توأم چند متغیر تصادفی هم صحبت به میان آوریم. اگر توزیع احتمال توأم

متغیرهای تصادفی گسستهی X_1، X_2، X_3، ...، X_n دارای مقادیر $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ باشد، توزیع حاشیهای X_1 به تنهایی برای تمام مقادیر واقع در برد X_1 به صورت

$$g(x_1) = \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

داده میشود. توزیع حاشیهای توأم X_1، X_2، X_3 برای همهی مقادیر در برد x_1 x_2 x_3، به صورت

$$m(x_1, x_2, x_3) = \sum_{x_4} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

داده میشود، و توزیعهای حاشیهای دیگر را نیز میتوان به همین طریق تعریف کرد. برای حالت پیوسته، چگالیهای احتمال به جای توزیعهای احتمال و انتگرالها به جای مجموعها قرار میگیرند، و اگر چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوستهی X_1، X_2، X_3، ...، X_n مقدار $f(x_1, \ldots, x_n)$ را داشته باشند، چگالی حاشیهای X_2 به تنهایی برای $-\infty < x_2 < +\infty$، بهصورت

$$h(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_3 \ldots dx_n,$$

داده میشود، چگالیحاشیهای توأم X_1 و X_n، برای $-\infty < x_1 < +\infty$، $-\infty < x_n < +\infty$، به صورت

$$\varphi(x_1, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_2\, dx_3 \ldots dx_{n-1},$$

داده میشود، و قسعلیهذا.

مثال ٤-۲۰. چگالی احتمال سه متغیرهی

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 + x_2)e^{-x_3} & 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ \ x_3 > 0 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

را در نظر میگیریم. چگالی حاشیهای توأم X_1 و X_3 و چگالی حاشیهای X_1 را بیابید.

حل. با انجام انتگرالگیریهای لازم، چگالی حاشیهای توأم X_1 و X_3 را برای $0 < x_1 < 1$ و $x_3 > 0$ به صورت زیر پیدا میکنیم:

$$m(x_1, x_3) = \int_0^1 (x_1 + x_2) e^{-x_3}\, dx_2 = (x_1 + \frac{1}{2})\ e^{-x_3},$$

و برای سایر مقادیر داریم $m(x_1, x_3) = 0$. با استفاده از این نتیجه، متوجه میشویم که چگالی حاشیهای X_1 تنها، برای $0 < x_1 < 1$، به صورت

$$g(x_1) = \int_0^{+\infty}\int_0^1 f(x_1, x_2, x_3)dx_2 x_3 = \int_0^{+\infty} m(x_1, x_3)\, dx_3$$
$$= \int_0^{+\infty}(x_1 + \tfrac{1}{2})\, e^{-x_3}\, dx_3 = x_1 + \tfrac{1}{2}$$

داده می‌شود و به ازای سایر مقادیر $g(x_1) = 0$.

تمرین

۴–۳۹. برای تمرین ۴–۳۵، توابع چگالی حاشیه‌ای را به دست آورید.

۴–۴۰. برای تمرین ۴–۳۶، توابع چگالی حاشیه‌ای را به دست آورید.

۴–۴۱. توابع چگالی حاشیه‌ای را از روی توزیع توأم زیر به دست آورید

x \ y	۱	۲	۳	$f(x)$
۱	$\frac{1}{9}$	0	0	
۲	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	
۳	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	
$f(y)$				۱

۴–۴۲. اگر $F(x,y)$ مقدار تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی X و Y باشد، برحسب کمیت‌های $F(a,c)$، $F(a,d)$، $F(b,c)$، و $F(b,d)$، مقدار $P(a < X \le b, c < Y \le d)$ را بیابید.

۴–۷ متغیرهای تصادفی مستقل

وقتی با دو یا چند متغیر تصادفی سروکار داریم، مسائل استقلال معمولاً اهمیّت زیادی دارند.

تعریف ۴–۱۱. اگر $f(x_1, x_2, ..., x_n)$، مقدار توزیع احتمال توأم n متغیر تصادفی گسسته‌ی X_1، X_2، ...، X_n در $(x_1, x_2, ..., x_n)$ و $f_i(x_i)$ مقدار توزیع حاشیه‌ای X_i در x_i به ازای $i = 1, 2, ..., n$ باشد، این متغیرها مستقل‌اند اگر و تنها اگر به ازای کلیه‌ی $(x_1, x_2, ..., x_n)$ها در بردشان

Payam Noor University

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1)\ f_2(x_2)\ \ ...\ \ f_n(x_n).$$

برای ارائه‌ی تعریفی متناظر در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته، تنها کلمه‌ی چگالی را به جای کلمه‌ی توزیع قرار می‌دهیم.

با این تعریف برای استقلال، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که سه متغیرتصادفی مثال ٤–٢۰ مستقل نیستند، امّا دو متغیر تصادفی X_1 و X_3 و همچنین دو متغیر تصادفی X_2 و X_3 دو به دو مستقل‌اند.

مثال‌های زیر برای نشان‌دادن نحوه‌ی استفاده از تعریف ٤–١١ در یافتن احتمال‌های مربوط به چندین متغیر تصادفی مستقل، به کار می‌روند.

مثال ٤–٢١. n پرتاب مستقل یک سکه‌ی همگن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید X_i تعداد (۰ یا ۱) شیر حاصل در iامین پرتاب، $i = 1, 2, ..., n$ باشد. توزیع احتمال توأم این n متغیر تصادفی را بیابید.

حل. چون هریک از متغیرهای تصادفی X_i، به ازای $i = 1, 2, ..., n$، دارای توزیع احتمال

$$f_i(x_i) = \frac{1}{2} \quad x_i = 0, 1$$

است، و n متغیر تصادفی مستقل‌اند، توزیع احتمال توأم آنها با

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1)\ f_2(x_2)\ \ ...\ \ f_n(x_n)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

داده می‌شود، که در آن هر x_i، به ازای $i = 1, 2, ..., n$، برابر ۰ یا ۱ است.

مثال ٤–٢٢. متغیرهای تصادفی مستقل X_1، X_2، X_3 با چگالی‌های احتمال

$$f_1(x_1) = \begin{cases} e^{-x_1} & x_1 > 0 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 2e^{-2x_2} & x_2 > 0 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

$$f_3(x_3) = \begin{cases} 3e^{-3x_3} & x_3 > 0 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

Payam Noor University

داده شده‌اند، تابع چگالی احتمال توأم آنها را بیابید، و آن را برای محاسبه‌ی $P(X_۱+X_۲\leq ۱\,,X_۳>۱)$ به کار برید.

حل. مقادیر چگالی احتمال توأم به ازای $x_۱>۰$، $x_۲>۰$، $x_۳>۰$ به صورت

$$\begin{aligned} f(x_۱,x_۲,x_۳) &= f_۱(x_۱)f_۲(x_۲)f_۳(x_۳) \\ &= e^{-x_۱}\,۲e^{-۲x_۲}\,۳e^{-۳x_۳} = ۶e^{-x_۱-۲x_۲-۳x_۳}, \end{aligned}$$

داده می‌شود، و به ازای سایر مقادیر $f(x_۱,x_۲,x_۳)=۰$. پس

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_۱+X_۲\leq ۱,X_۳>۱) &= \int_۱^{\infty}\int_۰^۱\int_۰^{۱-x_۲} ۶e^{-x_۱-۲x_۲-۳x_۳} \\ &= (۱-۲e^{-۱}+e^{-۲})e^{-۳} \\ &= ۰/۰۲۰. \end{aligned}$$

تمرین

۴–۴۳. برای تمرین ۴–۳۵ تعیین کنید، متغیرهای تصادفی مستقل‌اند یا مستقل نیستند.

۴–۴۴. اگر توزیع احتمال توأم سه متغیر تصادفی گسسته X، Y، و Z به‌صورت زیر باشد

$$f(x,y,z)=\frac{(x+y)z}{۶۳},\quad x=۱,۲;\quad y=۱,۲,۳;\quad z=۱,۲$$

الف) آیا سه متغیر تصادفی از هم مستقل‌اند؟

ب) مقدار $P(X=۲,Y+Z\leq ۳)$ را بیابید.

۴–۴۵. توابع چگالی حاشیه‌ای را از روی توزیع توأم زیر به دست آورید، سپس استقلال دو متغیر تصادفی را مورد بررسی قرار دهید.

x \ y	۱	۲	۳	$f(x)$
۱	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	
۲	$\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	
۳	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۰	
$f(y)$				۱

Payame Noor University

٤-٨ توزیع‌های شرطی

در فصل سوّم، احتمال شرطی پیشامد A را وقتی که پیشامد B معلوم است، به شرط $P(B) \neq 0$ به‌صورت

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

تعریف کردیم. فرض کنید که اکنون A و B پیشامدهای $X = x$ و $Y = y$ هستند، بنابراین می‌توانیم به شرط $P(Y = y) = h(y) \neq 0$ بنویسیم

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x, y)}{h(y)},$$

که در آن $f(x,y)$ مقدار توزیع احتمال توأم X و Y در (x,y)، و $h(y)$ مقدار توزیع حاشیه‌ای Y در y است. احتمال شرطی را به صورت $f(x \mid y)$ می‌نویسیم تا نشان دهیم که x مقدار متغیر و y تثبیت شده است. اینک تعریف زیر را ارائه می‌دهیم:

تعریف ٤-١٢. اگر $f(x,y)$ مقدار توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته‌ی X و Y در (x,y)، و $h(y)$ مقدار توزیع حاشیه‌ای Y در y باشد، تابعی که برای هر x در برد X به صورت

$$f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, \qquad h(y) \neq 0$$

است، توزیع شرطی X به شرط $Y = y$ نامیده می‌شود. متناظراً، اگر $g(x)$، مقدار توزیع حاشیه‌ای X در x باشد، تابعی که برای هر y در برد Y به صورت

$$w(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \qquad g(x) \neq 0$$

است، توزیع شرطی Y به شرط $X = x$ نامیده می‌شود.

روشن است برای دو متغیر تصادفی مستقل داریم:

$$f(x \mid y) = g(x), \qquad w(y \mid x) = h(y).$$

مثال ٤-٢٣. اگر توزیع توأم دو متغیر تصادفی به صورت

$x \backslash y$	۰	۱	۲	$g(x)$
۱	۰	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$
۲	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$
۳	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$
$h(y)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۱

باشد، سه چگالی شرطی مطرح به شرط y عبارتند از:

$(x \mid y=۰)$	۱	۲	۳
$f(x \mid ۰)$	$\frac{۰}{\frac{۱}{۳}}=۰$	$\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}}=۱$	$\frac{۰}{\frac{۱}{۳}}=۰$

$$\Rightarrow \quad P(X=۲ \mid Y=۰)=۱$$

$(x \mid y=۱)$	۱	۲	۳
$f(x \mid ۱)$	$\frac{۰}{\frac{۱}{۳}}=۰$	$\frac{۰}{\frac{۱}{۳}}=۰$	$\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}}=۱$

$$\Rightarrow \quad P(X=۳ \mid Y=۱)=۱$$

$(x \mid y=۲)$	۱	۲	۳
$f(x \mid ۲)$	$\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۲}$	$\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۲}$	$\frac{۰}{\frac{۱}{۳}}=۰$

$\Rightarrow$

$(x \mid y=۲)$	۱	۲
$f(x \mid ۲)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

تمرین

۴–۴۶. با توجه به اطلاعات مثال ۴–۲۳، چگالی‌های شرطی $w(y \mid x)$ را به‌دست آورید.

۴–۴۷. نشان دهید که $w(y \mid x)$ و $f(x \mid y)$ ویژگی‌های تابع چگالی را دارا می‌باشند.

Payam Noor University

Payam Noor University

فصل پنجم

امید ریاضی

۵-۱ مقدمه

مفهوم امید ریاضی، در ابتدا، در ارتباط با بازی‌های شانسی به وجود آمده است، و در ساده‌ترین صورتش، حاصل‌ضرب مبلغی است که بازیکن امکان برد آن را دارد در احتمال آنکه برنده شود. امروزه کاربرد آن فقط منحصر به این موضوع نیست. به سبب سادگی از مثالی که بسیار رایج است برای ارائه‌ی مفهوم امید ریاضی استفاده می‌کنیم: فروشگاهی از میان ۱۰۰۰۰ مشتری، جایزه‌ای به ارزش ۱۰۰ سکه‌ی طلا برای مشتری که به تصادف انتخاب شود، در نظر گرفته، پس امید ریاضی دریافت جایزه برای هر مشتری $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}\times ۱۰۰ = ۰/۰۱$ سکه‌ی طلا است. این رقم به مفهوم یک متوسط تعبیر می‌شود، بدین معنا که مقدار جایزه‌ی ۱۰۰۰۰ مشتری جمعاً ۱۰۰ سکه‌ی طلا، یا به‌طور متوسط به هر مشتری $\frac{۱۰۰}{۱۰۰۰۰} = ۰/۰۱$ سکه‌ی طلا می‌رسد. اگر جایزه‌ی دوّمی به ارزش ۵۰ سکه‌ی طلا و جایزه‌ی سومی به‌ارزش ۳۰ سکه‌ی طلا نیز وجود داشته باشند، استدلال می‌کنیم که مقدار جایزه‌ی برای ۱۰۰۰۰ مشتری جمعاً،

$$۱۰۰ + ۵۰ + ۳۰ = ۱۸۰$$

سکه‌ی طلا، یا به‌طور متوسط مقدار جایزه‌ی هر مشتری $\frac{۱۸۰}{۱۰۰۰۰} = ۰/۰۱۸$ سکه‌ی طلا است. اگر به‌طریق دیگری به مطلب نگاه کنیم، می‌توانیم استدلال نمائیم که اگر قرعه‌کشی به دفعات زیادی تکرار شود، در ۹۹/۹۷ درصد از دفعات (یا با احتمال ۰/۹۹۹۷) جایزه‌ای نصیب‌مان نمی‌شود و در ۰/۰۱ درصد از دفعات (یا با احتمال

Payame Noor University

۰/۰۰۰۱) یکی از سه جایزه را می‌بریم. پس به‌طور متوسط

$$0(0/9997)+100(0/0001)+50(0/0001)+30(0/0001)= \text{سکه } 0/018$$

خواهیم برد که مجموع حاصل‌ضرب‌های حاصل از ضرب هر مبلغ در احتمال متناظر با آن است.

۵-۲ مقدار امید ریاضی یک متغیرتصادفی

در مثال بخش قبل، مبلغی که امکان برد آن را داشتیم یک متغیر تصادفی گسسته بود، و امید ریاضی این متغیر تصادفی مجموع حاصل‌ضرب‌های حاصل از ضرب هر مقدار متغیر تصادفی در احتمال متناظر با آن بود. لذا با نامیدن امید ریاضی یک متغیرتصادفی صرفاً به عنوان مقدار مورد انتظار، و تعمیم این تعریف به حالت پیوسته، و با قرار دادن عمل انتگرال‌گیری به جای مجموع‌یابی، داریم:

تعریف ۵-۱. اگر X یک متغیر تصادفی گسسته و f توزیع احتمال آن باشد، مقدار امید ریاضی X برابر است با

$$E(X)=\sum_x x\,f(x),$$

متناظراً، اگر X متغیرتصادفی پیوسته و f تابع چگالی احتمال آن باشد، مقدار امید ریاضی X برابر است با

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx.$$

البته، در این تعریف فرض شده است که مجموع یا انتگرال موجود است؛ در غیر این صورت، امید ریاضی قابل تعریف نیست.

مثال ۵-۱. محموله‌ایی مرکب از ۱۲ دستگاه کامپیوتر، شامل دو کامپیوتر معیوب است. اگر سه دستگاه کامپیوتر را برای ارسال به یک هتل به تصادف انتخاب کنیم، وجود چند دستگاه معیوب را می‌توان انتظار داشت؟

حل. می‌توانیم x تا از ۲ کامپیوتر معیوب و $3-x$ تا از ۱۰ کامپیوتر سالم را به $\binom{2}{x}\times\binom{10}{3-x}$ راه انتخاب کنیم، و می‌توانیم ۳ کامپیوتر از ۱۲ کامپیوتر را به $\binom{12}{3}$ راه

Payam Noor University

برگزینیم. با فرض اینکه همه‌ی $\binom{12}{3}$ امکان، هم‌شانس باشند، متوجه می‌شویم که توزیع احتمال X، تعداد کامپیوترهای معیوبی که به یک مرکز آموزشی فرستاده می‌شود، به صورت

$$f(x)=\frac{\binom{2}{x}\binom{10}{3-x}}{\binom{12}{3}},\qquad x=0,1,2$$

یا به صورت جدول

x	۰	۱	۲
$f(x)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

است. حال

$$E(X)=0\times\frac{6}{11}+1\times\frac{9}{22}+2\times\frac{1}{22}=\frac{1}{2},$$

و چون امکان به دست آوردن یک نیمه کامپیوتر معیوب وجود ندارد، روشن است که اصطلاح «انتظار» به مفهوم محاوره‌ای آن مطرح نیست. در واقع این اصطلاح را باید به عنوان یک متوسط مربوط به تکرار ارسال محموله‌ها تحت شرایط داده شده تعبیر کرد.

مثال ۵-۲. اندازه‌گیری‌های کدگذاری شده‌ی خاصی از فاصله‌ی بین دو دندانه‌ی پیچ در یک بست، دارای چگالی احتمال

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi(1+x^2)} & 0<x<1\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

است. مقدار مورد انتظار این متغیرتصادفی را پیدا کنید.

حل. با استفاده از تعریف ۵-۱ داریم

$$E(X)=\int_0^1 x\,\frac{4}{\pi(1+x^2)}\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{\ln 4}{\pi}=0/4413.$$

در بسیاری از مسائل آمار، نه تنها مقدار امید ریاضی یک متغیر تصادفی X، بلکه مقادیر امید ریاضی متغیرهای تصادفی وابسته به X نیز مورد توجه‌اند. مثلاً ممکن است

متغیر تصادفی Y مورد توجه ما باشد که مقادیرش با مقادیر X از طریق معادله‌ی $y = g(x)$ در ارتباط‌اند. برای ساده‌کردن نمادگذاری، این متغیر تصادفی را به صورت $g(X)$ نشان می‌دهیم؛ برای مثال $g(X)$ ممکن است $X^۳$ باشد، به قسمی که وقتی X، مقدار ۲ را اختیار می‌کند، $g(X)$، مقدار ۸ = $۲^۳$ را اختیار کند. اگر بخواهیم مقدار امید ریاضی چنین متغیرتصادفی $g(X)$ را پیدا کنیم، می‌توانیم ابتدا توزیع احتمال یا چگالی احتمال آن را بیابیم، و آنگاه تعریف ٤-۱ را به کاربریم، امّا معمولاً به کار بردن قضیه‌ی زیر آسان‌تر و سرراست‌تر است:

قضیه‌ی ٤-۱. اگر X متغیرتصادفی گسسته، و $f(x)$ مقدار توزیع احتمال آن به ازای x باشد، مقدار امید ریاضی متغیرتصادفی $g(X)$،

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)\, f(x)$$

است. متناظراً اگر X متغیرتصادفی پیوسته و $f(x)$ مقدار چگالی احتمال آن به ازای x باشد، مقدار امیدریاضی متغیرتصادفی $g(X)$،

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x) dx$$

است.

برهان. این قضیه را فقط برای حالتی که X گسسته است و برد متناهی دارد اثبات می‌کنیم. چون $y = g(x)$ الزاماً یک تناظر یک‌به‌یک را تعریف نمی‌کند. فرض می‌کنیم که وقتی x مقادیر $x_{i۱}, x_{i۲}, \ldots, x_{in_i}$ را اختیار می‌نماید، $g(x)$ مقدار g_i را اختیار کند. در این‌صورت احتمال اینکه $g(X)$، مقدار g_i را اختیار کند

$$P[g(X) = g_i] = \sum_{j=۱}^{n_i} f(x_{ij})$$

و اگر $g(x)$، مقادیر $g_۱$، $g_۲$، ...، g_m را اختیار کند، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{i=1}^{m} g_i \; P[g(X)=g_i] \\ &= \sum_{i=1}^{m} g_i \sum_{j=1}^{n_i} f(x_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} g_i \; f(x_{ij}) \\ &= \sum_{x} g(x)\, f(x) \end{aligned}$$

که در آن مجموع‌یابی روی همه‌ی مقادیر X انجام می‌شود.

مثال ۵-۳. اگر X عددی باشد که در ریختن یک تاس سالم ظاهر می‌شود، مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی $g(X)=2X^2+1$ را بیابید.

حل. چون هر برآمد ممکن دارای احتمال $\frac{1}{6}$ است، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{x=1}^{6}(2x^2+1)\frac{1}{6} \\ &= (2\times 1^2+1)\frac{1}{6}+\cdots+(2\times 6^2+1)\frac{1}{6}=\frac{94}{3}. \end{aligned}$$

مثال ۵-۴. اگر X دارای چگالی احتمال

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

باشد، مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی $g(X)=e^{\frac{3}{4}X}$ را پیدا کنید.

حل. بنابر قضیه‌ی ۵-۱ داریم:

$$E[e^{\frac{3}{4}X}]=\int_0^{+\infty} e^{\frac{3}{4}x}\, e^{-x}\, dx=\int_0^{+\infty} e^{\frac{-1}{4}x}\, dx=4.$$

تعیین امیدهای ریاضی را اغلب می‌توان با استفاده از قضیه‌های زیر ساده کرد. این قضیه‌ها ما را قادر می‌سازند که مقادیر امید را از روی امیدهای دیگری که معلوم‌اند و یا به راحتی قابل محاسبه‌اند، حساب کنیم. چون مراحل اثبات، چه برای متغیرهای تصادفی پیوسته و چه برای متغیرهای گسسته یکی هستند، برخی برهان‌ها را برای حالت گسسته

و یا برای حالت پیوسته خواهیم داد؛ سایر برهان‌ها را به عنوان تمرین به عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.

قضیه‌ی ۵–۲. اگر a و b مقادیر ثابتی باشند، آنگاه $E(aX+b)=aE(X)+b$.

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ٤–۱، با $g(X)=aX+b$، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}E(aX+b)&=\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)\,f(x)\,dx\\&=a\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx\\&=a\,E(X)+b.\end{aligned}$$

اگر به ترتیب قرار دهیم $a=0$، $b=0$، از قضیه‌ی ۵–۲ نتیجه می‌شود که

نتیجه‌ی ۱. اگر a مقداری ثابت باشد، آنگاه $E(aX)=aE(X)$.

نتیجه‌ی ۲. اگر b مقداری ثابت باشد، آنگاه $E(b)=b$.

ملاحظه کنید که اگر بنویسیم $E(b)$، ثابت b را می‌توان متغیری تصادفی تلقی کرد که همیشه مقدار b را اختیار می‌کند.

قضیه‌ی ۵–۳. اگر c_1، c_2، ...، c_n مقادیری ثابت باشند، آنگاه

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}c_i g_i(X)\right]=\sum_{i=1}^{n}c_i\,E[g_i(X)].$$

برهان. بنابر قضیه‌ی ۱.۵ با $g(X)=\sum_{i=1}^{n}c_i\;g_i(X)$،

$$\begin{aligned}E\left[\sum_{i=1}^{n}c_i g_i(X)\right]&=\sum_{x}\left[\sum_{i=1}^{n}c_i g_i(x)\right]f(x)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x}c_i\,g_i(x)\,f(x)\\&=\sum_{i=1}^{n}c_i\;\sum_{x}g_i(x)\,f(x)\\&=\sum_{i=1}^{n}c_i\,E[g_i(X)].\end{aligned}$$

مثال ۵–۵. با استفاده از این واقعیت که

$$E(X^2) = (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\times\frac{1}{6} = \frac{91}{6},$$

برای متغیرتصادفی مثال ٤–۳ مثال را مجدداً حل کنید.

حل.

$$E(2X^2+1) = 2E(X^2)+1 = 2\times\frac{91}{6}+1 = \frac{94}{3}.$$

مثال ۵–٦. اگر چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

الف) نشان دهید که $E(X^r) = \frac{2}{(r+1)(r+2)}$، ب) از این نتیجه استفاده کرده، $E[(2X+1)^2]$ را حساب کنید.

حل. الف)

$$E(X^r) = \int_0^1 x^r\, 2(1-x)dx = 2\int_0^1 (x^r + x^{r+1})\, dx$$
$$= 2\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{2}{(r+1)(r+2)}.$$

ب) چون $E[(2X+1)^2] = 4E(X^2)+4E(X)+1$، با قراردادن $r=1$ و $r=2$ در فرمول بالا $E(X) = \frac{2}{2\times 3} = \frac{1}{3}$، و $E(X^2) = \frac{2}{3\times 4} = \frac{1}{6}$، و به دست می‌آوریم

$$E[(2X+1)^2] = 4\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{3} + 1 = 3.$$

مثال ۵–۷. نشان دهید که

$$E\,[(aX+b)^n] = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^{n-i}\, b^i\, E(X^{n-i}).$$

حل. چون بنابر قضیه‌ی ۲–۹ داریم

$$(ax+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(ax)^{n-i}\, b^i$$

نتیجه می‌شود که

$$E[(aX+b)^n] = E\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(aX)^{n-i}b^i\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^{n-i}b^i\, E(X^{n-i}).$$

مفهوم امید ریاضی را به آسانی می‌توان به وضعیت‌هایی که شامل دو یا چند متغیر تصادفی‌اند تعمیم داد. برای نمونه، اگر Z، متغیری تصادفی باشد که مقادیرش به مقادیر دو متغیر تصادفی X و Y به وسیله‌ی معادله‌ی $z=g(x,y)$ مربوط است، آنگاه می‌توان نشان داد که

قضیه‌ی ۵–٤. اگر X و Y، متغیرهای تصادفی گسسته بوده و $f(x,y)$ مقدار توزیع احتمال توأم آنها در (x,y) باشد، مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی $g(X,Y)$ با

$$E[g(X,Y)] = \sum_{x}\sum_{y} g(x,y)\,f(x,y)$$

داده می‌شود. متناظراً اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته بوده و $f(x,y)$ مقدار چگالی توأم آنها در (x,y) باشد، مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی $g(X,Y)$ با

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f(x,y)\, dxdy$$

داده می‌شود، مشروط بر اینکه مجموع و انتگرال بالا موجود باشد.

واضح است که قضیه‌ی فوق برای توابعی از هر تعداد متناهی از متغیرهای تصادفی برقرار است.

مثال ۵–۸. با مراجعه به مثال ٤–١٤، مقدار مورد انتظار $g(X,Y)=X+Y$ را پیدا کنید.

حل.

$$E(X+Y) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2}(x+y)\,f(x,y)$$
$$= (0+0)\frac{1}{6} + (0+1)\frac{2}{9} + (0+2)\frac{1}{36} + (1+0)\frac{1}{3} + (1+1)\frac{1}{6} + (2+0)\frac{1}{12} = \frac{10}{9}.$$

مثال ۵-۹. اگر تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر باشد

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{7}(x+2y) & 0<x<1,\ 1<y<2\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

مقدار امید ریاضی $g(X,Y)=\frac{X}{Y^2}$ را بیابید.

حل.

$$E(\frac{X}{Y^2})=\int_1^2\int_0^1\frac{2x(x+2y)}{7y^3}\,dx\,dy=\frac{2}{7}\int_1^2\left(\frac{1}{3y^3}+\frac{1}{y^2}\right)dy=\frac{15}{84}.$$

قضیه‌ی زیر، قضیه‌ی دیگری است که در مطالب آتی کاربردهای مفیدی دارد. این قضیه، تعمیمی از قضیه‌ی ۵-۳ است و برهانش نظیر برهان همان قضیه است.

قضیه‌ی ۵-۵. اگر c_1، c_2،...، c_n مقادیری ثابت باشند، آنگاه

$$E[\sum_{i=1}^{n}c_i g_i(X_1,X_2,...,X_k)]=\sum_{i=1}^{n}c_i E[g_i(X_1,X_2,...,X_k)].$$

تمرین

۵-۱. قضیه‌ی ۵-۲ را برای متغیرهای گسسته اثبات کنید.

۵-۲. قضیه‌ی ۵-۳ را برای متغیرهای پیوسته اثبات کنید.

۵-۳. مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی گسسته‌ی X را که دارای توزیع احتمال

$$f(x)=\frac{|x-2|}{7},\qquad x=-1,0,1,3$$

است بیابید.

۵-٤. مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی Y را که چگالی احتمال آن

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(y+1) & 2<y<4\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

است بیابید.

۵-۵. مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی X را که چگالی احتمال آن

Payame Noor University

$$f(x)=\begin{cases} x & ۰<x<۱ \\ ۲-x & ۱\le x<۲ \\ ۰ & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

است بیابید.

۵-٦. الف) اگر متغیرتصادفی X، مقادیر ۰، ۱، ۲، و۳را به ترتیب با احتمال‌های $\frac{۱}{۱۲۵}$، $\frac{۱۲}{۱۲۵}$، $\frac{۴۸}{۱۲۵}$ و $\frac{۶۴}{۱۲۵}$ اختیار کند $E(X)$ و $E(X^۲)$ را پیدا کنید.

ب) از نتایج قسمت (الف)استفاده کرده، $E[(۳X+۲)^۲]$را بیابید.

۵-۷. الف) اگر تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته X،

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱}{x(\ln ۳)} & ۱<x<۳ \\ ۰ & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

باشد $E(X)$ و $E(X^۲)$و $E(X^۳)$ را بیابید.

ب) از نتایج قسمت (الف) استفاده کرده، $E(X^۳+۲X^۲-۳X+۱)$ را پیدا کنید.

۵-۸. اگر چگالی احتمال X به صورت

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{۲} & ۰<x\le ۱ \\ \frac{۱}{۲} & ۱<x\le ۲ \\ \frac{۳-x}{۲} & ۲<x<۳ \\ ۰ & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

باشد، مقدار مورد انتظار $g(x)=X^۲-۵X+۳$ را بیابید.

۵-۹. مدیر یک شیرینی‌پزی می‌داند که تعداد کیک‌های شکلاتی که می‌تواند در روزی معین بفروشد متغیری تصادفی است که دارای توزیع احتمال $f(x)=\frac{۱}{۶}$ به ازای $x=۰,۱,۲,۳,۴,۵$، است. ضمناً می‌داند که هر کیکی که می‌فروشد ۱۰ تومان سود دارد وهر کیکی که فروش نمی‌رود ضرری (ناشی از فاسد شدن) برابر ۴ تومان خواهد داشت. به فرض اینکه هر کیک را فقط همان روزی که پخته است می‌توان فروخت، سود مورد انتظار شیرینی‌پز را برای روزی تعیین کنید که او

الف) یک کیک بپزد،

ب) دو کیک بپزد،

ج) سه کیک بپزد،

د) چهار کیک بپزد،

ه) پنج کیک بپزد.

چند کیک باید بپزد تا سود مورد انتظار را ماکسیمم کند؟

۵-۱۰. سود مقاطعه‌کاری در یک کار ساختمانی را می‌توان متغیر تصادفی پیوسته‌ای در نظر گرفت که دارای چگالی احتمال

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{18}(x+1) & -1<x<5\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

است، که در آن، واحد x برابر ۱۰۰۰۰ تومان است. سود مورد انتظار مقاطعه‌کار چقدر است؟

۵-۳ گشتاورها

امیدهای ریاضی که در اینجا و در تعریف ۵-۴ ارائه خواهند شد به **گشتاورهای توزیع** متغیر تصادفی یا صرفاً **گشتاورهای** متغیر تصادفی موسوم‌اند و در آمار از اهمیّتی خاص برخوردارند.

تعریف ۵-۲. rامین گشتاور حول مبدأ متغیرتصادفی X، که با μ'_r نشان داده می‌شود، امید X^r است؛ به صورت نمادی برای $r=0,1,2,3,...$، اگر X متغیرتصادفی گسسته باشد،

$$\mu'_r=E(X^r)=\sum_x x^r f(x),$$

و اگر X متغیرتصادفی پیوسته باشد،

$$\mu'_r=E(X^r)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f(x)\,dx.$$

شایان ذکر است که اصطلاح «گشتاور» مربوط به علم فیزیک است: اگر کمیت‌های $f(x)$ در حالت گسسته جرم‌هایی نقطه‌ایی باشند که بر نقاط محور x، واقع در فواصل x از مبدأ، به طور قائم عمل کنند، μ'_1 مختص x مرکز ثقل است، یعنی اوّلین گشتاور تقسیم بر $\sum f(x)=1$، و μ'_2 گشتاور اینرسی است، این مطلب همچنین توضیح

می‌دهید که چرا گشتاورهای μ'_r، گشتاورهای حول مبدأ نام دارند–در قیاس با فیزیک، طول بازوی اهرم دراین حالت، فاصله‌ی تا مبدأست. این قیاس در حالت پیوسته نیز به کار می‌آید که در آن μ'_1 و μ'_2 باید مختص x مرکز ثقل و گشتاور اینرسی یک میله با چگالی متغیر باشد.

وقتی $r=0$، بنابر نتیجه‌ی ۲ از قضیه‌ی ۵–۲، داریم $\mu'_0 = E(X^0) = E(1) = 1$، و این نتیجه همان‌طور که انتظار می‌رود با قضیه‌های ٤–۱ و ٤–۵ مطابقت دارد. وقتی $r=1$، داریم $\mu'_1 = E(X)$، که درست همان مقدار امید خود متغیر تصادفی X است، که از نظر اهمیّت آن در آمار، به آن نماد خاص و اسم خاصی می‌دهیم.

تعریف ۵–۳. μ'_1، **میانگین توزیع** X، یا صرفاً **میانگین** X نامیده می‌شود و آن را با μ نشان می‌دهیم.

گشتاورهای خاصی که اینک تعریف می‌کنیم در آمار اهمیت دارند، زیرا در توصیف شکل توزیع متغیرتصادفی، یعنی شکل نمودار توزیع احتمال یا چگالی احتمال به کار می‌روند.

تعریف ۵–٤. **گشتاور rام حول میانگین** متغیرتصادفی X، که آن را با μ_r نشان می‌دهیم، مقدار امید $(X-\mu)^r$ است؛ به صورت نمادی برای $r=0,1,2,3,\ldots$، اگر X گسسته باشد،

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] = \sum_x (x-\mu)^r f(x),$$

و اگر X پیوسته باشد،

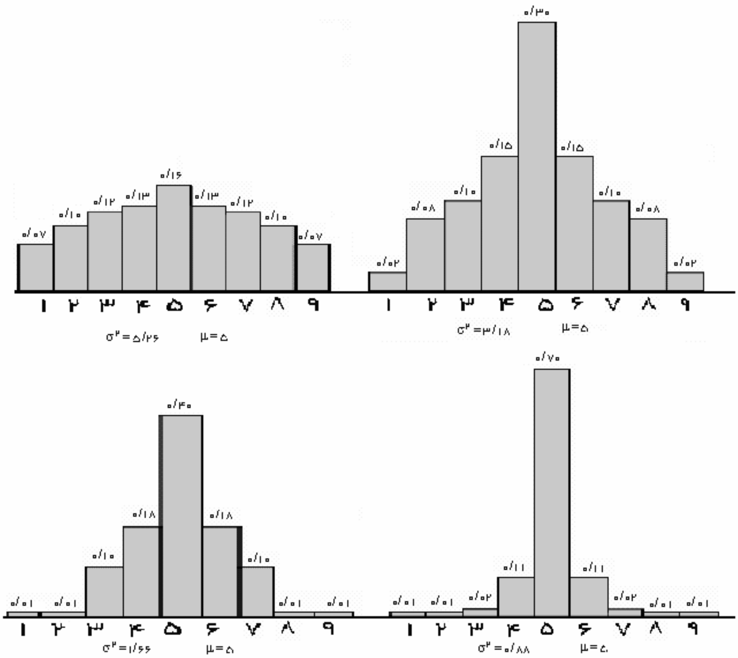
$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)\,dx.$$

توجه کنید که برای هر متغیر تصادفی که μ برای آن وجود دارد، $\mu_0 = 1$، و $\mu_1 = 0$.

دوّمین گشتاور حول میانگین در آمار اهمیّت خاصی دارد، زیرا نشان دهنده‌ی پراکندگی توزیع متغیرتصادفی است، لذا به آن نماد خاص و نام خاصی داده شده است.

تعریف ۵-۵. μ_2 را **واریانس توزیع** X، یا صرفاً واریانس X می‌نامند، و آن را با σ^2، $\mathrm{var}(X)$، یا $V(X)$ نشان می‌دهند؛ σ، ریشه‌ی دوّم مثبت واریانس را **انحراف معیار** می‌نامند.

شکل ۵-۱ نشان می‌دهد که چگونه واریانس، منعکس کننده‌ی پراکندگی توزیع متغیر تصادفی است. دراین شکل ما بافت‌نماهای توزیع‌های احتمال چهار متغیر تصادفی با میانگین یکسان $\mu = ۵$، ولی با واریانس‌هایی مساوی ۵/۲۶، ۳/۱۸، ۱/۶۶، و ۰/۸۸ را نشان‌داده‌ایم. همان‌طور که دیده می‌شود، یک مقدار کوچک σ^2، این نکته را القا می‌کند که به دست آوردن مقداری نزدیک میانگین محتمل‌تر است، و یک مقدار بزرگ σ^2، این نکته را القا می‌کند که به دست آوردن مقداری که نزدیک میانگین نیست احتمال زیادی دارد. این مطلب در بخش ۵-٤، بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. بحث مختصری از اینکه چگونه μ_3، سوّمین گشتاور حول میانگین، تقارن یا چولگی (عدم تقارن) توزیع را توصیف می‌کند، که در فصل اوّل، آمار توصیف ارائه شده است.



شکل ۵-۱. توزیع‌های با پراکندگی مختلف

دربسیاری از موارد، گشتاورهای حول میانگین، ابتدا با محاسبه‌ی گشتاورهای حول مبدأ و سپس با بیان μ_r برحسب μ'_r، به دست می‌آیند. در اینجا صرفاً فرمول محاسباتی زیر را برای $\sigma^۲$ به دست می‌آوریم.

قضیه‌ی ٥-٦. $\sigma^۲ = \mu'_۲ - \mu^۲$.

برهان.

$$\begin{aligned}\sigma^۲ &= E[(X-\mu)^۲]\\ &= E(X^۲ - ۲\mu X + \mu^۲)\\ &= E(X^۲) - ۲\mu E(X) + E(\mu^۲)\\ &= E(X^۲) - ۲\mu\mu + \mu^۲\\ &= \mu'_۲ - \mu^۲.\end{aligned}$$

مثال ٥-١٠. با استفاده از قضیه‌ی ٥-٦، واریانس X را حساب کنید. متغیر تصادفی X معرف تعداد خال‌هایی است که در ریختن یک تاس همگن ظاهر می‌شود.

حل. ابتدا میانگین X را حساب می‌کنیم

$$\mu = E(X) = ۱\times\frac{۱}{۶} + ۲\times\frac{۱}{۶} + ۳\times\frac{۱}{۶} + ۴\times\frac{۱}{۶} + ۵\times\frac{۱}{۶} + ۶\times\frac{۱}{۶} = \frac{۷}{۲}.$$

حال

$$\mu'_۲ = E(X^۲) = ۱^۲\times\frac{۱}{۶} + ۲^۲\times\frac{۱}{۶} + ۳^۲\times\frac{۱}{۶} + ۴^۲\times\frac{۱}{۶} + ۵^۲\times\frac{۱}{۶} + ۶^۲\times\frac{۱}{۶} = \frac{۹۱}{۶}$$

و نتیجه می‌شود که

$$\sigma^۲ = \frac{۹۱}{۶} - \left(\frac{۷}{۲}\right)^۲ = \frac{۳۵}{۱۲}.$$

مثال ٥-١١. با رجوع به مثال ٥-٢، انحراف معیار متغیرتصادفی X را تعیین کنید.

حل. در مثال ٥-٢، نشان دادیم که $\mu = E(X) = ۰/۴۴۱۳$. حال

$$\mu'_۲ = E(X^۲) = \frac{۴}{\pi}\int_۰^۱ \frac{x^۲}{۱+x^۲}\,dx = \frac{۴}{\pi}\int_۰^۱\left(۱ - \frac{۱}{۱+x^۲}\right)dx = \frac{۴}{\pi} - ۱ = ۰/۲۷۳۲.$$

و نتیجه می‌شود که

$$\sigma^۲ = ۰/۲۷۳۲ - (۰/۴۴۱۳)^۲ = ۰/۰۷۸۵.$$

Payam Noor University

بنابر این، $\sigma = \sqrt{0/0785} = 0/2802$.

قضیه‌ی زیر، قضیه‌ی دیگری است که در کارهای مربوط به انحراف معیارها یا واریانس‌ها اهمیت دارد.

قضیه‌ی ۵-۷. اگر واریانس X برابر σ^2 باشد، آنگاه $\text{var}(aX+b) = a^2\sigma^2$.

اثبات این قضیه به عهده‌ی خواننده واگذار می‌شود، امّا به فرع‌های زیر اشاره می‌کنیم: برای $a = 1$ و $b \neq 0$، متوجه می‌شویم که اضافه‌کردن مقداری ثابت به متغیر تصادفی، که نتیجه‌ی آن انتقال تمام مقادیر به چپ یا به راست است، به‌هیچ وجه اثری بر پراکندگی توزیع آن ندارد؛ برای $b = 0$، متوجه می‌شویم که اگر مقادیر متغیر تصادفی را در ثابتی ضرب کنیم، واریانس در مربع آن ثابت ضرب می‌شود، که موجب تغییر متناظری در پراکندگی توزیع می‌شود.

تمرین

۵-۱۱. در تمرین ۵-۳ مقدار $\text{var}(X)$ را به‌دست آورید.

۵-۱۲. در تمرین ۵-٤ مقدار $\text{var}(Y)$ را به‌دست آورید.

۵-۱۳. در تمرین ۵-۵ مقدار $\text{var}(6X)$ را به‌دست آورید.

۵-۱٤. در تمرین ۵-٦ مقدار $\text{var}(2X)$ را به‌دست آورید.

۵-۱۵. در تمرین ۵-۷ مقدار $\text{var}(1-X)$ را به‌دست آورید.

۵-۱٦. برای متغیر تصادفی X که دارای توزیع احتمال $f(x) = \frac{1}{2}$، به ازای $x = -2$ و $x = 2$ است، μ و μ_2' و σ^2 را بیابید.

۵-۱۷. برای متغیر تصادفی X که دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

است، μ و μ_2' و σ^2 را بیابید.

۵-۱۸. اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، نشان دهید که برای متغیر تصادفی Z، که مقادیرش به مقادیر X با معادله $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ را اعمال

می‌کنیم، دارای میانگین صفر و واریانس است. گوییم توزیع X را استاندارد کردیم.

۵–۱۹. اگر چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 2x^{-3} & x > 1 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

باشد، بررسی کنید که آیا میانگین و واریانس آن موجودند؟

۵–۲۰. تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی گسسته‌ی X را که دارای توزیع احتمال

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

است بیابید، و آن را برای تعیین مقادیر μ'_1 و μ'_2 به کار برید.

۵–۲۱. تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی پیوسته X را که چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

داده شده است پیدا کنید و آن را برای تعیین μ'_1، μ'_2، و σ^2 به کار برید.

۵–٤ قضیه‌ی چبیشف

برای نشان دادن اینکه چگونه σ یا σ^2 بر پراکندگی توزیع متغیرتصادفی دلالت دارد، قضیه‌ی زیر را که به یاد چبیشف ریاضیدان روسی قرن نوزدهم، قضیه‌ی چبیشف می‌نامند ثابت می‌کنیم. ما آن را در اینجا فقط برای حالت پیوسته ثابت می‌کنیم، و اثبات آن را برای حالت گسسته به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

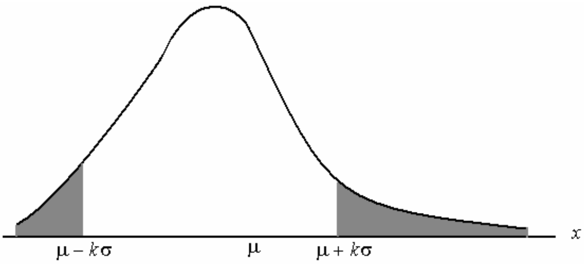
قضیه‌ی ۵–۸. (قضیه‌ی چبیشف). اگر μ و σ به ترتیب میانگین و انحراف معیار متغیر تصادفی X باشند، آنگاه برای هر ثابت مثبت k، احتمال اینکه X، مقداری با فاصله‌ی کمتر از $k\sigma$ از میانگین اختیار کند حداقل $1-\frac{1}{k^2}$ است؛ به صورت نمادی

$$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

برهان. با توجه به تعریف‌های ۵–٤ و ۵–۵، می‌نویسیم

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

و با تفکیک انتگرال به سه بخش، همان‌طور که در شکل ۵-۲ نشان داده‌ایم، به‌دست می‌آوریم



شکل ۵-۲. نموداری برای اثبات قضیه‌ی چبیشف

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx.$$

چون $(x-\mu)^2 f(x)$، عبارت زیر انتگرال، نامنفی است، می‌توانیم نابرابری

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^2 \; f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} (x-\mu)^2 \; f(x)\,dx,$$

را با حذف انتگرال دوّم تشکیل دهیم. حال چون برای $x \leq \mu - k\sigma$ یا $x \geq \mu + k\sigma$، $(x-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2$، نتیجه می‌شود که

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} k^2\sigma^2 \; f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} k^2\sigma^2 \; f(x)\,dx,$$

و بنابراین به شرط $\sigma^2 \neq 0$،

$$\frac{1}{k^2} \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)\,dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x)\,dx.$$

چون مجموع دو انتگرال در این نابرابری، احتمال این را نمایش می‌دهد که X مقداری نابیشتر از $\mu - k\sigma$ یا ناکمتر از $\mu + k\sigma$ را اختیار کند، لذا نشان داده‌ایم که

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

و نتیجه می‌شود که

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

برای مثال، احتمال اینکه X مقداری در فاصله‌ی ۲σ از میانگین اختیار کند حداقل $۱-\frac{۱}{۲^۲}=\frac{۳}{۴}$، احتمال اینکه X مقداری در فاصله‌ی ۳σ از میانگین اختیار کند حداقل $۱-\frac{۱}{۳^۲}=\frac{۸}{۹}$ و احتمال اینکه X مقداری در فاصله‌ی ۵σ از میانگین اختیار کند حداقل $۱-\frac{۱}{۵^۲}=\frac{۲۴}{۲۵}$ است. این بدان معناست که σ، پراکندگی توزیع متغیرتصادفی را کنترل می‌کند. به وضوح، احتمالی که به وسیله‌ی قضیه‌ی چبیشف داده می‌شود فقط یک کران پایینی است؛ درباره‌ی اینکه وقتی متغیری تصادفی مقداری با فاصله‌ی کمتر از $k\sigma$ از میانگین اختیار می‌کند احتمالش واقعاً بزرگتر از $۱-\frac{۱}{k^۲}$ است یا نه، و اگر بزرگتر باشد به چه اندازه، نمی‌توانیم چیزی بگوییم، امّا قضیه‌ی چبیشف ما را مطمئن می‌سازد که این احتمال نمی‌تواند کمتر از $۱-\frac{۱}{k^۲}$ باشد. تنها وقتی می‌توانیم احتمال دقیق را محاسبه کنیم که توزیع متغیر تصادفی معلوم باشد.

مثال ۵-۱۲. اگر چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت

$$f(x)=\begin{cases}۶۳۰\,x^۴(۱-x)^۴ & ۰<x<۱\\ ۰ & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

باشد، احتمال این را که X مقداری در فاصله‌ی ۲σ از میانگین اختیار کند پیدا کنید، و آن را با کران پایینی که از روی قضیه‌ی چبیشف حاصل می‌شود مقایسه نمایید.

حل. انتگرال‌گیری مستقیم نشان می‌دهد که $\mu=\frac{۱}{۲}$ و $\sigma^۲=\frac{۱}{۴۴}$، به‌قسمی که $\sigma=\sqrt{۱/۴۴}$ یا تقریباً ۰/۱۵. پس، احتمال اینکه X مقداری در فاصله‌ی ۲σ از میانگین اختیار کند برابر احتمال آن است که X مقداری بین ۰/۲۰ و ۰/۸۰ اختیار کند، یعنی

$$P(۰/۲۰<X<۰/۸۰)=\int_{۰/۲۰}^{۰/۸۰}۶۳۰\,x^۴(۱-x)^۴\,dx=۰/۹۶.$$

ملاحظه کنید که حکم «احتمال برابر ۰/۹۶ است» خیلی قوی‌تر است از حکم «احتمال حداقل برابر ۰/۷۵ است» که از قضیه‌ی چبیشف به دست می‌آید.

Payam Noor University

تمرین

۵–۲۲. قضیه‌ی چبیشف را برای متغیرهای گسسته اثبات کنید.

۵–۲۳. نشان دهید که اگر X متغیری تصادفی با میانگین μ باشد که برای آن به ازای $x<۰$، $f(x)=۰$، آنگاه برای هر ثابت مثبت a،

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a}.$$

این نابرابری را نابرابری مارکوف می‌نامند، و آن را در اینجا بیشتر به این دلیل‌آوردیم که استدلال نسبتاً ساده‌تر دیگری برای قضیه‌ی چبیشف منجر می‌شود.

۵–۲۴. نابرابری تمرین ۵–۲۳ را برای اثبات قضیه‌ی چبیشف به کار برید.

(راهنمایی: به‌جای X مقدار $(X-\mu)^۲$ را قراردهید.)

۵–۲۵. در قضیه‌ی چبیشف، وقتی احتمال اینکه متغیر تصادفی مقداری بین $\mu-k\sigma$ و $\mu+k\sigma$ اختیار کند

الف) حداقل ۰/۹۵، ب) حداقل ۰/۹۹،

است، کمترین مقدار k چه خواهد بود؟

۵–۲۶. اگر در قضیه‌ی چبیشف، قرار دهیم $k\sigma=c$، این قضیه‌درباره‌ی احتمال اینکه متغیرتصادفی مقداری بین $\mu-c$ و $\mu+c$ اختیار نماید چه حکمی می‌کند؟

۵–۲۷. توضیح دهید چرا نمی‌توان متغیر تصادفی یافت که برای آن $M_X(t)=\frac{t}{۱-t}$.

۵–۲۸. نشان دهید که اگر متغیری تصادفی دارای چگالی احتمال

$$f(x)=\frac{۱}{۲}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

باشد، تابع مولد گشتاورهایش به صورت $M_X(t)=\frac{۱}{۱-t^۲}$ است.

۵–۲۹. تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X به صورت $M_X(t)=e^{۳t+۸t^۲}$ داده شده است، تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی $Z=\frac{۱}{۴}(X-۳)$ را پیدا کنید، و برای تعیین میانگین و واریانس Z، به کار برید.

۵–۳۰. مطالعه‌ای درباره‌ی ارزش غذایی نوع یک نان نشان می‌دهد که میزان تیامین (ویتامین $B_۱$)، در یک قرص این نوع نان را می‌توان به صورت متغیری تصادفی با $\mu=۰/۲۶۰$ میلی‌گرم و $\sigma=۰/۰۰۵$ میلی‌گرم در نظر گرفت. بنابر قضیه‌ی چبیشف

مقدار تیامین موجود در
الف) حداقل $\frac{۳۵}{۳۶}$ تمام قرص‌های این نوع نان،
ب) حداقل $\frac{۱۴۳}{۱۴۴}$ تمام قرص‌های این نوع نان،
بین کدام دو مقدار باید باشد؟

۵-۵ توابع مولد گشتاورها

گرچه گشتاورهای بیشتر توزیع‌ها را می‌توان مستقیماً با محاسبه‌ی انتگرال‌ها یا مجموعه‌های لازم معین کرد، ولی شیوه‌ی دیگری نیز وجود دارد که اغلب تسهیلات قابل ملاحظه‌ای را در اختیار می‌گذارد. در این شیوه، از **توابع مولد گشتاورها** استفاده می‌شود.

تعریف ۵-۶. تابع مولد گشتاورهای متغیرتصادفی X، در صورت وجود، اگر X گسسته باشد، با تابع

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x),$$

و اگر X پیوسته باشد، با تابع

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx.$$

داده می‌شود، که در آن t عددی حقیقی است.

t شناسه‌ی مستقل است و معمولاً مقادیری از t در همسایگی ۰ مورد نظرند.

برای توضیح اینکه چرا به این تابع، عنوان تابع «مولد گشتاورها» را اطلاق می‌کنیم، به جای e^{tx} بسط آن به سری ماکلورن را قرار می‌دهیم، یعنی

$$e^{tx} = ۱ + tx + \frac{t^۲ x^۲}{۲!} + \frac{t^۳ x^۳}{۳!} + \cdots + \frac{t^r x^r}{r!} + \cdots.$$

بنابراین، برای حالت گسسته به دست می‌آوریم

Payam Noor University

$$M_X(t)=\sum_x\left[1+tx+\frac{t^2x^2}{2!}+\frac{t^3x^3}{3!}+\cdots+\frac{t^rx^r}{r!}+\cdots\right]f(x)$$
$$=\sum_x f(x)+t\sum_x xf(x)+\frac{t^2}{2!}\sum_x x^2f(x)+\cdots+\frac{t^r}{r!}\sum_x x^rf(x)+\cdots$$
$$=1+\mu t+\mu'_2\frac{t^2}{2!}+\cdots+\mu'_r\frac{t^r}{r!}+\cdots$$

و می‌توان دید که در سری ماکلورن تابع مولد گشتاورهای X، ضریب $\frac{t^r}{r!}$، همان μ'_r، rامین گشتاور حول مبدأ متغیر تصادفی X است. در حالت پیوسته، استدلال همین‌گونه است.

مثال ۵-۱۳. تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X را که چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

است بیابید، و آن را برای تعیین به کار برید.

حل. بنابر تعریف

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_0^{+\infty}e^{tx}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x(t-1)}dx=\frac{1}{t-1},\qquad |t|<1 \text{ به ازای}$$

همان‌طور که می‌دانید، وقتی $|t|<1$ سری ماکلورن برای این تابع مولد گشتاورها به صورت

$$M_X(t)=1+t+t^2+t^3+\cdots+t^r+\cdots$$
$$=1+1!\frac{t}{1!}+2!\frac{t^2}{2!}+3!\frac{t^3}{3!}+\cdots+r!\frac{t^r}{r!}+\cdots$$

است و بنابر این برای $r=0,1,2,\ldots$، $\mu'_r=r!$.

مشکل اصلی در به کار بردن سری ماکلورن تابع مولد گشتاورها برای تعیین گشتاورهای یک متغیر تصادفی، معمولاً پیداکردن تابع مولد گشتاورها نیست، بلکه مشکل، بسط آن به صورت سری ماکلورن است. اگر فقط چند گشتاور اوّل متغیر تصادفی، مثلاً μ'_1 و μ'_2 مورد توجه باشند، عمل تعیین آنها را معمولاً می‌توان با استفاده

Payam Noor University

از قضیه‌ی زیر ساده‌تر کرد.

قضیه‌ی ۵-۹. $\mu'_r = \left.\dfrac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0}$.

این قضیه از این واقعیت نتیجه می‌شود که اگر تابعی به صورت سری توانی برحسب t بسط داده شود، ضریب $\dfrac{t^r}{r!}$، مشتق مرتبه‌ی rام تابع نسبت به t به ازای $t = 0$ است.

مثال۵-۱٤. توزیع احتمال X، برای $x = 0,1,2,3,\ldots$ به صورت $f(x) = \binom{3}{x}\frac{1}{8}$ است، تابع مولد گشتاورهای این متغیر تصادفی را پیدا کنید و آن را برای تعیین μ'_1 و μ'_2 به کار برید.

حل. با جایگذاری توزیع احتمال در تعریف ۵-٦، به‌دست می‌آوریم

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{8}\sum_{x=0}^{3} e^{tx}\binom{3}{x}$$

$$= \frac{1}{8}(1 + 3e^t + 3e^{2t} + e^{3t}) = \frac{1}{8}(1+e^t)^3.$$

پس، بنابر قضیه‌ی ۵-۹،

$$\mu' = M'_X(0) = \frac{3}{8}(1+e^t)^2 e^t\Big|_{t=0} = 3,$$

و

$$\mu'_2 = M''_X(0) = \frac{3}{4}(1+e^t)e^{2t} + \frac{3}{8}(1+e^t)^2 e^t\Big|_{t=0} = 3.$$

اغلب مسائل مربوط به کاربرد توابع مولد گشتاورها را می‌توان با استفاده از قضیه‌ی زیر ساده کرد.

قضیه‌ی ۵-۱۰. اگر a و b دو مقدار ثابت باشند، آنگاه

۱. $M_{X+a}(t) = E[e^{(X+a)t}] = e^{at}M_X(t)$، ۲. $M_{bX}(t)=E(e^{bXt})=M_X(bt)$،

۳. $M_{\frac{X+a}{b}}(t)=E[e^{(\frac{X+a}{b})t}]=e^{(\frac{a}{b})t}M_X(\frac{t}{b})$.

برهان. به عنوان تمرین به عهده‌ی خواننده واگذار شده است.

همان‌طور که بعداً خواهیم دید، قسمت اوّل این قضیه، وقتی $a=-\mu$، اهمّیت خاصّی دارد، و قسمت سوّم وقتی $a=-\mu$ و $b=\sigma$ نیز دارای اهمیّت خاصی است، در این حالت

$$M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)=e^{-\frac{\mu t}{\sigma}}M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right).$$

تعریف ۵-۷. rامین و sامین گشتاور حاصل‌ضربی حول مبدأ متغیرهای تصادفی X و Y، که با $\mu'_{r,s}$ نشان داده می‌شود، مقدار مورد انتظار X^rY^s است؛ به‌صورت نمادی، برای $r=0,1,2,3,\ldots$ و $s=0,1,2,3,\ldots$، با X و Y گسسته

$$\mu'_{r,s}=E(X^rY^s)=\sum_x\sum_y x^r y^s\ f(x,y),$$

و با X و Y پیوسته،

$$\mu'_{r,s}=E(X^rY^s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^r y^s\ f(x,y)\,dx\,dy.$$

درحالت گسسته، مجموع‌یابی دوگانه روی تمام برد توأم دو متغیرتصادفی است. توجه کنید که $\mu'_{1,0}=E(X)$، که در اینجا با μ_X نشان داده‌می‌شود، و $\mu'_{0,1}=E(Y)$، که در اینجا با μ_y نشان داده‌می‌شود.

اکنون مشابه تعریف ٤-٤، تعریف زیر را از گشتاورهای حاصل‌ضربی حول میانگین‌های مربوطه ارائه می‌دهیم

تعریف ۵-۸. rامین و sامین گشتاور حاصلضربی حول مبدأ متغیرهای تصادفی X و Y، که با $\mu_{r,s}$ نشان داده می‌شود، مقدار مورد انتظار $(X-\mu_X)^r(Y-\mu_Y)^s$ است؛ به صورت نمادی برای $r=0,1,2,3,\ldots$ و $s=0,1,2,3,\ldots$،

$$\mu_{r,s} = E[(X-\mu_X)^r (Y-\mu_Y)^s]$$
$$= \sum_x \sum_y (x-\mu_X)^r (y-\mu_Y)^s f(x,y),$$

وقتی X و Y گسسته‌اند و

$$\mu_{r,s} = E[(X-\mu_X)^r (Y-\mu_Y)^s]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^r (y-\mu_Y)^s f(x,y)\,dx\,dy,$$

وقتی X و Y پیوسته‌اند.

در آمار، $\mu_{1,1}$ از اهمّیت خاصی برخوردار است، زیرا بر رابطه‌ی بین مقادیر X و Y، در صورت وجود، دلالت دارد؛ لذا به آن نماد و نام خاصی داده شده است.

تعریف ۵-۹. $\mu_{1,1}$ را کوواریانس X و Y می‌نامند و آن را با σ_{XY}، $\mathrm{cov}(X,Y)$، یا $C(X,Y)$ نشان می‌دهند.

ملاحظه کنید که اگر احتمال زیادی وجود داشته باشد که مقادیر بزرگ X با مقادیر بزرگ Y و مقادیر کوچک X با مقادیر کوچک Y همراه باشند، کوواریانس مثبت خواهد بود؛ واگر احتمال زیادی وجود داشته باشد که مقادیر بزرگ X با مقادیر کوچک Y و برعکس همراه باشند، کوواریانس منفی خواهد بود. با این مفهوم است که کوواریانس، رابطه یا پیوند بین مقادیر X و Y را اندازه می‌گیرد.

قضیه‌ی ۵-۱۱. $\sigma_{XY} = \mu'_{1,1} - \mu_X \mu_Y$.

برهان. با استفاده از قضیه‌های مختلف درباره‌ی مقدار مورد انتظار، می‌توانیم بنویسیم

$$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= E[XY - \mu_X Y - X\mu_Y + \mu_X \mu_Y]$$
$$= E[XY] - \mu_X E[Y] - \mu_Y E[X] + \mu_X \mu_Y$$
$$= E[XY] - \mu_X \mu_Y - \mu_Y \mu_X + \mu_X \mu_Y$$
$$= \mu'_{1,1} - \mu_X \mu_Y.$$

Payam Noor University

مثال ۵–۱۵. درمثال ٤–۲۲، احتمال‌های توأم و حاشیه‌ای X و Y، که به ترتیب معرّف تعداد مهره‌های قرمز و تعداد مهره‌های سبز بین دو مهره‌ای بودند که از ظرف محتوی ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی سبز، و ۴ مهره‌ی آبی به تصادف در آوریم، به صورت جدول زیر بودند.

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	
$y=0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
$y=1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{7}{18}$
$y=2$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	

کوواریانس X و Y را بیابید.

حل. با استفاده از احتمال‌های توأمی که داده شده‌اند، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mu_{1,1} &= E(XY)\\ &= 0\times 0\times \tfrac{1}{6}+0\times 1\times \tfrac{2}{9}+0\times 2\times \tfrac{1}{36}+1\times 0\times \tfrac{1}{3}+1\times 1\times \tfrac{1}{6}+2\times 0\times \tfrac{1}{12}\\ &= \tfrac{1}{6},\end{aligned}$$

و با استفاده از احتمال‌های حاشیه‌ای، به دست می‌آوریم

$$\mu_X = E(X) = 0\times \tfrac{5}{12}+1\times \tfrac{1}{12}+2\times \tfrac{1}{12}=\tfrac{2}{3}$$
$$\mu_Y = E(Y) = 0\times \tfrac{7}{12}+1\times \tfrac{7}{18}+2\times \tfrac{1}{36}=\tfrac{4}{9}.$$

نتیجه می‌شود که

$$\sigma_{XY}=\mu'_{1,1}-\mu_X\mu_Y=\tfrac{1}{6}-\tfrac{2}{3}\times\tfrac{4}{9}=-\tfrac{7}{54}.$$

نتیجه‌ی منفی القا می‌کند که هر چه مهره‌های قرمز که به دست می‌آوریم بیشتر باشند مهره‌های سبز کمترند و برعکس، و البته این نکته‌ی معقولی است.

مثال ۵–۱۶. کوواریانس دو متغیر تصادفی را که چگالی توأم آنها به صورت

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & x>0,\ y>0,\ x+y<1\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

است پیدا کنید.

Payam Noor University

حل. با محاسبه‌ی انتگرال‌های لازم، به دست می‌آوریم

$$\mu_X = \int_0^1\int_0^{1-x} 2x\, dy\, dx = \frac{1}{3}$$
$$\mu_Y = \int_0^1\int_0^{1-y} 2y\, dy\, dx = \frac{1}{3}$$

و

$$\mu'_{1,1} = \int_0^1\int_0^{1-x} 2xy\, dy\, dx = \frac{1}{12}.$$

نتیجه می‌شود که

$$\sigma_{XY} = \mu'_{1,1} - \mu_X\mu_Y = \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{3} = -\tfrac{1}{36}.$$

تاکنون آنچه گفتیم مربوط به رابطه‌ی بین X و Y بود، ملاحظه کنید که اگر X و Y مستقل باشند کوواریانس آنها صفر است؛ به‌صورت نمادی،

قضیه‌ی ۵-۱۲. اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه $E(XY) = E(X)E(Y)$، و $\sigma_{XY} = 0$.

برهان. برای حالت گسسته، بنابر تعریف داریم $E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y)$، چون X و Y مستقل‌اند، می‌توانیم بنویسیم $f(x,y) = g(x)h(y)$، که در آن $g(x)$ و $h(y)$ به ترتیب مقادیر توزیع‌های حاشیه‌ای X و Y هستند، و به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xy\, g(x)h(y) \\ &= [\sum_x x\, g(x)]\,[\sum_y y\, h(y)] \\ &= E(X)E(Y). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sigma_{XY} = \mu'_{1,1} - \mu_X\mu_Y = E(XY) - E(X)\,E(Y) = 0.$$

درخور ذکر است که استقلال دو متغیرتصادفی، صفر بودن کوواریانس را ایجاب می‌کند، امّا صفر بودن کوواریانس الزاماً استقلال آنها را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۵-۱۷. اگر توزیع احتمال توأم X و Y به صورت

		x			
		-1	0	1	
y	-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
	0	0	0	0	0
	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

باشد، نشان دهید با اینکه دو متغیرتصادفی مستقل نیستند، کوواریانس آنها صفر است.

حل. با استفاده از احتمال‌هایی که در حاشیه‌ها نشان داده‌ایم، به دست می‌آوریم

$$\mu_X = (-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0,$$
$$\mu_Y = (-1)\times\frac{2}{3}+0\times 0+1\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{3},$$

و

$$\mu'_{1,1}=(-1)\times(-1)\times\frac{1}{6}+0\times(-1)\times\frac{1}{3}+1\times(-1)\times\frac{1}{6}+(-1)\times 1\times\frac{1}{6}+1\times 1\times\frac{1}{6}=0.$$

پس، $\sigma_{XY}=0-0(-\frac{1}{3})=0$ و کوواریانس صفر است، امّا دو متغیر تصادفی مستقل نیستند. مثلاً برای $x=-1$ و $y=-1$، $f(x,y)\neq g(x)h(y)$.

گشتاورهای حاصل‌ضربی را می‌توان برای حالتی نیز که بیش از دو متغیر تصادفی وجود دارد تعریف کرد. در اینجا فقط قضیه‌ی مهم زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۵–۱۳. اگر X_1، X_2، ...، X_n مستقل باشند، آنگاه

$$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n).$$

این، تعمیمی از قسمت اوّل قضیه‌ی ۵–۱۲ است؛ درواقع، برهان این قضیه، که مبتنی بر تعریف ۴–۱۴ است، اساساً نظیر برهان قسمت اوّل قضیه‌ی ۵–۱۲ است.

۵–۶ گشتاورهای ترکیب‌های خطی متغیرهای تصادفی

در این بخش عبارت‌هایی برای میانگین و واریانس ترکیبی خطی از n متغیر تصادفی و کوواریانس دو ترکیب خطی از n متغیرتصادفی به دست می‌آوریم. کاربردهای این نتایج، در مبحث نظریه‌ی نمونه‌گیری و مسائل استنباط آماری مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

Payam Noor University

قضیه‌ی ۵–۱٤. اگر X_1، X_2، ...، X_n متغیرهای تصادفی و $Y=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ باشند که در آن a_1، a_2، ...، a_n مقادیری ثابت هستند، آنگاه $E(Y)=\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$، و

$$\operatorname{var}(Y)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \operatorname{var}(X_i)+2\sum_{i<j}\sum a_i a_j \operatorname{cov}(X_i,X_j),$$

که درآن مجموع‌یابی دوگانه روی تمام مقادیر i و j از ۱ تا n با شرط $i<j$ انجام می‌شود.

برهان. از قضیه‌ی ۵–۵ با $g_i(X_1,X_2,\dots,X_n)=X_i$ به ازای $i=1,2,\dots,n$، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

$$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i),$$

و این، اوّلین قسمت قضیه را ثابت می‌کند. در به دست آوردن عبارتی برای واریانس، μ_i را به جای $E(X_i)$ قرار می‌دهیم، و در نتیجه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(Y)&=E([Y-E(Y)]^2)\\&=E\{[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i-\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)]^2\}\\&=E\{[\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i-\mu_i)]^2\}.\end{aligned}$$

حال با بسط این نتیجه برحسب قضیه‌ی چندجمله‌ای که بنابر آن مثلاً $(a+b+c+d)^2$ مساوی

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

است، و مراجعه‌ی دوباره به قضیه‌ی ٤–۵، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(Y)&=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 E[(X_i-\mu_i)^2]+2\sum_{i<j}\sum a_i a_j E[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)]\\&=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \operatorname{var}(X_i)+2\sum_{i<j}\sum a_i a_j \operatorname{cov}(X_i,X_j).\end{aligned}$$

توجه کنید که ما به‌طور ضمنی از واقعیت $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{cov}(X_j, X_i)$ استفاده کرده‌ایم.

چون وقتی X_i و X_j مستقل‌اند، $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = ۰$، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

نتیجه‌ی ۳. اگر متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n مستقل باشند و $Y = \sum_{i=۱}^{n} a_i X_i$ آنگاه

$$\operatorname{var}(Y) = \sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ \operatorname{var}(X_i).$$

مثال ۵–۱۸. اگر متغیرهای تصادفی X ، Y،و Z دارای میانگین‌های $\mu_X = ۲$، $\mu_Y = -۳$، $\mu_Z = ۴$، واریانس‌های $\sigma_X^۲ = ۱$، $\sigma_Y^۲ = ۵$، $\sigma_Z^۲ = ۲$، و کوواریانس‌های $\operatorname{cov}(X,Y) = -۲$، $\operatorname{cov}(X,Z) = -۱$، $\operatorname{cov}(Y,Z) = ۱$ باشند، میانگین و واریانس

$$W = ۳X - Y + ۲Z$$

را پیدا کنید.

حل. بنابر قضیه‌ی ۵–۱٤، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E(W) &= E(۳X - Y + ۲Z) \\ &= ۳E(X) - E(Y) + ۲E(Z) \\ &= ۳ \times ۲ - (-۱) + ۲ \times ۴ = ۱۷ \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(W) &= ۹\operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + ۴\operatorname{var}(Z) \\ &\quad - ۶\operatorname{cov}(X,Y) + ۱۲\operatorname{cov}(X,Z) - ۴\operatorname{cov}(Y,Z) \\ &= ۹ \times ۱ + ۵ + ۴ \times ۲ - ۶(-۲) + ۱۲(-۱) - ۴ \times ۱ = ۱۸. \end{aligned}$$

قضیه‌ی زیر، قضیه‌ی مهمّ دیگری درباره‌ی ترکیب‌های خطی متغیرهای تصادفی است. این قضیه مربوط به کوواریانس دو ترکیب خطی از n متغیرتصادفی است.

قضیه‌ی ۵–۱۵. اگر $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n متغیرهای تصادفی باشند و

$$Y_۱ = \sum_{i=۱}^{n} a_i X_i \quad \text{و} \quad Y_۲ = \sum_{i=۱}^{n} b_i X_i$$

Payam Noor University

که در آنها a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n مقادیر ثابت‌اند، آنگاه

$$\operatorname{cov}(Y_1,Y_2)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\operatorname{var}(X_i)+2\sum_{i<j}\sum(a_ib_j+a_jb_i)\operatorname{cov}(X_i,X_j).$$

برهان. اثبات قضیه مشابه برهان قضیه‌ی ۵–۱۴ است.

چون وقتی X_i و X_j مستقل‌اند، $\operatorname{cov}(X_i,X_j)=0$. بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

نتیجه‌ی ٤. اگر متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n مستقل باشند، $Y_1=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ و $Y_2=\sum_{i=1}^{n}b_iX_i$، آنگاه $\operatorname{cov}(Y_1,Y_2)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\operatorname{var}(X_i)$.

مثال ۵–۱۹. اگر متغیرهای تصادفی X، Y، و Z دارای میانگین‌های $\mu_X=3$، $\mu_Y=5$، $\mu_Z=2$، واریانس‌های $\sigma_X^2=8$، $\sigma_Y^2=12$، $\sigma_Z^2=18$، و کوواریانس‌های $\operatorname{cov}(X,Y)=1$، $\operatorname{cov}(X,Z)=-3$، و $\operatorname{cov}(Y,Z)=2$ باشند، مطلوب است کوواریانس

$$W=X+4Y+2Z \quad \text{و} \quad V=3X-Y-Z.$$

حل. بنابر قضیه‌ی ۵–۱۵

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(U,W)&=\operatorname{cov}(X+4Y+2Z\,,3X-Y-Z)\\&=3\operatorname{var}(X)-4\operatorname{var}(Y)-2\operatorname{var}(Z)\\&\quad+11\operatorname{cov}(X,Y)+5\operatorname{cov}(X,Z)-6\operatorname{cov}(Y,Z)\\&=3\times8-4\times12-2\times18+11\times1+5\times(-3)-6\times2=-76.\end{aligned}$$

تمرین

۵–۳۱. اگر X و Y دارای توزیع احتمال توأم $f(x,y)=\frac{1}{4}$ به ازای $x=-3$، $y=-5$، $x=-1$، $y=-1$، $x=1$، $y=1$، $x=3$، $y=5$ باشند، مقدار $\operatorname{cov}(X,Y)$ را پیدا کنید.

۵–۳۲. اگر توزیع احتمال توأم X و Y به صورت $f(-1,0)=0$، $f(-1,1)=\frac{1}{4}$، $f(0,0)=\frac{1}{6}$، $f(0,1)=0$، $f(1,0)=\frac{1}{12}$، $f(1,1)=\frac{1}{2}$ باشد، نشان دهید:

الف) مقدار $\operatorname{cov}(X,Y)$ صفر است.

ب) دو متغیرتصادفی مستقل نیستند.

۵–۳۳. اگر متغیرهای تصادفی مستقل X_1، X_2، و X_3 دارای میانگین‌های ۴، ۹، ۳ و واریانس‌های ۳، ۷، ۵ باشند، میانگین و واریانس

الف) $Y = 2X_1 - 3X_2 + 4X_3$،

ب) $Z = X_1 + 2X_2 - X_3$،

را بیابید.

۵–۳٤. $\text{var}(X+Y)$، $\text{var}(X-Y)$، و $\text{cov}(X+Y, X-Y)$ را برحسب واریانس‌ها و کوواریانس‌های X و Y بیان کنید.

۵–۳۵. اگر $\text{var}(X_1) = 5$، $\text{var}(X_2) = 4$، $\text{var}(X_3) = 7$ و $\text{cov}(X_1, X_2) = 3$، $\text{cov}(X_1, X_3) = -2$، و X_2 و X_3 مستقل باشند، کوواریانس $Y_1 = X_1 + 2X_2 + 3X_3$ و $Y_2 = -2X_1 + 3X_2 + 4X_3$ را پیدا کنید.

۵–۳٦. اگر وقتی سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم، آمدن شیر یک موفقیت باشد، وقتی تاسی را می‌ریزیم آمدن ۶ یک موفقیت باشد، و در کشیدن کارتی از یک دسته‌ی ۵۲ کارتی آمدن تک، یک موفقیت باشد، مطلوب است میانگین و انحراف معیار تعداد کل موفقیت‌ها، وقتی

الف) سکه‌ی همگنی را پرتاب کنیم، تاس همگنی را بریزیم، و آنگاه کارتی را از دسته کارتی که خوب بُرخورده است بیرون بکشیم.

ب) سکه‌ی همگنی را سه بار پرتاب کنیم، تاس همگنی را دو بار بریزیم، و آنگاه کارتی را از دسته کارتی که خوب بُرخورده است بیرون بکشیم.

۵–۳۷. اگر متناوباً سکه‌ای همگن و سکه‌ای ناهمگن را که احتمال شیر آمدن آن ۰/۴۵ است پرتاب کنیم، میانگین و واریانس تعداد شیرهایی که در ده پرتاب این سکه‌ها به دست می‌آوریم چقدرند؟

Payam Noor University

فصل ششم

توزیع‌ها و چگالی‌های احتمال خاص

۶-۱ مقدمه

در این فصل بعضی توزیع‌های احتمال را که در نظریـه‌ی آمـار و کاربردهـا بـه‌صـورتی بسیار چشم‌گیر ظاهر می‌شوند مطالعه می‌کنیم. همچنین پارامترهای این توزیع‌هـا، یعنـی کمیت‌هایی را کـه بـرای توزیـع‌هـای خـاص ثابـت‌انـد، ولـی بـرای اعـضای مختلـف خانواده‌های توزیع‌های هم‌نوع، مقادیر مختلفی دارند، مطالعه خواهیم کرد. متداول‌تـرین پارامترها، گشتاورهای مراتب پایین، عمدتاً μ و σ^2 هستند، و همان‌طور کـه در فـصل قبل دیدیم اساساً دو راه وجود دارد که به‌وسیله‌ی آنها این گشتاورها به دست مـی‌آینـد. می‌توانیم مجموع‌های لازم را مستقیماً محاسبه کنیم، و یا با تابع‌های مولد گشتاورها کار کنیم. گرچه به نظر منطقی می‌رسد که در هر مورد، روشی را که ساده‌تر اسـت بـه کـار بریم، امّا اغلب هر دو راه را به کار خواهیم گرفت. در برخی موارد این کار به دلیل آنکه نتایج حاصل بعداً مورد نیازند انجام خواهد شـد؛ و در سـایر مـوارد صـرفاً بـرای دادن تجربه به خواننده در کاربرد تکنیک‌های ریاضـی مربـوط اسـت. همچنـین بـرای اینکـه حدود این فصل را در حد معقول نگاه داریم، بسیاری از جزئیات به عنـوان تمـرین بـه عهده‌ی خواننده واگذار شده‌اند.

۶-۲ توزیع یکنواخت گسسته

اگر یک متغیرتصادفی بتواند k مقدار مختلف را با احتمال‌های برابر اختیار کند، گوییم که دارای **توزیع یکنواخت گسسته** است؛ به صورت نمادی

Payam Noor University

تعریف ٦–۱. متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته است، و به آن، عنوان متغیرتصادفی یکنواخت گسسته داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن، برای $x_i \neq x_j$، وقتی $i \neq j$، به‌صورت

$$f(x) = \frac{1}{k}, \qquad x = x_1, x_2, \cdots, x_k$$

باشد.

بنابر تعریف‌های ۵–۲ و ۵–٤ ، میانگین و واریانس این توزیع $\mu = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} x_i$ و $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}(x_i - \mu)^2$ هستند. این فرمول‌ها با میانگین و واریانسی که در فصل اول شرح داده شد کاملاً منطبق است.

در حالت خاصی که $x_i = i$، توزیع یکنواخت گسسته به‌صورت $f(x) = \frac{1}{k}$ به ازای $x = 1, 2, \cdots, k$ درمی‌آید، و این شکل توزیع، مثلاً، برای توزیع عددی که در ریختن یک تاس همگن ظاهر می‌شود به‌کار می‌رود. میانگین و واریانس این توزیع یکنواخت گسسته و تابع مولد گشتاورهای آن در تمرین‌های ٦–۱ و ٦–۲ مورد بحث واقع می‌شوند.

٦–۳ توزیع برنولی

اگر آزمایشی دو برآمد داشته باشد، «موفقیت» و «شکست»، و احتمال آنها به ترتیب θ و $1-\theta$ باشند، آنگاه متغیر تصادفی که منطبق با دو وضعیت، یا ۱ و ۰ را اختیار می‌کند، توزیع برنولی دارد. به صورت نمادی

تعریف ٦–۲. متغیرتصادفی X توزیع برنولی دارد، و به آن عنوان متغیر تصادفی برنولی داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمالش به صورت

$$f(x_i; \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \qquad x = 0, 1$$

باشد.

پس، $f(0;\theta) = (1-\theta)$ و $f(1;\theta) = \theta$. ملاحظه کنید که نماد $f(x;\theta)$ را به‌کار برده‌ایم

تا صریحاً نشان دهیم که توزیع برنولی دارای یک پارامتر θ است. چون توزیع برنولی حالتی خاص از توزیع بخش ٦–٤ است. در اینجا به تفضیل درباره‌ی آن بحث نخواهیم کرد.

در ارتباط با توزیع برنولی، موفقیت می‌تواند به‌دست آوردن شیر در پرتاب یک سکه‌ی همگن، ابتلا به ذات الریه، قبول شدن (یا ردشدن) در یک آزمون، و باختن در یک مسابقه باشد. این ناسازگاری، یادگار زمانی است که نظریه‌ی احتمال فقط در مورد بازی‌های شانسی (که شکست یک بازیکن موفقیت بازیکن دیگر بود) به کار می‌رفت. همچنین به همین دلیل ما به آزمایشی که توزیع برنولی برای آن به کار می‌رود، عنوان آزمایش برنولی یا به صورت ساده آزمایش و به دنباله‌هایی از چنین آزمایش‌هایی، عنوان آزمایش‌های تکراری را می‌دهیم.

٦–٤ توزیع دوجمله‌ای

آزمایش‌های تکراری، نقش بسیار مهمی در احتمال و آمار بازی می‌کنند، خصوصاً وقتی تعداد آزمایش‌ها ثابت، پارامتر θ(احتمال موفقیت) برای تمام آزمایش‌ها برابر، و آزمایش‌ها همگی مستقل باشند. به طوری که خواهیم دید، چندین متغیر تصادفی وجود دارند که در رابطه با آزمایش‌های تکراری پیش می‌آیند. یکی از آنها که در اینجا مطالعه خواهیم کرد مربوط به تعداد کل موفقیت‌هاست؛ دیگر متغیرها را در بخش ٦–٥ ارائه می‌دهیم.

نظریه‌ای که در این بخش از آن بحث می‌کنیم کاربردهای زیادی دارد؛ به عنوان نمونه، اگر بخواهیم بدانیم که احتمال آوردن ۵ شیر در ۱۲ پرتاب یک سکه، احتمال بهبود ۷ نفر از ۱۰ نفر مبتلا به یک بیماری گرمسیری، یا احتمال اینکه ۳۵ نفر از ۸۰ نفر به آگهی فروش یک قلم کالا پاسخ دهند چقدر است این نظریه به کار می‌رود. امّا، این مطلب فقط وقتی درست است که هر ۱۰ نفر شانس بهبود یکسانی داشته و بهبود آنها مستقل از یکدیگر باشد. (در نمونه‌های طرح شده، که به وسیله‌ی پزشکان مختلف و در بیمارستان‌های مختلف درمان شوند، و به شرطی که احتمال دادن پاسخ به آگهی فروش کالا برای هریک از ۸۰ نفر یکسان بوده و استقلال نیز وجود داشته باشد، و هیچ دو نفری از آنها به یک خانوار متعلق نباشند.)

به منظور تهیه‌ی فرمولی برای احتمال به دست آوردن «xتا موفقیت در n

آزمایش» تحت شرایطی که بیان شدند، ملاحظه کنید که احتمال به دست آوردن x تا موفقیت و $n-x$ تا شکست در یک ترتیب مشخص برابر $\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ است. برای هر موفقیت یک احتمال θ و برای هر شکست یک احتمال $1-\theta$ وجود دارد و بنابر فرض استقلال، x عامل θ و $n-x$ عامل $1-\theta$ در یکدیگر ضرب می‌شوند. چون این احتمال با هر دنباله‌ای از n آزمایش که در آن x موفقیت و $n-x$ شکست وجود دارند همراه است، تنها باید تعداد دنباله‌های از این نوع را بشماریم و سپس $\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ را در این تعداد ضرب کنیم. روشن است تعداد راه‌هایی که می‌توانیم x آزمایش را، که برآمد همه‌ی آنها موفقیت است، انتخاب کنیم برابر است با $\binom{n}{x}$، و نتیجه می‌شود که احتمال مطلوب برای «x موفقیت در n آزمایش» برابر $\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ است.

تعریف ۶-۳. متغیرتصادفی X توزیع دوجمله‌ای دارد، و به عنوان متغیر تصادفی دوجمله‌ای داده می‌شود، اگر وتنها اگر توزیع احتمال آن به صورت

$$b(x;n,\theta)=\binom{n}{k}\theta^x(1-\theta)^{n-x},\qquad x=0,1,2,\cdots,n$$

باشد.

پس، تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش، متغیری تصادفی است که توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ دارد. نام «توزیع دوجمله‌ای» از این واقعیت نتیجه می‌شود که مقادیر $b(x;n,\theta)$ به ازای $x=0,1,2,\cdots,n$، جملات متوالی بسط دوجمله‌ای $[(1-\theta)+\theta]^n$ هستند؛ این مطلب نشان می‌دهد که مجموع احتمال‌ها، همان‌گونه که باید، مساوی ۱ است.

اگر سعی‌کنیم سوّمین احتمالی را که مربوط به پاسخ‌دادن به آگهی فروش یک قلم کالا، با قراردادن $x=35$، $n=80$، و مثلاً $\theta=0/15$ در فرمول توزیع دوجمله‌ای محاسبه کنیم، متوجه می‌شویم انجام این محاسبه مستلزم کار فوق‌العاده زیادی است. در عمل به ندرت احتمال‌های دوجمله‌ای مستقیماً محاسبه می‌شوند، زیرا آنها به صورتی جامع برای مقادیر مختلف θ و n جدول‌بندی شده‌اند و نرم‌افزارهای کامپیوتری

فراوانی وجود دارند که احتمال‌های دوجمله‌ای و همچنین احتمال‌های تجمعی متناظر آنها، یعنی

$$B(x\,;n,\theta)=\sum_{k=0}^{x} b(k\,;n,\theta)$$

را با دستورهای ساده به دست می‌دهند.

مثال ٦-۱. احتمال به دست آوردن ۵ شیر و ۷ خط را در ۱۲ پرتاب یک سکه‌ی همگن پیدا کنید.

حل. در فرمول توزیع دوجمله‌ای اگر قرار دهیم $x=5$، $n=12$، و $\theta=\frac{1}{2}$، به‌دست می‌آوریم

$$b(5\,;12,\frac{1}{2})=\binom{12}{5}(\frac{1}{2})^{5}\,(1-\frac{1}{2})^{12-5}$$

و با محاسبه‌ی مقدار $\binom{12}{5}$ نتیجه می‌گیریم که جواب $792\,(\frac{1}{2})^{12}$ است. با استفاده از جدول ۱، و رابطه‌ی $P(X=x)=F(x)-F(x^{-})$ که در آن $F(x^{-})$ نمایانگر مقدار حد چپ تابع توزیع به ازای مقدار x است، مقدار احتمال مربوط به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} b(5;12,\tfrac{1}{2}) &= P(X\le 5)-P(X\le 4)\\ &= B(5;12,\tfrac{1}{2})-B(4;12,\tfrac{1}{2})\\ &= 0/387-0/194\\ &= 0/193. \end{aligned}$$

مثال ٦-۲. احتمال بهبود ۷نفر از ۱۰نفر از یک بیماری گرمسیری را در صورتی که فرض استقلال برقرار و احتمال بهبود هریک از آنها ۰/۸۰ باشد پیدا کنید.

حل. اگر در فرمول توزیع دوجمله‌ای قراردهیم $x=7$، $n=10$، و $\theta=0/80$، به‌دست می‌آوریم

$$b(7\,;10,0/80)=\binom{10}{7}(0/80)^{7}\,(1-0/80)^{10-7}$$

و با روشی مشابه‌ی مثال ٦-۱، مقدار احتمال فوق برابر با $0/322-0/121=0/21$ است.

جدول ۱ در انتهای کتاب، مقادیر $B(x;n,\theta)$ را با سه رقم دهدهی، برای $n=۱$ تا $n=۲۳$، و $\theta=۰/۰۵, ۰/۱۰, ۰/۲, \dots, ۰/۹, ۰/۹۵$ به دست می‌دهد. می‌توان جدول ۱ را خلاصه‌تر از وضعیت فعلی ارائه داد زیرا وقتی θ بزرگتر از ۰/۵۰ است، اتحاد زیر کمیت‌های دیگر را به دست می‌دهد.

قضیه‌ی ۶-۱. $b(x;n,\theta)=b(n-x;n,۱-\theta)$.

اثبات قضیه‌ی فوق به عنوان تمرین به خواننده واگذار شده است. به‌عنوان مثال، برای تعیین $b(۱۱;۱۸,۰/۷۰)$، مقدار $b(۷;۱۸,۰/۳۰)$ را پیدا می‌کنیم که ۰/۱۳۷۶ می‌شود. وقتی n بزرگ است، چندین راه مختلف وجود دارند که طی آنها می‌توان احتمال‌های دوجمله‌ای را تقریب زد. یکی از راه‌ها را در بخش ۷.۶، و یکی دیگر را در بخش ۶.۶ ذکر خواهیم کرد.

در زیر نحوه‌ی محاسبه‌ی مقدار احتمال و تابع توزیع در توزیع دوجمله‌ای را به وسیله‌ی نرم‌افزار نشان می‌دهیم.

```
MTB > LET K1=5
MTB > LET K2=0.33
MTB > LET K3=10
MTB > PDF K1 K4;
SUBC>   Binomial K3 K2.
MTB > PRINT K4
Data Display
K4      0.133151
MTB > CDF K1 K5;
SUBC>   Binomial K3 K2.
MTB > PRINT K5
Data Display
K4      0.926800
```

مقدار K4 برابر $b(۵;۱۰,۰/۳۳)$ و K5 برابر با $B(۵;۱۰,۰/۳۳)$است.

حال برای میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای فرمول‌هایی پیدا می‌کنیم.

قضیه‌ی ۶-۲. میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای برابرند با

$$\sigma^۲=n\theta(۱-\theta), \quad \mu=n\theta.$$

برهان. برای تعیین میانگین، مستقیماً مجموع زیر رامحاسبه می‌کنیم

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

که در آن جمله‌ی متناظر با $x=0$ را که برابر صفر است حذف و عامل x را با x موجود در $x!$ که در مخرج $\binom{n}{x}$ است ساده کرده‌ایم. سپس با خارج کردن عامل n که در $n! = n(n-1)!$ وجود دارد و عامل θ، به دست می‌آوریم

$$\mu = n\theta \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x}$$

که اگر قرار دهیم $y = x-1$ و $m = n-1$، این عبارت به صورت

$$\mu = n\theta \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} \theta^y (1-\theta)^{m-y} = n\theta$$

درمی‌آید، زیرا آخرین مجموع، مساوی مجموع تمام مقادیر توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای m و θ است که در نتیجه برابر ۱ است.

در یافتن عبارتی برای μ'_2 و سپس برای σ^2، واقعیت $E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$ را به کار می‌بریم و ابتدا $E[(X(X-1)]$ را محاسبه می‌کنیم. برای تمام مقاصد عملی دقیقاً با تکرار مراحل بالا به دست می‌آوریم

$$E[(X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$
$$= n(n-1)\theta^2 \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} \theta^{x-2} (1-\theta)^{n-x},$$

که اگر قرار دهیم $y = x-2$ و $m = n-2$، این عبارت به صورت

$$E[X(X-1)] = n(n-1)\theta^2 \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} \theta^y (1-\theta)^{m-y}$$
$$= n(n-1)\theta^2,$$

درمی‌آید. بنابر این

$$\mu_2' = E[X(X-1)] + E[X] = n(n-1)\,\theta^2 + n\,\theta$$

و سرانجام

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mu_2' - \mu_1'^2\\ &= n(n-1)\,\theta^2 + n\,\theta + n^2\,\theta^2\\ &= n\,\theta\,(1-\theta).\end{aligned}$$

برهان دیگری از این قضیه که عملیات جبری کمتری دارد در تمرین ٦-٤ پیشنهاد شده است.

اینکه میانگین توزیع دوجمله‌ای برابر $n\theta$ است نباید شگفت‌انگیز باشد. بحثی‌ندارد که وقتی سکه‌ی همگنی ۲۰۰ بار پرتاب شود، انتظار داریم که (به مفهوم امید ریاضی)، $200 \times \frac{1}{2} = 100$ بار شیر و ۱۰۰ بار خط بیاید، به‌همین نحو وقتی تاسی همگن ۲۴۰ بار ریخته شود انتظار $240 \times \frac{1}{6} = 40$ وجه شش را داریم، و وقتی احتمال اینکه شخصی از فروشگاهی خریدی بکند ۰/۸۰ باشد، انتظار داریم $400(0/80) = 320$ نفر از ۴۰۰ نفری که به این فروشگاه مراجعه می‌کنند چیزی خریداری کنند.

فرمول واریانس توزیع دوجمله‌ای، که معیار تغییرات است، کاربردهای خیلی مهمّی دارد، امّا برای تأکید بر اهمیّت آن، متغیر تصادفی $Y = \frac{X}{n}$ را در نظر بگیرید، که در آن X متغیر تصادفی است که توزیعی دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ دارد. این متغیرتصادفی نسبت موفقیت‌ها در n آزمایش است.خواننده می‌تواند به‌عنوان تمرین، قضیه‌ی زیر را ثابت کند.

قضیه‌ی ٦-٣. اگر X توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ داشته باشد و $Y = \frac{X}{n}$، آنگاه

$$E(Y) = \theta, \qquad \sigma_Y^2 = \frac{\theta\,(1-\theta)}{n}.$$

حال اگر قضیه‌ی چبیشف را با $k\,\sigma = c$ به کار بریم، می‌توانیم حکم کنیم که برای هر ثابت مثبت c، احتمال اینکه نسبت موفقیت‌ها در n آزمایش بین $\theta - c$ و $\theta + c$ قرار گیرد حداقل برابر است با

$$1-\frac{\theta(1-\theta)}{n c^2}.$$

در نتیجه، وقتی $n \to +\infty$، احتمال اینکه اختلاف نسبت موفقیت‌ها با θ، کوچکتر از هر عدد ثابت دلخواه c باشد به ۱ میل می‌کند. این نتیجه به نام *قانون اعداد بزرگ* موسوم است، و باید توجه‌داشت که این قانون درباره‌ی نسبت موفقیت‌ها به کار می‌رود و نه درباره‌ی تعداد واقعی آنها. اگر فرض کنیم که وقتی n بزرگ است تعداد موفقیت‌ها باید الزاماً نزدیک به $n\theta$ باشد، فرضی اشتباه خواهد بود.

چون به دست آوردن تابع مولد گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای آسان است، آن را پیدا می‌کنیم و برای تحقیق نتایج قضیه‌ی ٦-۲ به کار می‌بریم.

قضیه‌ی ٦-٤. تابع مولد گشتاور توزیع دوجمله‌ای به‌صورت

$$M_X(t) = [1+\theta(e^t-1)]^n$$

است.

برهان. بنابر تعریف‌های ۵-٦ و ٦-۳، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{x=0}^{n} e^{xt}\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(\theta e^t)^x\,(1-\theta)^{n-x}, \end{aligned}$$

و بنابر قضیه‌ی ۲-۹، به آسانی قابل تشخیص است که این مجموع، بسط دوجمله‌ای

$$[\theta e^t+(1-\theta)]^n = [1+\theta(e^t-1)]^n$$

است و این اثبات را کامل می‌کند.

اگر دوبار از $M_X(t)$ نسبت به t مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= n\theta e^t[1+\theta(e^t-1)]^{n-1}, \\ M''_X(t) &= n\theta e^t[1+\theta(e^t-1)]^{n-1} + n(n-1)\theta^2 e^{2t}[1+\theta(e^t-1)]^{n-2} \\ &= n\theta e^t(1-\theta+n\theta e^t)[1+\theta(e^t-1)]^{n-2}, \end{aligned}$$

و پس از قراردادن $t=0$ در آنها، به‌دست می‌آوریم $\mu'_1 = n\theta$ و $\mu'_2 = n\theta(1-\theta+n\theta)$. لذا، $\mu = n\theta$ و $\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 = n\theta(1-\theta+n\theta)-(n\theta)^2 = n\theta(1-\theta)$، که با فرمول‌هایی که در قضیه‌ی ٦-۲ داده شدند یکی هستند.

از آنچه در این بخش گفتیم به نظر می‌رسد که پیدا کردن گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای از روی تابع مولد گشتاورها آسان‌تر از محاسبه‌ی آن‌ها از راه مستقیم است، امّا اگر بخواهیم، مثلاً μ'_3 یا μ'_4 را معین کنیم آشکار است که مشتق‌گیری نسبتاً مشکل‌تر می‌شود. در واقع راهی آسان‌تر برای تعیین گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای وجود دارد؛ راهی که مبتنی بر **تابع مولد گشتاورهای عاملی** است و در تمرین ٦-٩ توضیح داده شده است.

تمرین

٦-١. اگر X دارای توزیع یکنواخت گسسته‌ی $f(x)=\frac{1}{k}$، به ازای $x=1,2,\ldots,k$ باشد نشان دهید که

الف) میانگین آن $\mu=\frac{(k+1)}{2}$ است،

ب) واریانس آن $\sigma^2=\frac{(k^2-1)}{12}$است،

٦-٢. اگر X دارای توزیع یکنواخت گسسته‌ی $f(x)=\frac{1}{k}$ به ازای $x=1,2,\ldots,k$ باشد، نشان دهید که تابع مولد گشتاورهایش به صورت

$$M_X(t)=\frac{e^t\,(1-e^{kt})}{k\,(1-e^t)}$$

است. همچنین این توزیع را با محاسبه‌ی $\lim_{t\to 0} M'_X(t)$ بیابید، و آن را با نتیجه‌ای که در قسمت (الف) تمرین ٦-١ به دست آمده مقایسه کنید.

٦-٣. تحقیق کنید که الف) $b(x\,;n\,,\theta)=b(n-x\,;n\,,1-\theta)$،

همچنین نشان دهید که اگر برای $x=0,1,2,\ldots,n$، $B(x\,;n\,,\theta)=\sum_{k=0}^{x} b(k\,;n\,,\theta)$، آنگاه

ب) $b(x\,;n\,,\theta)=B(x\,;n\,,\theta)-B(x-1\,;n\,,\theta)$،

ج) $b(x\,;n\,,\theta)=B(n-x\,;n\,,1-\theta)-B(n-x-1\,;n\,,1-\theta)$،

د) $B(x\,;n\,,\theta)=1-B(n-x-1\,;n\,,1-\theta)$.

٦-٤. برهانی دیگر از قضیه‌ی ٦-٢ را می‌توان براساس این واقعیت استوار کرد: اگر X_1، ...، و X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع برنولی با پارامتر θ باشند،

آنگاه $Y = X_1 + \cdots + X_n$ متغیری تصادفی است که دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ است.

۶–۵. هنگام محاسبه‌ی تمام مقادیر توزیع دوجمله‌ای، می‌توان معمولاً ابتدا با محاسبه‌ی $b(0; n, \theta)$ و سپس استفاده از فرمول بازگشتی

$$b(x+1; n, \theta) = \frac{\theta\,(n-x)}{(x+1)\,(1-\theta)} b(x; n, \theta)$$

کار را ساده کرد. درستی این فرمول را تحقیق کنید و آن را برای محاسبه‌ی مقادیر توزیع دوجمله‌ای با $n = 7$ و $\theta = 0/25$ به کار برید.

۶–۶. فرمول بازگشتی تمرین قبل را به کار برده، نشان دهید که برای $\theta = \frac{1}{2}$، توزیع دوجمله‌ای دارای

الف) ماکسیممی در $x = \frac{n}{2}$ است، وقتی n زوج است،

ب) ماکسیمم‌هایی در $x = \frac{n-1}{2}$ و $x = \frac{n+1}{2}$ است، وقتی n فرد است.

۶–۷. اگر X، متغیر تصادفی دوجمله‌ای باشد، به ازای چه مقدار θ، احتمال $b(x; n, \theta)$ ماکسیمم است؟

۶–۸. در برهان قضیه‌ی ۶–۲، کمیت $E[X(X-1)]$ را که دوّمین **گشتاور عاملی** نامیده می‌شود تعیین کردیم؛ به طور کلی، rامین گشتاور عاملی X به صورت

$$\mu'_{(r)} = E[X\,(X-1)\,(X-2)\cdots(X-r+1)]$$

است. μ'_2، μ'_3، و μ'_4 را بر حسب گشتاورهای عاملی بیان کنید.

۶–۹. تابع مولد گشتاورهای عاملی متغیر تصادفی گسسته‌ی X به صورت

$$\Psi_X(t) = E(t^X) = \sum_x t^x f(x)$$

داده می‌شود. نشان دهید که rامین مشتق $\Psi_X(t)$ نسبت t به ازای $t = 1$ برابر $\mu'_{(r)}$، همان rامین گشتاور عاملی است که در تمرین ۶–۸ تعریف شد.

۶–۱۰. یک آزمایش تستی چندگزینه‌ای شامل ۸ سئوال، و هر سئوال شامل سه پاسخ است (که فقط یکی از آنها صحیح است). اگر دانشجویی با ریختن تاسی همگن به هر سئوال پاسخ دهد، به این طریق که اگر ۱ یا ۲ بیاورد جواب اوّل، اگر ۳ یا ۴ بیاورد جواب دوّم و اگر ۵ یا ۶ بیاورد جواب سوّم را علامت بزند، احتمال اینکه دقیقاً به ۴ سئوال جواب صحیح بدهد چقدر است؟

Payam Noor University

٦-۱۱. یک مهندس ایمنی اتومبیل ادعا می‌کند که از هر ده تصادف یکی ناشی از خستگی راننده است. با استفاده از فرمول توزیع دوجمله‌ای و گردکردن نتیجه تا چهار رقم اعشار، احتمال اینکه حداقل ۳ تا از ۵ تصادف اتومبیل ناشی از خستگی راننده باشد چقدر است؟

٦-۱۲. اگر ۴۰درصد موش‌هایی که در یک آزمایشگاه هستند، در طول یک دقیقه بعد از تزریق یک داروی آزمایشی حالت تهاجمی شدید پیدا کنند، احتمال اینکه دقیقاً شش تا از پانزده موشی که دارو به آنها تزریق شده است در طول یک هفته حالت تهاجمی شدید پیدا کنند با استفاده از

الف) فرمول توزیع دوجمله‌ای،

ب) جدول ۱،

چقدر است؟

٦-۱۳. در شهری، دلیل قانونی ۷۰درصد از تمام موارد طلاق عدم توافق اخلاقی اعلام شده است. احتمال اینکه پنج تا از شش مورد طلاق بعدی که در این شهر ثبت می‌شود عدم توافق اخلاقی اعلام شود، با استفاده از

الف) فرمول توزیع دوجمله‌ای،

ب) جدول ۱،

چقدر است؟

٦-۱٤. در برنامه‌ریزی برای راه انداختن یک مدرسه‌ی جدید، یکی از اعضای هیئت امنای مدرسه ادعا می‌کند ۴نفر از ۵نفر از معلّمان پاره‌وقت بیش از یک سال در مدرسه به کار خود ادامه می‌دهند، در حالی که عضو دیگر هیئت امنا ادعا می‌کند صحیح آن است که بگوییم، ۳تا از ۵ نفر به کار خود ادامه می‌دهند. پیش‌بینی‌های این دو عضو در گذشته تقریباً به یک اندازه اعتبار داشته‌اند، به قسمی که بدون درنظرگرفتن اطلاعات دیگر، می‌توان قضاوت‌های این دو نفر را به یک اندازه معتبر دانست. اگر ادعای یکی از این دو درست باشد، در صورتی که دریابیم که ۱۱نفر از این ۱۲نفر معلمان پاره‌وقت بیش از یک سال به کار خود ادامه داده‌اند چه احتمال‌هایی باید به ادعاهای این دو عضو تخصیص دهیم؟

٦-۱۵. با استفاده از قضیه‌ی چبیشف و قضیه‌ی ٦-۲، تحقیق کنید احتمالی حداقل برابر

Payam Noor University

$\frac{۳۵}{۳۶}$ وجود دارد که

الف) در ۹۰۰ پرتاب یک سکه‌ی همگن، نسبت شیرها بین ۰/۴۰ و ۰/۶۰ باشد،

ب) در ۱۰۰۰۰ پرتاب یک سکه‌ی همگن، نسبت شیرها بین ۰/۴۷ و ۰/۵۳ باشد،

ج) در ۱۰۰۰۰۰۰ پرتاب یک سکه‌ی همگن، نسبت شیرها بین ۰/۴۹۷ و ۰/۵۰۳باشد.

توجه‌کنید که این تمرین برای توضیح قانون اعداد بزرگ به‌کارمی‌رود.

۶-۵ توزیع فوق‌هندسی

در فصل سوّم به منظور تشریح قواعد ضرب برای پیشامدهای مستقل و وابسته، نمونه‌گیری باجایگذاری و بدون‌جایگذاری را به‌کار بردیم. برای به‌دست آوردن فرمولی شبیه فرمول توزیع دوجمله‌ای، که در آن نمونه‌گیری بدون‌جایگذاری است، و در نتیجه آزمایش‌ها مستقل نیستند، مجموعه‌ای از N عنصر را در نظر می‌گیریم که kتای آنها را که دارای یک نسخه‌ی خاص هستند به عنوان موفقیت و $N-k$تای دیگر را شکست تلقی می‌کنیم. مثل حالت توزیع دوجمله‌ای، احتمال به دست آوردن x موفقیت در n آزمایش مورد توجه است، امّا اینک بدون‌جایگذاری، n عنصر از N عنصر موجود در مجموعه را انتخاب می‌کنیم.

$\binom{k}{x}$ راه برای انتخاب xتا از k موفقیت و $\binom{N-k}{n-x}$ راه برای انتخاب $n-x$تا از $N-k$ شکست وجود دارد، و بنابراین $\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}$ راه برای انتخاب x موفقیت و $n-x$ شکست موجود است. چون $\binom{N}{n}$ راه برای انتخاب n عنصر از N عنصر جامعه وجود دارد و ما فرض می‌کنیم تمام آنها هم‌شانس، لذا از قضیه‌ی ۳-۲ نتیجه می‌شود که احتمال «xموفقیت در n آزمایش» برابر $\dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ است.

تعریف ۶-۴. متغیرتصادفی X، دارای **توزیع فوق‌هندسی** است و به آن، عنوان متغیرتصادفی فوق هندسی داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن برای $x=۰,۱,۲,\ldots,n$، $x\le k$، و $n-x\le N-k$ به صورت

$$h(x\,;n\,,N\,,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

باشد.

پس، برای نمونه‌گیری بدون‌جایگذاری، تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش، متغیری تصادفی با توزیع فوق هندسی با پارامترهای n، N، و kدارد.

مثال ٦-۳. به عنوان بخشی از بررسی آلودگی هوا، بازرسی تصمیم می‌گیرد مواد آلودکننده‌ای را که از اگزوز ۶تا از ۲۴ ماشین شرکتی خارج می‌شوند آزمایش کند. اگر ۴تا از ماشین‌های شرکت به میزان زیادی ماده‌ی آلوده کننده‌ی هوا منتشر کنند، احتمال اینکه نمونه‌ی بررسی‌کننده شامل هیچ یک از آنها نباشد چقدر است؟

حل. اگر در فرمول توزیع فوق هندسی قرار دهیم $x=۰$، $n=۶$، $N=۲۴$، و $k=۴$، به دست می‌آوریم

$$h(۰\,;۶\,,۲۴\,,۴)=\frac{\binom{۴}{۰}\binom{۲۰}{۶}}{\binom{۲۴}{۶}}=۰/۲۸۸۰.$$

روشی که با آن، میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی را پیدا می‌کنیم شباهت زیاد به روشی دارد که در برهان ٦-۲ به کار رفت.

قضیه‌ی ٦-۵. میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی عبارت‌اند از

$$\mu=\frac{n\,k}{N},\qquad \sigma^{۲}=\frac{n\,k\,(N-k)\,(N-n)}{N^{۲}\,(N-۱)}.$$

برهان. برای تعیین میانگین، مجموع زیر را مستقیماً محاسبه می‌کنیم

$$\mu=\sum_{x=۰}^{n}x\,\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\sum_{x=۱}^{n}\frac{k\,!}{(x-۱)\,!\,(k-x)\,!}\;\frac{\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

که درآن جمله‌ای را که متناظر با $x=۰$، مساوی صفر است حذف، و x را با اوّلین

عامل $(x-۱)!$ $x!=x$ که در مخرج $\binom{k}{x}$ است ساده کرده‌ایم. لذا با فاکتور گرفتن از $\frac{k}{\binom{N}{n}}$، به دست می‌آوریم

$$\mu=\frac{k}{\binom{N}{n}}\sum_{x=۱}^{n}\binom{k-۱}{x-۱}\binom{N-k}{n-x}.$$

که با قرار دادن $y=x-۱$ و $m=n-۱$ به صورت

$$\mu=\frac{k}{\binom{N}{n}}\sum_{y=۰}^{m}\binom{k-۱}{y}\binom{N-k}{m-y}$$

در می‌آید. سرانجام با استفاده از قضیه‌ی ۲-۱۲، به‌دست می‌آوریم

$$\mu=\frac{k}{\binom{N}{n}}\binom{N-۱}{m}=\frac{k}{\binom{N}{n}}\binom{N-۱}{n-۱}=\frac{n\,k}{N}$$

برای به دست آوردن فرمولی برای $\sigma^۲$، مانند آنچه در برهان قضیه‌ی ۶-۲ آمد عمل می‌کنیم، یعنی ابتدا $E[X(X-۱)]$ را محاسبه می‌کنیم، و سپس این واقعیت را که

$$E(X^۲)=E(X(X-۱))+E(X)$$

به کار می‌بریم و با واگذاری اثبات

$$E[X(X-۱)]=\frac{k\,(k-۱)\,n\,(n-۱)}{N\,(N-۱)}$$

در تمرین ۶-۱۸ به عهده‌ی خواننده، به دست می‌آوریم

$$\sigma^۲=\frac{k\,(k-۱)\,n\,(n-۱)}{N\,(N-۱)}+\frac{n\,k}{N}-\left(\frac{n\,k}{N}\right)^۲$$
$$=\frac{n\,k\,(N-k)\,(N-n)}{N^۲\,(N-۱)}.$$

Payam Noor University

وقتی N بزرگ و n در مقایسه با N نسبتاً کوچک است (قانون سرانگشتی معمولی آن است که n نباید از ۵درصد N تجاوز کند)، تفاوت چندانی بین نمونه‌گیری باجایگذاری و بدون‌جایگذاری وجود ندارد، و برای تقریب احتمال‌های فوق هندسی می‌توان فرمول توزیع دوجمله‌ای را با پارامترهای n و $\theta = \frac{k}{N}$ به کار برد.

مثال ٦-٤. بین ۱۲۰ نفر متقاضی شغلی فقط ۸۰ نفرشان واقعاً واجد شرایط‌اند. اگر ۵ نفر از متقاضیان بدون‌جایگذاری و به تصادف برای یک مصاحبه‌ی مفصل انتخاب شوند، با استفاده از

الف) توزیع فوق هندسی، و

ب) توزیع دوجمله‌ای با $\theta = \frac{۸۰}{۱۲۰}$ به‌عنوان یک تقریب، پیدا کنید احتمال آن را که تنها ۲ نفر از ۵ نفر برای شغل مزبور واجد شرایط باشند.

حل. الف) اگر در فرمول توزیع فوق‌هندسی قرار دهیم $x = ۲$، $n = ۵$، $N = ۱۲۰$، $k = ۸۰$، با گردکردن نتیجه تا سه رقم اعشار به دست می‌آوریم

$$h(۲\,;۵\,,۱۲۰\,,۸۰) = \frac{\binom{۸۰}{۲}\binom{۴۰}{۳}}{\binom{۱۲۰}{۵}} = ۰/۱۶۴$$

ب) اگر در فرمول توزیع دوجمله‌ای قراردهیم $x = ۲$، $n = ۵$، و $\theta = \frac{۸۰}{۱۲۰} = \frac{۲}{۳}$، با گردکردن نتیجه تا سه رقم اعشار، به دست می‌آوریم

$$b(۲\,;۵\,,\frac{۲}{۳}) = \binom{۵}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}\left(۱-\frac{۲}{۳}\right)^{۳} = ۰/۱۶۵.$$

همان‌طور که از این نتایج مشهود است، تقریب حاصل خیلی دقیق است.

تمرین

٦-١٦. یک مهندس کنترل کیفیت، نمونه‌ای تصادفی مرکب از دو ماشین حساب جیبی را که از هر بسته‌ی ۱۸تایی دریافت شده انتخاب شده است بررسی می‌کند، اگر هر دو خوب کار کنند بسته را می‌پذیرد؛ در غیر این صورت تمام بسته به خرج فروشنده

Payam Noor University

بررسی می‌شود. احتمال اینکه این بسته بدون بررسی بعدی پذیرفته شود چقدر است در صورتی که این بسته شامل

الف) ۴ ماشین حساب باشد که خوب کار نکنند،

ب) ۸ ماشین حساب باشد که خوب کار نکنند،

ج) ۱۲ ماشین حساب باشد که خوب کار نکنند؟

۶-۱۷. بین ۱۶ متقاضی شغلی ده نفر تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر سه متقاضی به‌تصادف برای مصاحبه انتخاب شوند، احتمال اینکه

الف) هیچ‌یک تحصیلات دانشگاهی نداشته باشند،

ب) یکی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد،

ج) دو نفر تحصیلات دانشگاهی داشته باشند،

د) هر سه تحصیلات دانشگاهی داشته باشند،

چقدر است؟

۶-۱۸. میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی را با $n=۳$، $N=۱۶$، و $k=۱۰$ با استفاده از

الف) نتایج تمرین قبل،

ب) فرمول‌های قضیه‌ی ۶-۵،

بیابید.

۶-۱۹. احتمال آنکه ممیز مالیاتی، از بین ۵ اظهارنامه‌ی مالیاتی فقط ۲ اظهارنامه با بخشودگی‌های غیرمجاز بیاید چقدر است، به‌شرطی که این ۵ اظهارنامه را به تصادف از بین ۱۵ اظهارنامه که شامل ۹ اظهارنامه با بخشودگی غیرمجاز است انتخاب کرده باشد؟

۶-۲۰. محموله‌ای مرکب از ۸۰ دستگاه شامل ۴ دستگاه معیوب است. اگر سه تا از این دستگاه‌ها به تصادف انتخاب و برای یک مشتری ارسال شوند، با استفاده از

الف) فرمول توزیع فوق‌هندسی،

ب) توزیع دوجمله‌ای به‌عنوان یک تقریب،

احتمال این را پیدا کنید که مشتری یک دستگاه معیوب دریافت کند.

Payam Noor University

۶-۶ توزیع پواسون

وقتی n بزرگ است، محاسبه‌ی احتمال‌های دوجمله‌ای با استفاده از فرمول تعریف ۶-۳ معمولاً مستلزم کار فوق‌العاده زیادی است. به‌عنوان مثال، برای محاسبه‌ی احتمال اینکه ۱۸ نفر از ۳۰۰۰ نفری که در یک روز گرم تابستان رژه‌ای را تماشا می‌کنند دچار گرمازدگی شوند، مجبوریم ابتدا $\binom{3000}{18}$ را تعیین کنیم، و اگر احتمال اینکه یکی از ۳۰۰۰ نفری که رژه را تماشا می‌کنند دچار گرمازدگی شود برابر ۰/۰۰۵ باشد، مجبوریم مقدار $(0/005)^{18}(0/995)^{2982}$ را نیز محاسبه کنیم.

Payam Noor University

در این بخش توزیع احتمالی را معرفی خواهیم کرد که می‌توان آن را برای تقریب زدن این نوع توزیع دوجمله‌ای به کار برد. خصوصاً صورتی حدی از توزیع دوجمله‌ای را وقتی $n \to +\infty$، $\theta \to 0$ و در عین حال $n\theta$ ثابت می‌ماند بررسی خواهیم کرد. اگر این مقدار ثابت را λ فرض‌کنیم، یعنی $n\theta = \lambda$، و در نتیجه $\theta = \frac{\lambda}{n}$ می‌توانیم بنویسیم

$$b(x\,;n\,,\theta) = \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-x+1)}{x\,!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}.$$

حال اگر هریک از x عامل n را که در $(\frac{\lambda}{n})^x$ وجود دارد به ترتیب، مخرج هریک از عامل‌های حاصل‌ضرب $n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-x+1)$ قرار دهیم و $(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$ را به صورت

$$\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

بنویسیم، به دست می‌آوریم

$$\frac{1\,(1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{x-1}{n})}{x!}(\lambda)^x \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}.$$

سرانجام اگر فرض کنیم $n \to +\infty$ و x و λ را ثابت نگه داریم، به دست می‌آوریم

$$۱\left(۱-\frac{۱}{n}\right)(۱-\frac{۲}{n})\cdots\left(۱-\frac{x-۱}{n}\right)\to ۱$$

$$\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\to ۱$$

$$\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\to e$$

و در نتیجه، توزیع حدی به صورت

$$p(x;\lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x=۰,۱,۲,\ldots$$

درمی‌آید.

تعریف ٦-٥. متغیر تصادفی X، توزیع پواسون دارد، و به آن عنوان متغیر تصادفی پواسون داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن به‌صورت

$$p(x;\lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x=۰,۱,۲,\ldots$$

باشد.

جدول ٦-١. خروجی کامپیوتر برای توزیع دوجمله‌ای با n=۱۵۰ و ۰/۰۵=θ و توزیع پواسون ۷/۵=λ

x	b(x; 150, 0.05)	p(x; 7.5)	x	b(x; 150, 0.05)	p(x; 7.5)
1	0.003596	0.004148	11	0.058211	0.058521
2	0.014102	0.015555	12	0.035488	0.036575
3	0.036616	0.038889	13	0.019828	0.021101
4	0.070823	0.072916	14	0.010212	0.011304
5	0.108843	0.109375	15	0.004873	0.005652
6	0.138441	0.136718	16	0.002164	0.002649
7	0.149891	0.146484	17	0.000898	0.001169
8	0.141016	0.137329	18	0.000349	0.000487
9	0.117101	0.11444	19	0.000128	0.000192
10	0.086901	0.08583	20	0.000044	0.000072

بنابراین، درحد، وقتی $n\to+\infty$، $\theta\to ۰$، و $n\theta=\lambda$ ثابت باقی می‌ماند، تعداد موفقیت‌ها متغیری تصادفی است که توزیع پواسون با پارامتر λ دارد. این توزیع به افتخار ریاضی‌دان فرانسوی، سیمون پواسون (۱۷۸۱–۱۸٤۰) نام‌گذاری شده است.

به‌طور کلی وقتی $n \geq ۲۰$، و $\theta \leq ۰/۰۵$، توزیع پواسون تقریبی خوب برای احتمال‌های دوجمله‌ای به دست می‌دهد. وقتی $n \geq ۱۰۰$ و $n\theta < ۱۰$، عموماً تقریب بسیار عالی است. برای به‌دست آوردن ایده‌ای درباره‌ی نزدیکی تقریب پواسون برای توزیع دوجمله‌ای، خروجی کامپیوتری شکل ۶-۱ را در نظر بگیرید که توزیع دوجمله‌ای را با $n = ۱۵۰$ و $\theta = ۰/۰۵$ در بالای توزیع پواسون با $\lambda = ۱۵۰(۰/۰۵) = ۷/۵$ نشان می‌دهد.

مثال ۶-۵. وقتی توزیع پواسون با $\lambda = ۷/۵$ را برای تقریب توزیع دوجمله‌ای با $n = ۱۵۰$ و $\theta = ۰/۰۵$ به‌کار می‌بریم، با استفاده از جدول ۶-۱، مقدار xی (از ۱ تا ۲۰) را که برای آن میزان خطا بزرگترین قدرمطلق را دارد معین کنید.

حل. با محاسبه‌ی تفاضل‌های متناظر با $x = ۱, x = ۶, \ldots, x = ۲۰$، ماکسیمم خطا (از لحاظ عددی) برابر با ۰/۰۰۳۶۷۸۱ است که با $x = ۸$ متناظر است.

مثال بعدی، تقریب پواسون را برای توزیع دوجمله‌ای نشان می‌دهند.

مثال ۶-۶. اگر دو درصد از کتاب‌های که در یک صحافی جلد شده‌اند، بد صحافی شده باشند، با استفاده از تقریب پواسون برای توزیع دوجمله‌ای، احتمال آن را تعیین‌کنید که ۵ جلد از ۴۰۰ کتاب جلد شده‌ی این صحافی بد صحافی شده باشند.

حل. با قرار دادن $x = ۵$، $\lambda = ۴۰۰(۰/۰۲) = ۸$، و $e^{-۸} = ۰/۰۰۰۳۴$ در فرمول تعریف ۶-۷، به دست می‌آوریم

$$p(۵\,;۸) = \frac{۸^{۵}\,e^{-۸}}{۵!} = \frac{(۳۲۷۶۸)\,(۰/۰۰۰۳۴)}{۱۲۰} = ۰/۰۹۳.$$

درعمل، احتمال‌های پواسون به‌ندرت با جانشینی مستقیم در فرمول تعریف ۵-۷ به دست می‌آیند. گاهی به جداول احتمال‌های پواسون، نظیر جدول ۲ آخر کتاب، یا به‌جداول جامع‌تر در کتاب‌های دستی جداول آماری مراجعه می‌کنیم، امّا این روزها اغلب به نرم‌افزارهای کامپیوتری مناسب رجوع می‌کنیم. وقتی با احتمال‌های مربوط به چندین مقدار x سروکار داریم، استفاده از جدول‌ها یا کامپیوترها اهمیّتی خاص پیدا می‌کند.

مثال ۶-۷. سوابق نشان می‌دهند که احتمال پنچرشدن اتومبیلی در حال عبور از پلی

Payam Noor University

معین ۰/۰۰۰۰۵ است. با استفاده از توزیع پواسون برای تقریب احتمال‌های دوجمله‌ای، احتمال آن را بیابید که بین ۱۰۰۰۰ اتومبیلی که از این پل عبور می‌کنند

الف) دقیقاً دو اتومبیل دچار پنچری‌شوند؛

ب) حداکثر دو اتومبیل دچار پنچری‌شوند.

حل. الف) با رجوع به جدول ۲ برای $x = ۲$، و $\lambda = ۱۰۰۰۰\,(۰/۰۰۰۰۵) = ۰/۵$، احتمال پواسون ۰/۰۷۵۸ را به دست می‌آوریم.

ب) با رجوع به جدول ۲، برای $x = ۰, ۱, ۲$ و $\lambda = ۰/۵$ احتمال‌های پواسون را به‌ترتیب برابر ۰/۶۰۶۵، ۰/۳۰۳۳، ۰/۰۷۵۸ به دست می‌آوریم. پس، احتمال اینکه بین ۱۰۰۰۰ اتومبیلی که از پل عبور می‌کنند حداکثر دو اتومبیل دچار پنچری شوند برابر است با

$$۰/۶۰۶۵ + ۰/۳۰۳۳ + ۰/۰۷۵۸ = ۰/۹۸۵۶.$$

حال که توزیع پواسون را به‌عنوان صورت حدی توزیع دوجمله‌ای به‌دست آوردیم، می‌توانیم فرمول‌های میانگین و واریانس آن را با به‌کاربردن همان شرایط حدی ($n \to +\infty$، $\theta \to ۰$ و ثابت ماندن $n\theta = \lambda$) از روی میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای به‌دست آوریم. برای میانگین $\mu = n\,\theta = \lambda$، و برای واریانس $\sigma^۲ = n\,\theta\,(۱-\theta) = \lambda\,(۱-\theta)$ حاصل می‌شود که وقتی $\theta \to ۰$، به λ می‌گراید.

قضیه‌ی ٦-٦. میانگین و واریانس توزیع پواسون عبارت‌اند از

$$\mu = \lambda\,, \qquad \sigma^۲ = \lambda.$$

این نتایج را می‌توان با محاسبه‌ی مجموع‌های لازم یا از طریق تابع مولد گشتاورها نیز به دست آورد.

قضیه‌ی ٦-٧. تابع مولد گشتاورهای توزیع پواسون به‌صورت

$$M_X(t) = e^{\lambda\,(e^t - ۱)}$$

است.

برهان. بنابر تعریف‌های ٥-٦ و ٦-٧،

$$M_X(t) = \sum_{x=۰}^{\infty} e^{xt}\,\frac{\lambda^x\,e^{-\lambda}}{x\,!} = e^{-\lambda}\,\sum_{x=۰}^{\infty}\frac{(\lambda\,e^t)^x}{x\,!},$$

Payam Noor University

که در آن $\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$ همان سری ماکلورن e^z با $z=\lambda e^t$ است، پس

$$M_X(t)=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}.$$

در این صورت اگر از $M_X(t)$ دوبار نسبت به t مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$M'_X(t)=\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M''_X(t)=\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}+\lambda^2 e^{2t}e^{\lambda(e^t-1)}$$

به‌قسمی‌که $\mu'_1=M'_X(0)=\lambda$ و $\mu'_2=M''_X(0)=\lambda+\lambda^2$. پس، $\mu=\lambda$ و $\sigma^2=\mu'_2-\mu^2=(\lambda+\lambda^2)-\lambda^2=\lambda$، که با قضیه‌ی ٦-٨، مطابقت دارد.

گرچه توزیع پواسون به صورت شکل حدی توزیع دوجمله‌ای حاصل شد، ولی کاربردهای فراوانی دارد که رابطه‌ی مستقیم با توزیع‌های دوجمله‌ای ندارند. مثلاً، توزیع پواسون را می‌توان به‌عنوان مدلی برای تعداد موفقیت‌هایی که در طول بازه‌ی زمانی مفروض یا در ناحیه‌ای مشخص رخ می‌دهند به کار برد، به شرطی که

۱. تعداد موفقیت‌ها در بازه‌های زمانی یا در ناحیه‌های نامتداخل مستقل باشند؛

۲. احتمال رخداد تنها یک موفقیت در بازه‌های زمانی کوتاه یا در هر ناحیه‌ی کوچک، متناسب با طول بازه‌ی زمانی یا اندازه‌ی ناحیه باشد؛

۳. احتمال رخداد بیش از یک موفقیت در چنین بازه‌ی زمانی کوتاه با قرارگرفتن در چنین ناحیه‌ای کوچک ناچیز باشد.

بنابراین، توزیع پواسون ممکن است تعداد مکالمات تلفنی دریافتی یکی اداره را در یک ساعت، تعداد خطاهای تایپی را در یک صفحه، یا تعداد باکتری‌های یک کشت مفروض را، وقتی متوسط تعداد موفقیت‌ها، λ، برای بازه‌ی زمانی مفروض یا ناحیه‌ای مشخص معلوم باشد توصیف کند.

مثال ٦-٨. می‌دانیم متوسط تعداد کامیون‌هایی که در هر روز به توقف‌گاه کامیون‌های شهری می‌رسند ۱۲ است. احتمال اینکه در روزی معین کمتر از ۹ کامیون به توقف‌گاه برسند چقدر است؟

Payam Noor University

حل. فرض کنید X تعداد کامیون‌هایی باشد که در روزی مفروض وارد توقف‌گاه می‌شوند. در این صورت، با استفاده از جدول ۲، با $\lambda = ۱۲$، به دست می‌آوریم

$$P\,(X < ۹) = \sum_{x=۰}^{۸} p(x\,;۱۲) = ۰/۱۵۵۰.$$

اگر در وضعیتی که برای آن شرایط قبلی برقرارند، موفقیت‌ها با میانگین نرخ α در واحد زمان یا در واحد ناحیه رخ دهند، آنگاه تعداد موفقیت‌ها در بازه‌ی t واحد زمان یا t واحد از ناحیه‌ی مشخص، متغیر تصادفی پواسون با میانگین $\lambda = \alpha\, t$ است. بنابر این، تعداد موفقیت‌ها X در بازه‌ی زمانی به طول t واحد یا ناحیه‌ی به اندازه‌ی t واحد، دارای توزیع پواسون

$$p(x\,;\alpha\, t) = \frac{e^{-\alpha\, t}(\alpha\, t)^{x}}{x\,!}, \qquad x = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

است.

مثال ۶-۹. نوع خاصی از یک صفحه‌ی فلزی، در هر ۱۰ فوت مربع به‌طور متوسط ۵ عیب دارد. اگر توزیع عیب‌ها را پواسون فرض کنیم، احتمال اینکه در ۱۵ فوت مربع یک صفحه فلزی، حداقل ۶ عیب وجود داشته باشد چقدر است؟

حل. فرض می‌کنیم X، معرف تعداد عیب‌ها در ۱۵ فوت مکعب از صفحه‌ی فلز باشد. در این صورت چون واحد مساحت، برابر با ۱۰ فوت است، داریم

$$\lambda = \alpha\, t = (۵)\,(۱/۵) = ۷/۵,$$

و در نتیجه $P(X \geq ۶) = ۱ - P(X \leq ۵) = ۱ - ۰/۲۴۱۴ = ۰/۷۵۸۶$. این محاسبات براساس خروجی برنامه‌ای از نرم‌افزار مینی‌تب استخراج شده است.

```
MTB > CDF 5 k6;
SUBC>   Poisson 7.5.
MTB > let k7=1-k6
MTB > print k7
Data Display
K7      0.758564
```

Payam Noor University

تمرین

۶-۲۱. هنگام محاسبه‌ی همه‌ی مقادیر توزیع پواسون، غالباً می‌توان ابتدا با محاسبه‌ی $p(.;\lambda)$ و سپس با استفاده از فرمول بازگشتی

$$p(x+1;\lambda)=\frac{\lambda}{x+1}\,p(x;\lambda)$$

انجام کار را تسهیل کرد. درستی این فرمول را تحقیق کنید و آن را با توجه به $e^{-2}=0/1353$ برای تحقیق در درستی مقادیری که در جدول ۲ برای $\lambda=2$ داده شده‌اند به‌کار برید.

۶-۲۲. با مشتق‌گیری از عبارت دو طرف معادله‌ی

$$\mu_r=\sum_{x=0}^{\infty}(x-\lambda)^r\,\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

نسبت به λ، فرمول بازگشتی

$$\mu_{r+1}=\lambda\left[r\,\mu_{r-1}+\frac{d\mu_r}{d\lambda}\right]$$

را به ازای $r=1,2,3,\ldots$، برای گشتاورهای حول میانگین توزیع پواسون به‌دست آورید.

۶-۲۳. تابع مولد گشتاورهای $Y=X-\lambda$ را بیابید که در آن X متغیری تصادفی است که توزیع پواسون با پارامتر λ دارد. سپس آن را برای تحقیق $\sigma_x^2=\lambda$ به کار برید.

۶-۲۴. وقتی می‌خواهیم توزیع پواسون را برای تقریب کردن احتمال‌های دوجمله‌ای به کاربریم، در هر یک از موارد زیر بررسی کنید که آیا مقادیر n و θ در قاعده‌ی سرانگشتی برای تقریب خوب، تقریب عالی، یا هیچکدام صدق می‌کنند یا نه

الف) $n=125$ و $\theta=0/10$،

ب) $n=25$ و $\theta=0/04$،

ج) $n=120$ و $\theta=0/05$،

د) $n=40$ و $\theta=0/06$.

۶-۲۵. تجربه نشان داده است که ۱/۴ درصد از تلفن‌هایی که به یک تلفن‌خانه می‌شود

شماره‌های اشتباه‌اند. برای تعیین احتمال آنکه بین ۱۵۰ تلفن دریافتی دو نمره‌ی اشتباه وجود داشته باشد تقریب پواسون برای توزیع دوجمله‌ای را به کار برید.

۶–۲۶. سوابق موجود نشان می‌دهند شخصی که روزی را در یک نمایشگاه استانی می-گذراند با احتمال ۰/۰۰۱۲ دچار مسمومیت غذایی می‌شود. با استفاده از تقریب پواسون برای توزیع دوجمله‌ای، مطلوب است احتمال اینکه بین ۱۰۰۰ بازدیدکننده‌ی نمایشگاه حداقل دو نفر دچار مسمومیت غذایی شوند.

۶–۲۷. در شهری معین، ۴درصد همه‌ی رانندگان مجاز، در هر سال حداقل درگیر یک تصادف اتومبیل هستند. با استفاده از تقریب پواسون برای توزیع دوجمله‌ای، مطلوب است احتمال آنکه بین ۱۵۰ راننده‌ی مجازی که به تصادف انتخاب شده‌اند

الف) تنها ۵نفر در سالی معین، حداقل یک تصادف اتومبیل داشته باشد،

ب) حداکثر ۳نفر در سالی معین، حداقل یک تصادف اتومبیل داشته باشند.

۶–۲۸. تعداد شکایت‌هایی که روزانه از یک مؤسسه‌ی خشک‌شویی به عمل می‌آید، متغیری تصادفی است که دارای توزیع پواسون با $\lambda = ۳/۳$ است. با استفاده از فرمول توزیع پواسون، احتمال آن را بیابید که در روزی معیّن، تنها دو شکایت انجام شود.

۶–۲۹. تعداد از کارافتادگی ماهیانه‌ی کامپیوتری، متغیری تصادفی است که توزیع پواسون با $\lambda = ۱/۸$ دارد. با استفاده از فرمول توزیع پواسون، احتمال آن را بیابید که این کامپیوتر در یک ماه

الف) بدون از کارافتادگی،

ب) تنها با یک از کارافتادگی،

کار کند.

۶–۳۰. در یک ناحیه‌ی کویری تعداد افرادی که هر سال از خوردن یک نوع گیاه سمی شدیداً بیمار می‌شوند، متغیری است که توزیع پواسون با $\lambda = ۵/۲$ دارد. با استفاده از جدول ۲، مطلوب است احتمال آنکه

الف) در سالی معین ۳ نفر،

ب) در سالی معین حداقل ۱۰نفر،

ج) در سالی معین تعدادی از ۴تا ۶نفر،

به این بیماری مبتلا شوند.

Payam Noor University

۶-۷ چگالی یکنواخت

چگالی‌های احتمال مثال‌های ۴-۱۰ و ۴-۱۳ حالت‌هایی خاص از چگالی یکنواخت‌اند که نمودار آنها را می‌توان مثل شکل ۴-۶ رسم کرد.

تعریف ۶-۶. متغیر تصادفی X دارای **چگالی یکنواخت** است، و به آن متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته اطلاق می‌شود، اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

باشد. پارامترهای α و β ثابت‌های حقیقی‌اند و $\alpha<\beta$.

در تمرین ۶-۳۱ از خواننده خواسته شده است که تحقیق کند که

قضیه‌ی ۶-۸. میانگین و واریانس چگالی یکنواخت عبارت‌اند از

$$\mu=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad \sigma^2=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2.$$

گرچه چگالی یکنواخت برخی کاربردهای مستقیم دارد، ولی ارزش اصلی‌اش آن است که به دلیل سادگی، به آسانی برای توضیح جنبه‌های مختلف نظریه‌ی آماری به کار می‌آید.

تمرین

۶-۳۱. نشان دهید که اگر X متغیری تصادفی دارای چگالی یکنواخت با پارامترهای α و β باشد،

الف) احتمال اینکه مقداری کمتر از $\alpha+p(\beta-\alpha)$ اختیار کند مساوی p است.

ب) امید ریاضی و واریانس X را بیابید.

۶-۳۲. نشان دهید که اگر متغیر تصادفی دارای چگالی یکنواخت با پارامترهای α و β باشد، rامین گشتاور حول میانگین آن برابر است با

الف) ۰، وقتی r فرد است،

ب) $\frac{1}{r+1}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^r$، وقتی r زوج است.

Payam Noor University

۶-۳۳. نقطه‌ی D روی پاره‌خط AB که نقطه‌ی وسطش C و طولش a است انتخاب شده است. اگر X، فاصله‌ی D از A، متغیری تصادفی باشد که چگالی یکنواخت با $\alpha = 0$ و $\beta = a$ دارد، احتمال آنکه AD، BD، و AC تشکیل مثلثی بدهند چقدر است؟

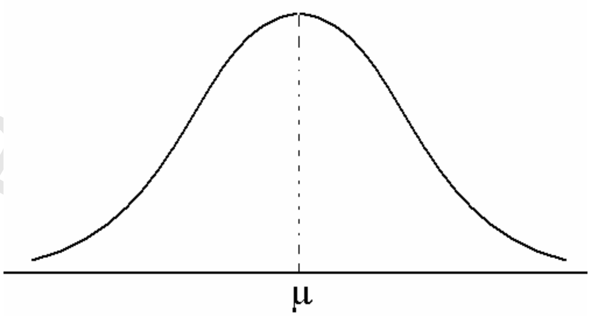
۶-۳۴. در برخی از آزمایش‌ها، خطایی که در تعیین وزن مخصوص یک ماده، مرتکب می‌شوند متغیری تصادفی است که دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = -0/015$ و $\beta = 0/015$ است. تعیین کنید، احتمال اینکه

الف) چنین خطایی بین $-0/002$ و $0/003$ باشد،

ب) قدرمطلق چنین خطایی از $0/005$ تجاوز کند.

۶-۸ توزیع نرمال

توزیع نرمال که در این بخش مطالعه می‌شود از جهات زیادی، شالوده‌ای برای نظریه‌ی آماری نوین است. این توزیع ابتدا در سده‌ی هجدهم، وقتی دانشمندان نظمی بسیار شگفت‌انگیز را در خطاهای اندازه‌گیری مشاهده کردند، مورد بررسی قرارگرفت. این دانشمندان دریافتند که الگوها (توزیع‌ها)یی را که مشاهده می‌کنند می‌توان به دقت با منحنی‌های پیوسته‌ای که آنها را «منحنی‌های نرمال خطاها» نامیدند و به قوانین شانس نسبت دادند تقریب کرد. ویژگی‌های ریاضی چنین منحنی‌های نرمالی بدواً به وسیله‌ی آبراهام دموآور(۱۶۶۷-۱۷۴۵)، پی‌یر لاپلاس (۱۷۴۹-۱۸۲۷)، و کارل گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) مطالعه شد.



شکل ۶-۲. نمودار توزیع نرمال

تعریف ٦–٧. متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال است، و به آن متغیرتصادفی نرمال اطلاق می‌شود، اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به صورت

$$n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\qquad -\infty<x<+\infty$$

باشد، که در آن $\sigma>0$، $-\infty<\mu<+\infty$.

نمودار توزیع نرمال که شکلی شبیه مقطع عرضی یک زنگ دارد در شکل ٦–٢ نشان داده شده است.

نمادگذاری که در اینجا به کار بردیم صریحاً نشان می‌دهد که دو پارامتر توزیع نرمال μ و σ هستند. امّا آنچه باقی می‌ماند آن است که ببینیم پارامتر μ در واقع همان $E(X)$ و پارامتر σ در واقع همان $\sqrt{\mathrm{var}(X)}$ است یا نه، که در آنها X، متغیری تصادفی است که دارای توزیع نرمال با این دو پارامتر است.

با این حال ابتدا نشان می‌دهیم که فرمول تعریف ٦–٧ را می‌توان به عنوان یک چگالی احتمال به کار برد. واضح است مقادیر $n(x;\mu,\sigma)$ مادامی که $\sigma>0$ مثبت‌اند، پس باید نشان دهیم که مساحت زیر منحنی مساوی ۱ است. اگر از $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرال‌گیری کنیم و قرار دهیم $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$، به دست می‌آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz.$$

پس، چون انتگرال سمت راست مساوی $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ است، نتیجه می‌شود که مساحت کل زیر منحنی، برابر $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}=1$ است.

اینک نشان می‌دهیم که

قضیه‌ی ٦–٩. تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال عبارت است از

$$M_X(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}.$$

برهان. بنابر تعریف

Payam Noor University

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$
$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[-2xt\sigma^2+(x-\mu)^2]}dx,$$

و اگر عبارت داخل کروشه را به صورت مربع کامل درآوریم، یعنی اتحاد

$$-2xt\sigma^2+(x-\mu)^2=[x-(\mu+t\sigma^2)]^2-2\mu t\sigma^2-t^2\sigma^4$$

را به‌کار بریم، به‌دست می‌آوریم

$$M_X(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-(\mu+t\sigma^2)}{\sigma}\right]^2}dx\right\}.$$

چون مقدار داخل دو ابرو، انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ یک چگالی نرمال با پارامترهای $\mu+t\sigma^2$ و σ و لذا مساوی ۱ است، نتیجه می‌شود که

$$M_X(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}.$$

حال آماده‌ی تحقیق درستی آنیم که در تعریف ۶-۷، پارامترهای μ و σ، در واقع میانگین و انحراف معیار توزیع نرمال‌اند. اگر دوبار از $M_X(t)$ نسبت به t مشتق بگیریم، به دست می‌آوریم

$$M'_X(t)=(\mu+\sigma^2t)M_X(t)$$

و

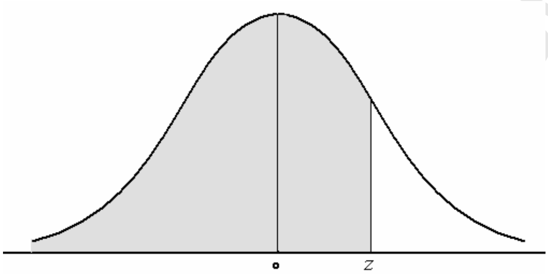
$$M''_X(t)=[(\mu+\sigma^2t)^2+\sigma^2]M_X(t)$$

به قسمی که $M'_X(0)=\mu$ و $M''_X(0)=\mu^2+\sigma^2$. پس $E(X)=\mu$، بنابر این، داریم $\mathrm{var}(X)=(\mu^2+\sigma^2)-\mu^2=\sigma^2$.

چون توزیع نرمال نقشی پایه‌ای در آمار دارد و از چگالی آن نمی‌توان مستقیماً انتگرال‌گیری کرد، مساحت‌هایش برای حالتی خاص که در آن $\mu=0$ و $\sigma=1$، جدول‌بندی شده‌اند.

تعریف ۶-۸. توزیع نرمال با $\mu=0$ و $\sigma=1$، توزیع نرمال استاندارد نامیده می‌شود.

درایه‌های جدول ۳ که مساحت هاشورخورده‌ی شکل ۶-۳ نمایش داده می‌شوند، مقادیر $\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$ هستند.



شکل ۳.۶. مساحت‌های جدول‌بندی شده‌ی زیرمنحنی توزیع نرمال استاندارد

مثال ۴-۱۰. پیدا کنید احتمال آنکه متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد مقداری

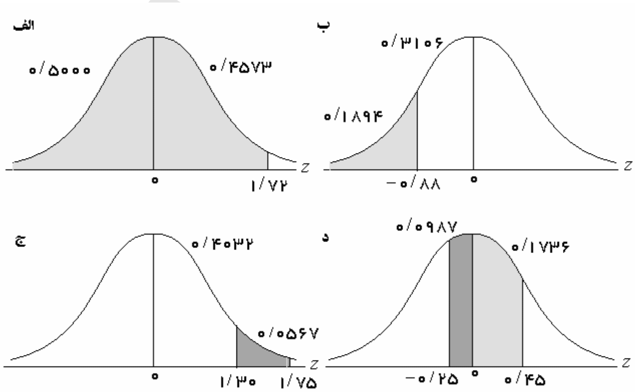
الف) کمتر از $1/72$،

ب) کمتر از $-0/88$،

ج) بین $1/30$ و $1/75$،

د) بین $-0/25$ و $0/45$،

اختیار کند.



شکل ۶-۴. نمودارهای مثال ۶-۱۰

حل. الف) در جدول ۳، درایه‌ی متناظر با $z=1/72$ را پیدا می‌کنیم، جواب برابر با ۰/۹۵۷۳ است.
ب) مشابه قسمت الف، درایه‌ی متناظر با $z=-0/88$ را در جدول ۳ برابر با ۰/۱۸۹۴ است.
ج) در جدول ۳ درایه‌های متناظر با $z=1/75$ و $z=1/30$ را پیدا و دوّمی را از اوّلی کم می‌کنیم (شکل ٦-٤ را ببینید)، و به دست می‌آوریم ۰/۰۵۶۷.
د) در جدول ۳ درایه‌های متناظر با $z=-0/25$ و $z=0/45$ را پیدا و آنها را از هم کم می‌کنیم (شکل ٤.٦ را ببینید)، و به دست می‌آوریم ۰/۲۷۲۳.

گاهی نیاز داریم مقداری از z را بیابیم که متناظر با احتمالی مشخص است که بین دو مقدار فهرست شده در جدول ۳ قرار می‌گیرند. در این موارد، برای راحتی، همیشه مقداری از z را انتخاب می‌کنیم که احتمال متناظر با آن در جدول، نزدیکترین مقدار به احتمال مشخص باشد. امّا اگر احتمال داده شده وسط دو احتمال متوالی در جدول باشد، مقدار zی را انتخاب می‌کنیم که وسط مقادیر متناظر z بیفتد.

مثال ٦-١١. با رجوع به جدول ۳، مقادیر z متناظر با درایه‌های
الف) ۰/۸۵۱۲،
ب) ۰/۷۵۳۳،
را بیابید.

حل. الف) چون ۰/۸۵۱۲ بین ۰/۸۵۰۸ و ۰/۸۵۳۱ که متناظر با $z=1/04$ و $z=1/05$ هستند، می‌افتد، و چون ۰/۸۵۱۲ به ۰/۸۵۰۸ نزدیکتر است تا به ۰/۸۵۳۱، پس مقدار $z=1/04$ را انتخاب می‌کنیم.
ب) چون ۰/۷۵۳۳ وسط دو مقدار ۰/۷۵۱۷ و ۰/۷۵۴۹ است که با $z=0/68$ و $z=0/69$ متناظرند، پس مقدار $z=0/685$ را انتخاب می‌کنیم.

با وجود اینکه جدول ۳ در آخر کتاب تهیه شده است اما همواره نمی‌تواند همه‌ی مسائل را با دقت بالا حل کند. مشابه‌ی سایر توزیع‌ها، مینیتب قادر است مقدار تابع توزیع، و چندک‌های توزیع نرمال را محاسبه کند.

```
MTB > CDF 1.72 k9;
SUBC>   Normal 0.0 1.0.
MTB > InvCDF 0.8512 k10;
SUBC>   Normal 0.0 1.0.
MTB > print k9 k10
Data Display
K9      0.957284
K10      1.04159
```

برای تعیین احتمال‌های مربوط به متغیرهای تصادفیی که توزیعی نرمال غیر از توزیع نرمال استاندارد دارند از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه‌ی ٦-۱۰. اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد، آنگاه

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

توزیع نرمال استاندارد دارد.

برهان. چون بستگی بین مقادیر X و Z خطی است، وقتی X مقداری بین x_1 و x_2 اختیار می‌کند، Z باید مقداری بین $z_1=\frac{x_1-\mu}{\sigma}$ و $z_2=\frac{x_2-\mu}{\sigma}$ را اختیار نماید. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = P(z_1 < Z < z_2)$$

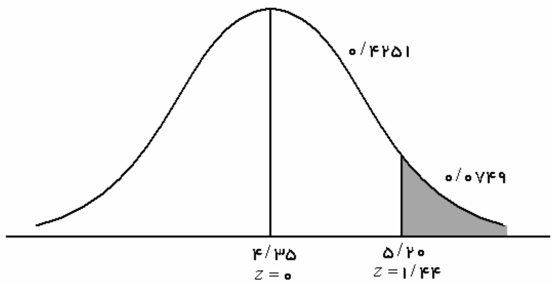
که در آن دیده می‌شود Z متغیری تصادفی است که توزیع نرمال استاندارد دارد.

بنابر این در ارتباط با هر متغیر تصادفیی که توزیع نرمال دارد، برای استفاده از جدول ۳ به تعویض مقیاس $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ دست می‌زنیم.

مثال ٦-۱۲. فرض کنید میزان تشعشع فضایی که فردی در یک پرواز درمعرض آن قرارگیرد، متغیری تصادفی است که توزیع نرمال با میانگین ۴/۳۵ میلی‌رم و انحراف معیار ۰/۵۹ میلی‌رم دارد. احتمال اینکه شخصی در چنین پروازی در معرض میزانی بیش از ۵/۲۰ میلی‌رم تشعشع فضایی قرارگیرد چقدر است؟

حل. در جدول ۳، درایه‌ی متناظر با $z=\frac{5/20-4/35}{0/59}=1/44$ را پیدا می‌کنیم و آن را از ۱ کم می‌کنیم (شکل ٦-۵ را ببینید)، و به‌دست می‌آوریم ۱−۰/۹۲۵۱=۰/۰۷۴۹.

Payam Noor University



شکل ۶–۵. نمودار مثال ۶–۱۲

با مینیتب محاسبه‌ی فوق را مرور می‌کنیم.

```
MTB > CDF 5.2 k11;
SUBC>   Normal 4.35 0.59.
MTB > let k12=1-k11
MTB > print k12
Data Display
K12      0.0748379
```

تمرین

۶–۳۵. نشان دهید که توزیع نرمال دارای

الف) ماکسیممی نسبی در $x=\mu$ است،

ب) نقطه‌ی عطفی در $x=\mu-\sigma$ و $x=\mu+\sigma$ است.

۶–۳۶. اگر X متغیری تصادفی باشد که دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است، با استفاده از قسمت سوم قضیه‌ی ۶–۴ و قضیه‌ی ۶–۶، نشان‌دهید که تابع مولد گشتاورهای $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$، تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال استاندارد است.

۶–۳۷. اگر Z متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد، پیدا کنید احتمال آنکه این متغیر مقداری

الف) بزرگتر از $1/14$،

ب) بزرگتر از $-0/36$،

ج) بین $-0/46$ و $-0/09$،

د) بین $-0/85$ و $1/12$،

اختیار کند.

۶–۳۸. اگر Z متغیری تصادفی با توزیع نرمال باشد، مطلوب است

الف) $P(Z < ۱/۳۳)$،

ب) $P(Z \leq -۰\,۷۹)$،

ج) $P(۰/۵۵ < Z < ۱/۲۲)$،

د) $P(-۱/۹۰ \leq Z \leq ۰/۴۴)$.

۶–۳۹. مقدار z را بیابید اگر مساحت زیر منحنی توزیع نرمال استاندارد

الف) بین ۰ و z، برابر ۰/۴۷۲۶ باشد،

ب) در چپ z، برابر ۰/۹۸۶۸ باشد،

ج) در راست z، برابر ۰/۱۳۱۴ باشد،

د) بین $-z$ و z، برابر ۰/۸۵۰۲ باشد.

۶–۴۰. اگر Z متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد، مطلوب است مقادیر $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، و $z_۴$ به قسمی که

الف) $P(۰ < Z < z_۱) = ۰/۴۳۰۶$،

ب) $P(Z \geq z_۲) = ۰/۷۷۰۴$،

ج) $P(Z \geq z_۳) = ۰/۲۹۱۲$،

د) $P(-z_۴ \leq Z < z_۴) = ۰/۹۷۰۰$.

۶–۴۱. اگر X متغیری تصادفی با توزیع نرمال باشد، احتمال اینکه مقداری

الف) به فاصله‌ی یک انحراف معیار از میانگین،

ب) به فاصله‌ی دو انحراف معیار از میانگین،

ج) به فاصله‌ی سه انحراف معیار از میانگین،

د) به فاصله‌ی چهار انحراف معیار از میانگین،

اختیار کند چقدراست؟

۶–۴۲. اگر z_α به صورت $\int_{z_\alpha}^{+\infty} n(z\,;۰,۱)\,dz = \alpha$ تعریف شود، مقدار آن را به ازای

الف) $\alpha = ۰/۰۵$،

ب) $\alpha = ۰/۰۲۵$،

ج) $\alpha = ۰/۰۱$،

Payam Noor University

د) $\alpha = 0/005$،

بیابید.

۶–۴۳. فرض کنید در طول حالت خلسه، کاهش مصرف اکسیژن یک فرد، متغیری تصادفی باشد که توزیع نرمال با میانگین $\mu = 37/6$ سانتی‌متر مکعب در دقیقه و $\sigma = 4/6$ سانتی‌متر مکعب در دقیقه دارد. پیدا کنید احتمال آنکه در طول مدت دوره‌ی حالت خلسه، مصرف اکسیژن به

الف) حداقل ۴۴/۵ سانتی‌متر مکعب در دقیقه،

ب) حداکثر ۳۵/۰ سانتی‌متر مکعب در دقیقه،

ج) مقداری از ۳۰/۰ تا ۴۰/۰ سانتی‌متر مکعب در دقیقه،

کاهش پیدا کند.

۶–۴۴. در کار عکاسی، زمان ظهور عکس را می‌توان متغیری تصادفی گرفت که دارای توزیع نرمال با $\mu = 15/40$ ثانیه و $\sigma = 0/48$ ثانیه است. احتمال آن را بیابید که زمان ظهور یک عکس

الف) حداقل ۱۶/۰۰ ثانیه،

ب) حداکثر ۱۴/۲۰ ثانیه،

ج) زمانی که بین ۱۵/۰۰ تا ۱۵/۸۰ ثانیه،

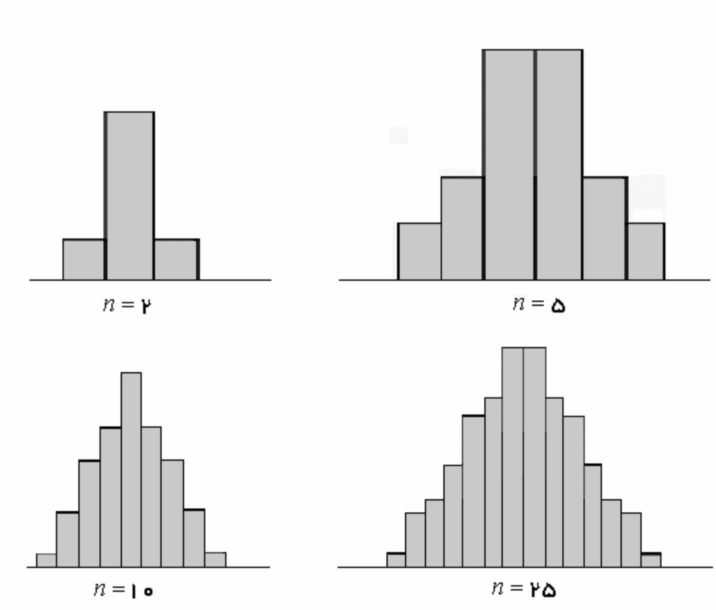
باشد.

۶–۴۵. متغیری تصادفی دارای توزیع نرمال با $\sigma = 10$ است. اگر احتمال اینکه متغیر تصادفی مقداری کمتر از ۸۲/۵ اختیار کند برابر با ۰/۸۲۱۲ باشد، احتمال اینکه مقداری بزرگتر از ۵۸/۳ اختیار کند چقدر است؟

۶–۹ تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای

توزیع نرمال گاهی به عنوان توزیع پیوسته‌ای معرفی می‌شود که برای توزیع دوجمله‌ای، وقتی n، تعداد آزمایش‌ها خیلی بزرگ است، و θ، احتمال موفقیت در یک آزمایش نزدیک $\frac{1}{2}$ است تقریب خوبی فراهم می‌کند. شکل ۶–۶ بافت‌نماهای توزیع‌های دوجمله‌ای با $\theta = \frac{1}{2}$ و $n = 2, 5, 10, 25$ را نشان می‌دهد، و می‌توان دید که افزایش n، این توزیع‌ها به الگوی زنگ شکل متقارن توزیع نرمال میل می‌کنند.

Payam Noor University



شکل ٦-٦. توزیع‌های دوجمله‌ای با $\theta=\frac{1}{2}$

برای فراهم‌کردن یک پایه‌ی نظری برای این بحث، ابتدا قضیه‌ی زیر را مطرح می‌کنیم.

قضیه‌ی ٦-۱۱. اگر X متغیری تصادفی با توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ باشد آنگاه تابع مولد گشتاورهای

$$Z=\frac{X-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$$

وقتی $n\to+\infty$، به تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

برهان. با استفاده از قضیه‌های ۵-۱۰ و ٦-۵ می‌توانیم بنویسیم

$$M_Z(t)=M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)=e^{\frac{-\mu t}{\sigma}}[1+\theta(e^{\frac{t}{\sigma}}-1)]^n$$

که در آن $\sigma=\sqrt{n\theta(1-\theta)}$ و $\mu=n\theta$. حال اگر لگاریتم بگیریم و به‌جای $e^{\frac{t}{\sigma}}$ از سری ماکلورن آن استفاده کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\ln M_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = -\frac{\mu t}{\sigma} + n \ln[1+\theta(e^{\frac{t}{\sigma}}-1)]$$
$$= -\frac{\mu t}{\sigma} + n \ln\left[1+\theta\left\{\left(\frac{t}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^3 + \cdots\right\}\right]$$

و با استفاده از سری نامتناهی $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$، که به‌ازای $|x|<1$ همگرا است، برای بسط این لگاریتم، نتیجه می‌شود که

$$\ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = -\frac{\mu t}{\sigma} + n\theta\left[\left(\frac{t}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$-\frac{n\theta^2}{2}\left[\left(\frac{t}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^3 + \cdots\right]^2$$
$$+\frac{n\theta^3}{3}\left[\left(\frac{t}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^3 + \cdots\right]^3$$
$$+\cdots.$$

با گردآوری توان‌های همانند t، به‌دست می‌آوریم

$$\ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = \left(-\frac{\mu}{\sigma} + \frac{n\theta}{\sigma}\right)t + \left(\frac{n\theta}{2\sigma^2} - \frac{n\theta^2}{2\sigma^2}\right)t^2 + \left(\frac{n\theta}{6\sigma^3} - \frac{n\theta^2}{2\sigma^3} + \frac{n\theta^3}{3\sigma^3}\right)t^3 + \cdots$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{n\theta - n\theta^2}{2\sigma^2}\right)t^2 + \frac{n}{\sigma^3}\left(\frac{\theta - 3\theta^2 + 2\theta^3}{6}\right)t^3 + \cdots$$

زیرا $\mu = n\theta$. در این صورت اگر قرار دهیم $\mu = n\theta$، $\sigma = \sqrt{n\theta(1-\theta)}$، پیدا می‌کنیم که

$$\ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{n}{\sigma^3}\left(\frac{\theta + 3\theta^2 + 2\theta^3}{6}\right)t^3 + \cdots$$

که در آن به‌ازای $r > 2$، ضریب t^r مضرب ثابتی از $\frac{n}{\sigma^r}$ است که وقتی $n \to +\infty$، به صفر می‌گراید. نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to+\infty} \ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = \frac{1}{2}t^2,$$

و چون حد یک لگاریتم برابر لگاریتم حد است (به شرط آنکه هر دو حد وجود داشته

باشند)، نتیجه می‌گیریم که

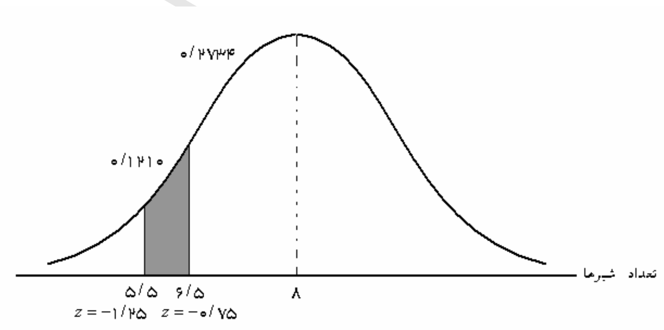
$$\lim_{n\to+\infty} \ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

که تابع مولد گشتاورهای قضیه‌ی ۶-۸ با $\mu=0$ و $\sigma=1$ است. این برهان قضیه‌ی ۶-۱۰ را تکمیل می‌کند، امّا آیا نشان داده‌ایم که وقتی $n\to+\infty$ توزیع Z، متغیر تصادفی دوجمله‌ای استاندارد شده، به توزیع نرمال استاندارد می‌گراید؟ نه کاملاً. برای این منظور باید به دو قضیه‌ای که در اینجا بدون اثبات بیان می‌شوند مراجعه‌کنیم:

۱. بین تابع‌های مولد گشتاورها و توزیع‌های احتمال (چگالی‌ها) وقتی تابع‌های مولد وجود دارند تناظری یک به یک موجود است.

۲. اگر تابع مولد گشتاورهای یک متغیرتصادفی به تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی دیگری میل کند، آنگاه توزیع(چگالی) متغیر تصادفی اوّل تحت همان شرایط حدی به توزیع(چگالی) متغیر تصادفی دوّم میل می‌کند.

اگر دقیق‌تر صحبت کنیم، این قضایا وقتی صادق‌اند که $n\to+\infty$، امّا توزیع نرمال اغلب حتی وقتی n نسبتاً کوچک است برای تقریب احتمال‌های دوجمله‌ای به کار می‌-رود. قانون سرانگشتی خوبی آن است که این تقریب را وقتی $n\theta$ و $n(1-\theta)$ هر دو بزرگتر از 5 هستند به کار بریم.



شکل ۶-۷. نمودار مثال ۶-۱۳

مثال ٦-۱۳. با استفاده از تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای احتمال آن را که در ۱۶ پرتاب یک سکه‌ی همگن، ۶ شیر و ۱۰ خط به‌دست می‌آوریم تعیین کنید.

حل. برای یافتن این تقریب باید از **تصحیح پیوستگی** استفاده کنیم که بنابر آن، هر عدد صحیح نامنفی k با بازه‌ی $k-\frac{1}{۲}$ تا $k+\frac{1}{۲}$ نشان داده می‌شود. با رجوع به شکل ٦-۷، باید مساحت زیرمنحنی را بین ۵/۵ و ۶/۵ تعیین کنیم، و چون $\mu=۱۶\times\frac{1}{۲}=۸$ و $\sigma=\sqrt{۱۶\times\frac{1}{۲}\times\frac{1}{۲}}=۲$ باید مساحت زیر منحنی را بین

$$z=\frac{۵/۵-۸}{۲}=-۱/۲۵ \quad \text{و} \quad z=\frac{۶/۵-۸}{۲}=-۰/۷۵$$

تعیین کنیم. چون در جدول ۳، درایه‌های متناظر با $z=۱/۲۵$ و $z=۰/۷۵$ به ترتیب ۰/۸۹۴۴ و ۰/۷۷۳۴ هستند، درمی‌یابیم که تقریب نرمال برای احتمال داشتن «۶ شیر و ۱۰خط» برابر $۰/۸۹۴۴-۰/۷۷۳۴=۰/۱۲۱۰$ است. چون مقدار متناظر در جدول ۲ برابر با ۰/۱۲۲۲ است، درمی‌یابیم که خطای تقریب برابر با ۰/۰۰۱۲− است، و قدرمطلق خطای درصد برابر با $\frac{۰/۰۰۱۲}{۰/۱۲۲۲}\times۱۰۰=۰/۹۸$ درصد است.

تمرین

٦-٤٦. بررسی کنید که برای هر یک از موارد زیر می‌توان، طبق قاعده‌ی سرانگشتی، تقریب نرمال را برای توزیع دوجمله‌ای به کار برد یا نه؟

الف) $n=۱۶$ و $\theta=۰/۲۰$،

ب) $n=۶۵$ و $\theta=۰/۱۰$،

ج) $n=۱۲۰$ و $\theta=۰/۹۸$،

٦-٤٧. فرض کنید می‌خواهیم تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای را به کاربرده، مقدار $b(۱;۱۵۰,۰/۰۵)$ را تعیین کنیم.

الف) مبتنی بر قاعده‌ی سر انگشتی، آیا توجیهی برای استفاده از این تقریب داریم؟

ب) تقریب را انجام دهید و آن را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.

ج) اگر خروجی کامپیوتر نشان دهد که $b(۱;۱۵۰,۰/۰۵)=۰/۰۰۳۶$ که تا چهار رقم گردشده است، درصد خطای تقریب حاصل در قسمت (ب) چقدر است؟

٦-٤٨. برای تعیین (تا چهار رقم دهدهی) احتمال به دست آوردن ۷ شیر و ۷ خط را در ۱۴بار پرتاب یک سکه‌ی همگن، تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای را به

کاربرید. همچنین با رجوع به جدول ۲، خطای این تقریب را بیابید.

۶–۴۹. اگر ۲۳درصد از تمام بیمارانی که فشار خون بالا دارند دچار عوارض جانبی ناشی از نوعی دارو باشد، برای پیدا کردن احتمال آنکه بین ۱۲۰ نفر بیمار با فشار خون بالا که با این دارو معالجه می‌شوند بیش از ۳۲نفر دچار عوارض جانبی شوند، تقریب نرمال را به کار برید.

۶–۵۰. برای تشریح قانون اعداد بزرگ، تقریب نرمال را برای توزیع دوجمله‌ای به کار برید و احتمال آن را بیابید که وقتی سکه‌ای همگن

الف) ۱۰۰ بار،

ب) ۱۰۰۰ بار،

ج) ۱۰۰۰۰ بار،

پرتاب شود نسبت شیرها عددی بین ۰/۴۹ و ۰/۵۱باشد.

۶–۱۰ توزیع نرمال دومتغیره

بین چگالی‌های چند متغیره، توزیعی که از اهمیّت خاصی برخوردار است، توزیع نرمال چند متغیره است که تعمیمی از توزیع نرمال یک متغیره است. چون بهتر است که این توزیع برای حالت چند متغیره با نمادگذاری ماتریسی نمایش داده شود، ما در اینجا فقط حالت دو متغیره را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۶–۹. جفت متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع نرمال دومتغیره‌اند و به آنها متغیرهای تصادفیی که تواماً به صورت نرمال توزیع شده‌اند اطلاق می‌شوند، اگر و تنها اگر چگالی احتمال توأم‌شان برای $-\infty < x < +\infty$ و $-\infty < y < +\infty$ به‌صورت زیر باشد

$$f(x,y)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}},$$

که در آن $\sigma_1>0$، $\sigma_2>0$ و $-1<\rho<1$.

نشان می‌دهیم که μ_1، μ_2، σ_1، و σ_2 به‌ترتیب، میانگین‌ها و انحراف معیارهای

متغیرهای تصادفی X و Y هستند. اگر برای به‌دست آوردن چگالی حاشیه‌ای X، از $f(x,y)$ نسبت به y از $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]}dy.$$

اگر برای ساده‌کردن نمادگذاری موقتاً قراردهیم $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$ و با قراردادن $v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ متغیر انتگرال‌گیری راتعویض کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}u^2}}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v^2-2\rho uv)}\,dv,$$

و با قراردادن $v^2-2\rho uv=(v-pu)^2-p^2u^2$ برای اینکه مربع کاملی حاصل شود و با جمع‌آوری جملات، نتیجه می‌شود که

$$g(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2}dv\right\}.$$

سرانجام، با تشخیص اینکه کمیّت داخل پرانتز همان انتگرال چگالی نرمال از $-\infty$ تا $+\infty$، و بنابراین مساوی ۱ است، به ازای $-\infty<x<+\infty$ به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}.$$

با بررسی نتیجه می‌شود که چگالی حاشیه‌ای X، توزیعی نرمال با میانگین μ_1 و انحراف معیار σ_1 است، و بنابر تقارن، چگالی حاشیه‌ای Y، توزیعی نرمال با میانگین μ_2 و انحراف معیار σ_2 است.

توزیع نرمال دومتغیره چندین ویژگی مهم دارد که برخی جنبه‌ی آماری و برخی جنبه‌ی ریاضی محض دارند. بین ویژگی‌های آماری، ویژگی زیر را داریم که اثبات آن

در تمرین ٦–٥١ از خواننده خواسته شده است.

قضیه‌ی ٦–١٢. دو متغیر تصادفی که دارای توزیع نرمال دو متغیره‌اند مستقل‌اند اگر و تنها اگر $\rho = ۰$.

اگر $\rho = ۰$، متغیرهای تصادفی را **ناهمبسته** گویند.

تمرین

٦–٥١. برای اثبات قضیه‌ی ٦–١١، نشان دهید که اگر X و Y توزیع نرمال دومتغیره داشته باشند، آنگاه

الف) استقلال آنها نتیجه می‌دهد که $\rho = ۰$، ب) $\rho = ۰$ نتیجه می‌دهد که آنها مستقل‌اند.

٦–٥٢. اگر نمای e در چگالی نرمال دو متغیره به صورت

$$\frac{-۱}{۱۰۲}[(x+۲)^۲ - ۲/۸(x+۲)(y-۱) + ۴(y-۱)^۲]$$

باشد، پیدا کنید $\mu_۱$، $\mu_۲$، $\sigma_۱$، $\sigma_۲$، و ρ.

٦–٥٣. اگر X و Y دارای توزیع نرمال دومتغیره داشته باشند، و $U = X + Y$ و $V = X - Y$، برای ضریب همبستگی U و V عبارتی بیابید.

٦–٥٤. مرکز یک هدف، به‌عنوان مبدأ یک دستگاه مختصات قائم اختیار می‌شود و نسبت به این دستگاه، نقطه‌ی اصابت یک گلوله دارای مختصات X و Y است. اگر X و Y دارای چگالی نرمال دومتغیره با $\mu_۱ = ۰$، $\mu_۲ = ۰$، $\sigma_۱ = ۱۲۰$ پا، $\sigma_۲ = ۱۲۰$ پا باشد، پیدا کنید احتمال آنکه نقطه‌ی اصابت

الف) درون مربعی به ضلع ۱۸۰ پا باشد که مرکزش در مبدأ بوده و اضلاع‌اش موازی محورهای مختصات‌اند،

ب) درون دایره‌ای به شعاع ۷۵ پا و به مرکز مبدأ باشد.

٦–٥٥. اگر X و Y توزیع نرمال دومتغیره با $\mu_۱ = \mu_۲ = ۰$ و $\sigma_۱ = \sigma_۲ = ۱۲$ داشته باشند، پیدا کنید

الف) احتمال به دست آوردن نقطه‌ی (x, y) در داخل دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۳۶$،

ب) مقدار c که به ازای آن، احتمال به دست آوردن نقطه‌ی (x, y) در داخل دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = c^۲$ برابر ۰/۸۰ باشد.

Payame Noor University

فصل هفتم

محاسبات با نرم‌افزار

۷-۱ مقدمه

روند تغییرات در نگارش یک نرم‌افزار آن‌قدر سریع می‌باشد که مجالی به آموزش از طریق منوهای نرم‌افزار با یک دست نوشتـــــه ثابت، را نمی‌دهد. علاوه بر آن قابلیت فهرست‌ها(منوها) همواره پاسخ‌گوی نیازها و حل مسائل آماری نمی‌باشد و همواره نوشتن برنامه را باید جزئی ازآموختنی‌ها برای دانشجویان رشته‌ی آمار در نظر گرفت. لذا در این فصل با در نظر گرفتن این اهداف برای دانشجویان درس آمار و احتمال تهیه گردیده است. امید است با به کارگیری و ادامه آن در دروس تخصصی بعدی در تفهیم مفاهیم آماری نقش سازنده‌ای داشته باشد.

۷-۲ ورود و خروج اطلاعات در مینیتب

در این بخش آنچه برای واردکردن و یا ویرایش داده‌ها نیاز است را ارائه داده‌ایم. هرگاه وارد نرم‌افزار مینیتب می‌شوید با دو محیط روبرو هستید:

۱. محیط DATA،

۲. محیط SESSION.

Payam Noor University

دستورات را فقط در محیط دوّم می‌توان نوشت و تغییرات را در محیط اوّل دید. نکته دیگر اینکه دستورات اصلی را باید جلوی MTB> تایپ کرد و این در حالی است که برای زیر برنامه‌ها باید نماد SUBC> ظاهر گردد.

دستور Read

```
READ    C…C
FILE   'filename'
FORMAT (specification)
NOBS=K
```

در دستور فوق، داده‌ها سطربه‌سطر خوانده می‌شود. اگر نام فایلی مشخص باشد داده‌ها را از آن پرونده می‌گیرد. در غیراین‌صورت داده‌ها را زیر فرمان Read می‌نویسیم. حالت ورودی آزاد داده‌ها طی مثال زیر نشان داده شده است. در آخر دستور END را برای نشان دادن پایان داده‌ها به‌کار می‌بریم.

مثال ۷–۱:

```
MTB> READ    C2    C3
DATA> 2      4
DATA>3.5     27
DATA>1       12
DATA>END
```

نرم‌افزار داده‌های ۲، ۳/۵، و ۱ را در ستون دوّم و داده‌های ٤، ۲۷، و ۱۲ را در ستون سوم قرار می‌دهد.

نکات:

۱– خطوط داده‌ها می‌تواند شامل حروف و کلمات باشد اما نمی‌تواند با نامی که دستوری هستند در نرم افزار شروع می‌شود. حروف خوانده نشده حذف می‌شوند. اگر داده‌ای حرفی(الفبایی) داشته باشیم باید از فرمت فرترن استفاده کنیم.

۲– داده می‌تواند به صورت اعشاری یا بدون اعشار نوشته شود. همچنین می‌توانیم به وسیله‌ی نماد علمی (نماد نمایی) داده‌ها را وارد کنیم مثلاً

Payam Noor University

1.234E2 1.234E+2 123.4

۳- خطوط داده‌ها میتواند شامل یک & در آخر خط به‌معنای ادامه داشتن داده‌ها، باشد.

٤- از نماد "*" برای نمایش داده‌ی گم‌شده استفاده کنید.

۵- نماد IW (input width) در خطوط داده‌ها بای تعریف کردن رقم‌های داده‌ها به کار می‌رود. برای مثال اگر بنویسیم IW72 داده‌ای که تعداد رقم‌هایش متجاوز از ۷۲ باشد، رقم‌های بعدی را نمی‌خواند.

٦- دستور READ برای واردکردن یک ماتریس نیز به کار می‌رود.

۷- اگر در یک خط END نوشته شود یعنی داده‌ها تمام شده است.

۸- ثابت‌های ذخیره شده از طریق دستور READخوانده نمی‌شود بلکه باید دستور SET کار برد.

زیربرنامه‌ها در دستور READ

FORMAT (specification)

داده‌ها در ستون‌ها با آرایشی مشخص وارد می‌شوند.

برای خواندن اعداد	FW
برای خواندن اعداد بااعشار	FW.D
داده حروفی – الفبایی	AW
برای تعریف فضای خالی – فاصله	X
طول کل فضای داده‌ها در یک خط	Tn
تکرار عامل	N
پرانتز باز	(
پرانتز بسته	)
فرمت‌ها را جدا می‌کند	,
برای رفتن به خط جدید داده‌ها	/

Payam Noor University

NOBS = K

هرگاه داده‌ها از یک فایل خوانده شود با دستور فوق فقط Kتای آنرا وارد نرم‌افزار می‌کند.

مثال ۷–۲. اعداد زیر با فرمت F3.1 وارد کامپیوتر کنید و سپس چگونگی خواندن آن توسط نرم‌افزار را مورد بررسی قرار دهید.

۱۲۱۲۳٤۳٤٥٥٦٦٧٨٨۹

حل:

```
MTB > READ C1;
SUBC> FORMAT(F3.1).
DATA> 1212343455667889
DATA> END
     1 rows read.
MTB > PRINT C1
Data Display
C1
  12.1
```

دستور Set

```
SET    C
FORMAT (specification)
NOBS=K
```

وارد کردن داده‌ها به کمک دستور SET را فقط برای یک ستون می‌توان به‌کار برد. اگر نام پرونده مشخص باشد داده‌ها را می‌توان از آن طریق خوانده، در غیر این صورت در خط زیر دستور مربوطه، داده‌ها را بنویسید.

مثال ۷–۳.

```
MTB > SET C7
DATA> 2        7      9
DATA> 3.5      22
DATA> END
```

در مثال فوق داده‌ها در ستون هفتم جای می‌گیرند.

Payam Noor University

کاربرد دیگر این دستور، ساختن داده‌های الگودار (PATTERNED DATA) است. به کمک دستور SET می‌توانیم داده‌هایی که از الگویی معین تبعیت می‌کنند وارد کامپیوتر نمائیم. برای مثال

٤، ۳، ۲، ۱	1:4
۱، ۲، ۳، ٤	4:1
۳، ۲/٥، ۲، ۱/٥، ۱	1:3/0.5
۱، ۱، ۱	3(1)
۳، ۲، ۱، ۳، ۲، ۱، ۳، ۲، ۱	3(1:3)
۳، ۳، ۲، ۲، ۱، ۱	(1:3)2
۳، ۳، ۲، ۲،۱، ۱، ۳، ۳، ۲،۲،۱، ۱	2(1:3)2

عدد جلوی پرانتز هر عدد را تکرار می‌کند، عدد قبل از پرانتز هر دنباله را تکرار می‌کند. توجه داشته باشید از پرانتزهای تودرتو نمی‌توان استفاده کرد.

مقادیر ثابت ذخیره شده در ... , k1, k2 را می‌توان در دستور SET به کار برد. این ثابت‌ها به سایر دستورات نرم‌افزار ایجاد شده و یا ما با دستور LET آن‌را تعریف می‌کنیم.

مثال ۷–٤.

```
MTB > LET  K2=3
MTB > LET  K3=10.2
MTB > LET  K1=2
MTB > SET  C1
DATA> 2(K1:20)  K2  K3 10
DATA> END
```

به کمک دستورات فوق داده‌های زیر را در نرم‌افزار وارد کرده‌ایم:

```
C1
  2.0   2.0   2.0   3.0   3.0   3.0   4.0   4.0   4.0   5.0   5.0
  5.0   6.0   6.0   6.0   7.0   7.0   7.0   8.0   8.0   8.0   9.0
  9.0   9.0  10.0  10.0  10.0  11.0  11.0  11.0  12.0  12.0  12.0
```

Payam Noor University

```
13.0  13.0  13.0  14.0  14.0  14.0  15.0  15.0  15.0  16.0  16.0
16.0  17.0  17.0  17.0  18.0  18.0  18.0  19.0  19.0  19.0  20.0
20.0  20.0   2.0   2.0   2.0   3.0   3.0   3.0   4.0   4.0   4.0
 5.0   5.0   5.0   6.0   6.0   6.0   7.0   7.0   7.0   8.0   8.0
 8.0   9.0   9.0   9.0  10.0  10.0  10.0  11.0  11.0  11.0  12.0
12.0  12.0  13.0  13.0  13.0  14.0  14.0  14.0  15.0  15.0  15.0
16.0  16.0  16.0  17.0  17.0  17.0  18.0  18.0  18.0  19.0  19.0
19.0  20.0  20.0  20.0  10.2  10.0
```

همانند دستور Read زیربرنامه‌های FORMAT و NOBS قابل‌اجرا می‌باشند.

مثال ۷–۵.

```
MTB > SET  C1;
SUBC> FORMAT(A11,T16,A2).
DATA> ABCDEFGHIJK    LM
DATA> abcdefghijk    lm
DATA> end
```

مطابق فرمت تعریف شده باید طول اوّلین داده ۱۶ باشد. به عبارت دیگر ۱۶ فضا برای عنصر اول در هر سطر در نظر می‌گیرد. چهار داده حرفی در ستون C1 تعریف می‌شود.

در آخر دستورات READ، SET، INSERT از فرمان END استفاده می‌کنیم. در صورتی‌که نام فایلی مشخص نشده باشد.

دستور Name

NAME   C='name' … C='name'

به هر ستون نامی را نسبت می‌دهد. نام‌گذاری نباید از هشت مشخصه بیشتر باشد. از علائمی مانند "," یا "#" نباید استفاده کنید. اسم‌ها نباید تکراری باشد. نام هر ستون را می‌توان به‌وسیله دستور Name تغییر داد. برای پاک کردن نام یک ستون از فاصله استفاده کنید برای مثال

```
MTB > name  c1=' '
```

Payam Noor University

دستور Print

```
PRINT    E… E;
FORMAT (specification)
```

این دستور داده‌ها را صفحه چاپ می‌کند. یک ستون یا بیشتر را می‌توانید چاپ کنید. در این دستور فرمت قابل اجرا می‌باشد. برخی نکات قابل توجه می‌باشند:

دستور فرمت برای ثابت‌ها و ماتریس‌ها به کار نمی‌رود.

اگر در دستـــــور چـــاپ ماتریس‌ها، ثابت‌ها و ستون‌ها را هم‌زمان بخواهیم چاپ کند، نرم‌افزار ابتدا ماتریس‌ها و سپس ثابت‌ها و بعد ستون‌ها را چاپ می‌کند.

اگر عدد محاسبه شده در نرم‌افزار ارقام زیادی داشته باشد در دستور چاپ از نماد نمایی استفاده می‌کند.

دستور Write

```
WRITE 'filename'   E… E;
FORMAT (specification)
```

داده‌ها را در یک فایل قرار می‌دهد. فایلی که از طریق این دستور ایجاد می‌شود از طریق سایر نرم‌افزارها قابل استفاده است. اکثر برنامه‌ها، دارای پسوند DAT باشند تا خوانده شوند.

با دستور Read می‌توانید داده‌های ذخیره شده توسط Write را خواند. اگر یک ستون باشد با دستور Set می‌خوانید. فایلی که با دستور Write به وجود آورده‌اید می‌توانید در کامپیوتر تحت DOS ویرایش کنید ولی نمی‌توانید این فایل را به وسیله‌ی دستور SAVE به‌وجود آورید. هرگاه ستون‌ها دارای داده‌های برابر نباشند minitab در صورت نیاز، با قراردادن داده‌های گم‌شده ستون‌ها را مساوی می‌کند.

دستور Delete

```
DELETE  rows  K… K  of  C…C
```

سطرهای ستون‌های تعیین شده را حذف می‌کند.

```
MTB> DELETE 2 5 6 C1 C2
```

Payam Noor University

در عبارت فوق سطرهای دوم، پنجم و ششم از ستون‌های اوّل و دوّم حذف می‌گردد.

اگر بخواهیم تمامی محتوی یک ستون یا چند ستون را پاک کنیم ا ز دستور ERASEاستفاده می‌کنیم.

دستور Insert

```
INSERT 'filename' [Between k k] E…E;
FORMAT (specification)
NOBS=K
```

بین سطر، ستون‌ها اطلاعات جدیدی می‌توانیم وارد کنیم. داده‌ها می‌توانند از پرونده دیگری خوانده شوند. برای روشن شدن چگونگی عملکرد این دستور به مثال‌های زیر توجه کنید.

اگر در بالای ستون‌های C1-C4 بخواهیم داده وارد کنیم:

MTB>INSERT 0 1 C1-C4

در بین ردیف‌های پنجم و ششم داده وارد می‌کنیم:

MTB>INSERT 5 6 C1-C4

اگر معین نکردیم کدام ردیف با دستور زیر داده‌ها را در آخر ستون‌ها وارد می‌کند:

MTB>INSERT 2 3 C1-C4

با توجه به دستور داده شده بعد و قبل از وارد کردن داده‌های جدید ملاحظه بفرمایید.

```
MTB>INSERT 2 3 C1-C3
DATA>62 105 0.4
DATA>63 120 0.7
DATA>END.
```

C1	C2	C3	C4
61	96	0.5	14
65	115	0.3	12
67	131	0.8	13
64	125	0.5	17

C1	C2	C3	C4
61	96	0.5	14
65	115	0.3	12
62	105	0.4	13
63	120	0.7	17
67	131	0.8	
64	125	0.5	

Payam Noor University

دستور Copy

```
COPY C…C into C…C;
COPY C…C into k…k;
        USE rows k...k.
        USE rows C=k…k.
            OMIT k…k.
            OMIT C=k…k.
COPY k…k k…k
COPY k…k C
```

به کمک این دستور، ستون‌ها را می‌توان در ستون‌های دیگر یا ثابت‌ها را در ثابت‌های دیگر و بالعکس کپی کرد. زیر برنامه‌های دستور کپی، USEو OMIT هستند. برای مشخص کردن سطرهای خاص در کپی از زیربرنامه USE، برای تعیین اینکه کدام سطر را کپی نکند از OMIT استفاده می‌شود. به مثال زیر توجه کنید:

```
MTB > copy 'name' 'ht' 'wt' c12-c14;
SUBC> use 'sex'=1.
```

name	sex	ht	wt	C12	C13	C14
Joan Arnold	2	66	135	Henry	70	155
Henry	1	70	155	James	64	145
Marie	2	64	125	Martin	69	160
Susan	2	65	115			
Jane	2	63	108			
James	1	64	145			
Martin	1	69	160			

نکات:

۱- در حالت کلی می‌توانید هر فهرستی از مقادیر در دامنه‌ی خاصی به وسیله دو زیر برنامه فوق اجرا نمایید.

```
MTB > COPY C1-C3 C11-C13;
SUBC> USE 'ht'=0:64 70.
```

این دستور داده‌هایی را کپی می‌کند که در فاصله‌ی صفر تا ٦٤ یا برابر ۷۰ باشند.

۲- می‌توان کپی از سطرهای مورد نظر را تعریف کرد:

```
MTB>COPY C1-C3 C11-C13;
SUBC>USE 1 3:5.
```

سطرهای اول، سوم، چهارم و پنجم را کپی می‌کند.

۳- می‌تواند سطرهای خاص را در کپی کردن حذف شود.

Payam Noor University

```
MTB>COPY  C1-C3   C11-C13;
SUBC>OMIT   2    6.
MTB>COPY   C1-C3     C11-C13;
SUBC>OMIT    C1='*'.
```

دستور Code

CODE (K…K) K,…,(K…K) to K for C… C put in C…C

با مثال‌های زیر، ملاحظه می‌کنید که چگونه برخی داده‌ها را به داده‌های دیگر مبدل ساخت.

–داده‌های در فاصله‌ی تعریف شده را به عدد ۱۰۰ تغییر داد.

```
MTB > code (-1 -2) 100 c1 c2
MTB > print c1 c2
Data Display
 Row     C1      C2
     1   -0.1    -0.1
     2    3.0     3.0
     3    1.1     1.1
     4   -1.0   100.0
     5    0.0     0.0
     6   -2.0   100.0
     7    2.4     2.4
```

– یک فاصله را می‌تواند به یک عدد مبدل کند.

```
MTB>CODE  (1:1.5, 2)  5   C1-C3     C11-C13
```

– کلیه‌ی مقادیر در (۱/۵ ۱) و مقدار ۲ را به عدد پنج مبدل می‌کند.

```
MTB>CODE  (1:5) 10  (6:10)  20 C1-C5   C11-C15
```

– دستور فوق مقادیر (۵   ۱) را به ۱۰ و مقادیر (۱۰ ٦) را به ۲۰ مبدل می‌سازد.

```
MTB>CODE (10:20) 1 (20:30) 2  C1  C2
```

– در این وضعیت عدد ۲۰ را به یک مبدل می‌کند.

```
MTB>CODE (-99) '*'  C1-C10     C1-C10
```

– عدد ۹۹– را به داده گمشده مبدل می‌کند.

Payam Noor University

تمرین

۱-۷. یکی از مسائل کتاب در قسمت توصیفی، که شامل حداقل ۲۰ داده است را انتخاب کرده و سپس به کمک دستور فوق، داده‌ها را طبقه‌بندی نمایید.

دستور **Stack**

```
STACK (E…E) on (E…E) put in (C…C);
SUBSCRIPTS  put in C
```

این دستور قابلیت متصل‌کردن ستون‌ها به هم را دارا می‌باشد.

```
MTB > STACK (C3 C4) (C1 C2) (C5 C6)
MTB > PRINT C1-C6
Data Display
ROW   C1    C2    C3    C4    C5    C6
  1   66   130    70   155    70   155
  2   64   125    66   145    66   145
  3   65   115    69   160    69   160
  4                             66   130
  5                             64   125
  6                             65   115
```

اگر پرانتز را به کار نبریم:

```
MTB > STACK C1 C2 67 63 C10
MTB > PRINT C1 C2 C10
Data Display
 Row   C1    C2   C10
   1   66   130    66
   2   64   125    64
   3   65   115    65
   4              130
   5              125
   6              115
   7               67
   8               63
```

آخرین ستون، ستون هدف است.

زیربرنامه SUBSCRIPTS C یک ستون C از زیرنویس را ایجاد می‌کند.

```
MTB > STACK (C3 C4) (C1 C2) (C5 C6);
SUBC> SUBSCRIPTS C7.
```

Payam Noor University

MTB > PRINT C1-C7

Data Display

Row	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
1	66	130	70	155	70	155	1
2	64	125	66	145	66	145	1
3	65	115	69	160	69	160	1
4					66	130	2
5					64	125	2
6					65	115	2

دستور Unstack

UNSTACK (C…C) into (E…E) … (E…E);
SUBSCRIPTS are in C.

ستون‌های را بر اساس زیربرنامه به ستون‌های دیگر تجزیه می‌کند.

MTB > unstack (c1 c2) (c11 c12) (c13 c14) (c15 c16);
SUBC> subscripts c3.
MTB > print c1-c3 c11-c16

Data Display

Row	C1	C2	C3	C11	C12	C13	C14	C15	C16
1	24	126	2	35	142	24	126	27	134
2	27	134	3	31	122	21	119	32	148
3	32	148	3		33	142			
4	35	142	1						
5	21	119	2						
6	33	142	2						
7	31	122	1						

اگر یک ستون را بخواهیم تفکیک کنیم نوشتن پرانتز الزامی نیست.

تمرین

۷-۲. به کمک چهار کد ایجاد شده برای داده‌های مفروض، داده‌های خود را برحسب طبقه‌ی مربوطه در چهار ستون تفکیک کنید.

دستور Convert

CONVERT using conversion table in C…C, convert C to C

Payam Noor University

داده‌های حرفی را می‌توان به عددی تغییر داد. ابتدا ستون‌هایی که کدها در آن قرار دارند را تعریف می‌کنیم.

```
MTB > READ C1 C2;
SUBC> FORMAT(F1.0, 2X, A6).
DATA> 1  RED
DATA> 2  YELLOW
DATA> END
```

به دو فرم می‌توان دستور را در مبدل‌سازی به کار برد.

```
MTB > CONVERT C1 C2 C10 C11.
* NOTE * 1 other values converted to blank
MTB > CONVERT C2 C1 C12 C13
* NOTE * 1 other values converted to missing
MTB > PRINT C1 C2 C10-C13
Data Display
 Row   C1    C2         C10    C11        C12       C13
   1    1    RED          1    RED        RED         1
   2    2    YELLOW       2    YELLOW     RED         1
   3                      1    RED        YELLOW      2
   4                      3               RED         1
   5                      2    YELLOW     BLUE        *
```

دستور **Concatenate**

```
CONCATENATE   C…C  put in   C
```

اگر در تعداد حروف دریک ستون محدودیت داشته باشیم از این دستوراستفاده می‌کنیم.

```
MTB > READ C1-C3;
SUBC> FORMAT(A4,A3,A4).
DATA> 194-42-7777
DATA> 123-45-6789
DATA> END
     2 rows read.
MTB > CONCATENATE C1-C3 C4
MTB > PRINT C1-C4
Data Display
 Row    C1     C2     C3       C4
   1    194-   42-    7777     194-42-7777
   2    123-   45-    6789     123-45-6789
```

Payam Noor University

۳-۷ محاسبات در مینتب

در این بخش دستوراتی که به کمک آنها محاسبات ریاضی و آماری را ساده‌تر می‌نماید ارائه می‌دهیم. در برخی موارد دستورات دارای زیر دستوراتی می‌باشند که برای سادگی این فصل از نوشتن و توضیح‌دادن خودداری شده است.

دستور Let

LET E=expression

این دستور، به کمک یک عبارت عملیات محاسباتی را انجام می‌دهد. عبارت باید حداقل شامل یکی از عملگرهای حسابی، یک مقایسه‌ای، منطقی و یا توابع باشند. در ابتدا می‌توانید تعدادی عدد وارد یک ستون نمایید. شناسه می‌تواند ستون‌ها ثابت‌های ذخیره شده باشند. توجه داشته باشید که از ماتریس‌ها نمی‌توان استفاده کرد. نمی‌توان در دستور LET متن به کار برد مگر متن را در آخر دستور، بعد از علامت # بنویسیم. در زیر چند مثال آورده شده است.

```
MTB > LET C1=(C2+C3)*10-60
MTB > LET C1=C1-MEAN(C1)
MTB > LET K1=0.5
MTB > LET K2=MEAN(C1)/STDEV(C1)
MTB > LET C5=(C1<5)
MTB > LET K2=C1(28)
MTB > LET C1(28)=2.35
```

حداکثر پرانتزها در دستور LET، نه(۹) می‌باشد و حداکثر عبارتی که می‌توان در LETنوشت ۷۸ کارکتردارد. در صورت نیاز می‌توانید عبارت را به زیر عبارتی دیگر خرد کرد.

عملگرهای محاسباتی (ARITHMETIC OPERATION)

توان	**
ضرب	*
تقسیم	/
جمع	+
منها	−

Payam Noor University

کلیه‌ی عملیات به صورت سطری انجام می‌گیرد. در صورت وجود عضو گم‌شده نتیجه به صورت گم‌شده نمایش می‌دهد. اگر عمل‌گری امکان انجام محاسبه را نداشته باشد (مانند تقسیم بر صفر) نتیجه عضوی گم‌شده می‌شود. در زیر چند مثال پرداخته‌ایم.

```
MTB > let c10=c1+c2
MTB > let c11=c2**2
MTB > let c12=c1/c2
MTB > let c12=c1/c2
             J
*** Values out of bounds during operation at J
   Missing returned 1 times

MTB > let c13=c1+c2+c3+100
MTB > print c1-c3 c10-c13
Data Display
 Row   C1   C2   C3   C10   C11    C12    C13
    1    5     2    2      7     4      2.5    109
    2    3     6    2      9    36      0.5    111
    3    1    -1    *      0     1     -1.0      *
    4    6     0    1      6     0         *    107
```

عملگرهای مقایسه‌ای (COMPRISON OPERATION)

ساختار یک عبارت منطقی به کمک عملگرهای زیر انجام می‌گیرد.

برابر	EQ	یا	=
نابرابر	NE	یا	~=
کمتر	LT	یا	<
بزرگتر	GT	یا	>
کمتر یا مساوی	LE	یا	<=
بزرگتر یا مساوی	GE	یا	>=

عملیات به صورت سطری انجام می‌گیرد. اگر عبارت درست باشد مقدار یک، در غیر این‌صورت مقدار صفر حاصل می‌شود. با عملگرهای GE, GT, LT, LE اگر سطری عضو گم‌شده داشته باشد آنگاه نتیجه نیز به صورت گم‌شده خواهد شد. اما با

Payam Noor University

عملگرهای NE , EQ مقایسه را می‌توان با عضو گم‌شده نیز انجام داد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

```
MTB > LET C3=(C1<C2)
MTB > LET C4=(C1='*')
MTB > LET C5=2*(C1=1)+5*(C1~=1)
MTB > LET C6=(C1 EQ C2)
MTB > PRINT C1-C6
Data Display
 Row   C1   C2   C3   C4   C5   C6
   1    4    8    1    0    5    0
   2    4    4    0    0    5    1
   3    1   -2    0    0    2    0
   4    *    5    *    1    5    0
```

عملگرهای منطقی (LOGICAL OPERATION)

&	AND	و
|	OR	یا
~	NOT	نه

عملیات سطری انجام می‌گیرد. با ارزش هر عبارت برحسب درستی یا نادرستی مقدار یک یا صفر نسبت می‌دهد. در صورتی‌که محاسبه انجام‌پذیر نباشد، علامت * را نشان می‌دهد. اگر هر دو عبارت در طرفین AND درست باشد ارزش آن یک در غیر این-صورت صفر خواهد شد. اگر یکی از عبارت‌های طرفین OR درست باشد ارزش آن یک است. اگر عبارتی درست باشد، با دستور NOT تغییر به نادرست می‌شود.

مثال ۷–۶.

```
MTB > LET C3=C1&C2
MTB > LET C4=C1|C2
MTB > LET C5=~C2
MTB > LET C6=(C1 GT 2)OR(C2 EQ 1)
MTB > PRINT C1-C6
Data Display
 Row   C1   C2   C3   C4   C5   C6
   1    1    1    1    1    0    1
   2    1    0    0    1    1    0
   3    0    0    0    0    1    0
```

Payame Noor University

4	1	*	*	1	*	0
5	0	*	0	*	*	0
6	0	5	0	1	0	0

توابع و عملگرهای ستونی (FUNCTIONS AND COLUMN OPERATIONS)

توابع زیر به صورت سطری عملیات را انجام می‌دهند.

قدرمطلق	ABSOLUTE	ریشه‌ی دوم	SQRT
لگاریتم در مبنای ۱۰	LOGTEN	لگاریتم درمبنای عدد نپر	LOGE
تابع نمایی e^x	EXPONENT	تابع 10^x	ANTILOG
گرد	ROUND	ارک سینوس	ASIN
سینوس	SIN	ارک کسینوس	ACOS
کسینوس	COS	ارک تانژانت	ATAN
تانژانت	TAN	ضرب جزئی	PARPROU
جمع جزئی	PARSUM		

عملگرهای زیر، بر روی ستون‌ها محاسبات را انجام می‌دهند و یک عدد به‌دست می‌آورند.

تعداد داده‌های معلوم	COUNT	میانگین	MEAN
تعداد داده‌های گم‌شده	NMISS	میانه	MEDIAN
تعداد کل داده‌ها	N	انحراف معیار	STDEV
ماکسیمم داده‌ها	MAX	مجموع مربعات	SSQ
مینیمم داده‌ها	MIN		

سه عملگر زیر بر روی ستون‌ها اثر می‌گذارند و به شکل یک ستون پاسخ می‌دهند. عملگرهای زیر خاص محاسبات آماری می‌باشند.

- ازکوچک به بزرگ داده‌ها را مرتب می‌کند SORT
- به عناصر یک ستون رتبه ای را نسبت می‌دهد RANK
- لگ یا تأخیر LAG

توجه داشته باشید که نوشتن پرانتز جلوی عملگرها ضروری است. توابع و عملگرهای ستونی را می‌توان با چهار حرف اوّل آن به کار گرفت.

مثال ۷-۷.

```
MTB > LET C10=SQRT(C1)
MTB > LET C11=ABSO(C2)+10
MTB > LET K1=SUM(C1)
MTB > LET C12=C1-MEAN(C1)
MTB > LET C13=K1*C2
MTB > PRINT C1-C2 C10-C13
Data Display
 Row  C1  C2      C10   C11   C12   C13
   1   1   4  1.00000    14    -3    48
   2   9  -3  3.00000    13     5   -36
   3   2   0  1.41421    10    -2     0
MTB > PRINT K1
Data Display
K1      12.0000
```

می‌توان عناصر مشخص از یک ستون را به کمک دستور LET تغییر داد. برای مثال:

```
MTB > LET C1=C2(3)*C10
MTB > LET C2(3)=5+K1
MTB > LET C2=C1(COUNT(C2)-10)*C11
```

در ستون اوّل، ستون دهم را در سومین مقدار ستون دوّم ضرب کرده و نتیجه را در ستون اوّل قرار می‌دهد. سومین عنصر از ستون دوّم را برابر جمع دو عدد معلوم جایگزین می‌کند.

تذکر: چنانچه دستور را به شکل زیر بنویسیم

```
LET  C1(15)=28
```

اگر ستون اوّل، ده عنصر داشته باشد آنگاه به جز عنصر پانزدهم که مقدار ۲۸ را نسبت می‌دهد ازعنصر ۱۱ تا ۱٤ علامت ستاره می‌زند.

دستورات جبری ADD, SUBTRACT, MULTIPLY, DIVIDE,RAISE

```
ADD    E to  E, …, to  E  put into E
SUBTRACT   E   from   E
```

Payam Noor University

```
MULTIPLY   E   by  E, …, E  put into E
DIVIDE   E   by  E
RAISE   E  to the power E   put into E
```

پنج دستور سطربه‌سطر عملیات جبری روی ستون‌ها را انجام می‌دهد.

مثال ۷–۸.

```
MTB > ADD C1 C2 C3
MTB > ADD 5 C1 C4
MTB > RAISE C2 3 C5
MTB > PRINT C1-C5
Data Display
 Row    C1   C2    C3    C4   C5
   1    1.1   2    3.1   6.1   8
   2    2.3   1    3.3   7.3   1
   3   -5.0   2   -3.0   0.0   8
```

تذکر: توابع تعریف شده قبلی نیز به همین شیوه قابل انجام شدن هستند.

دستورات سطری

```
RCOUNT     E… E   put  into  C
RN      E… E   put  into  C
RNMISS     E… E   put  into  C
RSUM     E… E   put  into  C
RSTDEV     E… E   put  into  C
RMEAN     E… E   put  into  C
RMEDIAN     E… E   put  into  C
RMIN     E… E   put  into  C
RMAX     E… E   put  into  C
RSSQ     E… E   put  into  C
```

عملیات را به صورت سطری برای حداکثر ۱۰ ستون، انجام می‌دهند.

مثال ۷–۹.

```
MTB > RSUM C1-C4 C5
MTB > RMEAN C1-C4 C6
MTB > RN C1-C4 C7
MTB > PRINT C1-C7
Data Display
Row   C1   C2   C3   C4    C5    C6   C7
  1    2    4    7    3    16    4.0   4
```

Payam Noor University

2	5	1	2	2	10	2.5	4
3	2	*	1	3	6	2.0	3

دستور Describe

MTB> DESCRIBE C1 C2 …

به کمک این دستور می‌توان برخی معیارهای تمرکز و معیارهای پراکندگی را به‌دست آورد.

مثال ۷-۱۰.

```
MTB > SET C1
DATA> 10 13  15 9 17 20 15 17 8 11 * 12 14
DATA> END
MTB > DESC C1
Descriptive Statistics
Variable    N    N*    Mean   Median  TrMean   StDev  SEMean
C1          12   1     13.42  13.50   13.30    3.60   1.04

Variable    Min    Max    Q1     Q3
C1          8.00   20.00  10.25  16.50
```

ترجمه‌ی کلمات و حروف به‌کار رفته

میانگین	MEAN	تعداد کل داده‌ها	N
میانه	MEDIAN	تعداد داده‌های گم‌شده	N^*
میانگین پیراسته ۱۰٪	TRMEAN	مینیمم داده‌ها	MIN
انحراف معیار $\sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$	STDEV	ماکسیمم داده‌ها	MAX
$stdev/\sqrt{n}$	SEMEAN	چارک اوّل	Q_1
		چارک سوم	Q_3

دستور Table

از این دستور برای ساختن جدول در داده‌های گسسته به‌کار گرفته می‌شود. به مثال‌های زیر توجه کنید.

Payam Noor University

مثال ۷–۱۱.

```
MTB > set c1
DATA> 1 1 2 1 1 0 2 2 1
DATA> end
MTB > TABLE C1
Tabulated Statistics
 ROWS: C1
      COUNT
  0       1
  1       5
  2       3
 ALL      9
```

مثال ۷–۱۲.

```
MTB > READ C1 C2
DATA> 1 1
DATA> 1 0
DATA> 1 1
DATA> 0 1
DATA> 0 1
DATA> 0 0
DATA> END
      6 rows read.
MTB > TABLE C1 C2.
Tabulated Statistics
 ROWS: C1     COLUMNS: C2
         0      1     ALL
  0      1      2      3
  1      1      2      3
 ALL     2      4      6
  CELL CONTENTS --  COUNT
```

دستور Covariance

```
MTB> COVARINCE  C1 C2
```

این دستور مقدار کواریانس را با ضریب $n-1$ محاسبه می‌کند. با درنظرگرفتن داده‌های مثال ۷–۱۲ داریم:

```
MTB > COVARINCE C1 C2
Covariances
```

Payam Noor University

```
          C1          C2
C1      0.300000
C2      0.000000  0.266667
```

مقدار ۰/۳۰۰۰۰۰ واریانس ستون اول، مقدار ۰/۲۶۶۶۶۷ واریانس ستون دوم، و مقدار ۰/۰۰۰۰۰۰ کوواریانس بین ستون اول و دوم است. مقدار کوواریانس با ضریب n را می‌توانید با دستور LET بسازید.

```
MTB > LET  k1=sum((C1-MEAN(C1))*(C2-MEAN(C2)))/N(C1)
MTB > PRINT k1
```

تمرین

۷-۳. عملیات لازم همراه با مثالی عددی، برای محاسبه‌ی نما را بنویسید.

۷-٤. به کمک دستورات، مقدماتی چارک اوّل و چارک سوم هر سری داده را به‌دست آورید.

۷-۵. نشان دهید برای سری داده فرضی $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$ برابر صفر است.

۷-٦. داده‌های زیر را در نظر بگیرید:

۶ ۱ ۱ ۲ ۳ ۲ ۲ ۵ ۸ ۹ ۵ ۴ ۳ ۲ ۶ ۵ ۳ ۲ ۴ ۱

الف) نشان دهید عبارت $\sum_{i=1}^{n}|x_i-a|$ به‌ازای a برابر میانه مینیمم می‌شود (با سه مقدار: کوچکتر از میانه، میانه، بزرگتر از میانه نشان دهید).

ب) نشان دهید عبارت $\sum_{i=1}^{n}(x_i-b)^2$ به ازای $b=\bar{x}$ مینیمم می‌شود.

ج) گشتاور مرکزی مرتبه‌های سوم و چهارم را محاسبه کنید.

$$M_3=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3,\quad M_4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4.$$

۷-۷. چند درصد داده‌های سؤال ۷-٦، از میانگین بزرگتر هستند.

Payam Noor University

۷-۸. نشان دهید هرگاه از داده‌های سؤال ۷-٦، میانه را کم کنیم تغییری در مقدار واریانش به‌وجود نمی‌آید.

۷-۹. حداقل پنجاه داده را برداشته (از کتاب استفاده نمائید) آن‌را به کمک دستورات نرم‌افزار طبقه‌بندی نمایید و سپس میانگین، واریانس، میانه، چارک اوّل و چارک سوم و نما را به کمک داده‌های طبقه‌بندی شده محاسبه نمائید.

۷-۱۰. به کمک نرم‌افزار کمیت‌های زیر را محاسبه کنید:

$$\log(۳/۴) \qquad e^{۱/۵} \qquad ۳^{\sqrt{۳}}$$

$$(۱+۲)(۳+۴)(۸+۹)(۱۱+۱۰)(۲+۲)(۴+۷)$$

۷-۱۱. به کمک عبارت‌های منطقی، ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + ۳x + ۲$ را بیابید.

۷-۱۲. به دستورات نرم‌افزار، $۱۲!$ را محاسبه کنید.

۷-۱۳. دستورات لازم جهت محاسبه‌ی دامنه‌ی تغییرات را بنویسید.

۷-٤ رسم نمودار

هنگامی‌که دستورات رسم نمودارها را اجرا می‌کنید به استثناء نمودار نقطه‌ای، محیط دیگری برای نشان دادن نمودارها فراهم می‌گردد، که می‌توان در آن محیط نمودارها را ذخیره نمود.

دستور Histogram

```
HISTOGRAM   C … C;
INCREMENT    =K;
START   =K  [end =K];
BY  C;
SAME   scale for all columns
```

به طور جداگانه برای هر یک ازستون‌ها نمودار هسیتوگرام را رسم می‌کند. به کمک زیر برنامه‌های آمده می‌توان طول طبقات، نقطه‌ی شروع نمودار و سایر مقیاس‌بندی‌ها را

برای ستون‌ها به‌کار برد. ساده‌ترین شکل آن است که هیچ‌یک از زیربرنامه‌ها را به‌کار نبرده تا نرم‌فزار با رعایت فواصل مساوی نمودار را رسم کند.

مثال ۷–۱۳.

```
MTB> SET C1
DATA> 12   11   15   21   15   14   17   18   19   14   12   13   15
DATA> END
MTB> HISTOGRAM   C1
```

دستور Dotplot

```
DOTPLOT   C
INCREMENT      =K;
START    =K   [end =K];
BY  C;
SAME    scale for all columns
```

آنچه که یک نمودار نقطه‌ای نشان می‌دهد، مشابه‌ی یک هستوگرام است امّا محورها به طبقات بیشتری تقسیم و هر مشاهده به وسیله‌ی یک نقطه نمایش داده می‌شود.

مثال ۷–۱٤. با داده‌های مثال فوق نمودار نقطه‌ای را رسم می‌کنیم

```
MTB > DOTPLOT C1
Character Dotplot

                       .
   .   :   .   :   :       .   .   .       .
-------+---------+---------+---------+---------+---------C1
     12.0      14.0      16.0      18.0      20.0      22.0
```

دستور Plot

```
PLOT   C  versus   C
TITLE='text'
FOOTNOTE= 'text'
XLABLE = 'text'
YLABLE = 'text'
SYMBOL = 'text'
XINCREMENT      =K;
XSTART    =K   [end =K];
YINCREMENT      =K;
YSTART    =K   [end =K]
```

ستون اوّل را روی محور عرض‌ها و ستون دوّم را روی محور طول‌ها قرار می‌دهد. معمولاً هر نقطه را با نماد × نمایش می‌دهد هرگاه دو یا چند نقطه روی هم قرار گیرند تعداد آنها در کنار نقطه‌ی مشترک ذکر می‌شود اگرتعداد آنها از نه تا بیشتر شد ا ز علامت + استفاده می‌کند. زیربرنامه‌ها را برای اضافه‌کردن متن‌هایی در نمودار به‌کار می‌گیرند. به کمک SYMBOL می‌توان علامت نمایشی نمودار را تغییر داد.

مثال ۷–۱۵.

```
MTB > SET C1
DATA> 1:10/0.1
DATA> END
MTB > LET C2=C1**2
MTB > PLOT C2*C1
```

این نرم‌افزار نمودارهای متعدد دیگری را رسم می‌کند منجمله

STEM-AND-LEAF, PIE CHART, …

که می‌توانید با انتخاب منوها و یا با نوشتن دستورات آنها را انجام دهید.

تمرین

۷–۱۴. به کمک دستورات فوق داده‌های کتاب را انتخاب کرده و سپس انواع نمودارها را بسته به نوع آنها، رسم کنید.

Payam Noor University

حل تمرین‌ها

حل تمرین‌های فصل اوّل

۱-٤. الف)

طبقه	تعداد	فراوانی	فراوانی تجمعی
۵−۶$^{-}$	۸	۰/۸	۸
۶−۷$^{-}$	۱۹	۰/۱۹	۲۷
۷−۸$^{-}$	۳۵	۰/۳۵	۶۲
۸−۹$^{-}$	۱۵	۰/۱۵	۷۷
۹−۱۰$^{-}$	۱۴	۰/۱۴	۹۱
۱۰−۱۱$^{-}$	۹	۰/۱۹	۱۰۰

۱-۵.

طبقه	درصد فراوانی	فراوانی تجمعی	کرانه‌های‌رده‌ها
۱۵−۲۰/۹	۰/۱۲	۳	۱۴/۹۵−۲۰/۹۵
۲۱−۲۶/۹	۰/۳۲	۱۱	۲۰/۹۵−۲۶/۹۵
۲۷−۳۲/۹	۰/۳۶	۲۰	۲۶/۹۵−۳۲/۹۵
۳۳−۳۸/۹	۰/۰۸	۲۲	۳۲/۹۵−۳۸/۹۵
۳۹−۴۴/۹	۰/۱۲	۲۵	۳۸/۹۵−۴۴/۹۵

۱-٦. ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۰ ۰ ۰ ۱۱۱۱ ۲ ۲ ۲ ۳ ۳ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

$$\tilde{x} = \frac{۲+۳}{۲} = ۲/۵$$

در اینجا دو عدد ۳ و ۱ هر کدام چهار بار تکرار شده‌اند. لذا هر دو مد هستند. برای محاسبه‌ی چارک اوّل $\frac{n}{۴} = \frac{۲۰}{۴} = ۵$. پس چارک اوّل پنجمین عدد مرتب شده است، یعنی $Q_۱ = ۱$.

Payam Noor University

۱–۷.
$$\bar{x}_H=\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{80}\right)\right)^{-1}=\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{80}\right)^{-1}=\frac{240}{7}$$

۱–۸. به ازای هر aای،

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-a)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-a)^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\bar{x}-a).$$

از طرفی عبارت $(\bar{x}-a)^2$ به اندیس i بستگی ندارد، پس داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-a)^2=n(\bar{x}-a)^2$$

و چون می‌دانیم که $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\bar{x}-a)=(\bar{x}-a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$$

در نهایت خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-a)^2.$$

۱–۹. خیر زیرا

مجموع وزن افراد $=8\times 123+5\times 174=984+870=1854<2000$

۱–۱۰.

$$\bar{x}=\frac{575\times 120000+410\times 117000+425\times 121000}{575+410+425}$$
$$=\frac{168395000}{1410}=119/429.$$

۱–۱۱.

$$\sigma^2=2,\qquad \bar{x}=3,\qquad \sum_{i=1}^{N}x_i^2=55,$$

Payam Noor University

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2-N\bar{x}^2}{N}=\frac{55-N\times 3}{N}=\frac{55}{N}-3=2.$$

$$5N=55\to N=11.$$

۱–۱۲. میانگین داده‌های جدید $\bar{x}+1$ است.

۱–۱۳. میانگین داده‌های جدید به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x}_{new}=\frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i+i)}{9}=\frac{\sum_{i=1}^{9}x_i}{9}+\frac{\sum_{i=1}^{9}i}{9}=\bar{x}+\frac{\frac{9\times 10}{2}}{9}=10+5=15.$$

۱–۱۴. میانگین داده‌های جدید به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x}_{new}=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i+4i)}{20}=\frac{\sum_{i=1}^{20}x_i}{20}+\frac{4\sum_{i=1}^{20}i}{20}=\bar{x}+\frac{4\times 210}{20}=15+42=57.$$

۱–۱۵.

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{20}x_i}{20}=15\quad\to\quad\sum_{i=1}^{20}x_i=20\times 15=300,$$

$$\bar{x}_{new}=\frac{\sum_{i=1}^{20}x_i+30+35+36}{23}=\frac{300+30+35+36}{23}=\frac{401}{23}=17/43.$$

۱–۱۶. بنابر صفر بودن انحراف معیار داریم: $x_1=x_2=x_3=x_4=25$، پس

$$\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i+50}{5}=\frac{4\times 25+50}{5}=30.$$

۱–۱۷. تغییری ایجاد نمی شود.

Payam Noor University

۱–۱۸. $x_{۱} = x_{۲} = \cdots = x_{۱۰} = ۱۵$ بنابراین داده‌های مرتب شده عبارتند از

$$۱۷, ۱۹, ۳۱, ۳۱, \ldots, ۳۱$$

در نتیجه $\tilde{x} = ۳۱$.

۱–۱۹. اعداد جدید مضرب $\frac{۱}{۴}$ اعداد قدیمی‌اند. لذا واریانس اعداد جدید $\frac{۱}{۱۶}$ اعداد قدیمی و در نتیجه انحراف معیار آنها $\frac{۱}{۴}$ اعداد قدیمی است.

$$\sigma_{ax+b} = |a|\,\sigma_x.$$

پس انحراف معیار اعداد جدید برابر است با $\frac{۱}{۴} \times ۹/۸ = ۲/۴۵$.

۱–۲۰. الف)

رده	کرانه‌های رده‌ها	f_i	m_i	$f_i m_i$	فراوانی تجمعی	$f_i m_i^{۲}$
۴۴/۵_۵۴/۵	۴۴/۲۵_۵۴/۷۵	۵	۴۹/۵	۲۴۷/۵	۵	۱۲۲۵۱
۵۴/۵_۶۴/۵	۵۴/۷۵_۶۴/۷۵	۴۵	۵۹/۵	۲۶۷۷/۵	۵۰	۱۵۹۳۱۱
۶۴/۵_۷۴/۵	۶۴/۷۵_۷۴/۷۵	۴۳	۶۹/۵	۲۹۸۸/۵	۹۳	۲۰۷۷۰۰
۷۴/۵_۸۴/۵	۷۴/۷۵_۸۴/۷۵	۱۹	۷۹/۵	۱۵۱۰/۵	۱۰۲	۱۲۰۰۸۴
۸۴/۵_۹۴/۵	۸۴/۷۵_۹۴/۷۵	۷	۸۹/۵	۶۲۶/۵	۱۱۹	۵۶۰۷۱
۹۴/۵_۱۰۴/۵	۹۴/۷۵_۱۰۴/۷۵	۱	۹۹/۵	۹۹/۵	۱۲۰	۹۹۰۰
		۱۲۰		۸۱۵۰		۵۶۵۳۱۷

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} f_i m_i}{۱۲۰} = \frac{۸۱۵۰}{۱۲۰} = ۶۷/۹,$$

$$\tilde{x} = ۶۴/۷۵ + \frac{۶۰ - ۵۰}{۴۵} \times ۱۰ = ۶۴/۷۵ + ۲/۲۲ = ۶۶/۹۷,$$

$$s^{۲} = \frac{n\left(\sum_{i=۱}^{n} m_i^{۲} f_i\right) - \left(\sum_{i=۱}^{n} f_i m_i\right)^{۲}}{n(n-۱)} = \frac{۱۲۰(۵۶۵۳۱۷) - (۸۱۵۰)^{۲}}{۱۲۰(۱۱۹)} = ۹۹.$$

ب)

Payam Noor University

$$\frac{۱}{۴}\times n=۳۰ \quad \rightarrow \quad Q_۱=۵۴/۷۵+\frac{۳۰-۵}{۴۵}\times ۱۰=۵۴/۷۵+۵/۵۵=۶۰/۳,$$

$$\frac{۳}{۴}\times n=۹۰ \quad \rightarrow \quad Q_۳=۶۴/۷۵+\frac{۹۰-۵۰}{۴۳}\times ۱۰=۷۴/۰۵,$$

$$SK=\frac{۳(\bar{x}-Md)}{S}=\frac{۳(۶۷/۹-۶۶/۲۷)}{۹/۹۴}=۰/۲۸.$$

۲۱-۱.

$$SK=\frac{۳(\bar{x}-Md)}{S}=\frac{۳\times(۳/۵-۳/۴۸)}{۱/۶۵}=۰/۰۳۶.$$

Payam Noor University

حل تمرین‌های فصل دوم

۲-۱. $A \cup B$.

۲-۲. اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸ مضارب عدد ۲ و عدد ۷ مضرب عدد ۷ هستند. لذا مجموعه‌ی ۲، ۴، ۶، ۷ و ۸ مضارب اعداد ۲ یا ۷ هستند.

۲-۳. حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$.

۲-۴. به $۴ \times ۳ = ۱۲$ حالت می‌توان با انتخاب یکی از ۴ جفت جوراب و یکی از ۳ جفت کفش، جوراب و کفش پوشید.

۲-۵. $۳ \times ۴ \times ۵ \times ۲ = ۱۲۰$.

۲-۶. $۳۲ \times ۳۲ \times ۳۲ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۳۲۷۶۸۰۰۰۰$

۲-۷. به ازای هر نقطه دو حالت، ۰ و ۱ داریم پس ۲^n تابع می‌توان ساخت.

۲-۹. الف) $۹!$ **ب)** $۶! \times ۴!$

۲-۱۰. الف) $۴!$

۲-۱۱. الف) $\frac{۱۰!}{۴!۳!۲!۱!}$

۲-۱۲. $\frac{۹!}{۴!۳!۲!}$

۲-۱۳. ${}_۵P_۳ = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$

۲-۱۴. $(۴-۱)! = ۳!$

Payam Noor University

۲–۱۵. $\frac{(۵-۱)!}{۲!}=\frac{۴!}{۲}=۱۲$

۲–۱۶. $\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}\times\frac{۷!}{۴!۳!}=۱۰\times ۳۵=۳۵۰$

در حالت دوم، هر دو مرد را که با هم تفاهم ندارند در یک گروه در نظر گرفته و از آن گروه فقط یک نفر را انتخاب می‌کنیم و از ۵ مرد باقیمانده دو نفر انتخاب می‌کنیم

$$\binom{۵}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۳!۲!}\times ۲\times\frac{۵!}{۳!۲!}=۲۰۰.$$

۲–۱۷. $\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰!}{۶!۴!}=۲۱۰$

۲–۱۸. $\frac{۴!}{۲!۱!۱!}=۱۲$

۲–۱۹. الف) اگر $x=۱$ و $y=۱$

$$\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}x^r y^{n-r}=\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}=(۱+۱)^n=۲^n.$$

ب) اگر $x=-۱$ و $y=۱$

$$\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}x^r y^{n-r}=\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}(-۱)^r ۱^{n-r}=\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}(-۱)^r=(-۱+۱)^n=۰.$$

ج) اگر $x=a-۱$ و $y=۱$

$$\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}x^r y^{n-r}=\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}(a-۱)^r ۱^{n-r}=\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}(a-۱)^r=(a-۱+۱)^n=a^n.$$

۲–۲۰. طبق قضیه‌ی ۲–۸ داریم:

$$\binom{n}{r}=\binom{n-۱}{r}+\binom{n-۱}{r-۱},$$

از قضیه‌ی ۲–۸ به جای $\binom{n-۱}{r-۱}$ داریم:

$$\binom{n-۱}{r-۱}=\binom{n-۱-۱}{r-۱}+\binom{n-۱-۱}{r-۱-۱}$$

Payame Noor University

پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} &= \binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}\\ &= \binom{n-1}{r}+\binom{n-1-1}{r-1}+\binom{n-1-1}{r-1-1}\\ &= \binom{n-1}{r-1+1}+\binom{n-1-1}{r-1}+\binom{n-1-1}{r-1-1}+\binom{n-1-1-1}{r-1-1-1}+\cdots\\ &= \sum_{i=1}^{r+1}\binom{n-i}{r-i+1}.\end{aligned}$$

۲-۲۱. طبق قضیه‌ی ۲-۹ داریم

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}=\binom{m+n}{k}.$$

حال اگر $m=n$ و $k=n$، خواهیم داشت

$$\binom{2n}{n}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{r}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^{2}.$$

۲-۲۲.

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-1}y^{r}=(x+1)^{n}\xrightarrow{x=1}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}y^{r}=(1+y)^{n}.$$

از طرفین نسبت به y مشتق می‌گیریم، خواهیم داشت

$$\sum_{r=0}^{n}r\binom{n}{r}y^{r-1}=n(1+y)^{n-1},$$

حال اگر قرار دهیم $y=1$، خواهیم داشت

$$\sum_{r=0}^{n}r\binom{n}{r}=n2^{n-1}.$$

۲-۲۳. الف)

$$\binom{\frac{1}{2}}{4}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}=\frac{-15}{384}.$$

Payam Noor University

ب)

$$\binom{-۳}{۳} = \frac{-۳(-۳-۱)(-۳-۲)}{۳!} = \frac{-۶۰}{۶} = -۱۰.$$

۲–۲۴. الف)

$$\binom{-۱}{r} = \frac{-۱(-۲)(-۳)\cdots(-۱-(r-۱))}{r!} = \frac{(-۱)^r(۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times r)}{r!} = (-۱)^r.$$

ب)

$$\binom{-n}{r} = \frac{-n(-n-۱)(-n-۲)\cdots(-n-r+۱))}{r!}$$
$$= \frac{(-۱)^r(n(n+۱)\cdots(n+r-۱))}{r!}$$
$$= \frac{(-۱)^r}{r!}\frac{(n+r-۱)!}{(n-۱)!}$$
$$= (-۱)^r\binom{n+r-۱}{r}.$$

۲–۲۵. $\frac{۸!}{۲!۳!۳!} = ۲۸۰$

۲–۲۶. $۲^۳ \times ۳^۲ \times ۴^۳ \times \frac{۹!}{۳!\times ۲!\times ۳!\times ۱!} = ۴^۳ \times ۹!$

حل تمرین‌های فصل سوم

۳-۱. $S=\{HH,HT,TH,TT\}$.

۳-۲. $S=\{۲۴۵,۲۴۶,۲۴۷,۲۴۸,۲۴۹,۲۵۰,۲۵۱,۲۵۲,۲۵۳,۲۵۴,۲۵۵\}$، بسته به‌وسیله‌ی اندازه‌گیری می‌توان فضای نمونه‌ای آن را به صورت $S=[۲۴۵,۲۵۵]$ اعلام کرد.

۳-۳. $S=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

۳-٤. $S=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

۳-۵. $S=$ {تریلی، کامیون، اتوبوس، سواری}

۳-٦.

$$S=\{(H,۱),(H,۲),(H,۳),(H,۴),(H,۵),(H,۶),$$
$$(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)\}.$$

۳-۷. الف) $A\bigcup B=\{x|۲<x<۱۰\}$، ب) $A\bigcap B=\{x|۵<x<۸\}$،
ج) $A\bigcap B'=\{x|۳<x<۵\}$، د) $A'\bigcup B=\{x|۰<x<۳,\ ۵<x<۱۰\}$

۳-۸.

$\#(B)=$ تعداد جامعه شناس $=۱۱۵$

$\#(A)=$ تعداد آماردان $=۱۳۸$

$\#(A\bigcap B)=$ تعداد آمار و جامعه شناس $=۹۱$

$$\#(A\bigcup B)=\#(A)+\#(B)-\#(AB)=۱۳۸+۱۱۵-۹۱=۱۶۲.$$

تعدادی که در هیچ‌کدام ثبت‌نام نکرده‌اند

$$\#(A\bigcup B)'=۲۰۰-۱۶۲=۳۸.$$

۳-۹. الف) خودروهایی که به تعمیر موتور، جعبه‌دنده و تعویض تایر نیاز دارند.

ب) خودروهایی که به تایرهای نو موتور و جعبه‌دنده نیاز دارند ولی نیازی به تعمیر کامل موتور ندارند.

ج) خودروهایی که فقط به تعمیر کامل موتور نیاز دارند.

د) خودروهایی که به تعمیر کامل موتور و تایرهای نو نیاز دارند.

Payam Noor University

ت) خودروهایی که فقط به تعمیر کامل موتور و جعبه‌دنده نیاز دارند یا خودروهایی که فقط به تعمیر جعبه دنده نیاز دارند.

و) خودروهایی که فقط به تعمیر جعبه‌دنده یا فقط به تعویض تایر و یا فقط به تعمیر جعبه‌دنده و تعویض تایر نیاز دارند.

۳-۱۰. الف) ناحیه‌ی ۵ ب) ناحیه‌ی ۲

ج) ناحیه‌های ۶، ۵، ۳ د) ناحیه‌ی ۶

۳-۱۱.

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=0/2+0/6-P(A\bigcap B)=0/7,$$
$$P(A\bigcap B)=0/1,$$
$$P(A'\bigcap B)=P(B)-P(A\bigcap B)=0/6-0/1=0/5,$$
$$P(A'\bigcap B')=1-P(A\bigcup B)=1-0/7=0/3,$$
$$P(A'\bigcup B')=1-P(A\bigcap B)=1-0/1=0/9.$$

۳-۱۲.

$$P(A\Delta B)=(A\bigcap B')\bigcup(B\bigcap A')=P(A-B)+P(B-A).$$

۳-۱۳. الف)

$$P(A\bigcap B);\quad i=2 \quad ,P(A\Delta B);\quad i=1 \quad ,1-P(A\bigcup B);\quad i=0$$

ب)

$$1-P(A\Delta B);\quad i=2 \qquad P(A\bigcup B);\quad i=1 \qquad 1-P(A\bigcup B);\quad i=0$$

ج)

$$1-P(A\bigcup B)+P(A\Delta B);\quad i=1 \qquad ,1-P(A\bigcup B);\quad i=0$$
$$P(A\bigcap B)+P(A\Delta B)+1-P(A\bigcup B);\quad i=2$$

۳-۱۴.

$$A=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24\},\quad B=\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$$
$$\#(A\bigcap B)=4$$
$$P(A\bigcap B)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}.$$

Payam Noor University

۳-۱۵. الف)

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B).$$

پس

$$P(A\bigcap B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcup B)\le P(A)+P(B),$$

یا

$$P(A\bigcap B)\le P(A)+P(B).$$

ب)

$$\begin{aligned}
A\bigcup B &\subseteq S\\
P(S)\ge P(A\bigcup B) &= P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)\\
1 &\ge P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)\\
P(A\bigcap B) &\ge P(A)+P(B)-1.
\end{aligned}$$

۳-۱۶. برای $n=1$

$$P(E_1)\le P(E_2).$$

فرض می‌کنیم برای $n=k$ برقرار است پس برای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i\cup E_{k+1}\right)\\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)+P(E_{k+1})-P\left(E_{k+1}\bigcap\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)\\
&\le \sum_{i=1}^{k}P(E_i)+P(E_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}P(E_i).
\end{aligned}$$

۳-۱۷. $\dfrac{P(A)}{1-P(A)}=\dfrac{a}{b}$ **پس**

$$\begin{aligned}
bP(A) &= a-P(A)\\
(a+b)P(A) &= a\\
P=P(A) &= \frac{a}{a+b}
\end{aligned}$$

۳-۱۸. الف) چون هیچ‌گاه مقدار احتمال منفی نیست.

ب) چون مجموع احتمال‌ها روی کلیه‌ی موارد از یک بیشتر است.

$$۰/۱۲+۰/۲۵+۰/۳۶+۰/۱۴+۰/۰۹+۰/۰۷=۱/۰۳>۱$$

ج) $۰/۰۸+۰/۲۱+۰/۲۹+۰/۴۰=۰/۹۸\neq ۱$

۳-۱۹.

الف) $۰/۱۷+۰/۱۲=۰/۲۹$ **ب)** $۰/۲۹+۰/۳۴+۰/۱۷=۰/۸$

ج) $۰/۳۴+۰/۱۷+۰/۱۲=۰/۶۳$ **د)** $۰/۰۸+۰/۲۹+۰/۳۴=۰/۷۱$

۳-۲۰.

الف) $۰/۲۴+۰/۲۲=۰/۴۶$ **ب)** $۰/۱۵+۰/۰۳+۰/۲۲=۰/۴$

ج) $۰/۰۳+۰/۰۸=۰/۱۱$ **د)** $۰/۱۵+۰/۰۳+۰/۲۸+۰/۲۲=۰/۶۸$

۳-۲۱.

الف) $\frac{۱۰+۲۰}{۸۰}=\frac{۳۰}{۸۰}$ **ب)** $\frac{۴\times ۵}{۸۰}=\frac{۱}{۴}$

ج) $\frac{۲\times ۴}{۸۰}=\frac{۱}{۱۰}$ **د)** $\frac{۴+۲+۱+۱}{۸۰}=\frac{۱}{۱۰}$

ه) $\frac{۸+۱۴}{۴۰}=\frac{۲۲}{۴۰}=\frac{۱۱}{۲۰}$

۳-۲۲. اگر غیبت دستیار مسن را با A و جوان را با B نشان دهیم، داریم:

الف) $P(A'\bigcup B')=P(A')+P(B')-P(A'\bigcap B')=۰/۹۲+۰/۹۵-۰/۹۸=۰/۹۵$

ب) $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=۰/۰۸+۰/۰۵-۰/۰۲=۰/۱۱$

ج) $P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲P(A\bigcap B)=۰/۰۸+۰/۰۵-۲\times ۰/۰۲=۰/۰۹$

۳-۲۳. الف) برای هر A، $P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}\geq ۰$،

ب) $P(B|B)=\frac{P(B\bigcap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=۱$،

Payam Noor University

ج)

$$\frac{P((A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_۱ \cap B) \cup (A_۲ \cap B) \cup \cdots)}{P(B)}$$
$$= \frac{P(A_۱ \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_۲ \cap B)}{P(B)} + \cdots$$
$$= P(A_۱|B) + P(A_۲|B) + \cdots.$$

۳-۲٤. الف) $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، $A = \{۱,۲,۳\}$، $A' = \{۴,۵,۶\}$، $B = \{۳,۴,۵\}$

$$P(B \mid A) + P(B \mid A') = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۳}{۶}} + \frac{\frac{۲}{۶}}{\frac{۳}{۶}} = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} = ۱.$$

ب) بدون تغییر دادن A و S، قرار دهید $B = \{۳\}$ در این صورت

$$P(B \mid A) + P(B \mid A') = \frac{۱}{۳} + ۰ = \frac{۱}{۳}.$$

۳-۲۵.

$$P(A)P(A \mid B)P(C|A \cap B) = P(A)\frac{P(A \cap B)}{P(A)}\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)}$$
$$= P(A \cap B \cap C).$$

۳-۲٦.

$$\frac{P(B \cap C)}{P(B)} = P(C \mid B) = P(C \mid A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)}$$
$$\frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)}$$
$$P(A \mid B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \mid B).$$

۳-۲۷.

الف) $P(G) = \frac{۱۸ + ۳۶}{۹۰} = \frac{۵۴}{۹۰}$ **ب)** $P(T') = \frac{۳۶ + ۲۷}{۹۰} = \frac{۶۳}{۹۰}$

ج) $P(G \cap T) = \frac{۱۸}{۹۰}$ **د)** $P(G' \cap T') = \frac{۲۷}{۹۰}$

ه) $P(T|G) = \frac{۱۸}{۵۴}$ **و)** $P(G'|T') = \frac{۲۷}{۶۳}$

۳–۲۸.

$$P(T\mid G)\frac{P(T\cap G)}{P(G)}=\frac{\frac{۱۸}{۹۰}}{\frac{۵۴}{۹۰}}=\frac{۱۸}{۵۴},\quad P(G'\mid T')=\frac{P(T'\cap G')}{P(T')}=\frac{\frac{۲۷}{۹۰}}{\frac{۶۳}{۹۰}}=\frac{۲۷}{۶۳}$$

۳–۲۹. اگر $P(B|A)=P(B)$، آنگاه داریم:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)\quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)=P(A)P(B)\qquad (۱)$$

حال

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\xrightarrow{(۱)}\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A).$$

۳–۳۱. الف)

P (از چهارتا انتخاب سه تا سفید باشد | مهره دوّم و سوّم سفید)

$=P$ (از دو مهره اوّل یکی سفید و یکی سیاه باشد|مهره دوّم و سوّم سفید باشد)

$=\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}.$

ب)

P (از چهارتا انتخاب دو تا سفید باشد |اوّلی سفید باشد) $=P$ (اوّلی سفید باشد) $=\frac{۸}{۱۲}.$

۳–۳۲.

P (از سه جعبه دو تا سفید انتخاب شده باشد |انتخاب از جعبه اوّل سفید) =

$=P($ انتخاب ازجعبه‌دوّم‌سفید وانتخاب‌ازجعبه سوّم‌سیاه |انتخاب‌ازجعبه‌اوّل‌سفید)

$+P($ انتخاب‌ازجعبه‌دوم‌سیاه وانتخاب ازجعبه سوم سفید |انتخاب از جعبه اول‌سفید)

$=\frac{۳}{۸}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۴}{۶}+\frac{۳}{۸}\times\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۲}{۶}.$

توجه داشته باشید که انتخاب جعبه‌ها از هم مستقل هستند.

۳–۳۳. اگر A از B مستقل باشد، داریم $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$ یا $P(A|B)=P(A)$.

الف)

$$\begin{aligned}P(A'|B) &= \frac{P(A'\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B-A)}{P(B)}\\ &= \frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\ &= 1 - \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = 1 - P(A) = P(A').\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}P(A'|B') &= \frac{P(A'\cap B')}{P(B')} = \frac{1-P(A\cup B)}{P(B')} = \frac{1-P(A)-P(B)-P(A\cap B)}{P(B')}\\ &= \frac{1-P(A)-P(B)-P(A)P(B)}{P(B')} = \frac{P(B')-P(A)(1-P(B))}{P(B')}\\ &= \frac{P(B')(1-P(A))}{P(B')} = 1 - P(A) = P(A').\end{aligned}$$

۳-۳۵. مطابق شکل ۳-٤ داریم: $P(A)=0/6$، $P(B)=0/8$ و $P(C)=0/5$. پس

$$P(A\cap B\cap C) = 0/24 = 0/6\times 0/8\times 0/5 = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(A\cap B) = 0/48 = 0/6\times 0/8 = P(A)P(B)$$

A از B مستقل است،

$$P(A\cap C) = 0/3 = 0/6\times 0/5 = P(A)P(C)$$

A از C مستقل است، و

$$P(B\cap C) = 0/38 \neq 0/8\times 0/6 = P(B)P(C) = 0/48$$

B از C مستقل نیست.

ولی در کل هر سه دو به دو مستقل نیستند.

۳-۳۶. در حل ۳-۳۵ مشاهده می‌کنیم که A از B مستقل است ولی Bاز C مستقل نیست.

۳-۳۷. در تمرین ۳-۳۵ نشان داده شد که A از B و A از C مستقل است امّا

$$P(A\cap(B\cup C)) = 0/552 \neq 0/6\times 0/92 = P(A)P(B\cup C).$$

Payam Noor University

پس A از $B\cup C$ مستقل نیستند.

۳-۳۸. وقتی که سه پیشامد A، B و C مستقل هستند پس

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \quad (۱)$$

$$P(A\cap C)=P(A)P(C) \quad (۲)$$

$$P(B\cap C)=P(B)P(C) \quad (۳)$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C) \quad (٤)$$

الف)

$$\begin{aligned} P(A\cap(B\cap C)) &= P(A\cap B\cap C) \\ &\xrightarrow{(۴)} = P(A)P(B)P(C) \\ &\xrightarrow{(۳)} = P(B)P(B\cap C). \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} P(A\cap(B\cup C)) &= P((A\cap B)\cup(A\cap C)) \\ &= P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C) \\ &= P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C) \\ &= P(A)(P(B)+P(C)-P(B\cap C) \\ &= P(A)P(B\cup C). \end{aligned}$$

۳-۳۹. تعداد شرط هایی که دو پیشامد در آن شرکت دارند $\binom{k}{۲}$

تعداد شرط هایی که سه پیشامد در آن شرکت دارند $\binom{k}{۳}$

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$

تعداد شرط هایی که k پیشامد در آن شرکت دارند $\binom{k}{k}$

پس جواب $M=\sum_{i=۲}^{k}\binom{k}{i}$ است که حاصل آن برابر با

$$\sum_{i=۰}^{k}\binom{k}{i}=M+۱+\binom{k}{i}\Rightarrow ۲^{k}-۱-k=M.$$

۳-۴۰. $P(\{H\})=۰/۵۲$ ، $P(\{T\})=۰/۴۸$

الف) $P(\{HHH\})=۰/۵۲\times ۰/۵۲\times ۰/۵۲=۰/۱۴$

ب) $P(\{TTT\})=۰/۴۸\times ۰/۴۸\times ۰/۵۲=۰/۱۲۰$

۳-۴۱. $\dfrac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\dfrac{۵\times ۴\times ۳}{۱۰\times ۹\times ۸}$

۳-۴۲. $\dfrac{۶}{۱۵}\times\dfrac{۵}{۱۴}\times\dfrac{۴}{۱۳}\times\dfrac{۳}{۱۲}=\dfrac{۳۶۰}{۳۲۷۶۰}=\dfrac{۱}{۹۱}$

۳-۴۳. الف) $۰/۹\times ۰/۹\times ۰/۹=۰/۷۲۹$

ب) $۰/۴\times ۰/۱\times ۰/۴+۰/۴\times ۰/۶\times ۰/۴$

پ. $۰/۶\times ۰/۶\times ۰/۴$

P (پیشامد مطلوب) $= ۰/۴\times ۰/۱\times ۰/۴+۰/۶\times ۰/۶\times ۰/۴=۰/۰۱۶+۰/۱۴۴=۰/۱۶.$

۳-۴۴. پیشامد معیوب بودن= E و $A_۱$، $A_۲$، و $A_۳$ به ترتیب خطوط تولیدی ۱ و ۲ و ۳ است.

$$P(A_۱)=۰/۵,\qquad P(A_۲)=۰/۳,\qquad P(A_۳)=۰/۲,$$

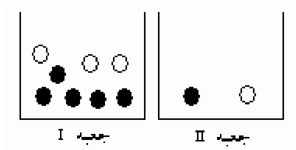
$$P(E\mid A_۱)=۰/۰۲,\qquad P(E\mid A_۲)=۰/۰۳,\qquad P(E\mid A_۳)=۰/۰۴,$$

$$P(E)=\sum_{i=۱}^{۳}P(A_i)P(E\mid A_i)=۰/۵\times ۰/۰۲+۰/۳\times ۰/۰۳+۰/۲\times ۰/۰۴=۰/۰۲۷.$$

۳-۴۵.

$$P(E\mid A_۲)=\frac{P(A_۲)P(E\mid A_۲)}{P(E)}=\frac{۰/۳\times ۰/۰۳}{۰/۰۲۷}=\frac{۰/۰۰۹}{۰/۰۲۷}=\frac{۱}{۳}.$$

۳-۴۶.



Payam Noor University

$A:$ انتخاب مهره‌ی سفید از جعبه I $\quad P(A)=\frac{۳}{۸}$

$A':$ انتخاب مهره‌ی سفید از جعبه I $\quad P(A')=\frac{۳}{۸}$

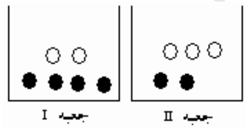
$B:$ انتخاب مهره‌ی سفید از جعبه I $\quad P(B\mid A)=\frac{۳}{۸}$

$B':$ انتخاب مهره‌ی سفید از جعبه I $\quad P(B\mid A')=\frac{۳}{۸}$

الف) $P(B)=P(A)(B\mid A)+P(A')P(B\mid A')=\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۳}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱۱}{۲۴}$

ب) $P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۳}}{\frac{۱۱}{۲۴}}=\frac{۶}{۱۱}$

۳–۴۷. الف)



$A_۱$: پیشامد انتخاب جعبه‌ی I $\qquad P(A_۱)=\frac{۱}{۲}$

$A_۲$: پیشامد انتخاب جعبه‌ی II $\qquad P(A_۲)=\frac{۱}{۲}$

B: پیشامد انتخاب دو مهره‌ی سفید

احتمال انتخاب هر جعبه $\frac{۱}{۲}$ است پس

$$P(B)=P(A_۱).P(B\mid A_۱)+P(A_۲)P(B\mid A_۲)$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}=\frac{۲}{۶۰}+\frac{۶}{۴۰}=\frac{۲۲}{۱۲۰}.$$

ب)

$$P(A_۲\mid B)=\frac{P(A_۲)P(B\mid A_۲)}{P(B)}=\frac{\frac{۶}{۴۰}}{\frac{۲۲}{۱۲۰}}=\frac{۱۸}{۲۲}.$$

Payam Noor University

حل تمرین‌های فصل چهارم

۱-٤. برای اینکه این تابع یک تابع احتمال باشد باید $\circ \le f(x) \le ۱$ که در آن صورت حتماً باید مقدار $c \ge \circ$ و نیز از طرفی $\sum_x f(x) = ۱$ یا

$$\sum_x f(x) = c(۱)^۲ + c(۲) \ + c(۳)^۲ = ۱۴c$$

و که نتیجه می‌دهد که باید $c = \frac{۱}{۱۴}$ و $f(x)$ یک تابع احتمال خواهد بود.

۲-٤. شرط اوّل $f(x) \ge \circ$ به ازای $c \ge \circ$ برقرار است و برای شرط دوّم

$$\sum_x f(x) = \sum_x c(\frac{۱}{۶})^{x-۱} = c\sum_x (\frac{۱}{۶})^{x-۱} = c\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۶}} = c\frac{۱}{\frac{۵}{۶}} = \frac{۶}{۵}c$$

به ازای $c = \frac{۵}{۶}$ تابع $f(x)$ تابع احتمال خواهد بود.

۳-٤. الف) فضای نمونه‌ی آزمایش عبارت است از

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}.$$

با توجه به‌تعریف X، متغیر X مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را می‌گیرد و تابع احتمال آن به صورت زیر است.

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

ب) فضای نمونه‌ای ۳۶ عضو دارد و طبق تعریف متغیر تصادفی X مقادیری که می‌گیرد عبارتند از ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و تابع احتمال آن به صورت زیر است:

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۱۰}{۳۶}$	$\frac{۸}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$

ج) مقادیری که X می‌گیرد عبارتند از ۱، ۲، ... و تابع احتمال آن عبارت است از

x	۱	۲	۳	...	x
$f(x)$	$(\frac{۱}{۲})$	$(\frac{۱}{۲})^۲$	$(\frac{۱}{۲})^۳$	...	$(\frac{۱}{۲})^x$

به طور کلی

Payam Noor University

$$f(x) = (\frac{۱}{۲})^x, \qquad x = ۱,۲,....$$

د) شبیه به حالت ج است با این تفاوت که احتمال موفقیت (ظاهر شدن دو خال ۶) برابر با $\frac{۱}{۳۶}$ است.

$$f(x) = (\frac{۱}{۳۶})(\frac{۳۵}{۳۶})^{x-۱}, \qquad x = ۱,۲,....$$

۴-۴. الف) مقادیری که X می‌گیرد ۲، ۳، ۴، ۵ هستند و تابع احتمال آن به صورت

x	۲	۳	۴	۵
$f(x)$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۶}{۲۰}$	$\frac{۸}{۲۰}$

است. به عنوان مثال برای $x = ۲$، یک وضعیت آن است که مهره‌ی اوّل ۲ و مهره‌ی دوم، یک مشاهده شود که احتمال این پیشامد $\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۵}$ است ولی می‌تواند مهره‌ی اوّل ۱ و دومی ۲ باشد که در کل احتمال $x = ۲$ برابر با $\frac{۲}{۲۰} = ۲(\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۵})$ است.

ب)

x	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	$\frac{۸}{۲۰}$	$\frac{۶}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$

ج)

x	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$f(x)$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$

۴-۵.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$	$\frac{۱۲}{۴۲}$	$\frac{۱۰}{۴۲}$	$\frac{۸}{۴۲}$	$\frac{۶}{۴۲}$	$\frac{۴}{۴۲}$	$\frac{۲}{۴۲}$

۴-۶.

z	۰	۱	۲	۳	۴
$f(z)$	$\frac{۳}{۹۰}$	$\frac{۲۱}{۹۰}$	$\frac{۴۲}{۹۰}$	$\frac{۲۱}{۹۰}$	$\frac{۳}{۹۰}$

x	۰	۱	۲
$f(x)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۴}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

y	۰	۱	۲
$f(y)$	$\frac{۳}{۱۵}$	$\frac{۹}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$

۴-۷. با جایگذاری

y	۰	۱	۲
$f(y)$	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۶}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$

x	۰	۱	۲
$f(x)$	$\frac{۹}{۲۵}$	$\frac{۱۲}{۲۵}$	$\frac{۴}{۲۵}$

۴-۸. $۱ = c\sum_{x=۱}^{\infty} \frac{\theta^x}{x}$

Payam Noor University

۹-٤. $S_x = \{r_1, r_2, \ldots\}$

۱۰-٤. الف) $c = \frac{1}{\sum_{x=1}^{N} 2^x} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}$

ب)
$$F(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{[x]} 2^{-i-1} & 1 \le x < N \\ 1 & x \ge N \end{cases}$$

۱۱-٤.

$$P(X \ge 2) = 0/3, \qquad P(0 \le X \le 2) = 0/6$$
$$P(|X-1| \le 1) = P(-1 \le X-1 \le 1) = P(0 \le X \le 2) = 0/9.$$

۱۲-٤. اگر این چهار عدد را با $X_{(1)}$، $X_{(2)}$، $X_{(3)}$، $X_{(4)}$ نشان دهیم به طوری که $X_{(1)} < X_{(2)} < X_{(3)} < X_{(4)}$، آنگاه حالت‌های انتخاب ۴ از بین ۹ عدد برابر $\binom{9}{4} = 126$ که کل حالت‌های ممکن است. از طرفی حالت‌های مساعد آن‌هایی هستند که برای آنها $X_{(2)} = 4$ و یا $X_{(1)} < 4 < X_{(3)} < X_{(4)}$ برای $X_{(1)}$ فقط ۳ حالت (یا عدد) $1, 2, 3$ ممکن است و برای $X_{(3)}$ و $X_{(4)}$ اگر $X_{(3)} = 5$، مقدار $X_{(4)}$ چهار حالت مساعد خواهد داشت. وقتی مقدار $X_{(3)} = 6$، $X_{(4)}$ فقط ۳ حالت مساعد خواهد داشت و وقتی که $X_{(3)} = 7$، $X_{(4)}$ فقط دو حالت مساعد دارد .وقتی که $X_{(3)} = 8$، $X_{(4)}$ فقط یک حالت مساعد خواهد داشت.

در کل

$X_{(1)}$ حالت‌های مساعد = ۳

$X_{(3)}$ و $X_{(2)}$ حالت‌های مساعد= $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

تعداد حالت‌های مساعد $3 \times 10 = 30$

پس احتمال مورد نظر $\frac{30}{126}$ است.

۱۳-٤. B: پیشامد مشاهده‌ی مهره‌ی سفید

$$P(X=۳\mid B)=\frac{P(X=۳).P(B\mid X=۳)}{P(B)}$$

امّا

$$P(B)=P(X=۲)P(B\mid X=۲)+P(X=۳)P(B\mid X=۳)$$
$$=\frac{۱}{۳}(\frac{۲}{۵})+\frac{۲}{۳}(\frac{۳}{۵})=\frac{۸}{۱۵}$$

پس

$$\mathrm{P(X=۳|B)}=\frac{\frac{۳}{۱۵}\times\frac{۸}{۱۸}}{\frac{۸}{۱۵}}=\frac{۳}{۱۸}.$$

۴-۱۴. الف)

x	۰	۱	۲/۵	۴	۵
$f(x)$	$\frac{۲}{۱۴}$	$\frac{۴}{۱۴}$	$\frac{۴}{۱۴}$	$\frac{۱}{۱۴}$	$\frac{۳}{۱۴}$

$$P(۱\le X<۲/۵)=\frac{۴}{۱۴}$$

ج) $P(۰<X\le ۲/۵)=\frac{۱۰}{۱۴}$

د) $P(۰<X<۲/۵)=\frac{۴}{۱۴}$

ه) $P(۱\le X\le ۲/۵)=\frac{۸}{۱۴}$

۴- ۱۵. دو شرط توزیع احتمال

الف) $۰\le f(x)\le ۱$ که برقرار است و ب می‌بایست $\sum_x f(x)=۱$،

$$\sum_x f(x)=\sum_{x=۱}^{k}\frac{۲x}{k(k+۱)}=\frac{۲}{k(k+۱)}\sum_{x=۱}^{k}x=\frac{۲}{k(k+۱)}\times\frac{k(k+۱)}{۲}=۱.$$

۴-۱۶.

$$\sum_{x=۱}^{\infty}f(x)=\sum_{x=۱}^{\infty}\frac{c}{x}=c\sum_{x=۱}^{\infty}\frac{۱}{x}$$

Payam Noor University

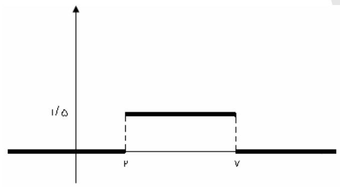
امّا $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x}$ یک سری واگراست. پس مقدار cهایی که از رابطه $\sum_{x} f(x)=1$ به‌دست می‌آید، وجود ندارد.

۴-۱۸. الف) $F(4)=1/2>1$ که با شرط (الف) تناقض دارد.

ب) $x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1)\le F(x_2)$

ج) کلیه‌ی ویژگی‌های تابع توزیع احتمال را دارا است.

۴-۱۹. الف)



و

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{2}^{7}\frac{1}{5}dx=\frac{1}{5}(7-2)=1$$

$$P(3<x<5)=\int_{3}^{5} f(x)dx=\int_{3}^{5}\frac{1}{5}dx=\frac{5-3}{5}=\frac{2}{5}.$$

۴-۲۰.

$$P(Y<3/2)=\int_{2}^{3/2}\frac{1}{8}(y+1)\,dy$$

$$=\left(\frac{1}{8}(\frac{y^2}{2}+y)\right]_{2}^{3/2}=\frac{1}{8}(8/32-4)=0/54.$$

$$P(2/9<Y<3/2)=P(0<Y<2)+P(2<Y<3/2)$$

$$=0+\int_{2}^{3/2}\frac{1}{8}(y+1)dy=0/54.$$

۴-۲۱. الف)

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4\frac{c}{\sqrt{x}}dx=c\int_0^4 (x)^{\frac{-1}{2}}dx=(2c\sqrt{x}]_0^4=4c=1 \quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{4}.$$

ب)

Payame Noor University

$$P(X>۱)=\int_{۱}^{۴}\frac{۱}{۴\sqrt{x}}dx=\frac{\sqrt{x}}{۲}\Big|_{۰}^{۴}=(۱-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

$$P(X<\frac{۱}{۴})=\int_{۰}^{\frac{۱}{۴}}\frac{۱}{۴\sqrt{x}}dx=\left(\frac{\sqrt{x}}{۲}\right]_{۰}^{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۴}.$$

۴-۲۲. با توجه به تغییر متغیر

$$u=-z^{۲}\Rightarrow du=-۲zdz$$

داریم

$$۱=\int_{۰}^{\pm\infty}f(z)dz=k\int_{۰}^{\pm\infty}ze^{-z^{۲}}dz=\left(-\frac{k}{۲}e^{-z^{۲}}\right]_{۰}^{\pm\infty}=\frac{k}{۲}(-e^{-\infty}+۱),$$

$$k=۲.$$

۴-۲۳.

$$P(X<\frac{۱}{۴})=\int_{۰}^{\frac{۱}{۴}}۶x(۱-x)dx=۶\int_{۰}^{\frac{۱}{۴}}(x-x^{۲})dx$$

$$=\left(۶(\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۳}}{۳})\right]_{۰}^{\frac{۱}{۴}}=۶\left[\frac{۱}{۳۲}-\frac{۱}{۳\times ۶۴}\right]=۶(\frac{۵}{۱۹۲})=\frac{۳۰}{۱۹۲}.$$

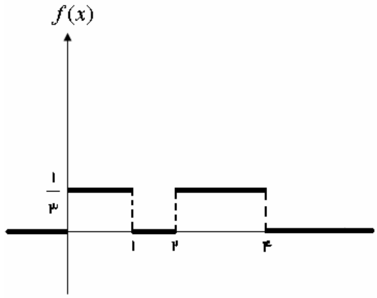
$$P(X>\frac{۱}{۲})=۱-P(X<\frac{۱}{۲})=\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}۶x(۱-x^{۲})dx$$

$$=\left(۶(\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۳}}{۳})\right]_{۰}^{\frac{۱}{۲}}=۶(\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۲۴})=۶(\frac{۱}{۱۲})=\frac{۱}{۲}.$$

۴-۲۴.

$$F(x)=\begin{cases}۰ & x<۰\\ \frac{x}{۳} & ۰\le x<۱\\ \frac{۱}{۳} & ۱\le x<۲\\ \frac{۱}{۳}+\frac{x-۲}{۳} & ۲\le x<۴\\ ۱ & ۴\le x\end{cases}$$

Payam Noor University



.۲۵-۴

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}+\int_1^x (2-t)dt & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$$

.۲۶-۴

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{4} & 0\le x<1\\ \frac{1}{4}+\frac{(x-1)}{2} & 1\le x<2\\ \frac{5}{4}+\frac{(3-x)^2}{2} & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$

.۲۷-۴

$$f(x)=\frac{1}{2}, \qquad 0\le x<1$$

$$P(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2})=\frac{1}{2}, \quad P(2<X<3)=0.$$

.۲۸-۴

$$f(y)=\frac{18}{y^3}\Rightarrow P(Y<5)=\frac{144}{225}, \quad P(Y>8)=\frac{495}{576}.$$

.۲۹-۴

$$P(X<2)=F(2)-F(0)=1-3e^{-2},$$
$$P(1<X<3)=F(3)-F(1)=2e^{-1}-4e^{-3},$$

Payam Noor University

$$P(X>۴)=۱-P(X<۴)=۱-P(۰<X<۴)=۱-(F(۴)-F(۰))$$
$$=۱-(۱-۵e^{-۴})=۵e^{-۴}.$$

۴-۳۰. الف)

$$P(-۶<X<-۲)=\int_{-۶}^{-۲}\frac{۱}{۲۲۸}(۳۶-x^{۲})dx=\left(\frac{۱}{۲۲۸}(۳۶x-\frac{x^{۳}}{۳})\right]_{-۶}^{-۲}$$
$$=\frac{۱}{۲۲۸}[۲۱۶-\frac{۲۱۶}{۳}+۷۲-\frac{۸}{۳}]=\frac{۶۴۰}{۶۸۴}.$$

ب)

$$P(۱<X<۶)=\int_{۱}^{۶}\frac{۱}{۲۲۸}(۳۶-x^{۲})dx=\left(\frac{۱}{۲۲۸}(۳۶x-\frac{x^{۳}}{۳})\right]_{۱}^{۶}$$
$$=\frac{۱}{۲۲۸}[۲۱۶-\frac{۲۱۶}{۳}+۳۶-\frac{۱}{۳}]=\frac{۵۳۹}{۶۸۴}.$$

ج)

$$P(-۳<X<-۱)=\int_{-۱}^{-۳}\frac{۱}{۲۲۸}(۳۶-x^{۲})dx=\left(\frac{۱}{۲۲۸}(۳۶x-\frac{x^{۳}}{۳})\right]_{-۱}^{۳}$$
$$=\frac{۱}{۲۲۸}[-۳۶+\frac{۱}{۳}+۱۰۸-\frac{۲۷}{۳}]=\frac{۱۹۰}{۶۴۸}.$$

د) $P(X=۵)=۰$

۴-۳۲. الف)

$$P(X<۱۸۰۰۰)=P(۰<X<۱۸۰۰۰)=\int_{۰}^{۱۸۰۰۰}\frac{۱}{۳۰}e^{-\frac{x}{۳۰}}dx=\left(e^{-\frac{x}{۳۰}}\right]_{۰}^{۱۸۰۰۰}=۱-e^{-۶۰۰}.$$

ب)

$$P(۲۷۰۰۰<X<۳۶۰۰۰)=\left(-e^{-\frac{x}{۳۰}}\right]_{۲۷۰۰۰}^{۳۶۰۰۰}=-e^{-۱۲۰۰}+e^{-۹۰۰}.$$

ج)

Payam Noor University

$$P(۴۸۰۰۰ < X < \infty) = ۱ - P(۰ < X < ۴۸۰۰۰) = \left[(۱ - e^{-\frac{x}{۳۰}}) \right]_{۰}^{۴۸۰۰۰}$$

$$= ۱ - (۱ - e^{-۱۶۰۰}) = e^{-۱۶۰۰}.$$

۴-۳۳. الف)

$$P(X > ۱۰) = ۱ - P(۵ < X < ۱۰) = ۱ - (F(۱۰) - F(۵))$$

$$= ۱ - [۱ - \frac{۲۵}{۱۰۰} - ۱ + \frac{۲۵}{۲۵}] = ۰/۲۵.$$

ب) $$P(۵ < X < ۸) = F(۸) - F(۵) = ۱ - \frac{۲۵}{۶۴} - ۱ + \frac{۲۵}{۲۵} = \frac{۳۹}{۶۴}.$$

ج) $$P(۱۲ < X < ۱۵) = F(۱۵) - F(۱۲) = ۱ - \frac{۲۵}{۲۲۵} - ۱ + \frac{۲۵}{۱۴۴} = \frac{۲۰۲۵}{۳۲۴۰۰}.$$

۴-۳۵.

$$F(۱,۲) = f(۱,۱) + f(۱,۲) = \frac{۵}{۵۱} + \frac{۷}{۵۱} = \frac{۱۲}{۵۱}.$$

۴-۳۶.

$$P(\frac{۱}{۲} < X < \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۸} < Y < \frac{۱}{۳}) = \int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۲}{۳}} \int_{\frac{۱}{۸}}^{\frac{۱}{۳}} ۲dydx = \frac{۱۰}{۱۴۴}.$$

۴-۳۸.

$$\int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{y} \frac{k}{y} dxdy = \int_{۰}^{۱} \left((\frac{x}{y} k) \right]_{۰}^{y} dy = \int_{۰}^{۱} kdy = (ky]_{۰}^{۱} = ۱ \Rightarrow k = ۱.$$

۴-۳۹.

$$f(x) = \sum_{y=۱}^{۳} f(x,y) = \frac{۳x + ۲}{۵۱} + \frac{۳x + ۴}{۵۱} + \frac{۳x + ۶}{۵۱} = \frac{۹x + ۱۲}{۵۱}, \qquad x = ۱,۲$$

$$f(y) = \sum_{x=۱}^{۲} f(x,y) = \frac{۲y + ۳}{۵۱} + \frac{۲y + ۶}{۵۱} = \frac{۴y + ۹}{۵۱}, \qquad y = ۱,۲$$

۴-۴۰.

$$f(x) = \int_{y} f(x,y)dy = \int_{۰}^{۱-x} ۲dy = ۲y \Big|_{۰}^{۱-x} = ۲(۱ - x), \qquad ۰ < x < ۱.$$

Payame Noor University

$$f(y)=\int_x f(x,y)dx=\int_0^{1-y} 2dx=2x\Big|_0^{1-y}=2(1-y), \qquad 0<y<1.$$

۴۱-۴.

x \ y	۱	۲	۳	$f(x)$
۱	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
۲	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{3}{9}$
۳	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
$f(y)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	۱

۴۲-۴.

$$P(a<X\le b\,,\,c<Y\le d)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c).$$

۴۳-۴. شرط استقلال این است که برای هر x و y

$$f(x,y)=f(x)f(y)$$

$$f(x,y)=\frac{3x+2y}{51} \quad , \quad f_X(x)=\frac{9x+12}{51} \quad , \quad f_Y(y)=\frac{9+4y}{51}.$$

حال مثال نقض

$$f(1,1)=\frac{5}{51} \quad , \quad f_X(1)=\frac{21}{51} \quad , \quad f_Y(1)=\frac{13}{51}$$

$$f_X(1)f_Y(1)=\frac{21}{51}\times\frac{13}{51}=\frac{273}{3601}\neq\frac{5}{51}=f(1,1)$$

نشان می‌دهد که استقلال وجود ندارد.

۴۴-۴. الف) شرط استقلال سه متغیره این است که برای هر x_1,x_2,x_3، $f(x_1,x_2,x_3)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)$. ابتدا توزیع های حاشیه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=\sum_{z=1}^{2}\sum_{y=1}^{3}\frac{(x+y)z}{63}$$

$$=\frac{x+1}{63}+\frac{x+2}{63}+\frac{x+3}{63}+\frac{2(x+1)}{63}+\frac{2(x+2)}{63}+\frac{2(x+3)}{63}=\frac{9x+18}{63}, \qquad x=1,2$$

Payame Noor University

$$f(y)=\sum_{z=1}^{2}\sum_{y=1}^{2}\frac{(x+y)z}{63}$$

$$=\frac{1+y}{63}+\frac{2+y}{63}+\frac{2(1+y)}{63}+\frac{2(2+y)}{63}=\frac{6y+9}{63},\qquad y=1,2,3$$

$$f(z)=\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{3}\frac{(x+y)z}{63}$$

$$=\frac{(1+1)z}{63}+\frac{3z}{63}+\frac{4z}{63}+\frac{3z}{63}+\frac{4z}{63}+\frac{5z}{63}=\frac{21z}{63},\qquad z=1,2$$

$$f(1,1,1)=\frac{2}{63}\neq f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)=\frac{8}{63}\times\frac{15}{63}\times\frac{21}{63}.$$

پس استقلال وجود ندارد.

ب)

$$P(X=2,Y+Z\le 3)=f(X=2,Y=1,Z=1)+f(X=2,Y=1,Z=2)$$
$$+f(X=2,Y=2,Z=1)$$
$$=\frac{3}{63}+\frac{6}{63}+\frac{4}{63}=\frac{13}{63}.$$

۴-۴۵.

$x \backslash y$	1	2	3	$f(x)$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{6}$
$f(y)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

$$f_X(1)f_Y(1)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\neq 0=f(1,1).$$

۴-۴۶.

$y\|x=1$	0	1	2
$f(y\|1)$	0	0	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

$$f(Y=2\,|\,X=1)=1$$

Payam Noor University

$y \mid x=2$	0	1	2
$f(y \mid 2)$	$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}$

$$f(Y=0 \mid X=2)=\frac{2}{3} \quad , \quad f(Y=2 \mid X=2)=\frac{1}{3}$$

$y \mid x=3$	0	1	2
$f(y \mid 3)$	0	$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$	0

$$f(Y=1 \mid X=3)=1$$

Payam Noor University

حل تمرین‌های فصل پنجم

۵-۱.

$$E(aX+b)=\sum_x (ax+b)f(x)=\sum_x ax\,f(x)+\sum_x bf(x)$$
$$=a\sum_x x\,f(x)+b\sum_x f(x)$$
$$=aE(X)+b.$$

۵-۲.

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(x)\Big)=\int_x \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(x)\Big)f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_x c_i g_i(x)f(x)\,dx$$
$$=\sum_{i=1}^{n} c_i\int_x g_i(x)f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} c_i E(g_i(X)).$$

۵-۳.

$$E(X)=\sum_x xf(x)=-1\times\frac{3}{7}+0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{1}{7}+3\times\frac{1}{7}=\frac{1}{7}.$$

۵-٤.

$$E(Y)=\int_2^4 \frac{1}{8}y(1+y)\,dy=\frac{1}{8}\left(y+\frac{y^2}{2}\right]_2^4=\frac{37}{12}.$$

۵-۵.

$$E(X)=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\Big(x^2-\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_1^2=1.$$

۵-٦. الف)

$$E(X)=0\times\frac{1}{125}+1\times\frac{12}{125}+2\times\frac{48}{125}+3\times\frac{64}{125}=\frac{300}{125}.$$
$$E(X^2)=0\times\frac{1}{125}+1\times\frac{12}{125}+4\times\frac{48}{125}+9\times\frac{64}{125}=\frac{780}{125}.$$

ب)

Payam Noor University

$$E(3X+2)^2 = E(9X^2+4+12X) = 9E(X^2)+4+12E(X)$$
$$= 9\times\frac{780}{125}+4+12\times\frac{300}{125}=\frac{11120}{125}.$$

۵–۷. الف)

$$E(X)=\frac{1}{\ln 3}\int_1^3 \frac{1}{x}x\,dx=\frac{1}{\ln 3}\int_1^3 dx=\frac{2}{\ln 3},$$
$$E(X^2)=\frac{1}{\ln 3}\int_1^3 \frac{1}{x}x^2\,dx=\frac{1}{\ln 3}\int_1^3 x\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{\ln 3}(\frac{x^2}{2})\right]_1^3=\frac{1}{\ln 3}(\frac{9}{2}-\frac{1}{2})=\frac{4}{\ln 3},$$
$$E(X^3)=\frac{1}{\ln 3}\int_1^3 \frac{1}{x}x^3\,dx=\frac{1}{\ln 3}\int_1^3 x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{\ln 3}(\frac{x^3}{3})\right)_1^3=\frac{1}{\ln 3}(9-\frac{1}{3})=\frac{26}{3\ln 3}.$$

ب)

$$E(X^3+2X^2-3X+1)=E(X^3)+2E(X^2)-3E(X)+1$$
$$=\frac{1}{\ln 3}(\frac{26}{3}+8-6)+1=\frac{32}{3\ln 3}+1.$$

۵–۸.

$$E(X)=\int_0^1 x\frac{x}{2}dx+\int_1^2\frac{x}{2}dx+\int_2^3 x\frac{3-x}{2}dx$$
$$=\left(\frac{x^3}{6}\right]_0^1+\left(\frac{x^2}{4}\right]_1^2+\left(\frac{1}{2}(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{6})\right]_2^3=\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+\frac{13}{6}=\frac{37}{12},$$
$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\frac{x}{2}dx+\int_1^2\frac{x^2}{2}dx+\int_2^3 x^2\frac{3-x}{2}dx$$
$$=\left(\frac{x^4}{8}\right]_0^1+\left(\frac{x^3}{6}\right]_1^2+\left(\frac{1}{2}(x^3-\frac{x^4}{4})\right]_2^3=\frac{1}{8}+\frac{7}{6}+\frac{11}{8}=\frac{8}{3},$$
$$E(g(X))=\frac{8}{3}-5(\frac{37}{12})+3=-\frac{39}{4}.$$

Payam Noor University

۹-۵. فرض کنید Ziها سود ناشی از پخت i تا کیک است.

فروش x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	
$f(x)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$E(Zi)$
$Z_۱$	-۴	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	$\frac{۴۶}{۶}$
$Z_۲$	-۸	$-۴+۱۰$	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	$\frac{۷۸}{۶}$
$Z_۳$	-۱۲	$-۸+۱۰$	$-۸+۲۰$	۳۰	۳۰	۳۰	$\frac{۹۶}{۶}$
$Z_۴$	-۱۶	$-۱۲+۱۰$	$-۸+۲۰$	$-۴+۳۰$	۴۰	۴۰	$\frac{۱۰۰}{۶}$
$Z_۵$	-۲۰	$-۱۶+۱۰$	$-۱۲+۲۰$	$-۸+۳۰$	$-۴+۴۰$	۵۰	$\frac{۹۰}{۶}$

با توجه به مقادیر امید ریاضی سودها، با پختن ۴ کیک به ماکسیمم انتظار سود خواهیم رسید.

۱۰-۵.

$$E(X)=\int_{-۱}^{۵} x\frac{۱}{۱۸}(x+۱)\,dx=\left(\frac{۱}{۱۸}(\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۲}{۲})\right]_{-۱}^{۵}=\frac{۱}{۱۸}(\frac{۱۲۵}{۳}+\frac{۲۵}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲})=۳.$$

۱۱-۵.

$$E(X^۲)=(-۱)^۲\times\frac{۳}{۷}+(۰)^۲\times\frac{۲}{۷}+(۱)^۲\times\frac{۱}{۷}+(۳)^۲\times\frac{۱}{۷}=\frac{۱۳}{۷},$$

$$\operatorname{var}(X)=E(X^۲)-(E(X))^۲=\frac{۱۳}{۷}-(\frac{۱}{۷})^۲=\frac{۹۰}{۴۹}.$$

۱۲-۵.

$$E(Y^۲)=\int_{۲}^{۴} y^۲\frac{۱}{۸}(y+۱)\,dy=\frac{۱}{۸}\int_{۲}^{۴}(y^۳+y^۲)\,dy=\left(\frac{۱}{۸}(\frac{y^۴}{۴}+\frac{y^۳}{۳})\right]_{۲}^{۴}$$

$$=\frac{۱}{۸}(۶۴+\frac{۶۴}{۳}-۴-\frac{۸}{۳})=\frac{۵۹}{۶},$$

$$\operatorname{var}(Y)=\frac{۵۹}{۶}-(۱)^۲=\frac{۵۳}{۶}.$$

۱۳-۵.

$$
\begin{aligned}
E(X^{۲}) &= \int_{۰}^{۱} x^{۲}\, x\, dx + \int_{۱}^{۲} x^{۲}(۲-x)\, dx \\
&= \int_{۰}^{۱} x^{۳}\, dx + \int_{۱}^{۲} (۲x^{۲}-x^{۳})\, dx \\
&= \left(\frac{x^{۴}}{۴}\right]_{۰}^{۱} + \left((\frac{۲x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۴}}{۴})\right]_{۱}^{۲} = \frac{۷}{۶},
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{۷}{۶} - (۱)^{۲} = \frac{۱}{۶},$$

$$\operatorname{var}(۶X) = ۳۶\operatorname{var}(X) = ۳۶ \times \frac{۱}{۶} = ۶.$$

.۱٤-۵

$$\operatorname{var}(X) = E(X^{۲}) - (E(X))^{۲} = \frac{۷۸۰}{۱۲۵} - (\frac{۳۰۰}{۱۲۵})^{۲} = \frac{۳۸۸۸}{۶۲۵},$$

$$\operatorname{var}(۲X) = ۴\operatorname{var}(X) = ۴ \times \frac{۳۸۸۸}{۶۲۵} = \frac{۱۵۵۵۲}{۶۲۵}.$$

.۱۵-۵

$$E(X) = \frac{۲}{\ln ۳}, \quad E(X^{۲}) = \frac{۴}{\ln ۳}, \quad \operatorname{var}(X) = \frac{۴}{\ln ۳} - (\frac{۲}{\ln ۳})^{۲} = \frac{۴\ln ۳ - ۴}{(\ln ۳)^{۲}},$$

$$\operatorname{var}(۱-X) = \operatorname{var}(X) = \frac{۴\ln ۳ - ۴}{(\ln ۳)^{۲}}.$$

.۱٦-۵

$$\mu = E(X) = \frac{۱}{۲}(-۲) + \frac{۱}{۲}(۲) = ۰, \quad \mu'_{۲} = E(X^{۲}) = \frac{۱}{۲}(-۲)^{۲} + \frac{۱}{۲}(۲)^{۲} = ۴,$$

$$\sigma^{۲} = \operatorname{var}(X) = \mu'_{۲} - \mu^{۲} = ۴ - (۰)^{۲} = ۴.$$

.۱۷-۵

$$\mu = E(X) = \int_{۰}^{۲} x\frac{x}{۲}\, dx = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲} x^{۲}\, dx = \left(\frac{x^{۳}}{۶}\right]_{۰}^{۲} = \frac{۸}{۶},$$

$$\mu'_{۲} = E(X^{۲}) = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲} x^{۳}\, dx = \left(\frac{۱}{۸}x^{۴}\right]_{۰}^{۲} = ۲,$$

$$\sigma^{۲} = \mu'_{۲} - \mu^{۲} = ۲ - (\frac{۸}{۶})^{۲} = \frac{۲}{۹}.$$

Payam Noor University

۵–۱۸.

$$E(Z)=E(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}(E(X)-\mu)=\frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)=0,$$

$$\operatorname{var}(Z)=\operatorname{var}(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma^2}\operatorname{var}(X-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}\operatorname{var}(X)=\frac{1}{\sigma^2}\times\sigma^2=1.$$

۵–۱۹.

$$\mu=E(X)=\int_1^\infty 2x\,x^{-3}\,dx=\int_1^\infty 2x^{-2}\,dx=\left(-2x^{-1}\right]_1^{+\infty}=2,$$

$$E(X^2)=\int_1^\infty 2x^2\,x^{-3}\,dx=\int_1^\infty 2x^{-1}\,dx=(2\ln x]_1^{+\infty}=+\infty.$$

پس واریانس آن نیز موجود نمی باشد.

۵–۲۰.

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=1}^{\infty}2\,(\frac{1}{3})^x e^{tx}=2\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{e^t}{3}\right)^x=2\frac{\frac{e^t}{3}}{1-\frac{e^t}{3}}=\frac{2e^t}{3-e^t},$$

$$M'_X(0)=\left(\frac{2e^t(3-e^t)+e^t(2e^t)}{(3-e^t)^2}\right]_{t=0}=\left(\frac{6e^t}{(3-e^t)^2}\right]_{t=0}=\frac{3}{2},$$

$$M''_X(0)=\left(\frac{6e^t(3-e^t)^2+2(3-e^t)e^t(6e^t)}{(3-e^t)^4}\right]_{t=0}=3.$$

۵–۲۱.

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_0^1 e^{tx}dx=\left(\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^1=\frac{e^t-e^0}{t}=\frac{e^t-1}{t},$$

$$M'_X(0)=\left(\frac{te^t-(e^t-1)}{t^2}\right]_{t=0}=\left(\frac{te^t-e^t+1}{t^2}\right]_{t=0}=\frac{1}{2}.$$

۵–۲۲.

$$\sigma^2=\operatorname{var}(X)=\sum_i(x_i-\mu)^2p(x_i),$$

برای x_iهایی که خارج بازه‌ی $[\mu-k\sigma\,,\,\mu+k\sigma]$ می‌افتند، داریم:

Payam Noor University

$$\sigma^2 \geq \sum_{i:|x_i-\mu|>k\sigma} (x_i-\mu)^2 P(x_i),$$

حال اگر تمام $|x_i-\mu|$ را برابر $k\sigma$ بگیریم باز نابرابری بالا برقرار است.

$$\sigma^2 \geq \sum_{i:|x_i-\mu|\geq k\sigma} P_i\, k^2\sigma^2 \quad \leftrightarrow \quad \sigma^2 \geq k^2\sigma^2 \sum_{i:|x_i-\mu|\geq k\sigma} P_i$$

امّا $\sum_{i:|x_i-\mu|\geq k\sigma} P_i = P(|X-\mu|\geq k\sigma)$. پس خواهیم داشت:

$$\sigma^2 \geq k^2\sigma^2\ P(|X-\mu|\geq k\sigma)$$

با حذف عامل σ^2 از طرفین

$$P(|X-\mu|\geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

یا

$$P(|X-\mu|\leq k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}.$$

۵–۲۳. چون X فقط مقادیر مثبت را اختیار می‌کند پس

$$E(X)=\int_0^\infty xf(x)\,dx=\int_0^a xf(x)\,dx+\int_a^\infty xf(x)\,dx \geq \int_a^\infty xf(x)\,dx.$$

حال اگر به جای متغیر X کوچکترین مقدار آن یعنی a را قرار دهیم باز هم نابرابری بالا برقرار است. پس

$$E(X) \geq \int_a^{+\infty} a\, f(x)\,dx = a\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = aP(X\geq a)$$

در نتیجه

$$P(X\geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

۵–۲۴. چون از نابرابری مارکف X فقط مقادیر مثبت را اختیار می‌کند پس با استفاده از تابع قدرمطلق برای مقادیر مثبت k داریم:

$$\begin{aligned} P(|X-\mu|\geq k\sigma) &= P(|X-\mu|^۲ \geq k^۲\sigma^۲) \\ &= P((X-\mu)^۲ \geq k^۲\sigma^۲) \\ &\leq \frac{E(X-\mu)^۲}{k^۲\sigma^۲} \\ &= \frac{\operatorname{var}(X)}{k^۲\sigma^۲} = \frac{۱}{k^۲}, \end{aligned}$$

یعنی

$$P(|X-\mu|\geq k\sigma) \leq \frac{۱}{k^۲},$$

یا

$$P(|X-\mu|\leq k\sigma) \geq ۱-\frac{۱}{k^۲}.$$

۵–۲۵. الف) $۱-\frac{۱}{k^۲} = ۰/۹۵ \quad \to \quad k^۲ = \frac{۱}{۰/۰۵} = ۲۰ \quad \to \quad k = \sqrt{۲۰}$

ب) $۱-\frac{۱}{k^۲} = ۰/۹۹ \quad \to \quad k^۲ = \frac{۱}{۰/۰۱} = ۱۰۰ \quad \to \quad k = ۱۰$

۵–۲۶. $P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{۱}{k^۲} = \frac{\sigma^۲}{c^۲}$

۵–۲۷. خیر. زیرا $M_X(۰) = \frac{۰}{۱-۰} = ۰ \neq ۱$ است.

۵–۲۸.

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{۲} e^{tx} e^{-|x|}\, dx \\ &= \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{۰} e^{tx}e^{+x}\, dx + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{+\infty} e^{tx}e^{-x}\, dx \\ &= \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{۰} e^{x(۱+t)}\, dx + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{+\infty} e^{-x(۱-t)}\, dx \\ &= \left(\frac{e^{x(۱+t)}}{۱+t}\right]_{-\infty}^{۰} - \left(\frac{e^{-x(۱-t)}}{۱-t}\right]_{۰}^{+\infty} = \frac{۱}{۱-t^۲}. \end{aligned}$$

Payam Noor University

۲۹-۵.

$$M_Z(t)=M_{\frac{۱}{۴}X-\frac{۳}{۴}}(t)=e^{-\frac{۳}{۴}t}M_X(\frac{t}{۴})=e^{-\frac{۳}{۴}t}\,e^{\frac{۳}{۴}t+\frac{۸t^۲}{۱۶}}=e^{\frac{t^۲}{۲}}.$$

$$E(Z)=\left.\frac{\partial M_Z(t)}{\partial t}\right|_{t=۰}=\left.t\,e^{\frac{t^۲}{۲}}\right|_{t=۰}=۰,$$

$$E(Z^۲)=\mathrm{var}(Z)=\left.\frac{\partial^۲ M_Z(t)}{\partial t^۲}\right|_{t=۰}=\left.e^{\frac{t^۲}{۲}}+t^۲e^{\frac{t^۲}{۲}}\right|_{t=۰}=۱.$$

۳۰-۵. الف)

$$۱-\frac{۱}{k^۲}=\frac{۳۵}{۳۶}=۰/۹۷,$$

$$k^۲=\frac{۱}{۰/۰۳}=۳۳/۳,$$

$$k=\sqrt{۳۳/۳}=۵/۷۷,$$

$$(۰/۲۶-۵/۷۷(۰/۰۰۵)\quad,\quad ۰/۲۶+۵/۷۷(۰/۰۰۵)).$$

ب)

$$۱-\frac{۱}{k^۲}=\frac{۱۴۳}{۱۴۴}=۰/۹۹,$$

$$k^۲=\frac{۱}{۰/۰۱}=۱۰۰,$$

$$k=۱۰,$$

$$(۰/۲۶-۱۰(۰/۰۰۵)\quad,\quad ۰/۲۶+۱۰(۰/۰۰۵)).$$

۳۱-۵.

x	-۳	-۱	۱	۳
$f(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$
$xf(x)$	$\frac{-۳}{۴}$	$\frac{-۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$

$$E(X)=\sum_x xf(x)=۰$$

y	-۵	-۱	۱	۵
$f(y)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$
$yf(y)$	$\frac{-۵}{۴}$	$\frac{-۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$

$$E(Y)=\sum_y yf(y)=۰$$

Payam Noor University

$$E(XY)=\sum_{x}\sum_{y}xyf(x,y)$$
$$=\frac{۱}{۴}(-۳)(-۵)+\frac{۱}{۴}(-۱)(-۱)+\frac{۱}{۴}(۱)(۱)+\frac{۱}{۴}(۳)(۵)=\frac{۳۲}{۴},$$
$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{۳۲}{۴}.$$

۵-۳۲. الف)

x	-۱	۰	۱
$f(x)$	$\frac{۳}{۱۲}$	$\frac{۲}{۱۲}$	$\frac{۷}{۱۲}$
$xf(x)$	$\frac{-۳}{۱۲}$	۰	$\frac{۷}{۱۲}$

$$E(X)=\sum_{x}xf(x)=\frac{۴}{۱۲}$$

y	۰	۱
$f(y)$	$\frac{۳}{۱۲}$	$\frac{۹}{۱۲}$
$yf(y)$	۰	$\frac{۹}{۱۲}$

$$E(Y)=\sum_{y}yf(y)=\frac{۹}{۱۲}$$

$$E(XY)=\sum_{x}\sum_{y}xyf(x,y)$$
$$=۰(-۱)(۰)+\frac{۱}{۴}(-۱)(۱)+\frac{۱}{۶}(۰)(۰)+۰(۰)(۱)+\frac{۱}{۱۲}(۱)(۰)+\frac{۱}{۲}(۱)(۱)=\frac{۱}{۴},$$
$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{۱}{۴}-\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۲}=۰.$$

ب) مثال نقض: $f(۰,۱)=۰\neq f_X(۰)f_Y(۱)=\frac{۲}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۲}$

۵-۳۳.

$$E(X_۱)=۴,\quad E(X_۲)=۹,\quad E(X_۳)=۳,$$
$$\operatorname{var}(X_۱)=۳,\quad \operatorname{var}(X_۲)=۷,\quad \operatorname{var}(X_۳)=۵.$$

الف)

$$E(Y)=۲E(X_۱)-۳E(X_۲)+۴E(X_۳)=۲(۴)-۳(۹)+۴(۳)=-۷,$$
$$\operatorname{var}(Y)=۴\operatorname{var}(X_۱)+۹\operatorname{var}(X_۲)+۱۶\operatorname{var}(X_۳)=۴(۳)+۹(۷)+۱۶(۳)=۱۲۳.$$

ب)

$$E(Z)=E(X_۱)+۲E(X_۲)-E(X_۳)=۴+۲(۹)-۳=۱۹,$$
$$\operatorname{var}(Z)=\operatorname{var}(X_۱)+۴\operatorname{var}(X_۲)+\operatorname{var}(X_۳)=۳+۲۸+۵=۳۶.$$

۵-۳۴.

Payam Noor University

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(X+Y) &= \mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)+۲\,\mathrm{cov}(X,Y),\\
\mathrm{var}(X-Y) &= \mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)-۲\,\mathrm{cov}(X,Y),\\
\mathrm{cov}(X+Y,X-Y) &= \mathrm{cov}(X,X)+\mathrm{cov}(X,-Y)+\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(Y,-Y)\\
&= \mathrm{var}(X)-\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(X,Y)-\mathrm{var}(Y)\\
&= \mathrm{var}(X)-\mathrm{var}(Y).
\end{aligned}
$$

۵-۳۵.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(Y_۱,Y_۲) &= -۲\,\mathrm{var}(X_۱)+۳\,\mathrm{cov}(X_۱,X_۲)+۴\,\mathrm{cov}(X_۱,X_۳)\\
&\quad -۴\,\mathrm{cov}(X_۱,X_۲)+۶\,\mathrm{var}(X_۲)+۸\,\mathrm{cov}(X_۲,X_۳)\\
&\quad -۶\,\mathrm{cov}(X_۱,X_۳)+۹\,\mathrm{cov}(X_۲,X_۳)+۱۲\,\mathrm{var}(X_۳)\\
&= -۲(۵)+۳(۳)+۴(-۲)-۴(۳)+۶(۴)+۸(۰)-۶(-۲)+۹(۰)+۱۲(۷)\\
&= ۹۴.
\end{aligned}
$$

۵-۳۶. الف) X = تعداد پیروزی‌ها

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{۲۴۰}{۶۲۴}$	$\frac{۳۰۸}{۶۲۴}$	$\frac{۷۲}{۶۲۴}$	$\frac{۴}{۶۲۴}$
$xf(x)$	۰	$\frac{۳۰۸}{۶۲۴}$	$\frac{۱۴۴}{۶۲۴}$	$\frac{۱۲}{۶۲۴}$
$x^۲f(x)$	۰	$\frac{۳۰۸}{۶۲۴}$	$\frac{۲۸۸}{۶۲۴}$	$\frac{۳۶}{۶۲۴}$

$$E(X)=\sum_x xf(x)=۰/۷۴,\quad E(X^۲)=\frac{۶۳۲}{۶۲۴},$$

$$\mathrm{var}(X)=\frac{۶۳۲}{۶۲۴}-(۰/۷۴)^۲=۰/۴۶,\quad \sigma=۰/۶۸$$

$$
\begin{aligned}
P(X=۰) &= \frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۴۸}{۵۲}=\frac{۲۴۰}{۶۲۴},\\
P(X=۱) &= \frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۴۸}{۵۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۴۸}{۵۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۴}{۵۲}=\frac{۳۰۸}{۶۲۴},\\
P(X=۲) &= \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۴۸}{۵۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۴}{۵۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۴}{۵۲}=\frac{۷۲}{۶۲۴},\\
P(X=۳) &= \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۴}{۵۲}=\frac{۴}{۶۲۴}.
\end{aligned}
$$

ب) به روش مشابه قسمت الف، قابل محاسبه است.

$$E(X)=\mu=۱/۹۱,\quad \sigma=۱/۰۵.$$

Payame Noor University

حل تمرین‌های فصل ششم

۶-۱. با استفاده از برابری‌های $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ و $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$، داریم

الف)

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{k} xf(x) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x = \frac{k+1}{2},$$

$$\mu_2' = E(X^2) = \sum_{x=1}^{k} x^2 f(x) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x^2 = \frac{(k+1)(2k+1)}{2},$$

$$\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2 = \frac{(k+1)(2k+1)}{6} - \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 = \frac{k^2-1}{12}.$$

۶-۲.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{k} \frac{e^{tx}}{k} = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} (e^t)^x$$

$$= \frac{e^t}{k}\sum_{x=1}^{k} (e^t)^{x-1} = \frac{e^t}{k} \times \frac{1-e^{kt}}{1-e^t} = \frac{e^t - e^{kt+1}}{k(1-e^t)},$$

$$M'_X(t) = \left(\frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} e^{tx}\right) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} xe^{tx},$$

$$M'_X(0) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} xe^{0} = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x = \frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}.$$

۶-۳. نمادگذاری $b(x;n,\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ را در نظر بگیرید، و توجه کنید که $\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x}$، آنگاه

$$\begin{aligned} b(n-x;n,1-\theta) &= \binom{n}{n-x}(1-\theta)^{n-x}(1-(1-\theta))^{n-(n-x)} \\ &= \binom{n}{n-x}(1-\theta)^{n-x}\theta^x = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \\ &= b(x;n,\theta). \end{aligned}$$

ب)

Payam Noor University

$$B(x;n,\theta)-B(x-1;n,\theta)=\sum_{k=0}^{x}b(k;n,\theta)-\sum_{k=0}^{x-1}b(k;n,\theta)$$
$$=b(x;n,\theta)+\sum_{k=0}^{x-1}b(k;n,\theta)-\sum_{k=0}^{x-1}b(k;n,\theta)$$
$$=b(x;n,\theta).$$

ج)

$$B(n-x;n,1-\theta)-B(n-x-1;n,1-\theta)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-x}b(k;n,1-\theta)-\sum_{k=0}^{n-x-1}b(k;n,1-\theta)$$
$$=b(n-x;n,1-\theta)+\sum_{k=0}^{n-x-1}(b(k;n,1-\theta)-b(k;n,1-\theta))$$
$$=b(n-x;n,1-\theta)$$
$$=b(x;n,\theta).$$

د)

$$B(x;n,\theta)+B(n-x-1;n,1-\theta)=\sum_{k=0}^{x}\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}+\sum_{k=x+1}^{n}\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-\theta)^{n-k}=\left(\theta+(1-\theta)^n\right)=1.$$

توجه داریم که

$$B(n-x-1;n,1-\theta)=\sum_{k=0}^{n-x-1}\binom{n}{k}(1-\theta)^k\theta^{n-k},$$

با تغییر متغیر $k=n-i$،

$$B(n-x-1;n,1-\theta)=\sum_{i=x+1}^{n}\binom{n}{n-i}(1-\theta)^{n-i}\theta^i$$
$$=\sum_{i=x+1}^{n}\binom{n}{i}\theta^i(1-\theta)^{n-i}.$$

۶–۴. X_iها مستقل و هم توزیع‌اند بنابراین واریانس‌ها و میانگین‌های آنها برابرند:

Payam Noor University

$$E(Y)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)=nE(X)=n\theta,$$
$$\operatorname{var}(Y)=\operatorname{var}(X_1)+\cdots+\operatorname{var}(X_n)=n\operatorname{var}(X)=n\theta(1-\theta).$$

٦-٥. از برابری $\binom{n}{x+1}=\frac{n-x}{x+1}\binom{n}{x}$ استفاده می‌کنیم و بنابراین

$$\begin{aligned}b(x+1;n,x)&=\binom{n}{x+1}\theta^{x+1}(1-\theta)^{n-x-1}\\&=\frac{n-x}{x+1}\times\frac{\theta}{1-\theta}\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}\\&=\frac{\theta(n-x)}{(x+1)(1-\theta)}b(x;n,\theta).\end{aligned}$$

$$b(0;7,0/25)=\binom{7}{0}(0/25)^{0}(0/75)^{7}=0/1335,$$
$$b(1;7,0/25)=\frac{0/7(0/25)}{0/75}b(0;7,0/25)=0/3115,$$
$$\vdots$$
$$b(7;7,0/25)=0/001.$$

٦-٦. در تمرین قبل فرض کنیم $\theta=\frac{1}{2}$ بنابراین $\frac{b(x+1;\,n,\frac{1}{2})}{b(x;\,n,\frac{1}{2})}=\frac{n-x}{x+1}$.

$$n-x>x+1\rightarrow x<\frac{n}{2}-\frac{1}{2}:\quad b(x+1;\,n,\tfrac{1}{2})>b(x;\,n,\tfrac{1}{2}),$$
$$n-x<x+1\rightarrow x>\frac{n}{2}-\frac{1}{2}:\quad b(x+1;\,n,\tfrac{1}{2})<b(x;\,n,\tfrac{1}{2}),$$

برای n زوج، اگر $x<\frac{n}{2}$، $b(x;\,n,\frac{1}{2})$ اکیداً صعودی و اکیداً نزولی است اگر و تنها اگر $x>\frac{n}{2}$. بنابراین $x=\frac{n}{2}$ نقطه‌ی ماکسیمم $b(x;n,\frac{1}{2})$ است.

ب) همانند حالت قبل وقتی nفرد باشد $x<\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$ تابع اکیداً نزولی و $x>\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$ تابع اکیدا صعودی است، چون $b(x+1;n,\frac{1}{2})=b(x;n,\frac{1}{2})$، پس ماکسیمم در $x=\frac{n-1}{2}$، $x=\frac{n+1}{2}$ اتفاق می‌افتد.

Payam Noor University

۶-۷. چون $\circ \le \theta \le 1$ پس تابع $f(\theta) = \binom{n}{x}\theta^x (1-\theta)^{n-x}$، یک تابع پیوسته از θ است.

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \binom{n}{x}\left[x\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x} + (n-x)(1-\theta)^{n-x-1}\theta^x\right] \\ &= \binom{n}{x}\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}[x(1-\theta) + (x-n)\theta] \\ &= 0, \end{aligned}$$

جواب معادله‌ی بالا برابر با $\theta = \frac{x}{n}$، خواهد شد از طرفی $f''\left(\frac{x}{n}\right) < 0$، پس جواب مشتق اول، تابع را ماکسیمم می‌کند.

۶-۸.

$$\begin{aligned} \mu'(2) &= E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X) = \mu'_2 - \mu'_1, \\ \mu'(3) &= E(X(X-1)(X-2)) = E(X^3) - 3E(X^2) + 2E(X) = \mu'_3 - 3\mu'_2 + 2\mu'_1, \\ \mu'(4) &= E(X(X-1)(X-2)(X-3)) = E(X^4) - 6E(X^3) + 11E(X^2) - 6E(X) \\ &= \mu'_4 - 6\mu'_3 + 11\mu'_2 - 6\mu'_1. \end{aligned}$$

۶-۹.

$$\begin{aligned} \Psi'_X(t) &= E'(X^t) = E(X\, t^{X-1}), \\ \Psi''_X(t) &= E(X(X-1)\, t^{X-2}). \end{aligned}$$

در حالت کلی

$$\begin{aligned} \Psi_X^{(r)}(t) &= E(X(X-1)(X-2)\cdots(X-r+1)t^{x-r}), \\ \Psi_X^{(r)}(1) &= E(X(x-1)\cdots(X-r+1)). \end{aligned}$$

۶-۱۰. شانس پاسخ صحیح برای هر سئوال برابر با $\theta = \frac{1}{3}$، و تعداد سئوال‌ها $n = 8$، تعداد موفقیت‌ها $x = 4$ است. بنابر توزیع دوجمله‌ای

$$P(X=4) = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0/17.$$

۶-۱۱. بنابر توزیع دوجمله‌ای $\theta = \frac{1}{10}$، $n = 5$،

$$P(X \geq ۳) = ۱ - P(X \leq ۲) = ۰/۰۰۸۵.$$

۶-۱۲. $\theta = ۰/۴, \quad n = ۱۵, \quad x = ۶$

الف) $P(X = ۶) = \binom{۱۵}{۶}(۰/۴)^{۶}(۰/۶)^{۹} = ۰/۲۰۶۶$

ب) $P(X = ۶) = P(X \leq ۶) - P(X \leq ۵) = ۰/۲۰۶۶$

۶-۱۳. $\theta = ۰/۷, \quad n = ۶, \quad x = ۵$

الف) $P(X = ۵) = \binom{۶}{۵}(۰/۷)^{۵}(۰/۳) = ۰/۳۰۲۵$

ب) $P(X = ۵) = P(X \leq ۵) - P(X \leq ۴) = ۰/۳۰۲۵$

۶-۱۴.

$$P(X = ۱۱) = \binom{۱۲}{۱۱}(۰/۸)^{۱۱}(۰/۲) = ۰/۰۹۲۲$$

$$P(X = ۱۱) = \binom{۱۲}{۱۱}(۰/۶)^{۱۱}(۰/۴) = ۰/۰۰۷۸$$

۶-۱۵. $P(\theta - c < X < \theta + c) \geq ۱ - \frac{\theta(۱-\theta)}{nc^{۲}}$

الف) $\begin{cases}\theta - c = ۰/۴ \\ \theta + c = ۰/۶\end{cases} \Rightarrow \left(\theta = \frac{۱}{۲} \quad , \quad c = ۰/۱\right) \xrightarrow{n=۹۰۰} ۱ - \frac{\theta(۱-\theta)}{nc^{۲}} = \frac{۳۵}{۳۶}$

ب) $\begin{cases}\theta - c = ۰/۴۷ \\ \theta + c = ۰/۵۳\end{cases} \Rightarrow \left(\theta = \frac{۱}{۲} \quad , \quad c = ۰/۰۳\right) \xrightarrow{n=۱۰۰۰۰} ۱ - \frac{\theta(۱-\theta)}{nc^{۲}} = \frac{۳۵}{۳۶}$

ج) $\begin{cases}\theta - c = ۰/۴۷۷ \\ \theta + c = ۰/۵۰۳\end{cases} \Rightarrow \left(\theta = \frac{۱}{۲} \quad , \quad c = ۰/۰۰۳\right) \xrightarrow{n=۱۰۰۰۰۰۰} ۱ - \frac{\theta(۱-\theta)}{nc^{۲}} = \frac{۳۵}{۳۶}$

هرچه n بزرگتر شود احتمال موردنظر به یک نزدیکتر می‌گردد و cنسبت موفقیت‌ها به $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند.

۶-۱۶. با استفاده از تعریف فوق هندسی الف) $h(۰; ۲,۱۸,۴) = \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۱۴}{۲}}{\binom{۱۸}{۲}} = ۰/۵۹۵$،

ب) $h(۰;۲,۱۸,۸)=\dfrac{\binom{۸}{۰}\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۱۸}{۲}}=۰/۲۹۴$، ج) $h(۰;۲,۱۸,۱۲)=\dfrac{\binom{۱۲}{۰}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۸}{۲}}=۰/۵۰۴$،

۶–۱۷. با استفاده از تعریف فوق هندسی

الف) $h(۰;۳,۱۶,۱۰)=\dfrac{\binom{۱۰}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۶}{۳}}=\dfrac{۱}{۲۸}$، ب) $h(۱;۳,۱۶,۱۰)=\dfrac{\binom{۱۰}{۱}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۶}{۳}}=\dfrac{۵}{۵۶}$،

ج) $h(۲;۳,۱۶,۱۰)=\dfrac{\binom{۱۰}{۲}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۶}{۳}}=\dfrac{۲۷}{۵۶}$، د) $h(۳;۳,۱۶,۱۰)=\dfrac{\binom{۱۰}{۳}\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۶}{۳}}=\dfrac{۳}{۱۴}$.

۶–۱۸. الف)

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{۱}{۲۸}$	$\frac{۱۵}{۵۶}$	$\frac{۲۷}{۵۶}$	$\frac{۶}{۲۸}$

$$\mu=E(X)=\sum_{x=۰}^{۳}xf(x)=\frac{۱۵}{۸},$$

$$\mu'_۲=E(X^۲)=\sum_{x=۰}^{۳}xf(x)=\frac{۳۳}{۸},$$

$$\sigma^۲=\mu'_۲-\mu^۲=\frac{۳۹}{۴۶}.$$

ب) از فرمول‌ها

$$\mu=\frac{nk}{N}=\frac{۳\times۱۰}{۱۶}=\frac{۱۵}{۸},$$

$$\sigma^۲=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^۲(N-۱)}=\frac{۳۹}{۴۶}.$$

۶–۱۹. توزیع فوق هندسی $h(۲;۵,۱۵,۹)=\binom{۹}{۲}\binom{۶}{۳}\Big/\binom{۱۵}{۵}$.

Payam Noor University

۶-۲۰. الف) مستقیماً از توزیع استفاده می‌کنیم

$$h(۱;۳,۸۰,۴)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۷۶}{۲}}{\binom{۸۰}{۳}}=۰/۱۳۸۸.$$

ب) بنابر توزیع دو جمله‌ای $\theta=\frac{k}{N}=\frac{۴}{۸۰}=۰/۰۵$، $n=۳$، $x=۱$

$$h(۱;۳,۰/۰۵)=\binom{۳}{۱}(۰/۰۵)(۰/۹۵)^{۲}=۰/۱۳۵۴.$$

۶-۲۱.

$$p(x+۱;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+۱}}{(x+۱)!}=\frac{\lambda}{x+۱}\times\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}=\frac{\lambda}{x+۱}p(x;\lambda).$$

$$p(۰;۲)=\frac{e^{-۲}۲^{۰}}{۰!}=۰/۱۳۵۳,$$

$$p(۱;۲)=\frac{۲}{۰+۱}=p(۰,۲)=۰/۲۷۰۶.$$

۶-۲۲.

$$\mu_r=E(X^r)=\sum_{x=۰}^{+\infty}(x-\lambda)^r\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

$$\frac{\partial\mu_r}{\partial\lambda}=\sum_{x=۰}^{+\infty}\left[r(x-\lambda)^{r-۱}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}+(x-\lambda)^r\left\{\frac{x\lambda^{x-۱}e^{-\lambda}}{x!}-\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\right\}\right]$$

$$=r\sum_{x=۰}^{+\infty}(x-\lambda)^{r-۱}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}+\sum_{x=۱}^{+\infty}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\left\{(x-\lambda)^r(\frac{x}{\lambda}-۱)\right\}$$

$$=r\mu_{r-۱}+\frac{۱}{\lambda}\sum_{x=۰}^{+\infty}(x-\lambda)^{r+۱}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=r\mu_{r-۱}+\frac{۱}{\lambda}\mu_{r+۱},$$

در نتیجه

$$\mu_{r+۱}=\lambda[r\mu_{r-۱}+\frac{\partial\mu_r}{\partial\lambda}].$$

۶-۲۳.

$$M_Y(t)=M_{X-\lambda}(t)=e^{-\lambda t}M_X(t)=e^{-\lambda t}e^{\lambda(e^t-۱)}=e^{\lambda(e^t-۱-t)}.$$

Payam Noor University

$$\frac{\partial M_Y(t)}{\partial t} = \lambda(e^t - ۱)e^{\lambda(e^t - ۱ - t)},$$

$$\left.\frac{\partial^۲ M_Y(t)}{\partial t^۲}\right|_{t=۰} = \left[\lambda^۲(e^t - ۱)^۲ e^{\lambda(e^t - ۱ - t)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t - ۱ - t)}\right]_{t=۰}$$

$$= E(Y^۲) = \mathrm{var}(X) = \lambda.$$

۶-۲۴. الف) در حالت کلی تقریبی که توصیه می‌شود برای حالت $n \geq ۲۰$، و $\theta \leq ۰/۰۵$ است امّا اگر $n \geq ۱۰۰$، و $n\theta < ۱۰$ برقرار باشد تقریب دقیق‌تر خواهد شد.

الف) برای $n\theta = ۱۲/۵ > ۱۰$ و $n = ۲۵ > ۲۰$، تقریب خوب است.

ب) در شرایط $n > ۱۰۰$، و $\theta = ۰/۰۴ < ۰/۰۵$، $n\theta < ۱۰$ تقریب خوب است.

د) چون $\theta > ۰/۰۵$، تقریب مناسب نیست.

۶-۲۵. طبق صورت تمرین داریم: $n = ۱۵۰ > ۱۰۰$، $\lambda = n\theta = ۲/۱ < ۱۰$،

$$p(۲; ۲/۱) = \frac{e^{-۲/۱}(۲/۱)^۲}{۲!} = ۰/۲۷$$

۶-۲۶. میانگین مسمومیت غذایی بازدیدکنندگان از یک نمایشگاه استانی، برابر است با: $\lambda = n\theta = ۱/۲$،

$$P(X \geq ۲) = ۱ - P(X \leq ۱) = ۱ - P(X = ۰) - P(X = ۱)$$

$$= ۱ - \frac{e^{-۱/۲}(۱/۲)^۰}{۰!} - \frac{e^{-۱/۲}(۱/۲)^۱}{۱!} = ۰/۰۹۰۲.$$

۶-۲۷. میانگین تصادف‌های رانندگان مجاز $\lambda = n\theta = ۶$،

$$P(X = ۵) = \frac{e^{-۶} \times ۶^۵}{۵!} = ۰/۱۶۰۶.$$

$$P(X = ۳) = \sum_{x=۰}^{۳} p(x; ۶) = \sum_{x=۰}^{۳} \frac{e^{-۶}۶^x}{x!} = P(X \leq ۳) = ۰/۱۵۱۲.$$

۶-۲۸.

$$P(X = ۲) = \frac{e^{-۳/۳}(۳/۳)^۲}{۲!} = ۰/۲۰۱۵.$$

Payam Noor University

۶-۲۹.

$$P(X=0)=\frac{e^{1/8}(1/8)^{0}}{0!}=0/1653.$$

$$P(X=1)=\frac{e^{-1/8}(1/8)^{1}}{1!}=0/2975.$$

۶-۳۰.

$$P(X=3)=p(3;5,2)=0/1293.$$

$$P(X\geq 10)=1-\sum_{x=0}^{9}p(x;5,2)=1-P(X\leq 9)=0/0396.$$

$$P(4\leq X\leq 6)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=0/4944.$$

۶-۳۱. برای توزیع یکنواخت $\alpha<x<\beta$,$f(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}$، احتمال موردنظر عبارت است از:

$$P(X<\alpha+p(\beta-\alpha))=\int_{\alpha}^{\alpha+p(\beta-\alpha)}\frac{1}{\beta-\alpha}dx$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}[x]_{\alpha}^{\alpha+p(\beta-\alpha)}\ \frac{1}{\beta-\alpha}[\alpha+p(\beta-\alpha)-\alpha]=p.$$

۶-۳۲. rامین گشتاور حول میانگین، $\mu=\frac{\alpha+\beta}{2}$، برابر است با:

$$\mu_r=E(X-\mu)^r$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\mu)^r\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{(x-\mu)^{r+1}}{r+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{(\beta-\mu)^{r+1}-(\alpha-\mu)^{r+1}}{(\beta-\alpha)(r+1)}=\frac{(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2})^{r+1}-(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2})^{r+1}}{(\beta-\alpha)(r+1)}$$

$$=\frac{(\frac{\beta-\alpha}{2})^{r+1}-(\frac{\alpha-\beta}{2})^{r+1}}{(\beta-\alpha)(r+1)}=\frac{(\beta-\alpha)^{r+1}-(\alpha-\beta)^{r+1}}{2^{r+1}(\beta-\alpha)(r+1)},$$

به ازای $r+1$های زوج یا rهای فرد مقدار کمیت فوق برابر با ۰ است و برای rهای زوج گشتاور مرتبه‌ی rام حول میانگین برابر با

Payam Noor University

$$\mu_r=\frac{(\beta-\alpha)^{r+1}+(\beta-\alpha)^{r+1}}{2^{r+1}(\beta-\alpha)(r+1)}=\frac{2(\beta-\alpha)^{r+1}}{2^{r+1}(\beta-\alpha)(r+1)}=\frac{1}{r+1}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^r.$$

۶-۳۳. خاصیتی مشهور که در هر مثلث حاکم است (مجموع هر دو ضلع مثلث از طول ضلع دیگر بیشتر است، مشهور به نابرابری مثلث) را به کار می‌بریم:

$$\overbrace{A\quad D}^{x}\ \overbrace{C\qquad\quad B}^{a-x}$$

$$\begin{array}{l} |AD|<|BD|+|AD| \\ |BD|<|AD|+|AC| \\ |AC|<|AD|+|BC| \end{array} \rightarrow \begin{cases} x<a-x+\dfrac{a}{2} \\ a-x<x+\dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a}{2}<x-a-x \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

با توجه به توزیع متغیر تصادفی X،

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a} & 0\le x\le a \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

داریم

$$P(\frac{a}{4}<X<\frac{3a}{4})=\int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}}\frac{1}{a}dx=\frac{1}{a}\left(\frac{3a}{4}-\frac{a}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

۶-۳۴. X مقدار ارتکاب خطا در تعیین وزن مخصوص یک مادّه است.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{0/015-(-0/015)}=\dfrac{1}{0/03} & 0/015<x<0/015 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

الف)

$$P(-0/002<X<0/003)=\int_{0/002}^{0/003}\frac{1}{0/03}dx=\frac{0/005}{0/03}=\frac{1}{6}.$$

ب)

$$P(X>0/005)=\int_{0/005}^{0/015}\frac{1}{0/03}dx=\frac{1}{3}.$$

Payam Noor University

.۳۵-٦

$$n(x;\mu,\sigma)=\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(\frac{x-\mu}{\sigma})^{۲}},\qquad -\infty<x<\infty$$

$$n'(x;\mu,\sigma)=-\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}(\frac{x-\mu}{\sigma})(\frac{۱}{\sigma})e^{-\frac{۱}{۲}(\frac{x-\mu}{\sigma})^{۲}}=۰$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma}=۰$$

$$x=\mu$$

$$n''(x;\mu,\sigma)=-\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}\left[\frac{۱}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}-\frac{۱}{\sigma}(\frac{(x-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}})e^{-\frac{(x-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}\right]$$

$$=-\frac{۱}{\sigma^{۲}\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}\left[۱-(\frac{x-\mu}{\sigma})^{۲}\right]=۰,$$

$$x=\mu\pm\sigma.$$

چون $n''(\mu;\mu,\sigma)<۰$، پس نقطه‌ی ماکسیمم برابر است با $x=\mu$. $n''(x:\mu,\sigma)$ به ازای $x=\mu\pm\sigma$ صفر می‌شود.

.۳۶-٦

$$M_Z(t)=E(e^{tZ})=E\left(e^{t\frac{(X-\mu)}{\sigma}}\right)$$

$$=e^{-\frac{\mu t}{\sigma}}M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)=e^{-\frac{\mu t}{\sigma}}e^{\mu\left(\frac{t}{\sigma}\right)+\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{۲}}=e^{\frac{۱}{۲}t^{۲}}.$$

.۳۷-٦

الف) $P(Z\geq ۱/۱۴)=۱-P(Z<۱/۱۴)=۰/۱۲۷۱$

ب) $P(Z>-۰/۳۶)=۱-P(Z<۰/۳۶)=۰/۶۴۰۶$

ج) $P(-۰/۴۶<Z<-۰/۰۹)=P(Z<-۰/۰۹)-P(Z<-۰/۴۶)=۰/۱۴۱۳$

د) $P(-۰/۵۸<Z<۱/۱۲)=P(Z<۱/۱۲)-P(Z<۰/۵۸)=۰/۵۸۷۶$

Payam Noor University

۶-۳۸.

الف) $P(Z<۱/۳۳)=۰/۹۰۸۲$

ب) $P(Z\le -۰/۷۹)=۰/۲۱۴۸$

ج) $P(۰/۵۵<Z<۱/۲۲)=P(Z<۱/۲۲)-P(Z<۰/۵۵)=۰/۱$

د) $P(-۱/۹\le Z\le ۰/۴۴)=P(Z<-۱/۹)-P(Z<۰/۴۴)=۰/۶۴۱۳$

۶-۳۹.

الف) $P(۰<Z<z)=۰/۴۷۲۶\rightarrow z=۱/۹۲$

ب) $P(Z<z)=۰/۹۸۶۸$ جواب از روی جدول نرمال $z=۲/۲۲$.

ج) $P(Z>z)=۰/۱۳۱۴$ برابر $P(Z<z)=۰/۳۶۸۶$ است، پس جواب از روی جدول نرمال $z=۱/۱۲$.

د) $P(-z<Z<z)=۰/۸۵۰۲$ برابر $P(Z<-z)=۰/۴۲۵۱$ در نتیجه $z=۱/۴۴$.

۶-۴۰.

الف) $z_۱=۱/۴۸$

ب) $z_۲=-۰/۷۴$

ج) $z_۳=۰/۵۵$

د) $z_۴=۲/۱۷$

۶-۴۱. $P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma)=P(-k<Z<k)=P(Z<k)-P(Z<-k)$

الف) $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=۰/۶۸۲۶$

ب) $P(\mu-۲\sigma<X<\mu+۲\sigma)=۰/۹۵۴۴$

ج) $P(\mu-۳\sigma<X<\mu+۳\sigma)=۰/۹۹۷۴$

د) $P(\mu-۴\sigma<X<\mu+۴\sigma)=۰/۹۹۹۹۴$

۶-۴۲.

Payam Noor University

$$\alpha = P(Z > Z_\alpha) = ۱ - P(Z < Z_\alpha)$$
$$P(Z < Z_\alpha) = ۱ - \alpha$$

الف) $Z_{۰/۰۵} = ۱/۶۴۵$

ب) $Z_{۰/۰۲۵} = ۱/۹۶$

ج) $Z_{۰/۰۱} = ۲/۳۲$

د) $Z_{۰/۰۰۵} = \dfrac{۲/۵۸ + ۲/۵۷}{۲} = ۲/۵۷۵$

٦-٤٣.

الف) $P(X \ge ۴۴/۵) = P\left(Z \ge \dfrac{۴۴/۵ - ۳۷/۶}{۴/۶}\right) = P(Z \ge ۱/۵) = ۰/۰۶۶۸$

ب) $P(X \le ۳۵) = P\left(Z \le \dfrac{۳۵ - ۳۷/۶}{۴/۶}\right) = P(Z \le ۰/۵۶۵) = ۰/۷۸۶۰$

ج) $P(۳۰ < X < ۴۰) = P\left(\dfrac{۳۰ - ۳۷/۶}{۴/۶} < Z < \dfrac{۴۰ - ۳۷/۶}{۴/۶}\right) = ۰/۶۴۹۰$

٦-٤٤. متغیر استاندارد تمرین به صورت $Z = \dfrac{X - ۱۵/۴}{۰/۴۸}$ است.

الف) $P(X \ge ۱۶) = P\left(Z \ge \dfrac{۱۶ - ۱۵/۴}{۰/۴۸}\right) = P(Z \ge ۱/۲۵) = ۰/۱۰۵۶$

ب) $P(X \le ۱۴/۲) = P\left(Z < \dfrac{۱۴/۲ - ۱۵/۴}{۰/۴۸}\right) = P(Z < -۲/۵) = ۰/۰۰۶۲$

ج) $P(۱۵ < X < ۱۵/۸) = P(-۰/۸۳۳ < Z < ۰/۸۳۳) = ۰/۵۹۳۴$

٦-٤٥. با توجه به مجهول بودن میانگین متغیر تصادفی داریم: $Z = \dfrac{X - \mu}{۱۰}$.

$$P(X < ۲۸۲/۵) = P\left(Z < \frac{۸۲/۵ - \mu}{۱۰}\right) = ۰/۸۲۱۲,$$

از روی اعداد جدول نتیجه می‌شود:

$$\frac{۸۲/۵ - \mu}{۱۰} = ۰/۹, \qquad \mu = ۷۳/۳.$$

احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(X > ۵۸/۳) = P\left(Z > \frac{۵۸/۳ - ۷۳/۳}{۱۰}\right) = P(Z > -۱/۵) = ۰/۹۳۳۲.$$

Payame Noor University

۶–۴۶. در صورتی که $n\theta > ۵$ و $n(۱-\theta) > ۵$ برقرار باشد تقریب مناسب است.

الف) $n\theta = ۳/۲ < ۵$ تقریب مناسب نیست.

ب) $n\theta = ۶/۵ > ۵$ تقریب مناسب است.

ج) $n(۱-\theta) = ۵۸/۵ > ۵$ تقریب مناسب است.

د) $n(۱-\theta) = ۲/۴۲ < ۵$ تقریب مناسب نیست.

۶–۴۷. الف) مشابه‌ی تمرین ۶–۴۶، چون

$$n\theta = ۷/۵ > ۵ \quad , \quad n(۱-\theta) = ۱۴۲/۵ > ۵$$

برقرار است پس تقریب خوبی است.

ب) برای تقریب به نرمال میانگین و انحراف معیار به ترتیب برابرند با $\mu = n\theta = ۷/۵$، و $\sigma = \sqrt{n\theta(۱-\theta)} = ۲/۶۷$، پس

$$\begin{aligned} b(۱;۱۵۰,۰/۰۵) &= P(۱-۰/۵ < X < ۱+۰/۵) = P(۰/۵ < X < ۱/۵) \\ &= P\left(\frac{۰/۵-۷/۵}{۲/۶۷} < Z < \frac{۱/۵-۷/۵}{۲/۶۷}\right) \\ &= P(-۲/۶۲ < Z < -۲/۲۵) = ۰/۰۰۷۸. \end{aligned}$$

ج) مقدار خطای نسبی برابر است با

$$\frac{۰/۰۰۷۸-۰/۰۰۳۶}{۰/۰۰۳۶} \times ۱۰۰ = ۱۱۶/۶۷.$$

۶–۴۸. میانگین و واریانس عبارتند از

$$\mu = n\theta = ۱۴ \times \frac{۱}{۲} = ۷, \qquad \sigma = \sqrt{n\theta(۱-\theta)} = ۱/۸۷.$$

احتمال موردنظر با انجام تصحیح پیوستگی برابر است با:

$$\begin{aligned} P(X=۷) &= P(۶/۵ < X < ۷/۵) = P(-۰/۲۷ < Z < ۰/۲۷) \\ &= P\left(\frac{۶/۵-۷}{۱/۸۷} < Z < \frac{۷/۵-۷}{۱/۸۷}\right) = ۰/۲۱۲۸. \end{aligned}$$

در حالی که مقدار دقیق این احتمال معادل است با: $b\left(۷,۱۴,\frac{۱}{۲}\right) = ۰/۲۰۹۵$، در نتیجه مقدار خطا $۰/۲۱۲۸ - ۰/۲۰۹۵$.

Payam Noor University

۶-۴۹. برای استفاده از تقریب نرمال، میانگین و انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

$$\mu = n\theta = ۱۲۰(۰/۲۳) = ۲۷/۶, \qquad \sigma = \sqrt{n\theta(۱-\theta)} = ۴/۶۱.$$

احتمال موردنظر برابر است با

$$P(X > ۳۲) = P(X > ۳۲/۵) = P\left(Z > \frac{۳۲/۵ - ۲۷/۶}{۴/۶۱}\right) = P(Z > ۱/۰۶) = ۰/۱۴۴۶.$$

۶-۵۰. الف) نسبت شیرها $\frac{X}{۱۰۰}$، دارای انحراف معیار و میانگین $\sigma = \sqrt{n\theta(۱-\theta)} = ۵$ و $\mu = n\theta = ۵۰$ است.

$$\begin{aligned} P\left(۰/۴۹ < \frac{X}{۱۰۰} < ۰/۵۱\right) &= P(۴۹ < X < ۵۱) = P(X = ۵۰) \\ &= P(۴۹/۵ < X < ۵۰/۵) \\ &= P\left(\frac{۴۹/۵ - ۵۰}{۵} < Z < \frac{۵۰/۵ - ۵۰}{۵}\right) \\ &= P(-۰/۱ < Z < ۰/۱) = ۰/۰۷۹۶. \end{aligned}$$

ب) برای ۱۰۰۰بار پرتاب سکه داریم:

$$\mu = n\theta = ۵۰۰, \qquad \sigma = \sqrt{n\theta(۱-\theta)} = ۱۵.$$

$$\begin{aligned} P\left(۰/۴۹ < \frac{X}{۱۰۰} < ۰/۵۱\right) &= P(۴۹۰ < X < ۵۱۰) = P(۴۹۱ \le X \le ۵۰۹) \\ &= P(۴۹۰/۵ < X < ۵۰۹/۵) \\ &= P\left(\frac{۴۹۰/۵ - ۵۰۰}{۱۵} < Z < \frac{۵۰۹/۵ - ۵۰۰}{۱۵}\right) \\ &= P(-۰/۶۳ < Z < ۰/۶۳) = ۰/۴۷۱۴. \end{aligned}$$

ج) برای ۱۰۰۰۰بار پرتاب

$$\mu = n\theta = ۱۰۰۰۰ \times \frac{۱}{۲} = ۵۰۰۰, \qquad \sigma = ۵۰.$$

$$\begin{aligned} P\left(۰/۴۹ < \frac{X}{۱۰۰۰۰} < ۰/۵۱\right) &= P(۴۹۰۰ < X < ۵۱۰۰) = P(۴۹۰۱ \le X \le ۵۰۹۹) \\ &= P\left(\frac{۴۹۰۱ - ۵۰۰۰}{۵۰} \le Z \le \frac{۵۰۹۹ - ۵۰۰۰}{۵۰}\right) = ۰/۹۵۲۲. \end{aligned}$$

۶-۵۱. الف) اگر X و Y از هم مستقل باشند آنگاه $\mathrm{cov}(X,Y) = ۰$، در نتیجه

$$\rho = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{0}{\sigma_1\sigma_2} = 0.$$

ب) بنابر چگالی توأم نرمال دو متغیره با صفربودن ρ، داریم:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}$$

$$= f_1(x) f_2(x).$$

۶-۵۲. از متحد ساختن عبارت

$$\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

با عبارت

$$-\frac{1}{102}\left[(x+2)^2 - 2/8(x+2)(y-1) + 4(y-1)^2\right]$$

داریم:

$$x^2 \text{ ضریب} = \frac{-1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} = \frac{-1}{102}$$

$$y^2 \text{ ضریب} = \frac{-1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} = \frac{-4}{102}$$

$$xy \text{ ضریب} = \frac{\rho}{\sigma_2\sigma_1(1-\rho^2)} = \frac{2/8}{102}$$

دستگاهی با سه معادله و سه مجهول که از حل آن نتیجه می‌شود

$$\rho = 0/7, \qquad \sigma_1 = 10, \qquad \sigma_2 = 5.$$

در ادامه می‌توانید مقادیر دو میانگین را به دست آورید

$$\mu_1 = -2, \qquad \mu_2 = 1.$$

۶-۵۳.

$$\text{cov}(X+Y, X-Y) = \text{cov}(X,X) - \text{cov}(X,Y) + \text{cov}(Y,X) - \text{cov}(Y,Y)$$

$$= \sigma_X^2 - \sigma_Y^2,$$

Payam Noor University

$$\operatorname{var}(X+Y)=\operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y,$$

$$\operatorname{var}(X-Y)=\operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y)-2\operatorname{cov}(X,Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2\rho\sigma_X\sigma_Y,$$

$$\rho_{u,v}=\frac{\operatorname{cov}(u,v)}{\sigma_u.\sigma_v}=\frac{\sigma_X^2-\sigma_Y^2}{\sqrt{\left(\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)^2-4\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2}}.$$

۶-۵۴. الف)

$$\begin{aligned}P(-90<X<90,-90<Y<90)&=\int_{-90}^{90}\int_{-90}^{90}f(x,y)dxdy\\&=\int_{-90}^{90}f(x)dx\times\int_{-90}^{90}f(y)dy\\&=[P(-90<X<90)]^2\\&=P^2\left(\frac{-90-0}{120}<Z<\frac{90-0}{120}\right)\\&=0/299.\end{aligned}$$

ب) با تغییر مختصات دکارتی به مختصات قطبی انتگرال زیر حل می‌شود.

$$\begin{aligned}P(X^2+Y^2<75^2)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{75}\frac{r}{2\pi(120)}e^{\frac{-r^2}{2(120)^2}}drd\theta\\&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\left[-e\frac{-r^2}{20(120)^2}\right]_{r=0}^{r=75}d\theta=0/1774.\end{aligned}$$

۶-۵۴. الف)

$$\begin{aligned}P(X^2+Y^2<36)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{6}\frac{r}{\pi 288}e^{-\frac{r^2}{288}}drd\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}d\theta\times\int_0^{6}\frac{2r}{288}e^{-\frac{r^2}{288}}dr\\&=1\times\left(-e^{-\frac{r^2}{288}}\right)_0^6=0/1175.\end{aligned}$$

ب)

$$P(X^2+Y^2<c^2)=1-e^{-\frac{c^2}{288}}=0/8,$$
$$c=21/53.$$

Payam Noor University

سوالات تستی

۱. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صفت کمّی پیوسته هستند.

الف) گروه خونی　　ب) تعداد افراد خانواده

ج) سن افراد به سال　　د) ظرفیت مسافران یک خودرو

۲. اگر توزیع یک متغیر، متقارن باشد کدام یک از روابط زیر درست است؟

الف) $x_{MO} < \tilde{x} < \bar{x}$　　ب) $x_{MO} = \tilde{x} = \bar{x}$

ج) $x_{MO} > \tilde{x} > \bar{x}$　　د) $x_{MO} > \tilde{x} = \bar{x}$

۳. کدام‌یک از صفات زیر کیفی است؟

الف) مدرک تحصیلی　　ب) اندازه‌ی جامعه　　ج) جنسیت　　د) تمام متغیرها

٤. کدام‌یک از صفات زیر کیفی است؟

الف) دستمزد　　ب) هزینه‌ی بیمارستان

ج) وضع تأهل　　د) رتبه‌ی شرکت‌کنندگان در یک مسابقه

۵. اگر بزرگترین داده برابر با ۸۹ و کوچکترین داده برابر با ۴۵ و تعداد طبقات ۵ باشد دامنه‌ی تغییرات چقدر است؟

الف) ۸/۸　　ب) ۱۸　　ج) ۴۴　　د) ۹

٦. اگر درصد افراد یک گروه در جامعه‌ای ۳۰% باشد در نمودار دایره‌ای چه زاویه‌ای از دایره را به این گروه اختصاص می‌دهیم.

الف) ۳۰°　　ب) ۱۲۰°　　ج) ۱۰۸°　　د) ۵۴°

۷. در جدول توزیع فراوانی زیر میانگین مقادیر چقدر است؟

طبقات	۷/۵−۱۲/۵	۱۲/۵−۱۷/۵	۱۷/۵−۲۲/۵	۲۲/۵−۲۷/۵	۲۷/۵−۳۲/۵
فراوانی نسبی	۰/۰۳	۰/۱۷	۰/۳۹	۰/۲۵	۰/۱۶

الف) ۲۰　　ب) ۲۲/۵　　ج) ۱۷/۵　　د. ۲۱/۶۵

۸. در سؤال هفت، اگر تعداد کل داده‌ها برابر با $N=$۱۰۰ باشد میانه‌ی مقادیر چقدر است؟

الف) ۲۲/۵　　ب) ۱۷/۵　　ج) ۲۰/۰۴　　د) ۲۱/۷

Payam Noor University

۹. در سؤال هفت نما چقدر است؟

الف) ۲۲/۵ ب) ۲۰ ج) ۲۱/۷ د) ۲۰/۵۶

۱۰. در توزیع‌هایی که چولگی زیاد ندارند کدام مشخص کننده‌ی مرکزی مناسب‌تر است؟

الف) میانه ب) نما ج) میانگین حسابی د) میانگین هندسی

۱۱. اگر $s_x^{۲} = ۹$ و $y = x + ۲$، انحراف معیار y چقدر است؟

الف) ۹ ب) ۳ ج) ۵ د) ۱۱

۱۲. اگر $|S_K| < ۰/۱$، (ضریب چولگی پی‌یرسون) کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟

الف) توزیع چوله به چپ است ب) توزیع با متقارن بودن تناقض ندارد

ج) توزیع چوله به راست است د) توزیع خیلی چوله است

۱۳. اگر میانگین پنج داده برابر ۱۰ و مجموع مجذورات آنها برابر ۵۲۰ باشد، واریانس آنها کدام است؟

الف) ۹۲ ب) ۹۳ ج) ۹۴ د) ۹۵

۱۴. میانگین وزن ۱۰ نفر ۶۵ کیلوگرم است، دو نفر به وزن ۱۴۲ کیلوگرم به این افراد اضافه می‌شوند، میانگین جدید برحسب گرم کدام است؟

الف) ۶۹۰۰۰ ب) ۶۷۰۰۰ ج) ۶۶۰۰۰ د) ۶۵۰۰۰

۱۵. اگر میانگین اعداد از ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰/۵ باشد، میانگین اعداد زوج از ۲ تا ۲۰۰ کدام است؟

الف) ۵۰/۵ ب) ۱۰۰ ج) ۱۰۱ د) ۱۵/۵

۱۶. اگر $\sum_{i=۱}^{۵} x_i = ۱۰$ و $\sum_{i=۱}^{۵} x_i^{۲} = ۴۰$، انحراف معیار کدام است؟

الف) ۵ ب) $\sqrt{۵}$ ج) ۴ د) ۲

۱۷. میانگین ۵ داده برابر ۱۵ و میانگین ۱۰ داده‌ی آماری دیگر برابر ۴۵ است. میانگین کل داده‌ها برابر است با

الف) ۱۲ ب) ۲۵ ج) ۳۵ د) ۴۵

۱۸. اگر داده‌ها نسبت به میانگین متقارن باشند، کدام‌یک از موارد زیر، برای گشتاور

Payam Noor University

مرکزی فرد برقرار است؟

الف) برابر صفر است ب) وجود ندارد

ج) برابر میانگین است د) نصف میانگین است

۱۹. اگر در یک سری نمونه‌ی تصادفی میانه برابر ۳/۸، مد برابر ۳/۲، و میانگین برابر ۴ باشد چولگی این توزیع چگونه است؟

الف) چوله به راست ب) متقارن

ج) چوله به چپ د) نامشخص

۲۰. به ازای چه مقداری از a، عبارت $\sum_{i=1}^{n}|x_i-a|$ مینیمم می‌شود.

الف) میانه ب) مد

ج) میانگین د) انحراف معیار

۲۱. فرض کنید میانه ۵۰، دهک اول ۱۰، صدک نودم ۹۰، باشد ضریب چولگی کدام است؟

الف) ۰/۵ ب) ۰/۴۴ ج) ۰ د) ۲

۲۲. کدام گزینه صحیح است؟

الف) مهمّترین پارامتر مرکزی میانه است

ب) همه‌ی توزیع‌های آماری دارای مد هستند

ج) همیشه نیم‌دامنه از دامنه‌ی تغییرات بیشتر است

د) مجموع انحراف‌ها از میانگین صفر است

۲۳. کدام یک از شاخص‌های زیر معیار مرکزی نیست؟

الف) میانگین ب) میانه ج) مد د) دامنه

۲۴. در داده‌های آماری داده‌ای که ۲۵٪ داده‌ها از آن کمتر باشد و ۷۵٪ داده‌ها از آن بزرگتر باشد چه نامیده می‌شود؟

الف) چارک سوم ب) چارک دوم ج) چارک اول د) صدک هفتاد و پنج

۲۵. در رسم نمودار دایره‌ای فراوانی یک رده برابر با ۱۵ و تعداد داده‌ها برابر ۹۰ می‌باشد، زاویه‌ی قطاع متناظر با این رده چند درجه است؟

الف) ۹۰ ب) ۸۰ ج) ۷۰ د) ۶۰

Payam Noor University

۲۶. حاصل عبارت $\frac{{}_nP_r}{{}_{n+1}P_{r+1}}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{n+1}$ ب) $\frac{r}{n}$ ج) $\frac{1}{(n+1)!}$ د) $\frac{r-1}{n+1}$

۲۷. با ارقام ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰، بدون تکرار ارقام می‌شود نوشت؟

الف) ۴۰ ب) ۶۰ ج) ۸۰ د) ۱۲۰

۲۸. یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد صورت‌هایی که در آن عدد زوج آمده، کدام است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۶ د) ۱

۲۹. سه کتاب ریاضی و دو کتاب اقتصاد را که با هم متفاوتند، به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به‌طوری‌که کتاب‌های هم موضوع، همواره کنار هم باشند؟

الف) ۶۰ ب) ۱۲۰ ج) ۱۲ د) ۱

۳۰. اگر ترکیب $\binom{a+b}{a}=m$ باشد مقدار ترکیب $\binom{a+b}{b}$ کدام است؟

الف) m ب) bm ج) am د) $(a+m)m$

۳۱. شخصی از میان ۱۰ کتاب خود، می‌خواهد دو کتاب را انتخاب کرده، به یکی از دوستانش هدیه کند، این عمل به چند طریق ممکن است؟

الف) ۴۰ ب) ۴۵ ج) ۹۰ د) ۲۰

۳۲. مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e\}$ چند زیرمجموعه‌ی دو عضوی دارد؟

الف) ۲۵ ب) ۲۰ ج) ۱۵ د) ۱۰

۳۳. بین ۵ معلم و ۴ دانش‌آموز چند کمیته ۵ نفری مرکب از ۳ معلم و ۲ دانش‌آموز می‌توان تشکیل داد؟

الف) ۶ ب) ۱۰ ج) ۱۵ د) ۶۰

۳۴. اگر $_nP_2=20$، مقدار n کدام است؟

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۱۰ د) ۲۰

۳۵. جواب معادله‌ی $C_x^2=2x$ کدام است؟

الف . ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵

Payam Noor University

۳۶. به چند طریق می‌توان ۱۰ سیب نامتمایز را بین ۳ نفر تقسیم کرد به‌طوری‌که لااقل یک سیب به هر نفر برسد؟

الف) $\binom{10}{3}$ ب) $\binom{9}{2}$ ج) $10!$ د) ${}_{13}P_{3}$

۳۷. به چند طریق می‌توان m مهره‌ی نامتمایز سفید و n مهره‌ی نامتمایز سیاه را در یک ردیف قرار داد که هیچ دو مهره‌ی سفیدی کنار هم نباشند؟ (m و n در شرایط مناسب صدق می‌کنند)

الف) $\binom{n}{m}$ ب) $\binom{n+1}{m}$ ج) $\binom{m+1}{n}$ د) $\binom{m}{n}$

۳۸. به چند طریق می‌توان ۲۰ مهره‌ی نامتمایز را در ۱۵ ظرف متمایز قرار داد به‌طوری که ظرف شماره‌ی ۷ درست ۴ مهره داشته باشد؟

الف) $\binom{29}{14}$ ب) $\binom{30}{14}$ ج) $\binom{29}{13}$ د. $\binom{30}{13}$

۳۹. ۴ زوج (زن و شوهر) به چند طریق می‌توانند روی یک ردیف صندلی بنشینند به‌طوری‌که هر زوج کنار هم باشند؟

الف) $2\times 4!$ ب) $2\times(4!)^2$ ج) $2^4\times 4!$ د) ۴

۴۰. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3\le 7$ کدام است؟

الف) $\binom{7}{3}$ ب) $\binom{10}{3}$ ج) $\binom{9}{2}$ د) $\binom{11}{4}$

۴۱. اگر در یک سیستم الکترونیکی هر کلید فقط بتواند برای ارسال دو پیام به‌کار رود و کلیدها مستقل از هم باشد برای مبادله‌ی ۲۱۹۷ پیام به چند کلید احتیاج است؟

الف) ۱۰ کلید ب) ۱۱ کلید ج) 2^{12} کلید د) ۱۲ کلید

۴۲. شهری ۴ تعمیرکار تلویزیون دارد. اگر ۴ دستگاه تلویزیون خراب شود به چند طریق ممکن است فقط و فقط دو نفر از این تعمیرکارها انتخاب شوند؟

الف) $\binom{4}{2}2^4$ ب) $\binom{4}{2}$ ج) $\binom{4}{2}14$ د) 2^4

۴۳. کدام عبارت صحیح است؟

الف . $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$ ب) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

ج) $\binom{r+2}{n}=\binom{r+1}{n-1}+\binom{r}{n-1}$ د) $\binom{m+n-k}{n+k-m}=\binom{m+n}{n+k}$

٤٤. در یک لیگ مسابقات حذفی فوتبال ۱۵ تیم شرکت دارند، به چند طریق این پانزده تیم می‌توانند در دوره‌های اوّل و دوّم با هم بازی کنند؟

الف) $\frac{15!\,7!}{2^8}$ ب) $\frac{15!\,8!}{2^7}$ ج) $\frac{15!}{2^7}$ د) $\frac{15!}{2^{11}}$

٤٥. ۱۸ تخته سیاه نامتمایز را به چند طریق می‌توان به ۸ مدرسه تقسیم کرد؟

الف) 8^{18} ب) 18^8 ج) $\binom{18+8-1}{8}$ د) $\binom{18+8-1}{18}$

٤٦. حاصل عبارت $\binom{n+2}{r}+\binom{n+2}{r-1}$ کدام است؟

الف) $\binom{n+1}{r}$ ب) $\binom{n+3}{r-1}$ ج) $\binom{n+3}{r}$ د) $\binom{n+2}{r-1}$

٤٧. ۱۵ سیب نامتمایز را به چند طریق می‌توان بین سه نفر تقسیم کرد؟

الف) $\binom{17}{3}$ ب) $\binom{17}{15}$ ج) $\binom{15}{3}$ د) $\binom{14}{2}$

٤٨. به چند طریق ۶ زوج (زن وشوهر) می‌توانند در یک ردیف بنشینند به‌قسمی که زن‌ها کنار هم باشند؟

الف) ۱۲ ب) $2(6!)^2$ ج) $7!\,6!$ د) $6!$

٤٩. در سؤال قبل چند حالت هیچ دو زنی کنار هم نیستند؟

الف) $(6!)^2$ ب) $2(6!)^2$ ج) $7!\,6!$ د) $12!$

۵۰. به چند طریق می‌توان به ۵ سؤال ۴ جوابی پاسخ داد؟

الف) $(5)^4$ ب) $(4)^5$ ج) $\binom{4+5-1}{4}$ د) $\binom{4+5-1}{5}$

۵۱. به چند طریق می‌توان نمره‌ی ماشین ۷ رقمی تهیه کرد اگر بخواهیم دو رقم اوّل از بین ۲۶ حرف انگلیسی و بقیه از ارقام صفر تا ۹ انتخاب شود؟

الف) $26\times25\times10^5$ ب) $(26)^2\times10^5$ ج) 26×10^5 د) $\binom{26}{2}\binom{10}{5}$

۵۲. تعداد اعداد چهار رقمی بدون تکرار با استفاده از ارقام ۰،۱،۳،۵،۷،۸،۶ که بر ۵ قابل‌قسمت باشد چقدر است؟

الف) ۱۸۰ ب) ۲۲۰ ج) ۵۵ د) ۵۰

۵۳. به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر را به دو تیم ۵ نفره تقسیم نمود که با هم بازی کنند؟

الف) $\binom{10}{5}$ ب) $\dfrac{\binom{10}{5}}{2}$ ج) $\dfrac{10!}{2!}$ د) ${}_5P_{10}$

۵۴. از بین ۵ مرد و ۸ زن یک گروه سه نفری انتخاب می‌شوند به چند طریق یک مرد خاص در این گروه هست؟

الف) ۵۰ ب) ۶۶ ج) ۱۴۰ د) ۲۸۶

۵۵. چند عدد سه رقمی زوج می‌توان به‌وسیله‌ی ارقام ۱,۲,۵,۶,۹ ساخت که رقم تکراری نداشته باشند؟

الف) ۶ ب) ۱۲ ج) ۲۴ د) ۳۶

۵۶. به چند طریق می‌توان ۸ سیب را بین ۴ نفر تقسیم کرد که اولاً همه سیب‌ها تقسیم شوند؛ ثانیاً بریدن سیب مجاز نباشد؛ ثالثاً به هر نفر حداقل یک سیب برسد؟

الف) $\binom{8}{3}$ ب) $\binom{7}{4}$ ج) $\binom{8}{4}$ د) $\binom{7}{3}$

۵۷. کدام تساوی درست نیست؟

الف) $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} = 2^n - n - 1$ ب) $\binom{r-3}{k+1} = \binom{r-2}{k} + \binom{r-4}{k-1}$

ج) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ د) $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$

۵۸. به چند طریق می‌توان ده نفر را در پنج اتاق دو نفره نامتمایز جا داد؟

الف) $\dfrac{10!}{(2!)^5}$ ب) $\dfrac{\binom{10}{2,2,2,2,2}}{2!}$ ج) $\dfrac{10!}{5!(2!)^5}$ د) $\binom{10}{5}$

۵۹. به چند طریق پنج زوج می‌توانند دور یک میز بنشینند به‌طوری که هر زوج کنار هم باشند؟

الف) $\dfrac{9!}{5!}$ ب) $5!(2!)^5$ ج) $4!(2!)^5$ د) $4!(2!)^4$

۶۰. به چند طریق می‌توان صد مهره‌ی نامتمایز را در هفت جعبه جای داد به طوری که جعبه‌ی iام حداقل (iزوج) 2^i مهره داشته باشد؟

Payam Noor University

الف) $\binom{۱۶}{۷}$ ب) $\binom{۱۶}{۶}$ ج) $\binom{۲۲}{۷}$ د) $\binom{۲۲}{۱۶}$

۶۱. در صفحه‌ی شطرنج چند مربع وجود دارد؟

الف) ۲۰۱   ب) ۲۰۲   ج) ۲۰۳   د) ۲۰۴

۶۲. به چند طریق می‌توان ۵ نامه را به تصادف در پاکت‌های آنها جای داد به‌طوری‌که هیچ نامه‌ای در پاکت خود نباشد؟

الف) ۴۴   ب) ۲۴   ج) ۱۲۰   د) ۹۶

۶۳. عدد طبیعی N چند مقسوم علیه دارد؟($N = P_۱^{n_۱}\ P_۲^{n_۲} \dots P_k^{n_k}$ که در آن $P_۱,\dots,P_k$ اعداد اوّل متمایزند).

الف) $\prod_{i=۱}^{k} n_i$ ب) $\prod_{i=۱}^{k}(۱+n_i)$ ج) $\prod_{i=۱}^{k}(n_i-۱)$ د) $\prod_{i=۱}^{k}(n_i^۲+۱)$

۶۴. هفت پسر و هشت دختر روی ۱۵ صندلی در یک ردیف می‌نشینند در چند حالت صندلی شماره‌ی ۱۱ توسط یک پسر اشغال می‌شود؟

الف ۱۵!   ب) ۷(۱۴!)   ج) ۸(۱۴!)   د) ۱۵!−۸

۶۵. احتمال آنکه خانواده‌ای که سه فرزند دارند، حداکثر دارای دو فرزند پسر باشد کدام است؟

الف) $\frac{۷}{۸}$ ب) $\frac{۳}{۸}$ ج) $\frac{۱}{۸}$ د) $\frac{۵}{۸}$

۶۶. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A)=\frac{۱}{۴}$، $P(B)=\frac{۱}{۳}$ حاصل $P(A\cup B)$ برابر است با

الف) $\frac{۴}{۱۲}$ ب) $\frac{۳}{۱۲}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۷}{۱۲}$

۶۷. در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی آبی وجود دارد. اگر دو مهره به تصادف خارج کنیم احتمال اینکه دو مهره همرنگ باشند، کدام است؟

الف) $\frac{۲}{۹}$ ب) $\frac{۵}{۹}$ ج) $\frac{۷}{۹}$ د) $\frac{۴}{۹}$

۶۸. یک تیرانداز به‌طور متوسط نصف تیرهای خود را به هدف می‌زند. در صورتی که این تیرانداز ۵بار شلیک نماید احتمال اینکه ۳بار تیر را به هدف بزند چقدر است؟

الف) $\frac{۳}{۱۶}$ ب) $\frac{۵}{۱۶}$ ج) $\frac{۷}{۱۶}$ د) $\frac{۹}{۱۶}$

Payam Noor University

۶۹. یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم احتمال به‌دست آمدن ۱ و ۶ کدام است؟

الف) $\frac{۷}{۳۶}$ ب) $\frac{۵}{۳۶}$ ج) $\frac{۶}{۳۶}$ د) $\frac{۱۱}{۳۶}$

۷۰. یک سکه را ۵بار پرتاب می‌کنیم، احتمال به‌دست آمدن حداقل یک شیر کدام است؟

الف) $\frac{۳}{۳۲}$ ب) $\frac{۱}{۳۲}$ ج) $\frac{۳۱}{۳۲}$ د) $\frac{۱۵}{۳۲}$

۷۱. اگر $P(A)=\frac{۱}{۴}$، $P(B)=\frac{۱}{۶}$، $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$، $P(A\bigcup B)$ کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۱۲}$ ب) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ج) $\frac{۱}{۳}$ د) $\frac{۵}{۱۲}$

۷۲. ۱۰ کارت را به شماره‌های ۱ تا ۱۰ در یک جعبه قرار می‌دهیم. از این جعبه ۳ کارت را پی‌درپی بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه شماره‌های این کارت به ترتیب فرد و زوج و فرد باشد، کدام است؟

الف) $\frac{۱۰}{۷۲۰}$ ب) $\frac{۵}{۳۶}$ ج) $\frac{۵}{۳۰}$ د) $\frac{۵}{۱۲}$

۷۳. اگر A و B دو پیشامد باشند مقدار $P(A\bigcap B)+P(A-B)$ کدام است؟

الف) $P(A\bigcup B)$ ب) $P(B')$ ج) $P(A)$ د) $P(B)$

۷۴. دو مکعب پرتاب می‌شود احتمال اینکه مجموع دو مکعب بیشتر از ۱۰ باشد در صورتی که مکعب اوّل ۵ باشد کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۱}{۶}$ ج) $\frac{۳}{۳}$ د) $\frac{۲}{۵}$

۷۵. دو رقم به‌طور تصادفی از بین ارقام ۱تا ۶ انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم مجموع دو رقم زوج باشد. احتمال اینکه هر دو رقم فرد باشد کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۲}{۳}$ د) $\frac{۲}{۵}$

۷۶. احتمال قبول‌شدن محمد در کنکور به قبول نشدنش $\frac{۱}{۳}$ است، احتمال قبول شدن محمد در کنکور کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۴}$ د) $\frac{۲}{۳}$

Payam Noor University

۷۷. دو مکعب را با هم می‌اندازیم اگر بدانیم مجموع ۵آمده است، احتمال آنکه هر دو عدد اوّل باشد کدام است؟

الف) صفر ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۱}{۳}$ د) $\frac{۲}{۳}$

۷۸. در یک جعبه ۳ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی سفید، و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم، احتمال آنکه هر کدام از یک رنگ باشند، کدام است؟

الف) $\frac{۵}{۱۱}$ ب) $\frac{۳}{۱۱}$ ج) $\frac{۵}{۱۲}$ د) $\frac{۳}{۱۲}$

۷۹. یک سکه را پنج بار پرتاب می‌کنیم احتمال آنکه سه بار خط بیاید کدام است؟

الف) $\frac{۲}{۲۲}$ ب) $\frac{۱}{۳۲}$ ج) $\frac{۵}{۱۶}$ د) $\frac{۳}{۳۲}$

۸۰. اگر $P(A)=\frac{۱}{۳}$، $P(B)=\frac{۱}{۵}$، $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $P(A\cup B)$ کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۶}{۱۵}$ ج) $\frac{۷}{۱۵}$ د) $\frac{۳}{۵}$

۸۱. اگر $P(B)=۰/۵$ ،$P(A\cup B)=۰/۷$، و A و B مستقل باشند، مقدار $P(A)$ کدام است؟

الف) $\frac{۲}{۱۷}$ ب) ۰/۴ ج) $\frac{۲}{۳}$ د. $\frac{۲}{۷}$

۸۲. سه پیچ و سه مهره در یک جعبه قرار دارند اگر ۲ شئ از این ۶ شئ را به تصادف از جعبه بیرون آوریم، احتمال اینکه یک پیچ و یک مهره به‌دست آید، کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۹}$ ج) $\frac{۲}{۳}$ د) $\frac{۳}{۵}$

۸۳. سه شناگر A، B، و C، در یک مسابقه شنا شرکت کردند. در صورتی‌که احتمال برد A با B برابر باشد و احتمال برد A و B هر کدام دو برابر احتمال برد C باشد احتمال برد شناگر A کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۵}$ ب) $\frac{۳}{۱۰}$ ج) $\frac{۲}{۵}$ د) $\frac{۱}{۳}$

Payam Noor University

۸۴. دو عدد حقیقی به تصادف در بازه‌ی $[۰,۲]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع مربعات آن دو عدد کوچکتر یا مساوی ۴ باشد، کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{\pi}{۴}$ د) $\frac{\pi}{۸}$

۸۵. عددی به تصادف از فضای نمونه‌ای $\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}$ انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد انتخاب شده، مضرب سه است، احتمال آنکه عدد رو شده زوج باشد، چقدر است؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۱}{۹}$ ج) $\frac{۴}{۹}$ د) $\frac{۱}{۴}$

۸۶. اگر A و B، دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=۰/۲$، $P(A\cup B)=۰/۴$، مقدار $P(B)$ کدام است؟

الف) ۰/۳ ب) ۰/۲ ج) ۰/۲۵ د) ۰/۱۵

۸۷. از ظرفی با ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه، ۲ مهره با هم بیرون می‌کشیم، احتمال آنکه حداقل یک مهره سیاه بیرون آمده باشد، کدام است؟

الف) $\frac{۳}{۸}$ ب) $\frac{۶}{۱۰}$ ج) $\frac{۷}{۸}$ د) $\frac{۹}{۱۰}$

۸۸. توزیع درصد لامپ‌های ۶۰ و ۱۰۰ وات از دو کارخانه‌ی (الف) و (ب) به صورت زیر است. احتمال آنکه لامپی از کارخانه (الف) ۱۰۰ وات باشد کدام است؟

نوع کارخانه	الف	ب
۱۰۰	۲۰	۲۵
۶۰	۱۵	۲۰

الف) $\frac{۴}{۷}$ ب) $\frac{۷}{۲۰}$ ج) $\frac{۵}{۱۸}$ د) $\frac{۱}{۵}$

۸۹. در پرتاب دو تاس A و B همانند، مشروط بر آنکه بدانیم مجموع دو عدد مضرب ۶ باشند، احتمال آنکه هر دو عدد زوج باشد کدام است؟

الف) $\frac{۲}{۵}$ ب) $\frac{۳}{۵}$ ج) $\frac{۵}{۸}$ د) $\frac{۱}{۲}$

۹۰. اگر بخواهیم از بین ۷ گلوله‌ی سفید و ۸ گلوله‌ی قرمز یکی را انتخاب کنیم، تعداد حالت‌های ممکن چندتاست؟

Payam Noor University

الف) ۵۶ ب) ۶۵ ج) ۷ د) ۸

۹۱. به چند طریق می‌توان از بین ۱۰نفر یک رئیس، یک معاون، یک خزانه‌دار انتخاب کرد؟

الف) !۱۰ ب) $\binom{۱۰}{۳}$ ج) ${}_{۱۰}P_{۳}$ د) !۷

۹۲. اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشد کدام گزاره درست است؟

الف) $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ ب) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

ج) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ د) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

۹۳. اگر $P(A)=۰/۲$، $P(B)=۰/۲۵$، و $P(A\cap B)=۰/۰۵$ آنگاه مقدار $P(A|B)$ کدام است؟

الف) ۰/۲ ب) ۰/۲۵ ج) ۰/۰۲ د) ۰/۷۵

۹۴. در جعبه‌ی شماره‌ی ۱، تعداد ۲مهره‌ی قرمز، ۳مهره‌ی سفید و در جعبه‌ی شماره‌ی ۲ تعداد ۴ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی سفید قرار دارد. یکی از جعبه‌ها را به تصادف اتخاب و سپس مهره‌ای از آن به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مهره‌ی انتخاب شده قرمز باشد برابر است با

الف) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ب) $\frac{۱۹}{۴۵}$ ج) $\frac{۴}{۹}$ د) $\frac{۳}{۷}$

۹۵. در سئوال قبل اگر مهره قرمز باشد چقدر احتمال دارد که از ظرف شماره‌ی ۱ انتخاب شده باشد؟

الف) $\frac{۸}{۱۹}$ ب) $\frac{۹}{۱۹}$ ج) $\frac{۱۰}{۱۹}$ د) $\frac{۷}{۱۹}$

۹۶. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند کدام نادرست است؟

الف) $P(A|B)=P(A)$ ب) $P(B|A)=P(B)$

ج) $P(A\cup B)=P(A).P(B)$ د) $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

۹۷. مقدار $P(A|A\cup B)$ برابر است با

Payam Noor University

الف) $\frac{1}{P(A\cup B)}$ ب) $1+P(A|B)$ ج) $P(A)$ د) $\frac{P(A)}{P(A\cup B)}$

۹۸. A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای Sاند به‌طوری‌که $P(A)=1$، در این صورت

الف) A و B دو پیشامد ناسازگارند ب) $A-B=B^c$

ج) $A=S$ د) A از B مستقل است

۹۹. فرض کنید برای دو پیشامد A و B داشته باشیم: $P(A)=0/59$، $P(B)=0/3$، $P(A\cap B)=0/21$. در این صورت مقدار $P(A'|B)$ برابر است با

الف) ۰/۶۹ ب) ۰/۴۶ ج) ۰/۳ د) ۰/۲۱

۱۰۰. A و B دو پیشامد مستقل‌اند و $P(A)=0/3$، $P(B)=0/2$. حاصل $P(A\cup B)$ برابر است با

الف) ۰/۴ ب) ۰/۴۴ ج) ۰/۵ د) ۰/۵۶

۱۰۱. A و B مستقل‌اند، $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$، $P(A)=\frac{1}{2}$. مقدار $P(B)$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{16}$ ج) $\frac{3}{8}$ د) $\frac{5}{8}$

۱۰۲. از ظرفی با دو مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه، دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه حداقل یک مهره‌ی سیاه بیرون آمده باشد، کدام است؟

الف) $\frac{3}{8}$ ب) $\frac{6}{10}$ ج) $\frac{7}{8}$ د) $\frac{9}{10}$

۱۰۳. امید ریاضی تابع توزیع زیر کدام است؟

x	۲	۳	۵
$f(x)$	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

الف) ۱۰ ب) ۳ ج) $\frac{5}{6}$ د) $\frac{1}{6}$

۱۰۴. اگر جدول توزیع X به صورت

$X=x$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۲/۵	۳
$P(X=x)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$

باشد، $E(X-2)$ برابر است با

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴

۱۰۵. در صورتی‌که $f(x)=\begin{cases} Kx & ۰\le x\le ۸ \\ ۰ & \text{سایرجاها} \end{cases}$ یک تابع چگالی احتمال از متغیر پیوسته X باشد، مقدار K کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۱۶}$ ب) $\frac{۱}{۸}$ ج) $\frac{۱}{۳۲}$ د) $\frac{۱}{۶۴}$

۱۰۶. متغیر تصادفی X دارای میانگین ۵ و واریانس ۴ است. متغیر تصادفی Y از رابطه‌ی $Y=۲X-۳$ به دست می‌آید. میانگین و انحراف معیار متغیر به ترتیب برابر است با

الف) ۸,۱۰ ب) ۷,۸ ج) ۴,۷ د) ۴,۱۰

۱۰۷. تابع چگالی متغیر تصادفی X به صورت زیر است.

x	-۱	۱	۲
$f(x)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$

مقدار واریانس X برابر است با

الف) $\frac{۱}{۳۶}$ ب) $\frac{۵۳}{۳۶}$ ج) $\frac{۱۳}{۶}$ د) $\frac{۲۵}{۶}$

۱۰۸. به ازای چه مقداری از A تابع زیر یک تابع چگالی احتمال است؟

x	a	b	c
$f(x)$	$\frac{۱-A}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱+A}{۳}$

الف) $-۱<A<۱$ ب) $-۲<A<۱$ ج) $۱<A<۲$ د) $۰<A<۱$

۱۰۹. میانه‌ی متغیر تصادفی با تابع توزیع $F(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ x^۲ & ۰\le x<۱ \\ ۱ & ۱\le x \end{cases}$ چقدر است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{۶}{۲۱}$ د) $\frac{۱۵}{۲۱}$

۱۱۰. اگر $f(x,y)=\frac{۱}{\pi},\quad x^۲+y^۲<۱$ ، آنگاه $P(X+Y<۱)$ برابر است با

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۲\pi}$ ج) $\frac{۴}{۳}+\frac{۱}{۲\pi}$ د) $\frac{۳}{۴}$

۱۱۱. اگر $y=۱,۲,۳$ و $x=۱,۲$ ؛ $f(x,y)=\frac{x+y}{۲۱}$ ، $P(X+Y\ge ۳)$ برابر است با

الف) ۱ ب) $\frac{۱۹}{۲۱}$ ج) $\frac{۶}{۲۱}$ د) $\frac{۱۵}{۲۱}$

۱۱۲. اگر $M_X(t)=\frac{1}{8}(1+e^t)^3$، تابع مولد $Y=3-X$ چقدر است؟

الف) $M_X(t)$ ب) $e^{3t}(1+e^t)^3$ ج) $\frac{1}{8}(1+e^t)$ د) $e^{3t}\frac{1}{8}$

۱۱۳. اگر $\operatorname{var}(X+Y)=4$ و $\operatorname{var}(X-Y)=6$ آنگاه مقدار $\operatorname{cov}(X,Y)$ برابر است با

الف) $-\frac{1}{2}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{-3}{2}$ د) $\frac{1}{4}$

۱۱٤. اگر $E(X)=2$ و $E(X^2)=6$ دوّمین گشتاور عامل برابر است با

الف) ۶ ب) ۴ ج) ۲ د) ۸

۱۱۵. اگر بدانیم که $X+Y=4$ آنگاه $E(X\mid Y=4)$ برابر است با

الف) ۴ ب) ۸ ج) -4 د) صفر

۱۱٦. اگر $f(x,y)=\begin{cases} kxy & x=1,2,3 \quad y=1,2,3 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$، احتمال توأم X و Y باشد مقدار $f(1,1)$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{36}$ ب) $\frac{2}{36}$ ج) $\frac{3}{36}$ د) $\frac{4}{36}$

۱۱۷. اگر $\operatorname{var}(X)=26$، $\operatorname{var}(Y)=25$، $\operatorname{cov}(X,Y)=-10$، مقدار $\operatorname{cov}(3X+2,2Y-1)$ و $\operatorname{var}(X-Y)$ برابر است با

الف) $-60, 20$ ب) $-120, 46$ ج) $-40, 11$ د) $-60, 71$

۱۱۸. برای توزیع احتمال جدول زیر، مقدار $E(2X-8)^2$ برابر است با

x	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۰/۱	۰/۳	۰/۳	۰/۲	۰/۱

الف) ۲/۵ ب) ۳/۵ ج) ۴/۲ د) ۵/۲

۱۱۹. توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است.

x	-1	0	1	2
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

واریانس متغیر تصادفی λX است

الف) $\frac{36}{64}$ ب) صفر ج) $\frac{5}{16}$ د) ۱

۱۲۰. عبارت $E(X-\mu[X-\mu])$ برابر است با

الف) صفر ب) امید ریاضی X

ج) امید ریاضی انحراف‌ها د) واریانس X

۱۲۱. ۷۰ درصد تولیدات کارخانه‌ای سالم است. یک نمونه‌ی ۲۰تایی از محصولات این کارخانه انتخاب می‌کنیم، انتظار می‌رود چند کالا معیوب باشند؟

الف) ۸ ب) ۶ ج) ۱۲ د) ۱۴

۱۲۲. احتمال آنکه یک دانه‌ی لوبیا جوانه بزند ۰/۸ است. اگر چهار دانه از این لوبیا را بکاریم احتمال آنکه فقط ۳تای آن جوانه بزند چقدر است؟

الف) ۰/۲۴۹۶ ب) ۰/۴۰۹۶ ج) ۰/۸۳۳۳ د) ۰/۱۰۳۳

۱۲۳. نوعی واکسن با احتمال ۹۰ درصد برای پرندگان تأثیر مثبت دارد. اگر ۵ مورد از این واکسن را به کار رود با کدام احتمال فقط ۳ مورد آن تأثیر مثبت خواهد داشت؟

الف) ۰/۰۷۲۹ ب) ۰/۰۸۱ ج) ۷۲۹/۰ د) ۸۱

۱۲٤. انحراف معیار توزیع دوجمله‌ای کدام است؟

الف) $\sqrt{npq}$ ب) $\sqrt{np}$ ج) $n(1-q)$ د) npq

۱۲۵. اگر سطح زیر منحنی نرمال استاندارد بین صفر و یک ۰/۳۴ باشد سمت راست عدد ۱ برابر است با

الف) ۰/۳۴ ب) ۰/۱۶ ج) ۰/۶۸ د) ۰/۸۴

۱۲٦. در سئوال قبل چپ ۱ برابر است با

الف) ۰/۱۶ ب) ۰/۳۴ ج) ۰/۸۴ د) ۰/۶۸

۱۲۷. برای تابع چگالی $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$ میانه‌ی توزیع کدام است؟

الف) $\ln^2\lambda$ ب) $\frac{\ln^2\lambda}{\lambda}$ ج) $\frac{-\ln^2\lambda}{\lambda}$ د) λ

۱۲۸. تعداد کلمات غلط ماشین شده در یک صفحه از یک کتاب از توزیع پواسون با پارامتر $\lambda=\frac{1}{2}$ تبعیت می‌کند. احتمال اینکه در دو صفحه حداقل یک غلط وجود داشته باشد، چقدر است؟

الف) $1-e^{-\frac{1}{2}}$ ب) $1-e^{-1}$ ج) $e^{-\frac{1}{2}}$ د) e^{-1}

۱۲۹. فرض کنید $f_X(x)$ چگالی پواسون باشد. کدام‌یک از روابط زیر صحیح است:

الف) $f_X(x+۱)=\frac{\lambda+۱}{\lambda}f_X(x)$　　ب) $f_X(x+۱)=\frac{\lambda}{\lambda+۱}f_X(x)$

ج) $f_X(x+۱)=\frac{\lambda}{x}f_X(x)$　　د) $f_X(x+۱)=\frac{\lambda}{x+۱}f_X(x)$

۱۳۰. متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال نرمال به‌صورت زیر است. میانگین و واریانس توزیع کدام است؟

$$f_X(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{x^۲-۲x+۱}{۸}},\qquad x\in R.$$

الف) $\sigma^۲=۴,\mu=۱$　　ب) $\sigma^۲=۴,\mu=۲$

ج) $\sigma^۲=۲,\mu=۲$　　د) $\sigma^۲=۱,\mu=۱$

۱۳۱. اگر X دارای توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(۰,۲)$ باشد امید ریاضی و واریانس X برابر است با

الف) $۲,\frac{۱}{۳}$　　ب) $۲,\frac{۱}{۴}$　　ج) $۱,\frac{۱}{۳}$　　د) $۱,\frac{۱}{۴}$

۱۳۲. در توزیع پواسون با پارامتر λ نسبت $\frac{E^۲(X)}{\text{var}(X)}$ چقدر است؟

الف) ۱　　ب) λ　　ج) $\frac{۱}{\lambda}$　　د) $۱+\lambda$

۱۳۳. اگر میانگین و واریانس متغیر تصادفی X به ترتیب μ و $\sigma^۲$ باشد انحراف استاندارد متغیر تصادفی $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ کدام است؟

الف) صفر　　ب) σ　　ج) $\sigma^۲$　　د) یک

۱۳٤. برای توزیع $x=۰,۱,۲,۳,۴$; $P(X=x)=\binom{۴}{x}\left(\frac{۱}{۴}\right)^x\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۴x}$، واریانس متغیر تصادفی X کدام است؟

الف) ۱　　ب) $\frac{۳}{۴}$　　ج) $\frac{۴}{۳}$　　د) ۴

۱۳۵. احتمال آنکه بازیکنی توپی را وارد سبد کند $p=\frac{۲}{۱۰}$ است، اگر این بازیکن ۵بار توپ را به‌طرف سبد رها کند انتظار می‌رود چند بار موفق شود؟

الف) ۵ بار　　ب) یک بار　　ج) ۸ بار　　د) ۲ بار

۱۳٦. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با $\mu=۵۰$ و $\delta=۴$ باشد هرگاه

Payam Noor University

$P(X>b)=0/5$ آنگاه مقدار b کدام است؟

الف) $\frac{50}{4}$ ب) ۵۰ ج) $\frac{50}{2}$ د) $\frac{50}{16}$

۱۳۷. میانگین و واریانس نرمال استاندارد به ترتیب برابرند با

الف) صفر و یک ب) یک و صفر ج) یک و یک د) صفر و صفر

۱۳۸. اگر تعداد تلفن‌های مزاحم به یک مرکز تلفن به‌طور متوسط در هر ساعت ۳ تلفن فرض شود احتمال دقیقاً دو تلفن مزاحم در ساعتی معین زده شود کدام است؟

الف) $8e^{-3}$ ب) $\frac{9}{2}e^{-3}$ ج) $4e^{-2}$ د) $\frac{1}{2}e^{-3}$

Payam Noor University

جدول ۱. احتمال‌های تجمعی دو جمله‌ای $P[X\le c]=\sum_{x=\circ}^{c}\binom{n}{x}p^{x}(\text{۱}-p)^{n-x}$

							p					
	c	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۰/۹۵
n=۱	۰	۰/۹۵۰	۰/۹۰۰	۰/۸۰۰	۰/۷۰۰	۰/۶۰۰	۰/۵۰۰	۰/۴۰۰	۰/۳۰۰	۰/۲۰۰	۰/۱۰۰	۰/۰۵۰
	۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۲	۰	۰/۹۰۳	۰/۸۱۰	۰/۶۴۰	۰/۴۹۰	۰/۳۶۰	۰/۲۵۰	۰/۱۶۰	۰/۰۹۰	۰/۰۴۰	۰/۰۱۰	۰/۰۰۳
	۱	۰/۹۹۸	۰/۹۹۰	۰/۹۶۰	۰/۹۱۰	۰/۸۴۰	۰/۷۵۰	۰/۶۴۰	۰/۵۱۰	۰/۳۶۰	۰/۱۹۰	۰/۰۹۸
	۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۳	۰	۰/۸۵۷	۰/۷۲۹	۰/۵۱۲	۰/۳۴۳	۰/۲۱۶	۰/۱۲۵	۰/۰۶۴	۰/۰۲۷	۰/۰۰۸	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰
	۱	۰/۹۹۳	۰/۹۷۲	۰/۸۹۶	۰/۷۸۴	۰/۶۴۸	۰/۵۰۰	۰/۳۵۲	۰/۲۱۶	۰/۱۰۴	۰/۰۲۸	۰/۰۰۷
	۲	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۲	۰/۹۷۳	۰/۹۳۶	۰/۸۷۵	۰/۷۸۴	۰/۶۵۷	۰/۴۸۸	۰/۲۷۱	۰/۱۴۳
	۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۴	۰	۰/۸۱۵	۰/۶۵۶	۰/۴۱۰	۰/۲۴۰	۰/۱۳۰	۰/۰۶۳	۰/۰۲۶	۰/۰۰۸	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۹۸۶	۰/۹۴۸	۰/۸۱۹	۰/۶۵۲	۰/۴۷۵	۰/۳۱۳	۰/۱۷۹	۰/۰۸۴	۰/۰۲۷	۰/۰۰۴	۰/۰۰۰
	۲	۱/۰۰۰	۰/۹۹۶	۰/۹۷۳	۰/۹۱۶	۰/۸۲۱	۰/۶۸۸	۰/۵۲۵	۰/۳۴۸	۰/۱۸۱	۰/۰۵۲	۰/۰۱۴
	۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۹۲	۰/۹۷۴	۰/۹۳۸	۰/۸۷۰	۰/۷۶۰	۰/۵۹۰	۰/۳۴۴	۰/۱۸۵
	۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۵	۰	۰/۷۷۴	۰/۵۹۰	۰/۳۲۸	۰/۱۶۸	۰/۰۷۸	۰/۰۳۱	۰/۰۱۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۹۷۷	۰/۹۱۹	۰/۷۳۷	۰/۵۲۸	۰/۳۳۷	۰/۱۸۸	۰/۰۸۷	۰/۰۳۱	۰/۰۰۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۲	۰/۹۹۹	۰/۹۹۱	۰/۹۴۲	۰/۸۳۷	۰/۶۸۳	۰/۵۰۰	۰/۳۱۷	۰/۱۶۳	۰/۰۵۸	۰/۰۰۹	۰/۰۰۱
	۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۳	۰/۹۶۹	۰/۹۱۳	۰/۸۱۳	۰/۶۶۳	۰/۴۷۲	۰/۲۶۳	۰/۰۸۱	۰/۰۲۳
	۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۹۰	۰/۹۶۹	۰/۹۲۲	۰/۸۳۲	۰/۶۷۲	۰/۴۱۰	۰/۲۲۶
	۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۶	۰	۰/۷۳۵	۰/۵۳۱	۰/۲۶۲	۰/۱۱۸	۰/۰۴۷	۰/۰۱۶	۰/۰۰۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۹۶۷	۰/۸۸۶	۰/۶۵۵	۰/۴۲۰	۰/۲۳۳	۰/۱۰۹	۰/۰۴۱	۰/۰۱۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۲	۰/۹۹۸	۰/۹۸۴	۰/۹۰۱	۰/۷۴۴	۰/۵۴۴	۰/۳۴۴	۰/۱۷۹	۰/۰۷۰	۰/۰۱۷	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰
	۳	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۳	۰/۹۳۰	۰/۸۲۱	۰/۶۵۶	۰/۴۵۶	۰/۲۵۶	۰/۰۹۹	۰/۰۱۶	۰/۰۰۲
	۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۸۹	۰/۹۵۹	۰/۸۹۱	۰/۷۶۷	۰/۵۸۰	۰/۳۴۵	۰/۱۱۴	۰/۰۳۳
	۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۶	۰/۹۸۴	۰/۹۵۳	۰/۸۸۲	۰/۷۳۸	۰/۴۶۹	۰/۲۶۵
	۶	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۷	۰	۰/۶۹۸	۰/۴۷۸	۰/۲۱۰	۰/۰۸۲	۰/۰۲۸	۰/۰۰۸	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۹۵۶	۰/۸۵۰	۰/۵۷۷	۰/۳۲۹	۰/۱۵۹	۰/۰۶۳	۰/۰۱۹	۰/۰۰۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۲	۰/۹۹۶	۰/۹۷۴	۰/۸۵۲	۰/۶۴۷	۰/۴۲۰	۰/۲۲۷	۰/۰۹۶	۰/۰۲۹	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۳	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۹۶۷	۰/۸۷۴	۰/۷۱۰	۰/۵۰۰	۰/۲۹۰	۰/۱۲۶	۰/۰۳۳	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰
	۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۵	۰/۹۷۱	۰/۹۰۴	۰/۷۷۳	۰/۵۸۰	۰/۳۵۳	۰/۱۴۸	۰/۰۲۶	۰/۰۰۴
	۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۶	۰/۹۸۱	۰/۹۳۸	۰/۸۴۱	۰/۶۷۱	۰/۴۲۳	۰/۱۵۰	۰/۰۴۴
	۶	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۹۲	۰/۹۷۲	۰/۹۱۸	۰/۷۹۰	۰/۵۲۲	۰/۳۰۲
	۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰

Payam Noor University

ادامه‌ی جدول ١

							p					
	c	٠/٠٥	٠/١	٠/٢	٠/٣	٠/٤	٠/٥	٠/٦	٠/٧	٠/٨	٠/٩	٠/٩٥
n=٨	٠	٠/٦٦٣	٠/٤٣٠	٠/١٦٨	٠/٠٥٨	٠/٠١٧	٠/٠٠٤	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١	٠/٩٤٣	٠/٨١٣	٠/٥٠٣	٠/٢٥٥	٠/١٠٦	٠/٠٣٥	٠/٠٠٩	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٢	٠/٩٩٤	٠/٩٦٢	٠/٧٩٧	٠/٥٥٢	٠/٣١٥	٠/١٤٥	٠/٠٥٠	٠/٠١١	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٣	١/٠٠٠	٠/٩٩٥	٠/٩٤٤	٠/٨٠٦	٠/٥٩٤	٠/٣٦٣	٠/١٧٤	٠/٠٥٨	٠/٠١٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٤	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٠	٠/٩٤٢	٠/٨٢٦	٠/٦٣٧	٠/٤٠٦	٠/١٩٤	٠/٠٥٦	٠/٠٠٥	٠/٠٠٠
	٥	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٨٩	٠/٩٥٠	٠/٨٥٥	٠/٦٨٥	٠/٤٤٨	٠/٢٠٣	٠/٠٣٨	٠/٠٠٦
	٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩١	٠/٩٦٥	٠/٨٩٤	٠/٧٤٥	٠/٤٩٧	٠/١٨٧	٠/٠٥٧
	٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٦	٠/٩٨٣	٠/٩٤٢	٠/٨٣٢	٠/٥٧٠	٠/٣٣٧
	٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠
n=٩	٠	٠/٦٣٠	٠/٣٨٧	٠/١٣٤	٠/٠٤٠	٠/٠١٠	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١	٠/٩٢٩	٠/٧٧٥	٠/٤٣٦	٠/١٩٦	٠/٠٧١	٠/٠٢٠	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٢	٠/٩٩٢	٠/٩٤٧	٠/٧٣٨	٠/٤٦٣	٠/٢٣٢	٠/٠٩٠	٠/٠٢٥	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٣	٠/٩٩٩	٠/٩٩٢	٠/٩١٤	٠/٧٣٠	٠/٤٨٣	٠/٢٥٤	٠/٠٩٩	٠/٠٢٥	٠/٠٠٣	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٤	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٨٠	٠/٩٠١	٠/٧٣٣	٠/٥٠٠	٠/٢٦٧	٠/٠٩٩	٠/٠٢٠	٠/٠٠١	٠/٠٠٠
	٥	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٧	٠/٩٧٥	٠/٩٠١	٠/٧٤٦	٠/٥١٧	٠/٢٧٠	٠/٠٨٦	٠/٠٠٨	٠/٠٠١
	٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٧٥	٠/٩١٠	٠/٧٦٨	٠/٥٣٧	٠/٢٦٢	٠/٠٥٣	٠/٠٠٨
	٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٨٠	٠/٩٢٩	٠/٨٠٤	٠/٥٦٤	٠/٢٢٥	٠/٠٧١
	٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٩٠	٠/٩٦٠	٠/٨٦٦	٠/٦١٣	٠/٣٧٠
	٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠
n=١٠	٠	٠/٥٩٩	٠/٣٤٩	٠/١٠٧	٠/٠٢٨	٠/٠٠٦	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١	٠/٩١٤	٠/٧٣٦	٠/٣٧٦	٠/١٤٩	٠/٠٤٦	٠/٠١١	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٢	٠/٩٨٨	٠/٩٣٠	٠/٦٧٨	٠/٣٨٣	٠/١٦٧	٠/٠٥٥	٠/٠١٢	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٣	٠/٩٩٩	٠/٩٨٧	٠/٨٧٩	٠/٦٥٠	٠/٣٨٢	٠/١٧٢	٠/٠٥٥	٠/٠١١	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٤	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٦٧	٠/٨٥٠	٠/٦٣٣	٠/٣٧٧	٠/١٦٦	٠/٠٤٧	٠/٠٠٦	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٥	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٤	٠/٩٥٣	٠/٨٣٤	٠/٦٢٣	٠/٣٦٧	٠/١٥٠	٠/٠٣٣	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠
	٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٨٩	٠/٩٤٥	٠/٨٢٨	٠/٦١٨	٠/٣٥٠	٠/١٢١	٠/٠١٣	٠/٠٠١
	٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٨٨	٠/٩٤٥	٠/٨٣٣	٠/٦١٧	٠/٣٢٢	٠/٠٧٠	٠/٠١٢
	٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٨٩	٠/٩٥٤	٠/٨٥١	٠/٦٢٤	٠/٢٦٤	٠/٠٨٦
	٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٤	٠/٩٧٢	٠/٨٩٣	٠/٦٥١	٠/٤٠١
	١٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠
n=١١	٠	٠/٥٦٩	٠/٣١٤	٠/٠٨٦	٠/٠٢٠	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١	٠/٨٩٨	٠/٦٩٧	٠/٣٢٢	٠/١١٣	٠/٠٣٠	٠/٠٠٦	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٢	٠/٩٨٥	٠/٩١٠	٠/٦١٧	٠/٣١٣	٠/١١٩	٠/٠٣٣	٠/٠٠٦	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٣	٠/٩٩٨	٠/٩٨١	٠/٨٣٩	٠/٥٧٠	٠/٢٩٦	٠/١١٣	٠/٠٢٩	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٤	١/٠٠٠	٠/٩٩٧	٠/٩٥٠	٠/٧٩٠	٠/٥٣٣	٠/٢٧٤	٠/٠٩٩	٠/٠٢٢	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٥	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٨٨	٠/٩٢٢	٠/٧٥٣	٠/٥٠٠	٠/٢٤٧	٠/٠٧٨	٠/٠١٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٧٨	٠/٩٠١	٠/٧٢٦	٠/٤٦٧	٠/٢١٠	٠/٠٥٠	٠/٠٠٣	٠/٠٠٠
	٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٧١	٠/٨٨٧	٠/٧٠٤	٠/٤٣٠	٠/١٦١	٠/٠١٩	٠/٠٠٢
	٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٤	٠/٩٦٧	٠/٨٨١	٠/٦٨٧	٠/٣٨٣	٠/٠٩٠	٠/٠١٥
	٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٤	٠/٩٧٠	٠/٨٨٧	٠/٦٧٨	٠/٣٠٣	٠/١٠٢
	١٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٨٠	٠/٩١٤	٠/٦٨٦	٠/٤٣١
	١١	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠

Payam Noor University

ادامه‌ی جدول ١

	c	p: ٠/٠٥	٠/١	٠/٢	٠/٣	٠/٤	٠/٥	٠/٦	٠/٧	٠/٨	٠/٩	٠/٩٥
n=١٢	٠	٠/٥٤٠	٠/٢٨٢	٠/٠٦٩	٠/٠١٤	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١	٠/٨٨٢	٠/٦٥٩	٠/٢٧٥	٠/٠٨٥	٠/٠٢٠	٠/٠٠٣	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٢	٠/٩٨٠	٠/٨٨٩	٠/٥٥٨	٠/٢٥٣	٠/٠٨٣	٠/٠١٩	٠/٠٠٣	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٣	٠/٩٩٨	٠/٩٧٤	٠/٧٩٥	٠/٤٩٣	٠/٢٢٥	٠/٠٧٣	٠/٠١٥	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٤	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٢٧	٠/٧٢٤	٠/٤٣٨	٠/١٩٤	٠/٠٥٧	٠/٠٠٩	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٥	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٨١	٠/٨٨٢	٠/٦٦٥	٠/٣٨٧	٠/١٥٨	٠/٠٣٩	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٦١	٠/٨٤٢	٠/٦١٣	٠/٣٣٥	٠/١١٨	٠/٠١٩	٠/٠٠١	٠/٠٠٠
	٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩١	٠/٩٤٣	٠/٨٠٦	٠/٥٦٢	٠/٢٧٦	٠/٠٧٣	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠
	٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٨٥	٠/٩٢٧	٠/٧٧٥	٠/٥٠٧	٠/٢٠٥	٠/٠٢٦	٠/٠٠٢
	٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٧	٠/٩٨١	٠/٩١٧	٠/٧٤٧	٠/٤٤٢	٠/١١١	٠/٠٢٠
	١٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٧	٠/٩٨٠	٠/٩١٥	٠/٧٢٥	٠/٣٤١	٠/١١٨
	١١	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٨٦	٠/٩٣١	٠/٧١٨	٠/٤٦٠
	١٢	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠
n=١٣	٠	٠/٥١٣	٠/٢٥٤	٠/٠٥٥	٠/٠١٠	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١	٠/٨٦٥	٠/٦٢١	٠/٢٣٤	٠/٠٦٤	٠/٠١٣	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٢	٠/٩٧٥	٠/٨٦٦	٠/٥٠٢	٠/٢٠٢	٠/٠٥٨	٠/٠١١	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٣	٠/٩٩٧	٠/٩٦٦	٠/٧٤٧	٠/٤٢١	٠/١٦٩	٠/٠٤٦	٠/٠٠٨	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٤	١/٠٠٠	٠/٩٩٤	٠/٩٠١	٠/٦٥٤	٠/٣٥٣	٠/١٣٣	٠/٠٣٢	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٥	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٧٠	٠/٨٣٥	٠/٥٧٤	٠/٢٩١	٠/٠٩٨	٠/٠١٨	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٣	٠/٩٣٨	٠/٧٧١	٠/٥٠٠	٠/٢٢٩	٠/٠٦٢	٠/٠٠٧	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٨٢	٠/٩٠٢	٠/٧٠٩	٠/٤٢٦	٠/١٦٥	٠/٠٣٠	٠/٠٠١	٠/٠٠٠
	٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٦٨	٠/٨٦٧	٠/٦٤٧	٠/٣٤٦	٠/٠٩٩	٠/٠٠٦	٠/٠٠٠
	٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٢	٠/٩٥٤	٠/٨٣١	٠/٥٧٩	٠/٢٥٣	٠/٠٣٤	٠/٠٠٣
	١٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٨٩	٠/٩٤٢	٠/٧٩٨	٠/٤٩٨	٠/١٣٤	٠/٠٢٥
	١١	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٨٧	٠/٩٣٦	٠/٧٦٦	٠/٣٧٩	٠/١٣٥
	١٢	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٠	٠/٩٤٥	٠/٧٤٦	٠/٤٨٧
	١٣	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠
n=١٤	٠	٠/٤٨٨	٠/٢٢٩	٠/٠٤٤	٠/٠٠٧	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١	٠/٨٤٧	٠/٥٨٥	٠/١٩٨	٠/٠٤٧	٠/٠٠٨	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٢	٠/٩٧٠	٠/٨٤٢	٠/٤٤٨	٠/١٦١	٠/٠٤٠	٠/٠٠٦	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٣	٠/٩٩٦	٠/٩٥٦	٠/٦٩٨	٠/٣٥٥	٠/١٢٤	٠/٠٢٩	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٤	١/٠٠٠	٠/٩٩١	٠/٨٧٠	٠/٥٨٤	٠/٢٧٩	٠/٠٩٠	٠/٠١٨	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٥	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٥٦	٠/٧٨١	٠/٤٨٦	٠/٢١٢	٠/٠٥٨	٠/٠٠٨	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٨٨	٠/٩٠٧	٠/٦٩٢	٠/٣٩٥	٠/١٥٠	٠/٠٣١	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٦٩	٠/٨٥٠	٠/٦٠٥	٠/٣٠٨	٠/٠٩٣	٠/٠١٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٢	٠/٩٤٢	٠/٧٨٨	٠/٥١٤	٠/٢١٩	٠/٠٤٤	٠/٠٠١	٠/٠٠٠
	٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٨٢	٠/٩١٠	٠/٧٢١	٠/٤١٦	٠/١٣٠	٠/٠٠٩	٠/٠٠٠
	١٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٧١	٠/٨٧٦	٠/٦٤٥	٠/٣٠٢	٠/٠٤٤	٠/٠٠٤
	١١	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٤	٠/٩٦٠	٠/٨٣٩	٠/٥٥٢	٠/١٥٨	٠/٠٣٠
	١٢	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٢	٠/٩٥٣	٠/٨٠٢	٠/٤١٥	٠/١٥٣
	١٣	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٣	٠/٩٥٦	٠/٧٧١	٠/٥١٢
	١٤	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠

Payam Noor University

ادامه‌ی جدول ۱

	c	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۰/۹۵
n=۱۵	۰	۰/۴۶۳	۰/۲۰۶	۰/۰۳۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۸۲۹	۰/۵۴۹	۰/۱۶۷	۰/۰۳۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۲	۰/۹۶۴	۰/۸۱۶	۰/۳۹۸	۰/۱۲۷	۰/۰۲۷	۰/۰۰۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۳	۰/۹۹۵	۰/۹۴۴	۰/۶۴۸	۰/۲۹۷	۰/۰۹۱	۰/۰۱۸	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۴	۰/۹۹۹	۰/۹۸۷	۰/۸۳۶	۰/۵۱۵	۰/۲۱۷	۰/۰۵۹	۰/۰۰۹	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۵	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۳۹	۰/۷۲۲	۰/۴۰۳	۰/۱۵۱	۰/۰۳۴	۰/۰۰۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۶	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۸۲	۰/۸۶۹	۰/۶۱۰	۰/۳۰۴	۰/۰۹۵	۰/۰۱۵	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۶	۰/۹۵۰	۰/۷۸۷	۰/۵۰۰	۰/۲۱۳	۰/۰۵۰	۰/۰۰۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۵	۰/۹۰۵	۰/۶۹۶	۰/۳۹۰	۰/۱۳۱	۰/۰۱۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۶	۰/۹۶۶	۰/۸۴۹	۰/۵۹۷	۰/۲۷۸	۰/۰۶۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰
	۱۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۱	۰/۹۴۱	۰/۷۸۳	۰/۴۸۵	۰/۱۶۴	۰/۰۱۳	۰/۰۰۱
	۱۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۸۲	۰/۹۰۹	۰/۷۰۳	۰/۳۵۲	۰/۰۵۶	۰/۰۰۵
	۱۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۶	۰/۹۷۳	۰/۸۷۳	۰/۶۰۲	۰/۱۸۴	۰/۰۳۶
	۱۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۵	۰/۹۶۵	۰/۸۳۳	۰/۴۵۱	۰/۱۷۱
	۱۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۵	۰/۹۶۵	۰/۷۹۴	۰/۵۳۷
	۱۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۱۶	۰	۰/۴۴۰	۰/۱۸۵	۰/۰۲۸	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۸۱۱	۰/۵۱۵	۰/۱۴۱	۰/۰۲۶	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۲	۰/۹۵۷	۰/۷۸۹	۰/۳۵۲	۰/۰۹۹	۰/۰۱۸	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۳	۰/۹۹۳	۰/۹۳۲	۰/۵۹۸	۰/۲۴۶	۰/۰۶۵	۰/۰۱۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۴	۰/۹۹۹	۰/۹۸۳	۰/۷۹۸	۰/۴۵۰	۰/۱۶۷	۰/۰۳۸	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۵	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۹۱۸	۰/۶۶۰	۰/۳۲۹	۰/۱۰۵	۰/۰۱۹	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۶	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۷۳	۰/۸۲۵	۰/۵۲۷	۰/۲۲۷	۰/۰۵۸	۰/۰۰۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۳	۰/۹۲۶	۰/۷۱۶	۰/۴۰۲	۰/۱۴۲	۰/۰۲۶	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۷۴	۰/۸۵۸	۰/۵۹۸	۰/۲۸۴	۰/۰۷۴	۰/۰۰۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۳	۰/۹۴۲	۰/۷۷۳	۰/۴۷۳	۰/۱۷۵	۰/۰۲۷	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰
	۱۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۸۱	۰/۸۹۵	۰/۶۷۱	۰/۳۴۰	۰/۰۸۲	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰
	۱۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۵	۰/۹۶۲	۰/۸۳۳	۰/۵۵۰	۰/۲۰۲	۰/۰۱۷	۰/۰۰۱
	۱۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۹	۰/۹۳۵	۰/۷۵۴	۰/۴۰۲	۰/۰۶۸	۰/۰۰۷
	۱۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۸۲	۰/۹۰۱	۰/۶۴۸	۰/۲۱۱	۰/۰۴۳
	۱۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۹۷۴	۰/۸۵۹	۰/۴۸۵	۰/۱۸۹
	۱۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۹۷۲	۰/۸۱۵	۰/۵۶۰
	۱۶	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۱۷	۰	۰/۴۱۸	۰/۱۶۷	۰/۰۲۳	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۷۹۲	۰/۴۸۲	۰/۱۱۸	۰/۰۱۹	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۲	۰/۹۵۰	۰/۷۶۲	۰/۳۱۰	۰/۰۷۷	۰/۰۱۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۳	۰/۹۹۱	۰/۹۱۷	۰/۵۴۹	۰/۲۰۲	۰/۰۴۶	۰/۰۰۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۴	۰/۹۹۹	۰/۹۷۸	۰/۷۵۸	۰/۳۸۹	۰/۱۲۶	۰/۰۲۵	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۵	۱/۰۰۰	۰/۹۹۵	۰/۸۹۴	۰/۵۹۷	۰/۲۶۴	۰/۰۷۲	۰/۰۱۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۶	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۶۲	۰/۷۷۵	۰/۴۴۸	۰/۱۶۶	۰/۰۳۵	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۸۹	۰/۸۹۵	۰/۶۴۱	۰/۳۱۵	۰/۰۹۲	۰/۰۱۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۹۶۰	۰/۸۰۱	۰/۵۰۰	۰/۱۹۹	۰/۰۴۰	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۸۷	۰/۹۰۸	۰/۶۸۵	۰/۳۵۹	۰/۱۰۵	۰/۰۱۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۹۶۵	۰/۸۳۴	۰/۵۵۲	۰/۲۲۵	۰/۰۳۸	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰

Payam Noor University

ادامه‌ی جدول ۱

	c	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۰/۹۵
	۱۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۹	۰/۹۲۸	۰/۷۳۶	۰/۴۰۳	۰/۱۰۶	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰
	۱۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۹۷۵	۰/۸۷۴	۰/۶۱۱	۰/۲۴۲	۰/۰۲۲	۰/۰۰۱
	۱۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۴	۰/۹۵۴	۰/۷۹۸	۰/۴۵۱	۰/۰۸۳	۰/۰۰۹
	۱۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۸	۰/۹۲۳	۰/۶۹۰	۰/۲۳۸	۰/۰۵۰
	۱۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۸۱	۰/۸۸۲	۰/۵۱۸	۰/۲۰۸
	۱۶	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۷۷	۰/۸۳۳	۰/۵۸۲
	۱۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۱۸	۰	۰/۳۹۷	۰/۱۵۰	۰/۰۱۸	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۷۷۴	۰/۴۵۰	۰/۰۹۹	۰/۰۱۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۲	۰/۹۴۲	۰/۷۳۴	۰/۲۷۱	۰/۰۶۰	۰/۰۰۸	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۳	۰/۹۸۹	۰/۹۰۲	۰/۵۰۱	۰/۱۶۵	۰/۰۳۳	۰/۰۰۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۴	۰/۹۹۸	۰/۹۷۲	۰/۷۱۶	۰/۳۳۳	۰/۰۹۴	۰/۰۱۵	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۵	۱/۰۰۰	۰/۹۹۴	۰/۸۶۷	۰/۵۳۴	۰/۲۰۹	۰/۰۴۸	۰/۰۰۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۶	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۴۹	۰/۷۲۲	۰/۳۷۴	۰/۱۱۹	۰/۰۲۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۸۴	۰/۸۵۹	۰/۵۶۳	۰/۲۴۰	۰/۰۵۸	۰/۰۰۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۶	۰/۹۴۰	۰/۷۳۷	۰/۴۰۷	۰/۱۳۵	۰/۰۲۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۷۹	۰/۸۶۵	۰/۵۹۳	۰/۲۶۳	۰/۰۶۰	۰/۰۰۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۴	۰/۹۴۲	۰/۷۶۰	۰/۴۳۷	۰/۱۴۱	۰/۰۱۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۰	۰/۸۸۱	۰/۶۲۶	۰/۲۷۸	۰/۰۵۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰
	۱۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۴	۰/۹۵۲	۰/۷۹۱	۰/۴۶۶	۰/۱۳۳	۰/۰۰۶	۰/۰۰۰
	۱۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۵	۰/۹۰۶	۰/۶۶۷	۰/۲۸۴	۰/۰۲۸	۰/۰۰۲
	۱۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۶	۰/۹۶۷	۰/۸۳۵	۰/۴۹۹	۰/۰۹۸	۰/۰۱۱
	۱۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۲	۰/۹۴۰	۰/۷۲۹	۰/۲۶۶	۰/۰۵۸
	۱۶	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۶	۰/۹۰۱	۰/۵۵۰	۰/۲۲۶
	۱۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۸۲	۰/۸۵۰	۰/۶۰۳
	۱۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۱۹	۰	۰/۳۷۷	۰/۱۳۵	۰/۰۱۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۷۵۵	۰/۴۲۰	۰/۰۸۳	۰/۰۱۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۲	۰/۹۳۳	۰/۷۰۵	۰/۲۳۷	۰/۰۴۶	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۳	۰/۹۸۷	۰/۸۸۵	۰/۴۵۵	۰/۱۳۳	۰/۰۲۳	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۴	۰/۹۹۸	۰/۹۶۵	۰/۶۷۳	۰/۲۸۲	۰/۰۷۰	۰/۰۱۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۵	۱/۰۰۰	۰/۹۹۱	۰/۸۳۷	۰/۴۷۴	۰/۱۶۳	۰/۰۳۲	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۶	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۳۲	۰/۶۶۶	۰/۳۰۸	۰/۰۸۴	۰/۰۱۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۷۷	۰/۸۱۸	۰/۴۸۸	۰/۱۸۰	۰/۰۳۵	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۳	۰/۹۱۶	۰/۶۶۷	۰/۳۲۴	۰/۰۸۸	۰/۰۱۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۶۷	۰/۸۱۴	۰/۵۰۰	۰/۱۸۶	۰/۰۳۳	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۸۹	۰/۹۱۲	۰/۶۷۶	۰/۳۳۳	۰/۰۸۴	۰/۰۰۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۹۶۵	۰/۸۲۰	۰/۵۱۲	۰/۱۸۲	۰/۰۲۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۸	۰/۹۱۶	۰/۶۹۲	۰/۳۳۴	۰/۰۶۸	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰
	۱۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۹۶۸	۰/۸۳۷	۰/۵۲۶	۰/۱۶۳	۰/۰۰۹	۰/۰۰۰
	۱۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۰	۰/۹۳۰	۰/۷۱۸	۰/۳۲۷	۰/۰۳۵	۰/۰۰۲
	۱۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۷۷	۰/۸۶۷	۰/۵۴۵	۰/۱۱۵	۰/۰۱۳
	۱۶	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۵	۰/۹۵۴	۰/۷۶۳	۰/۲۹۵	۰/۰۶۷
	۱۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۰	۰/۹۱۷	۰/۵۸۰	۰/۲۴۵
	۱۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۶	۰/۸۶۵	۰/۶۲۳

Payam Noor University

ادامه‌ی جدول ۱

		p										
	c	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/٤	۰/۵	۰/٦	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۰/۹۵
n=۲۰	۰	۰/۳۵۸	۰/۱۲۲	۰/۰۱۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۷۳٦	۰/۳۹۲	۰/۰٦۹	۰/۰۰۸	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۲	۰/۹۲۵	۰/٦۷۷	۰/۲۰٦	۰/۰۳۵	۰/۰۰٤	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۳	۰/۹۸٤	۰/۸٦۷	۰/٤۱۱	۰/۱۰۷	۰/۰۱٦	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	٤	۰/۹۹۷	۰/۹۵۷	۰/٦۳۰	۰/۲۳۸	۰/۰۵۱	۰/۰۰٦	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۵	۱/۰۰۰	۰/۹۸۹	۰/۸۰٤	۰/٤۱٦	۰/۱۲٦	۰/۰۲۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	٦	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۱۳	۰/٦۰۸	۰/۲۵۰	۰/۰۵۸	۰/۰۰٦	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹٦۸	۰/۷۷۲	۰/٤۱٦	۰/۱۳۲	۰/۰۲۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۰	۰/۸۸۷	۰/۵۹٦	۰/۲۵۲	۰/۰۵۷	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۹۵۲	۰/۷۵۵	۰/٤۱۲	۰/۱۲۸	۰/۰۱۷	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۳	۰/۸۷۲	۰/۵۸۸	۰/۲٤۵	۰/۰٤۸	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۵	۰/۹٤۳	۰/۷٤۸	۰/٤۰٤	۰/۱۱۳	۰/۰۱۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۷۹	۰/۸٦۸	۰/۵۸٤	۰/۲۲۸	۰/۰۳۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹٤	۰/۹٤۲	۰/۷۵۰	۰/۳۹۲	۰/۰۸۷	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰
	۱٤	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۷۹	۰/۸۷٤	۰/۵۸٤	۰/۱۹٦	۰/۰۱۱	۰/۰۰۰
	۱۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹٤	۰/۹٤۹	۰/۷٦۲	۰/۳۷۰	۰/۰٤۳	۰/۰۰۳
	۱٦	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸٤	۰/۸۹۳	۰/۵۸۹	۰/۱۳۳	۰/۰۱٦
	۱۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹٦	۰/۹٦۵	۰/۷۹٤	۰/۳۲۳	۰/۰۷۵
	۱۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۲	۰/۹۳۱	۰/٦۰۸	۰/۲٦٤
	۱۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۸	۰/۸۷۸	۰/٦٤۲
	۲۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
n=۲۱	۰	۰/۳٤۱	۰/۱۰۹	۰/۰۰۹	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱	۰/۷۱۷	۰/۳٦۵	۰/۰۵۸	۰/۰۰٦	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۲	۰/۹۱۵	۰/٦٤۸	۰/۱۷۹	۰/۰۲۷	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۳	۰/۹۸۱	۰/۸٤۸	۰/۳۷۰	۰/۰۸٦	۰/۰۱۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	٤	۰/۹۹۷	۰/۹٤۸	۰/۵۸٦	۰/۱۹۸	۰/۰۳۷	۰/۰۰٤	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۵	۱/۰۰۰	۰/۹۸٦	۰/۷٦۹	۰/۳٦۳	۰/۰۹٦	۰/۰۱۳	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	٦	۱/۰۰۰	۰/۹۹۷	۰/۸۹۱	۰/۵۵۱	۰/۲۰۰	۰/۰۳۹	۰/۰۰٤	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۷	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۵۷	۰/۷۲۳	۰/۳۵۰	۰/۰۹۵	۰/۰۱۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۸٦	۰/۸۵۲	۰/۵۲٤	۰/۱۹۲	۰/۰۳۵	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹٦	۰/۹۳۲	۰/٦۹۱	۰/۳۳۲	۰/۰۸۵	۰/۰۰۹	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۷٤	۰/۸۲٦	۰/۵۰۰	۰/۱۷٤	۰/۰۲٦	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۱	۰/۹۱۵	۰/٦٦۸	۰/۳۰۹	۰/۰٦۸	۰/۰۰٤	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹٦۵	۰/۸۰۸	۰/٤۷٦	۰/۱٤۸	۰/۰۱٤	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	۱۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۸	۰/۹۰۵	۰/٦۵۰	۰/۲۷۷	۰/۰٤۳	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰
	۱٤	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹٦	۰/۹٦۱	۰/۸۰۰	۰/٤٤۹	۰/۱۰۹	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰
	۱۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۷	۰/۹۰٤	۰/٦۳۷	۰/۲۳۱	۰/۰۱٤	۰/۰۰۰
	۱٦	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹٦	۰/۹٦۳	۰/۸۰۲	۰/٤۱٤	۰/۰۵۲	۰/۰۰۳
	۱۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۸۹	۰/۹۱٤	۰/٦۳۰	۰/۱۵۲	۰/۰۱۹
	۱۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۷۳	۰/۸۲۱	۰/۳۵۲	۰/۰۸۵
	۱۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹٤	۰/۹٤۲	۰/٦۳۵	۰/۲۸۳
	۲۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۱	۰/۸۹۱	۰/٦۵۹
	۲۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰

Payam Noor University

ادامه‌ی جدول ۱

							p					
	c	٠/٠٥	٠/١	٠/٢	٠/٣	٠/٤	٠/٥	٠/٦	٠/٧	٠/٨	٠/٩	٠/٩٥
n=٢٢	٠	٠/٣٢٤	٠/٠٩٨	٠/٠٠٧	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١	٠/٦٩٨	٠/٣٣٩	٠/٠٤٨	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٢	٠/٩٠٥	٠/٦٢٠	٠/١٥٤	٠/٠٢١	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٣	٠/٩٧٨	٠/٨٢٨	٠/٣٣٢	٠/٠٦٨	٠/٠٠٨	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٤	٠/٩٩٦	٠/٩٣٨	٠/٥٤٣	٠/١٦٥	٠/٠٢٧	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٥	٠/٩٩٩	٠/٩٨٢	٠/٧٣٣	٠/٣١٣	٠/٠٧٢	٠/٠٠٨	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٦	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٨٦٧	٠/٤٩٤	٠/١٥٨	٠/٠٢٦	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٧	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٤٤	٠/٦٧١	٠/٢٩٠	٠/٠٦٧	٠/٠٠٧	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٨٠	٠/٨١٤	٠/٤٥٤	٠/١٤٣	٠/٠٢١	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٤	٠/٩٠٨	٠/٦٢٤	٠/٢٦٢	٠/٠٥٥	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٦١	٠/٧٧٢	٠/٤١٦	٠/١٢١	٠/٠١٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١١	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٨٦	٠/٨٧٩	٠/٥٨٤	٠/٢٢٨	٠/٠٣٩	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١٢	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٤٥	٠/٧٣٨	٠/٣٧٦	٠/٠٩٢	٠/٠٠٦	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١٣	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٧٩	٠/٨٥٧	٠/٥٤٦	٠/١٨٦	٠/٠٢٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١٤	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٣	٠/٩٣٣	٠/٧١٠	٠/٣٢٩	٠/٠٥٦	٠/٠٠١	٠/٠٠٠
	١٥	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٧٤	٠/٨٤٢	٠/٥٠٦	٠/١٣٣	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠
	١٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٢	٠/٩٢٨	٠/٦٨٧	٠/٢٦٧	٠/٠١٨	٠/٠٠١
	١٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٧٣	٠/٨٣٥	٠/٤٥٧	٠/٠٦٢	٠/٠٠٤
	١٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٢	٠/٩٣٢	٠/٦٦٨	٠/١٧٢	٠/٠٢٢
	١٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٧٩	٠/٨٤٦	٠/٣٨٠	٠/٠٩٥
	٢٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٥٢	٠/٦٦١	٠/٣٠٢
	٢١	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٣	٠/٩٠٢	٠/٦٧٦
	٢٢	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠
n=٢٣	٠	٠/٣٠٧	٠/٠٨٩	٠/٠٠٦	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١	٠/٦٧٩	٠/٣١٥	٠/٠٤٠	٠/٠٠٣	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٢	٠/٨٩٥	٠/٥٩٢	٠/١٣٣	٠/٠١٦	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٣	٠/٩٧٤	٠/٨٠٧	٠/٢٩٧	٠/٠٥٤	٠/٠٠٥	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٤	٠/٩٩٥	٠/٩٢٧	٠/٥٠١	٠/١٣٦	٠/٠١٩	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٥	٠/٩٩٩	٠/٩٧٧	٠/٦٩٥	٠/٢٦٩	٠/٠٥٤	٠/٠٠٥	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٦	١/٠٠٠	٠/٩٩٤	٠/٨٤٠	٠/٤٤٠	٠/١٢٤	٠/٠١٧	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٧	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٢٨	٠/٦١٨	٠/٢٣٧	٠/٠٤٧	٠/٠٠٤	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٧٣	٠/٧٧١	٠/٣٨٨	٠/١٠٥	٠/٠١٣	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩١	٠/٨٨٠	٠/٥٥٦	٠/٢٠٢	٠/٠٣٥	٠/٠٠٢	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٧	٠/٩٤٥	٠/٧١٣	٠/٣٣٩	٠/٠٨١	٠/٠٠٧	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١١	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٧٩	٠/٨٣٦	٠/٥٠٠	٠/١٦٤	٠/٠٢١	٠/٠٠١	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١٢	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٣	٠/٩١٩	٠/٦٦١	٠/٢٨٧	٠/٠٥٥	٠/٠٠٣	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١٣	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٨	٠/٩٦٥	٠/٧٩٨	٠/٤٤٤	٠/١٢٠	٠/٠٠٩	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١٤	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٨٧	٠/٨٩٥	٠/٦١٢	٠/٢٢٩	٠/٠٢٧	٠/٠٠٠	٠/٠٠٠
	١٥	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٦	٠/٩٥٣	٠/٧٦٣	٠/٣٨٢	٠/٠٧٢	٠/٠٠١	٠/٠٠٠
	١٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٨٣	٠/٨٧٦	٠/٥٦٠	٠/١٦٠	٠/٠٠٦	٠/٠٠٠
	١٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٥	٠/٩٤٦	٠/٧٣١	٠/٣٠٥	٠/٠٢٣	٠/٠٠١
	١٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٨١	٠/٨٦٤	٠/٤٩٩	٠/٠٧٣	٠/٠٠٥
	١٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٥	٠/٩٤٦	٠/٧٠٣	٠/١٩٣	٠/٠٢٦
	٢٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٨٤	٠/٨٦٧	٠/٤٠٨	٠/١٠٥
	٢١	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٧	٠/٩٦٠	٠/٦٨٥	٠/٣٢١
	٢٢	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٤	٠/٩١١	٠/٦٩٣
	٢٣	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠

Payam Noor University

جدول ۲. احتمال‌های پواسون $P[X \le c] = \sum_{x=0}^{c} \frac{e^{-m} m^{x}}{x!}$

c	٠/١	٠/٢	٠/٣	٠/٤	٠/٥	٠/٦	٠/٧	٠/٨	٠/٩	١
٠	٠/٩٠٥	٠/٨١٩	٠/٧٤١	٠/٦٧٠	٠/٦٠٧	٠/٥٤٩	٠/٤٩٧	٠/٤٤٩	٠/٤٠٧	٠/٣٦٨
١	٠/٩٩٥	٠/٩٨٢	٠/٩٦٣	٠/٩٣٨	٠/٩١٠	٠/٨٧٨	٠/٨٤٤	٠/٨٠٩	٠/٧٧٢	٠/٧٣٦
٢	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٦	٠/٩٩٢	٠/٩٨٦	٠/٩٧٧	٠/٩٦٦	٠/٩٥٣	٠/٩٣٧	٠/٩٢٠
٣	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٨	٠/٩٩٧	٠/٩٩٤	٠/٩٩١	٠/٩٨٧	٠/٩٨١
٤	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩	٠/٩٩٨	٠/٩٩٦
٥	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩
٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠
٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠

m

c	١/١	١/٢	١/٣	١/٤	١/٥	١/٦	١/٧	١/٨	١/٩	٢
٠	٠/٣٣٣	٠/٣٠١	٠/٢٧٣	٠/٢٤٧	٠/٢٢٣	٠/٢٠٢	٠/١٨٣	٠/١٦٥	٠/١٥٠	٠/١٣٥
١	٠/٦٩٩	٠/٦٦٣	٠/٦٢٧	٠/٥٩٢	٠/٥٥٨	٠/٥٢٥	٠/٤٩٣	٠/٤٦٣	٠/٤٣٤	٠/٤٠٦
٢	٠/٩٠٠	٠/٨٧٩	٠/٨٥٧	٠/٨٣٣	٠/٨٠٩	٠/٧٨٣	٠/٧٥٧	٠/٧٣١	٠/٧٠٤	٠/٦٧٧
٣	٠/٩٧٤	٠/٩٦٦	٠/٩٥٧	٠/٩٤٦	٠/٩٣٤	٠/٩٢١	٠/٩٠٧	٠/٨٩١	٠/٨٧٥	٠/٨٥٧
٤	٠/٩٩٥	٠/٩٩٢	٠/٩٨٩	٠/٩٨٦	٠/٩٨١	٠/٩٧٦	٠/٩٧٠	٠/٩٦٤	٠/٩٥٦	٠/٩٤٧
٥	٠/٩٩٩	٠/٩٩٨	٠/٩٩٨	٠/٩٩٧	٠/٩٩٦	٠/٩٩٤	٠/٩٩٢	٠/٩٩٠	٠/٩٨٧	٠/٩٨٣
٦	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩	٠/٩٩٨	٠/٩٩٧	٠/٩٩٧	٠/٩٩٥
٧	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩
٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠
٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠

m

c	٢/١	٢/٢	٢/٣	٢/٤	٢/٥	٢/٦	٢/٧	٢/٨	٢/٩	٣
٠	٠/١٢٢	٠/١١١	٠/١٠٠	٠/٠٩١	٠/٠٨٢	٠/٠٧٤	٠/٠٦٧	٠/٠٦١	٠/٠٥٥	٠/٠٥٠
١	٠/٣٨٠	٠/٣٥٥	٠/٣٣١	٠/٣٠٨	٠/٢٨٧	٠/٢٦٧	٠/٢٤٩	٠/٢٣١	٠/٢١٥	٠/١٩٩
٢	٠/٦٥٠	٠/٦٢٣	٠/٥٩٦	٠/٥٧٠	٠/٥٤٤	٠/٥١٨	٠/٤٩٤	٠/٤٦٩	٠/٤٤٦	٠/٤٢٣
٣	٠/٨٣٩	٠/٨١٩	٠/٧٩٩	٠/٧٧٩	٠/٧٥٨	٠/٧٣٦	٠/٧١٤	٠/٦٩٢	٠/٦٧٠	٠/٦٤٧
٤	٠/٩٣٨	٠/٩٢٨	٠/٩١٦	٠/٩٠٤	٠/٨٩١	٠/٨٧٧	٠/٨٦٣	٠/٨٤٨	٠/٨٣٢	٠/٨١٥
٥	٠/٩٨٠	٠/٩٧٥	٠/٩٧٠	٠/٩٦٤	٠/٩٥٨	٠/٩٥١	٠/٩٤٣	٠/٩٣٥	٠/٩٢٦	٠/٩١٦
٦	٠/٩٩٤	٠/٩٩٣	٠/٩٩١	٠/٩٨٨	٠/٩٨٦	٠/٩٨٣	٠/٩٧٩	٠/٩٧٦	٠/٩٧١	٠/٩٦٦
٧	٠/٩٩٩	٠/٩٩٨	٠/٩٩٧	٠/٩٩٧	٠/٩٩٦	٠/٩٩٥	٠/٩٩٣	٠/٩٩٢	٠/٩٩٠	٠/٩٨٨
٨	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩	٠/٩٩٨	٠/٩٩٨	٠/٩٩٧	٠/٩٩٦
٩	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩	٠/٩٩٩
١٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠
١١	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠
١٢	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠	١/٠٠٠

Payam Noor University

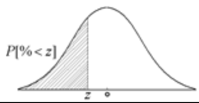
ادامه‌ی جدول ۲

	m									
c	۳/۱	۳/۲	۳/۳	۳/٤	۳/٥	۳/٦	۳/۷	۳/۸	۳/۹	٤
۰	۰/۰٤٥	۰/۰٤۱	۰/۰۳۷	۰/۰۳۳	۰/۰۳۰	۰/۰۲۷	۰/۰۲٥	۰/۰۲۲	۰/۰۲۰	۰/۰۱۸
۱	۰/۱۸٥	۰/۱۷۱	۰/۱٥۹	۰/۱٤۷	۰/۱۳٦	۰/۱۲٦	۰/۱۱٦	۰/۱۰۷	۰/۰۹۹	۰/۰۹۲
۲	۰/٤۰۱	۰/۳۸۰	۰/۳٥۹	۰/۳٤۰	۰/۳۲۱	۰/۳۰۳	۰/۲۸٥	۰/۲٦۹	۰/۲٥۳	۰/۲۳۸
۳	۰/٦۲٥	۰/٦۰۳	۰/٥۸۰	۰/٥٥۸	۰/٥۳۷	۰/٥۱٥	۰/٤۹٤	۰/٤۷۳	۰/٤٥۳	۰/٤۳۳
٤	۰/۷۹۸	۰/۷۸۱	۰/۷٦۳	۰/۷٤٤	۰/۷۲٥	۰/۷۰٦	۰/٦۸۷	۰/٦٦۸	۰/٦٤۸	۰/٦۲۹
٥	۰/۹۰٦	۰/۸۹٥	۰/۸۸۳	۰/۸۷۱	۰/۸٥۸	۰/۸٤٤	۰/۸۳۰	۰/۸۱٦	۰/۸۰۱	۰/۷۸٥
٦	۰/۹٦۱	۰/۹٥٥	۰/۹٤۹	۰/۹٤۲	۰/۹۳٥	۰/۹۲۷	۰/۹۱۸	۰/۹۰۹	۰/۸۹۹	۰/۸۸۹
۷	۰/۹۸٦	۰/۹۸۳	۰/۹۸۰	۰/۹۷۷	۰/۹۷۳	۰/۹٦۹	۰/۹٦٥	۰/۹٦۰	۰/۹٥٥	۰/۹٤۹
۸	۰/۹۹٥	۰/۹۹٤	۰/۹۹۳	۰/۹۹۲	۰/۹۹۰	۰/۹۸۸	۰/۹۸٦	۰/۹۸٤	۰/۹۸۱	۰/۹۷۹
۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۸	۰/۹۹۸	۰/۹۹۷	۰/۹۹۷	۰/۹۹٦	۰/۹۹٥	۰/۹۹٤	۰/۹۹۳	۰/۹۹۲
۱۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۸	۰/۹۹۸	۰/۹۹۸	۰/۹۹۷
۱۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹
۱۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۱۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۱٤	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰

	m									
c	٤/٥	٥	٥/٥	٦	٦/٥	۷	۷/٥	۸	۸/٥	۹
۰	۰/۰۱۱	۰/۰۰۷	۰/۰۰٤	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۱	۰/۰٦۱	۰/۰٤۰	۰/۰۲۷	۰/۰۱۷	۰/۰۱۱	۰/۰۰۷	۰/۰۰٥	۰/۰۰۳	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱
۲	۰/۱۷٤	۰/۱۲٥	۰/۰۸۸	۰/۰٦۲	۰/۰٤۳	۰/۰۳۰	۰/۰۲۰	۰/۰۱٤	۰/۰۰۹	۰/۰۰٦
۳	۰/۳٤۲	۰/۲٦٥	۰/۲۰۲	۰/۱٥۱	۰/۱۱۲	۰/۰۸۲	۰/۰٥۹	۰/۰٤۲	۰/۰۳۰	۰/۰۲۱
٤	۰/٥۳۲	۰/٤٤۰	۰/۳٥۸	۰/۲۸٥	۰/۲۲٤	۰/۱۷۳	۰/۱۳۲	۰/۱۰۰	۰/۰۷٤	۰/۰٥٥
٥	۰/۷۰۳	۰/٦۱٦	۰/٥۲۹	۰/٤٤٦	۰/۳٦۹	۰/۳۰۱	۰/۲٤۱	۰/۱۹۱	۰/۱٥۰	۰/۱۱٦
٦	۰/۸۳۱	۰/۷٦۲	۰/٦۸٦	۰/٦۰٦	۰/٥۲۷	۰/٤٥۰	۰/۳۷۸	۰/۳۱۳	۰/۲٥٦	۰/۲۰۷
۷	۰/۹۱۳	۰/۸٦۷	۰/۸۰۹	۰/۷٤٤	۰/٦۷۳	۰/٥۹۹	۰/٥۲٥	۰/٤٥۳	۰/۳۸٦	۰/۳۲٤
۸	۰/۹٦۰	۰/۹۳۲	۰/۸۹٤	۰/۸٤۷	۰/۷۹۲	۰/۷۲۹	۰/٦٦۲	۰/٥۹۳	۰/٥۲۳	۰/٤٥٦
۹	۰/۹۸۳	۰/۹٦۸	۰/۹٤٦	۰/۹۱٦	۰/۸۷۷	۰/۸۳۰	۰/۷۷٦	۰/۷۱۷	۰/٦٥۳	۰/٥۸۷
۱۰	۰/۹۹۳	۰/۹۸٦	۰/۹۷٥	۰/۹٥۷	۰/۹۳۳	۰/۹۰۱	۰/۸٦۲	۰/۸۱٦	۰/۷٦۳	۰/۷۰٦
۱۱	۰/۹۹۸	۰/۹۹٥	۰/۹۸۹	۰/۹۸۰	۰/۹٦٦	۰/۹٤۷	۰/۹۲۱	۰/۸۸۸	۰/۸٤۹	۰/۸۰۳
۱۲	۰/۹۹۹	۰/۹۹۸	۰/۹۹٦	۰/۹۹۱	۰/۹۸٤	۰/۹۷۳	۰/۹٥۷	۰/۹۳٦	۰/۹۰۹	۰/۸۷٦
۱۳	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۸	۰/۹۹٦	۰/۹۹۳	۰/۹۸۷	۰/۹۷۸	۰/۹٦٦	۰/۹٤۹	۰/۹۲٦
۱٤	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۷	۰/۹۹٤	۰/۹۹۰	۰/۹۸۳	۰/۹۷۳	۰/۹٥۹
۱٥	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۸	۰/۹۹٥	۰/۹۹۲	۰/۹۸٦	۰/۹۷۸
۱٦	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۸	۰/۹۹٦	۰/۹۹۳	۰/۹۸۹
۱۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۸	۰/۹۹۷	۰/۹۹٥
۱۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۸
۱۹	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹
۲۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۲۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۲۲	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰

Payam Noor University

جدول ۳ احتمال‌های توزیع نرمال استاندارد



z	۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰٤	۰/۰٥	۰/۰٦	۰/۰۷	۰/۰۸	۰/۰۹
-۳/٥	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲
-۳/٤	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۲
-۳/۳	۰/۰۰۰٥	۰/۰۰۰٥	۰/۰۰۰٥	۰/۰۰۰٤	۰/۰۰۰٤	۰/۰۰۰٤	۰/۰۰۰٤	۰/۰۰۰٤	۰/۰۰۰٤	۰/۰۰۰۳
-۳/۲	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰٦	۰/۰۰۰٦	۰/۰۰۰٦	۰/۰۰۰٦	۰/۰۰۰٦	۰/۰۰۰٥	۰/۰۰۰٥	۰/۰۰۰٥
-۳/۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۷
-۳	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰
-۲/۹	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۱٦	۰/۰۰۱٦	۰/۰۰۱٥	۰/۰۰۱٥	۰/۰۰۱٤	۰/۰۰۱٤
-۲/۸	۰/۰۰۲٦	۰/۰۰۲٥	۰/۰۰۲٤	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۰	۰/۰۰۱۹
-۲/۷	۰/۰۰۳٥	۰/۰۰۳٤	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۲٦
-۲/٦	۰/۰۰٤۷	۰/۰۰٤٥	۰/۰۰٤٤	۰/۰۰٤۳	۰/۰۰٤۱	۰/۰۰٤۰	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۳٦
-۲/٥	۰/۰۰٦۲	۰/۰۰٦۰	۰/۰۰٥۹	۰/۰۰٥۷	۰/۰۰٥٥	۰/۰۰٥٤	۰/۰۰٥۲	۰/۰۰٥۱	۰/۰۰٤۹	۰/۰۰٤۸
-۲/٤	۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۸۰	۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۷٥	۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۷۱	۰/۰۰٦۹	۰/۰۰٦۸	۰/۰۰٦٦	۰/۰۰٦٤
-۲/۳	۰/۰۱۰۷	۰/۰۱۰٤	۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹٦	۰/۰۰۹٤	۰/۰۰۹۱	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۸٤
-۲/۲	۰/۰۱۳۹	۰/۰۱۳٦	۰/۰۱۳۲	۰/۰۱۲۹	۰/۰۱۲٥	۰/۰۱۲۲	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۱٦	۰/۰۱۱۳	۰/۰۱۱۰
-۲/۱	۰/۰۱۷۹	۰/۰۱۷٤	۰/۰۱۷۰	۰/۰۱٦٦	۰/۰۱٦۲	۰/۰۱٥۸	۰/۰۱٥٤	۰/۰۱٥۰	۰/۰۱٤٦	۰/۰۱٤۳
-۲	۰/۰۲۲۸	۰/۰۲۲۲	۰/۰۲۱۷	۰/۰۲۱۲	۰/۰۲۰۷	۰/۰۲۰۲	۰/۰۱۹۷	۰/۰۱۹۲	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۸۳
-۱/۹	۰/۰۲۸۷	۰/۰۲۸۱	۰/۰۲۷٤	۰/۰۲٦۸	۰/۰۲٦۲	۰/۰۲٥٦	۰/۰۲٥۰	۰/۰۲٤٤	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۳۳
-۱/۸	۰/۰۳٥۹	۰/۰۳٥۱	۰/۰۳٤٤	۰/۰۳۳٦	۰/۰۳۲۹	۰/۰۳۲۲	۰/۰۳۱٤	۰/۰۳۰۷	۰/۰۳۰۱	۰/۰۲۹٤
-۱/۷	۰/۰٤٤٦	۰/۰٤۳٦	۰/۰٤۲۷	۰/۰٤۱۸	۰/۰٤۰۹	۰/۰٤۰۱	۰/۰۳۹۲	۰/۰۳۸٤	۰/۰۳۷٥	۰/۰۳٦۷
-۱/٦	۰/۰٥٤۸	۰/۰٥۳۷	۰/۰٥۲٦	۰/۰٥۱٦	۰/۰٥۰٥	۰/۰٤۹٥	۰/۰٤۸٥	۰/۰٤۷٥	۰/۰٤٦٥	۰/۰٤٥٥
-۱/٥	۰/۰٦٦۸	۰/۰٦٥٥	۰/۰٦٤۳	۰/۰٦۳۰	۰/۰٦۱۸	۰/۰٦۰٦	۰/۰٥۹٤	۰/۰٥۸۲	۰/۰٥۷۱	۰/۰٥٥۹
-۱/٤	۰/۰۸۰۸	۰/۰۷۹۳	۰/۰۷۷۸	۰/۰۷٦٤	۰/۰۷٤۹	۰/۰۷۳٥	۰/۰۷۲۱	۰/۰۷۰۸	۰/۰٦۹٤	۰/۰٦۸۱
-۱/۳	۰/۰۹٦۸	۰/۰۹٥۱	۰/۰۹۳٤	۰/۰۹۱۸	۰/۰۹۰۱	۰/۰۸۸٥	۰/۰۸٦۹	۰/۰۸٥۳	۰/۰۸۳۸	۰/۰۸۲۳
-۱/۲	۰/۱۱٥۱	۰/۱۱۳۱	۰/۱۱۱۲	۰/۱۰۹۳	۰/۱۰۷٥	۰/۱۰٥٦	۰/۱۰۳۸	۰/۱۰۲۰	۰/۱۰۰۳	۰/۰۹۸٥
-۱/۱	۰/۱۳٥۷	۰/۱۳۳٥	۰/۱۳۱٤	۰/۱۲۹۲	۰/۱۲۷۱	۰/۱۲٥۱	۰/۱۲۳۰	۰/۱۲۱۰	۰/۱۱۹۰	۰/۱۱۷۰
-۱	۰/۱٥۸۷	۰/۱٥٦۲	۰/۱٥۳۹	۰/۱٥۱٥	۰/۱٤۹۲	۰/۱٤٦۹	۰/۱٤٤٦	۰/۱٤۲۳	۰/۱٤۰۱	۰/۱۳۷۹
-۰/۹	۰/۱۸٤۱	۰/۱۸۱٤	۰/۱۷۸۸	۰/۱۷٦۲	۰/۱۷۳٦	۰/۱۷۱۱	۰/۱٦۸٥	۰/۱٦٦۰	۰/۱٦۳٥	۰/۱٦۱۱
-۰/۸	۰/۲۱۱۹	۰/۲۰۹۰	۰/۲۰٦۱	۰/۲۰۳۳	۰/۲۰۰٥	۰/۱۹۷۷	۰/۱۹٤۹	۰/۱۹۲۲	۰/۱۸۹٤	۰/۱۸٦۷
-۰/۷	۰/۲٤۲۰	۰/۲۳۸۹	۰/۲۳٥۸	۰/۲۳۲۷	۰/۲۲۹٦	۰/۲۲٦٦	۰/۲۲۳٦	۰/۲۲۰٦	۰/۲۱۷۷	۰/۲۱٤۸
-۰/٦	۰/۲۷٤۳	۰/۲۷۰۹	۰/۲٦۷٦	۰/۲٦٤۳	۰/۲٦۱۱	۰/۲٥۷۸	۰/۲٥٤٦	۰/۲٥۱٤	۰/۲٤۸۳	۰/۲٤٥۱
-۰/٥	۰/۳۰۸٥	۰/۳۰٥۰	۰/۳۰۱٥	۰/۲۹۸۱	۰/۲۹٤٦	۰/۲۹۱۲	۰/۲۸۷۷	۰/۲۸٤۳	۰/۲۸۱۰	۰/۲۷۷٦
-۰/٤	۰/۳٤٤٦	۰/۳٤۰۹	۰/۳۳۷۲	۰/۳۳۳٦	۰/۳۳۰۰	۰/۳۲٦٤	۰/۳۲۲۸	۰/۳۱۹۲	۰/۳۱٥٦	۰/۳۱۲۱
-۰/۳	۰/۳۸۲۱	۰/۳۷۸۳	۰/۳۷٤٥	۰/۳۷۰۷	۰/۳٦٦۹	۰/۳٦۳۲	۰/۳٥۹٤	۰/۳٥٥۷	۰/۳٥۲۰	۰/۳٤۸۳
-۰/۲	۰/٤۲۰۷	۰/٤۱٦۸	۰/٤۱۲۹	۰/٤۰۹۰	۰/٤۰٥۲	۰/٤۰۱۳	۰/۳۹۷٤	۰/۳۹۳٦	۰/۳۸۹۷	۰/۳۸٥۹
-۰/۱	۰/٤٦۰۲	۰/٤٥٦۲	۰/٤٥۲۲	۰/٤٤۸۳	۰/٤٤٤۳	۰/٤٤۰٤	۰/٤۳٦٤	۰/٤۳۲٥	۰/٤۲۸٦	۰/٤۲٤۷
۰	۰/٥۰۰۰	۰/٤۹٦۰	۰/٤۹۲۰	۰/٤۸۸۰	۰/٤۸٤۰	۰/٤۸۰۱	۰/٤۷٦۱	۰/٤۷۲۱	۰/٤٦۸۱	۰/٤٦٤۱

ادامه‌ی جدول ٣

z	٠	٠/٠١	٠/٠٢	٠/٠٣	٠/٠٤	٠/٠٥	٠/٠٦	٠/٠٧	٠/٠٨	٠/٠٩
٠	٠/٥٠٠٠	٠/٥٠٤٠	٠/٥٠٨٠	٠/٥١٢٠	٠/٥١٦٠	٠/٥١٩٩	٠/٥٢٣٩	٠/٥٢٧٩	٠/٥٣١٩	٠/٥٣٥٩
٠/١	٠/٥٣٩٨	٠/٥٤٣٨	٠/٥٤٧٨	٠/٥٥١٧	٠/٥٥٥٧	٠/٥٥٩٦	٠/٥٦٣٦	٠/٥٦٧٥	٠/٥٧١٤	٠/٥٧٥٣
٠/٢	٠/٥٧٩٣	٠/٥٨٣٢	٠/٥٨٧١	٠/٥٩١٠	٠/٥٩٤٨	٠/٥٩٨٧	٠/٦٠٢٦	٠/٦٠٦٤	٠/٦١٠٣	٠/٦١٤١
٠/٣	٠/٦١٧٩	٠/٦٢١٧	٠/٦٢٥٥	٠/٦٢٩٣	٠/٦٣٣١	٠/٦٣٦٨	٠/٦٤٠٦	٠/٦٤٤٣	٠/٦٤٨٠	٠/٦٥١٧
٠/٤	٠/٦٥٥٤	٠/٦٥٩١	٠/٦٦٢٨	٠/٦٦٦٤	٠/٦٧٠٠	٠/٦٧٣٦	٠/٦٧٧٢	٠/٦٨٠٨	٠/٦٨٤٤	٠/٦٨٧٩
٠/٥	٠/٦٩١٥	٠/٦٩٥٠	٠/٦٩٨٥	٠/٧٠١٩	٠/٧٠٥٤	٠/٧٠٨٨	٠/٧١٢٣	٠/٧١٥٧	٠/٧١٩٠	٠/٧٢٢٤
٠/٦	٠/٧٢٥٧	٠/٧٢٩١	٠/٧٣٢٤	٠/٧٣٥٧	٠/٧٣٨٩	٠/٧٤٢٢	٠/٧٤٥٤	٠/٧٤٨٦	٠/٧٥١٧	٠/٧٥٤٩
٠/٧	٠/٧٥٨٠	٠/٧٦١١	٠/٧٦٤٢	٠/٧٦٧٣	٠/٧٧٠٤	٠/٧٧٣٤	٠/٧٧٦٤	٠/٧٧٩٤	٠/٧٨٢٣	٠/٧٨٥٢
٠/٨	٠/٧٨٨١	٠/٧٩١٠	٠/٧٩٣٩	٠/٧٩٦٧	٠/٧٩٩٥	٠/٨٠٢٣	٠/٨٠٥١	٠/٨٠٧٨	٠/٨١٠٦	٠/٨١٣٣
٠/٩	٠/٨١٥٩	٠/٨١٨٦	٠/٨٢١٢	٠/٨٢٣٨	٠/٨٢٦٤	٠/٨٢٨٩	٠/٨٣١٥	٠/٨٣٤٠	٠/٨٣٦٥	٠/٨٣٨٩
١	٠/٨٤١٣	٠/٨٤٣٨	٠/٨٤٦١	٠/٨٤٨٥	٠/٨٥٠٨	٠/٨٥٣١	٠/٨٥٥٤	٠/٨٥٧٧	٠/٨٥٩٩	٠/٨٦٢١
١/١	٠/٨٦٤٣	٠/٨٦٦٥	٠/٨٦٨٦	٠/٨٧٠٨	٠/٨٧٢٩	٠/٨٧٤٩	٠/٨٧٧٠	٠/٨٧٩٠	٠/٨٨١٠	٠/٨٨٣٠
١/٢	٠/٨٨٤٩	٠/٨٨٦٩	٠/٨٨٨٨	٠/٨٩٠٧	٠/٨٩٢٥	٠/٨٩٤٤	٠/٨٩٦٢	٠/٨٩٨٠	٠/٨٩٩٧	٠/٩٠١٥
١/٣	٠/٩٠٣٢	٠/٩٠٤٩	٠/٩٠٦٦	٠/٩٠٨٢	٠/٩٠٩٩	٠/٩١١٥	٠/٩١٣١	٠/٩١٤٧	٠/٩١٦٢	٠/٩١٧٧
١/٤	٠/٩١٩٢	٠/٩٢٠٧	٠/٩٢٢٢	٠/٩٢٣٦	٠/٩٢٥١	٠/٩٢٦٥	٠/٩٢٧٩	٠/٩٢٩٢	٠/٩٣٠٦	٠/٩٣١٩
١/٥	٠/٩٣٣٢	٠/٩٣٤٥	٠/٩٣٥٧	٠/٩٣٧٠	٠/٩٣٨٢	٠/٩٣٩٤	٠/٩٤٠٦	٠/٩٤١٨	٠/٩٤٢٩	٠/٩٤٤١
١/٦	٠/٩٤٥٢	٠/٩٤٦٣	٠/٩٤٧٤	٠/٩٤٨٤	٠/٩٤٩٥	٠/٩٥٠٥	٠/٩٥١٥	٠/٩٥٢٥	٠/٩٥٣٥	٠/٩٥٤٥
١/٧	٠/٩٥٥٤	٠/٩٥٦٤	٠/٩٥٧٣	٠/٩٥٨٢	٠/٩٥٩١	٠/٩٥٩٩	٠/٩٦٠٨	٠/٩٦١٦	٠/٩٦٢٥	٠/٩٦٣٣
١/٨	٠/٩٦٤١	٠/٩٦٤٩	٠/٩٦٥٦	٠/٩٦٦٤	٠/٩٦٧١	٠/٩٦٧٨	٠/٩٦٨٦	٠/٩٦٩٣	٠/٩٦٩٩	٠/٩٧٠٦
١/٩	٠/٩٧١٣	٠/٩٧١٩	٠/٩٧٢٦	٠/٩٧٣٢	٠/٩٧٣٨	٠/٩٧٤٤	٠/٩٧٥٠	٠/٩٧٥٦	٠/٩٧٦١	٠/٩٧٦٧
٢	٠/٩٧٧٢	٠/٩٧٧٨	٠/٩٧٨٣	٠/٩٧٨٨	٠/٩٧٩٣	٠/٩٧٩٨	٠/٩٨٠٣	٠/٩٨٠٨	٠/٩٨١٢	٠/٩٨١٧
٢/١	٠/٩٨٢١	٠/٩٨٢٦	٠/٩٨٣٠	٠/٩٨٣٤	٠/٩٨٣٨	٠/٩٨٤٢	٠/٩٨٤٦	٠/٩٨٥٠	٠/٩٨٥٤	٠/٩٨٥٧
٢/٢	٠/٩٨٦١	٠/٩٨٦٤	٠/٩٨٦٨	٠/٩٨٧١	٠/٩٨٧٥	٠/٩٨٧٨	٠/٩٨٨١	٠/٩٨٨٤	٠/٩٨٨٧	٠/٩٨٩٠
٢/٣	٠/٩٨٩٣	٠/٩٨٩٦	٠/٩٨٩٨	٠/٩٩٠١	٠/٩٩٠٤	٠/٩٩٠٦	٠/٩٩٠٩	٠/٩٩١١	٠/٩٩١٣	٠/٩٩١٦
٢/٤	٠/٩٩١٨	٠/٩٩٢٠	٠/٩٩٢٢	٠/٩٩٢٥	٠/٩٩٢٧	٠/٩٩٢٩	٠/٩٩٣١	٠/٩٩٣٢	٠/٩٩٣٤	٠/٩٩٣٦
٢/٥	٠/٩٩٣٨	٠/٩٩٤٠	٠/٩٩٤١	٠/٩٩٤٣	٠/٩٩٤٥	٠/٩٩٤٦	٠/٩٩٤٨	٠/٩٩٤٩	٠/٩٩٥١	٠/٩٩٥٢
٢/٦	٠/٩٩٥٣	٠/٩٩٥٥	٠/٩٩٥٦	٠/٩٩٥٧	٠/٩٩٥٩	٠/٩٩٦٠	٠/٩٩٦١	٠/٩٩٦٢	٠/٩٩٦٣	٠/٩٩٦٤
٢/٧	٠/٩٩٦٥	٠/٩٩٦٦	٠/٩٩٦٧	٠/٩٩٦٨	٠/٩٩٦٩	٠/٩٩٧٠	٠/٩٩٧١	٠/٩٩٧٢	٠/٩٩٧٣	٠/٩٩٧٤
٢/٨	٠/٩٩٧٤	٠/٩٩٧٥	٠/٩٩٧٦	٠/٩٩٧٧	٠/٩٩٧٧	٠/٩٩٧٨	٠/٩٩٧٩	٠/٩٩٧٩	٠/٩٩٨٠	٠/٩٩٨١
٢/٩	٠/٩٩٨١	٠/٩٩٨٢	٠/٩٩٨٢	٠/٩٩٨٣	٠/٩٩٨٤	٠/٩٩٨٤	٠/٩٩٨٥	٠/٩٩٨٥	٠/٩٩٨٦	٠/٩٩٨٦
٣	٠/٩٩٨٧	٠/٩٩٨٧	٠/٩٩٨٧	٠/٩٩٨٨	٠/٩٩٨٨	٠/٩٩٨٩	٠/٩٩٨٩	٠/٩٩٨٩	٠/٩٩٩٠	٠/٩٩٩٠
٣/١	٠/٩٩٩٠	٠/٩٩٩١	٠/٩٩٩١	٠/٩٩٩١	٠/٩٩٩٢	٠/٩٩٩٢	٠/٩٩٩٢	٠/٩٩٩٢	٠/٩٩٩٣	٠/٩٩٩٣
٣/٢	٠/٩٩٩٣	٠/٩٩٩٣	٠/٩٩٩٤	٠/٩٩٩٤	٠/٩٩٩٤	٠/٩٩٩٤	٠/٩٩٩٤	٠/٩٩٩٥	٠/٩٩٩٥	٠/٩٩٩٥
٣/٣	٠/٩٩٩٥	٠/٩٩٩٥	٠/٩٩٩٥	٠/٩٩٩٦	٠/٩٩٩٦	٠/٩٩٩٦	٠/٩٩٩٦	٠/٩٩٩٦	٠/٩٩٩٦	٠/٩٩٩٧
٣/٤	٠/٩٩٩٧	٠/٩٩٩٧	٠/٩٩٩٧	٠/٩٩٩٧	٠/٩٩٩٧	٠/٩٩٩٧	٠/٩٩٩٧	٠/٩٩٩٧	٠/٩٩٩٧	٠/٩٩٩٨
٣/٥	٠/٩٩٩٨	٠/٩٩٩٨	٠/٩٩٩٨	٠/٩٩٩٨	٠/٩٩٩٨	٠/٩٩٩٨	٠/٩٩٩٨	٠/٩٩٩٨	٠/٩٩٩٨	٠/٩٩٩٨

Payam Noor University

خوانندهٔ محترم

این پرسشنامه به منظور ارتقای کیفیت کتاب‌های درسی و رفع نواقص آن‌ها تهیه شده است. دقت شما در پاسخگویی به این پرسشنامه در پایان هر نیمسال ما را در تحقق این هدف یاری خواهد کرد.

نام کتاب .... نام مؤلف/مترجم .... سال انتشار ....

پاسخگو: عضو علمی پیام‌نور □ عضو علمی سایر دانشگاه‌ها □ رشتهٔ تخصصی .... سابقهٔ تدریس ....

دانشجوی پیام‌نور □ دانشجوی سایر دانشگاه‌ها □ رشتهٔ تحصیلی .... ورودی سال ....

سؤال	خیلی زیاد	زیاد	متوسط	کم	بسیار کم
۱. آیا از زمان تحویل و نحوهٔ دسترسی به کتاب راضی بودید؟					
۲. آیا حجم کتاب با توجه به تعداد واحد مناسب بود؟					
۳. آیا راهنمایی‌های لازم برای مطالعهٔ کتاب منظور شده بود؟					
۴. آیا در ترتیب مطالب کتاب سلسله مراتب شناختی (آسان به مشکل) رعایت شده بود؟					
۵. آیا تقسیم‌بندی مطالب در فصل‌ها یا بخش‌ها متناسب و بجا بود؟					
۶. آیا متن کتاب روان و ساده و جمله‌ها قابل فهم بود؟					
۷. آیا به‌روزبودن مطالب و آمارها رعایت شده بود؟					
۸. آیا مطالب تکراری داشت؟					
۹. آیا پیوستگی مطالب با درس‌های پیش‌نیاز رعایت شده بود؟					
۱۰. آیا مثال‌ها، شکل‌ها، نمودارها، جدول‌ها و ... گویابودند و درفهم مطلب تأثیر داشتند؟					
۱۱. مطالعهٔ هدف‌های کلی، آموزشی/ رفتاری تا چه اندازه به درک بهتر شما کمک کرد؟					
۱۲. آیا خودآزمایی‌های کتاب به‌گونه‌ای بود که تمام مطالب درسی را شامل شود؟					
۱۳. آیا پاسخ خودآزمایی‌ها و تمرین‌ها کامل و گویا بود؟					
۱۴. چقدر با غلط‌های املایی و اشکال‌های چاپی مواجه شدید؟					
۱۵. آیا از کیفیت چاپ و صحافی کتاب راضی بودید؟					
۱۶. آیا طرح روی جلد کتاب با مطالب کتاب تناسب داشت؟					
۱۷. چنانچه دانشگاه وسایل کمک‌آموزشی از قبیل نوار، فیلم، لوح فشرده و ... در اختیارتان گذارده، آیا به درک بهتر شما کمک کرده‌اند؟					
۱۸. تا چه اندازه این کتاب شما را از حضور در کلاس بی‌نیاز کرد؟					

در مجموع کتاب را چگونه ارزیابی می‌کنید؟ عالی □ خوب □ متوسط □ ضعیف □ بسیار ضعیف □

لطفاً چنانچه با اشکال‌های تایپی یا محتوایی و مطالب تکراری مواجه شده‌اید، فهرستی از آن‌ها را با ذکر شمارهٔ صفحه ضمیمه کنید. در صورت تمایل سایر پیشنهادهای خود را نیز بنویسید.

این پرسشنامه را پس از تکمیل از کتاب جدا کنید و به قسمت آموزش مرکز تحویل دهید یا مستقیماً به نشانی تهران، صندوق پستی ۳۳۳-۱۴۳۳۵، مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی کتاب ارسال فرمایید. آدرس وبگاه ما www.pnu.ac.ir است. با ورود به وبگاه، مسیر زیر را طی نمایید: ساختار دانشگاه/ معاونت‌ها/ فناوری اطلاعات/ مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی.

با تشکر

مدیریت تولید مواد و تجهیزات آموزشی

Payam Noor University