به نام حضرت دوست که هرچه داریم از اوست

آمار استنباطی

استاد: جناب آقای نصراللهی

گردآورنده: ابوالفضل ولدی

فهرست مطالب .... شماره صفحه

جلسه اول

جلسه دوم

جلسه سوم

فهرست مطالب .... شماره صفحه

فهرست مطالب .... شماره صفحه

جلسه نهم

جلسه دهم

جلسه یازدهم

جلسه دوازدهم

جلسه

اول

۱۳۸۹/۷/۱۰

تعریف آمار:

به طور کلی می‌توان از آمار ۲ تعریف بیان کرد.

۱- روش علمی که جهت جمع‌آوری، تلخیص، طبقه‌بندی، تجزیه و تحلیل و تفسیر به کار می‌رود، به عبارت دیگر به بررسی و مطالعه مشاهدات به صورت علمی اشاره دارد.

۲- به مشاهدات عددی و ارقام ریاضی اطلاق می‌شود مانند: آمارهای بانک مرکزی، گزارش‌های آماری سازمان‌های مختلف.

به هر حال امروزه به عنوان یک علم شامل مفاهیم و روش‌های است که در تمام حوزه‌های علوم به خصوص در پژوهش‌ها و تحقیقات علمی بدان نیاز داریم.

کاربردهای فراوان:

با توجه به آنچه که بیان شد امروزه علم آمار در بسیاری از حوزه‌های علمی کاربرد دارد که بعضی از آنها اشاره می‌کنیم: ۱- در علوم اجتماعی و رفتاری: این نوع کاربرد کمی قبل از جنگ جهانی دوم وارد علوم اجتماعی و رفتاری شد که کاربرد آن همچنان ادامه دارد.

۲- بعد از جنگ جهانی و به منطور برآورد دقیق خسارات و خرابی‌ها جنگ به منظور پیش‌بینی هزینه‌های بازسازی.

۳- آمار در تبدیل داده‌ها به اطلاعات و تفسیر این اطلاعات به منظور افزایش دانش بشری سهم بسزایی دارد.

۴- استفاده از آمار در حوزه مدیریت از جمله تکنیک‌های شبیه‌سازی در رشته سیستم‌های مدیریتی.

۵- استفاده از نرم‌افزارهای آماری به منظور تجزیه و تحلیل‌ها «spss»

۶- به کارگیری فنون پایه‌ای آمار در بررسی صحت و سقم فرضیه‌های علمی.

سیر تحول آمار از نظر موضوعی:

به طور کلی از این نظر آمار به ۳ مرحله تقسیم می‌شود.

۱- آمار توصیفی:

این آمار صرفا به توصیف جامعه می‌پردازند و هدف آن مصاحبه‌های پارامترهای جامعه است، چنانچه محاسبه مقادیر و شاخص‌های جامعه آماری با استفاده از سرشماری تمام اعضای جامعه باشد به آن آمار توصیفی می‌گویند.

۲- آمار استنباطی:

این آمار از اوایل قرن ۲۰ مطرح شد. در این روش با استفاده از مقادیر نمونه آماره‌ها محاسبه می‌کنند، سپس به کمک برآورد و آزمون فرض آماری آماره‌ها را به پارامترهای جامعه تعمیم می‌دهند.

به طور کلی هرکجا در آمار سخن از استنتاج و استنباط شود با آمار استنباطی سر و کار دارید.

۳- آمار ناپارامتریک:

عبارت است از اینکه جامعه آماری ما دارای توزیع نرمال نمی‌باشد.

جامعه آماری:

به مجموعه‌ای از اشیا یا افراد اطلاق می‌شود که می‌خواهیم در یک موضوع یا چند موضوع در مورد آ» مطالعه کنیم.

نمونه آماری:

به تعدادی از اعضای جامعه آماری که دارای صفات یا ویژگی‌های مشترک هستند می‌گویند و با n نشان می‌دهند.

انواع متغیرها در آمار:

تعریف متغیر:

متغیر مقداری است که از یک فرد به فرد دیگر ممکن است تغییر کند. مثل اندازه سازمان که از کوچک به متوسط و سپس بزرگ تغییر می‌کند.

متغیرها را به طور خلاصه به ۲ دسته تقسیم می‌کنیم:

۱- متغیر کیفی:

متغیری است که نتوان با اعداد و ارقام آن را نمایش داد، مثل: عدالت، مثل شجاعت، ایثارگری

۲- متغیر کمی:

متغیری است که بتوان با اعداد و ارقام آن را نمایش داد، مثل: تعداد خانوارها، میزان حقوق دریافتی

انواع مقیاس‌ها:

در آمار به طور کلی مقیاس‌ها را به ۴ دسته تقسیم می‌کند:

۱- اسمی　　۲- ترتیبی　　۳- ترکیبی یا فاصله‌ای　　۴- نسبی

انواع نمونه‌گیری:

به طور کلی نمونه‌گیری‌ها را می‌توان به شرح زیر بیان کرد:

۱- نمونه‌گیری تصادفی ساده: یعنی شاخص انتخاب برای تمام عضوهای نمونه وجود دارد، این حالت می‌تواند با جایگذاری و بدون جایگذاری باشد.

۲- نمونه‌گیری طبقه‌ای　　۳- نمونه‌گیری خوشه‌ای

۴- نمونه‌گیری مونوگرافی　　۵- نمونه‌گیری مکاتبه‌ای یا پرسشنامه

نحوه جمع‌آوری اطلاعات: به چند روش می‌توان در آمار داده‌ها را جمع‌آوری کرد.

۱- پرسشنامه‌ای ۲- مصاحبه‌ای ۳- مشاهده‌ای ۴- روش‌های دلفی (طوفان مغزی، گروه‌های اسمی)

انواع داده‌ها:

داده‌ها را به دو دسته طبقه‌بندی می‌کند:

۱- طبقه‌بندی شده ۲- طبقه‌بندی نشده

۱- طبقه‌بندی نشده:

پارامترهای مرکزی شامل: میانگین- چارکها- مد/نما

پارامترهای پراکندگی شامل: واریانس- انحراف معیار- ضریب پراکندگی- میان چارکها- دامنه میان چارکی- انحراف متوسط از میانگین- نیمه واریانس

۲- طبقه‌بندی شده:

پارامترهای مرکزی شامل: میانگین- چارکها- مد/نما

پارامترهای پراکندگی شامل: واریانس- انحراف معیار- ضریب پراکندگی- میان چارکها- دامنه میان چارکی- انحراف متوسط از میانگین- نیمه واریانس

با توجه به موارد گفته شده و تشبیه بعضی از پارامترهای پراکندگی در مورد داده‌های طبقه‌بندی شده که بدانها نیاز داریم به طور خلاصه می‌پردازیم.

جلسه دوم

۱۳۸۹/۷/۱۷

واریانس:

برای پیدا کردن واریانس معمولا از روابط زیر می‌توان استفاده کرد:

برای داده‌های طبقه‌بندی نشده $\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i^2 - \mu_x^2)^2}{N}$, $\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \mu_x^2$

برای داده‌های طبقه‌بندی شده: $\sigma_x^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \mu_x)^2}{N}$, $\sigma_x^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \mu_x^2$

مثال: با توجه به اطلاعات زیر واریانس را محاسبه کنید:

$N = ۵۰$, $\mu_x = ۴$, $\sum f_i x_i^2 = ۱۰۰۰$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \mu_x^2 \Rightarrow \frac{۱۰۰۰}{۵۰} - (۴)^2 = ۲۰ - ۱۶ = ۴$$

باتوجه به همین مثال انحراف معیار چقدر است؟

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{۴} = ۲$$

با توجه به همین مثال ضریب پراکندگی را حساب کنید؟

$$C.V = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{۲}{۴} = ۰/۵$$

دامنه میان چارکی:

همانطور که قبلا گفته شده است این پارامتر برای توزیع‌های مناسب است که دنباله‌ها دارای مشاهدات اندکی است، به بیان ساده‌تر، در جدول طبقه‌بندی داده‌ها، طبقه اول و آخر آن باز است.

دامنه میان چارکی $IQR = Q_۳ - Q_۱$

انحراف میان چارکی $SIQR = \frac{Q_۳ - Q_۱}{۲}$

چارک سوم $= Q_۳$ چارک اول $= Q_۱$

نکته: برای بدست آوردن چارک اول یا سوم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$M_d = L_{m_d} + \left[\frac{\frac{aN}{۴} - F_{ci-۱}}{f_i} \right] \times I$$

کران پایین طبقه شامل چارک اول یا سوم $= L_{m_d}$

$a=$ چارک اول یا سوم

$F_{ci-۱} =$ فراوانی مطلق ماقبل چارک اول یا سوم

$f_i =$ فراوانی همان طبقه شامل چارک اول یا سوم

$I=$ فاصله طبقات

مثال: با توجه به جدول زیر محاسبه کنید دامنه میان چارکی و انحراف چارکی

C-L	f_i	F_{ci}
≤ ۵	۲	۲
۵-۸	۱۰	۱۲
۸-۱۱	۲۵	۳۷
۱۱-۱۴	۲۳	۶۰
۱۴-۱۷	۱۵	۷۵
≥ ۱۷	۵	۸۰

$$Q_۳=\frac{aN}{۴}=\frac{۳\times۸۰}{۴}=۶۰\Rightarrow M_d=۱۱+\left[\frac{۶۰-۳۷}{۲۳}\right]\times۳=۱۱+۳=۱۴$$

$$Q_۱=\frac{aN}{۴}=\frac{۱\times۸۰}{۴}=۲۰\Rightarrow M_d=۸+\left[\frac{۲۰-۱۲}{۲۵}\right]\times۳=۸/۹۶$$

$$IQR=Q_۳-Q_۱=۱۴-۸/۹۶=۵/۰۴$$

$$SIQR=\frac{Q_۳-Q_۱}{۲}=\frac{۱۴-۸/۹۶}{۲}=۲/۵۲$$

تصحیح شپارد:

از آنجاکه در دامیانگین وقه‌بندی شده از نماینده طبقات در محاسبه میانگین و واریانس استفاده می‌کنیم معمولا اعداد به دست آمده با واقعیت اختلاف دارد، بنابراین جهت اصلاح این انحراف از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sigma_c^۲=\sigma_x^۲-\frac{I^۲}{۱۲}$$

۱- متغیرها باید پیوسته باشند.

۲- تعداد N دست کم ۱۰۰ تا باشد.

۳- تابع توزیع فراوانی از نوع متقارن یا تقریبا متقارن باشد.

مثال: اگر $\sigma_x^۲=۱۰۰$ و ضریب اطمینان $I=۵$ باشد، محاسبه کنید مقدار تصحیح شپارد چقدر است؟

$$\sigma_c^۲=\sigma_x^۲-\frac{I^۲}{۱۲}\Rightarrow\sigma_c^۲=۱۰۰-\frac{۵^۲}{۱۲}=۱۰۰-\frac{۲۵}{۱۲}=۹۷/۱$$

مثال: فرض کنید $Q_۱=۲۰۰$, $Q_۳=۴۰۰$ مقدار IQR و SIQR را محاسبه کنید.

$$IQR=۴۰۰-۲۰۰=۲۰۰$$

$$SIQR=\frac{Q_۳-Q_۱}{۲}\Rightarrow\frac{۴۰۰-۲۰۰}{۲}=۱۰۰$$

مثال: اندازه ۳۰ میله آهنی بر حسب cmبه شرح زیر است، محاسبه کنید:

الف) پارامترهای پراکندگی

ب) پارامترهای پراکندی

۲/۳۵	۲/۴۵	۲/۵۵	۲/۶	۲/۳۵	۲/۴۶
۲/۵۵	۲/۶	۲/۴	۵/۶	۳/۷	۴/۲
۴/۲	۳/۷	۵/۳	۶/۲	۷/۱	۳/۵
۳/۱	۲/۹	۳/۲	۴/۷	۵/۱	۶/۴
۶/۱	۵/۱	۷/۲	۴/۱	۳/۶	۲/۳

C-L	f_i	F_{ci}	x_i	$x_i^۲$	$f_i x_i^۲$

۲-۲/۹	۱۱	۱۱	۲/۴۵	۶/۰۰۲	۶۶/۰۲۲
۳-۳/۹	۶	۱۷	۳/۴۵	۱۱/۹۰۲	۷۱/۴۱۲
۴-۴/۹	۴	۲۱	۴/۴۵	۱۹/۸۰۲	۷۹/۲۰۸
۵-۵/۹	۴	۲۵	۵/۴۵	۲۹/۷۰۲	۱۱۸/۸۰۸
۶-۶/۹	۳	۲۸	۶/۴۵	۴۱/۶۰۲	۱۲۴/۸۰۶
۷-۷/۹	۲	۳۰	۷/۴۵	۵۵/۵۰۲	۱۱۱/۰۰۴
		۳۰			۵۷۱/۲۶

$$\mu_x^۲ = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{۱۱۹/۶۱}{۳۰} = ۳/۹۸۷$$

$$\sigma_x{}^۲ = \frac{\sum f_i x_i{}^۲}{N} - \mu_x^۲$$

$$= \frac{۵۷۱/۲۶}{۳۰} - ۳/۹۸۷ = ۱۵/۰۵۵$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^۲} = \sqrt{۱۵/۵۵} = ۳/۸۸$$

$$\mu_x = \sqrt{\mu_x{}^۲} = ۱/۹۹$$

$$C.V = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{۳/۸۸}{۱/۹۹} = ۱/۹۴$$

چارک سوم $\frac{aN}{۴} = \frac{۳(۳۰)}{۴} = ۲۲/۵$

$$M_d = m_d + \left[\frac{\frac{aN}{۴} - F_{ci-۱}}{f_i}\right] \times I \Rightarrow M_d = ۵ + \left[\frac{۲۲/۵ - ۲۱}{۴}\right] \times ۱ \Rightarrow ۵ + ۰/۳۷۵ = ۵/۳۷۵$$

چارک اول $\frac{aN}{۴} = \frac{۱(۳۰)}{۴} = ۷/۵$

$$M_d = m_d + \left[\frac{\frac{aN}{۴} - F_{ci-۱}}{f_i}\right] \times I \Rightarrow ۲ + \left[\frac{۷/۵ - ۱۱}{۱۱}\right] \times ۱ = ۱/۶۸۱$$

$$IQR = Q_۳ - Q_۱ = ۵/۳۷۵ - ۱/۶۸۱ = ۲/۶۹۴$$

$$SIQR = \sqrt{۳/۶۹۴} = ۱/۹۲$$

پارامترهای تعیین انحراف از قرینگی:

گاهی به علت اینکه ۲ یا چند جامعه دیگر دارای پارامترهای مرکزی یکسان هستند، در این حالت تصمیم گیرنده معمولا از پارامترهای پراکندگی استفاده می‌کنند. در چنین حالتی نیز ممکن است پارامترهای پراکندگی جواب یکسان داشته باشد، بنابراین بهتر است از روابط زیر که به معروف به ضریب چولگی پیرسون می‌باشد استفاده کرد که در اینجا به طور خلاصه بر ۳ رابطه آن می‌پردازیم:

$$۱)\ \mu_x - MO = ۳(\mu_x - M_d) \quad ۲)\ SK_۱ = \frac{\mu_x - MO}{\sigma_x} \quad ۳)\ SK_۲ = \frac{۳(\mu_x - M_d)}{\sigma_x}$$

مثال: چنانچه در جامعه آماری $\mu_x = ۱۲ \quad , \quad M_d = ۱۶$ باشد، مقدار MO را محاسبه کنید.

$$\mu_x - MO = ۳(\mu_x - M_d) \Rightarrow ۱۲ - MO = ۳(۱۲-۱۶) \Rightarrow ۱۲ - MO = -۱۲$$

$$\Rightarrow -MO = -۱۲-۱۲ \Rightarrow -MO = -۲۴ \Rightarrow MO = \frac{-۲۴}{-۱} \Rightarrow MO = ۲۴$$

مثال: چنانچه انحراف معیار، میاگین و مد به ترتیب $\sigma_x = ۲ \ , \ \mu_x = ۱۶ \quad , \quad MO = ۸$ باشد، ضریب چولگی پیرسون چقدر است؟

$$SK_۱ = \frac{\mu_x - MO}{\sigma_x} = \frac{۱۶-۸}{۲} = ۴$$

جلسه

سوم

۱۳۸۹/۷/۲۴

توابع احتمال گسسته:

۱- متغیر تصادفی گسسته:

ابتدا لازم است به چند مثال زیر توجه شود:

فرض کنید در برگزاری مسابقه فوتبال به شرط آفتابی بودن ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال سود و اگر ابری باشد ۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال و اگر بارانی یا برفی باشد، سود صفر است. فضای نمونه و متغیر تصادفی را به طور ساده نشان دهید.

S=[باران، برفی «سود=۰»، ابری «سود=۵,۰۰۰,۰۰۰»، آفتابی «سود=۱۰,۰۰۰,۰۰۰»]

فرض کنید سکه‌ای را ۲ بار پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه و متغیر تصادفی آن را به طور ساده نشان دهید و شیر مدنظر می‌باشد. H= شیر T= خط

$$S=\left\{\begin{matrix} TT & & TH & & HT & & HH \\ \downarrow & , & \downarrow & , & \downarrow & , & \downarrow \\ ۰ & & ۱ & & ۱ & & ۲ \end{matrix}\right\}$$

احتمال متغیر تصادفی:

تابعی در صورتی احتمال است که ۲ خاصیت زیر را داشته باشد:

۱) $\sum P(X=x)=۱$

۲) تابع احتمال منفی نباشد.

مثال:

اگر احتمال پرتاب ۲ سکه طبق جدول زیر باشد آیا تابع احتمال می‌باشد؟ چرا؟

X	(TH)	(TH,HT)	(HH)
P(X=x)	۰/۲۵	۰/۵	۰/۲۵

$$\sum P(X=x)=۰/۲۵+۰/۵+۰/۲۵=۱$$

تابع احتمال منفی نمی‌باشد.

جایگشت:

تبدیل: $P_r^n=\frac{n!}{(n-r)!}$

ترکیب: $P_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: اگر تابع زیر را داشته باشیم، مطلوب است محاسبه کنید تابع احتمال است؟ چرا؟

$$P(X=x)=\frac{\binom{4}{x}}{16} \qquad x=0,1,2,3,4$$

$$P_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}\Rightarrow P_0^4=\frac{\frac{4!}{0!(4-0)!}}{16}=\frac{1}{16}$$

$$P_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}=P_1^4=\frac{\frac{4!}{1!(4-1)!}}{16}=\frac{4}{16}$$

$$P_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}=P_2^4=\frac{\frac{4!}{2!(4-2)!}}{16}=\frac{6}{16}$$

$$P_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}=P_3^4=\frac{\frac{4!}{3!(4-3)!}}{16}=\frac{4}{16}$$

$$P_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}=P_4^4=\frac{\frac{4!}{4!(4-4)!}}{16}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{16}{16}=1$$

بله، زیرا جمع ترکیب‌ها برابر با یک است و تابع آنها منفی نمی‌باشد.

تابع توزیع/ تابع احتمال تجمعی:

تابع توزیع تابعی است که به ازای جمیع مقادیر ممکن متغیر تصادفی (X) احتمال وقوع مقداری کوچکتر یا مساوی «x» را نشان می‌دهد. $P(X\le x)$

مثال: با توجه به مقادیر ۱۰، ۵، ۳، ۰، ۲- و احتمالات از چپ به راست به ترتیب ۰/۱، ۰/۱۵، ۰/۲۵، ۰/۳۰، ۰/۲، محاسبه کنید تابع توزیع و مقدار $F(1)$, $F(3)$

X	-۲	۰	۳	۵	۱۰
$P(X=x)$	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۳	۰/۲
$P(X\le x)$	۰/۱	۰/۲۵	۰/۵	۰/۸	۱

$$F(1)=P(X\le 1)=0/25$$
$$F(3)=P(X\le 3)=0/5$$

مثال: تعداد تلویزیون‌های فروخته شده فروشگاهی، در ۱۲۰ روز به شرح جدول زیر است:

مطلوب است: محاسبه کنید: الف) تابع احتمال ب) تابع توزیع احتمال تجمعی

ج) احتمال اینکه یک روز به صورت تصادفی انتخاب شود، کمتر و یا ۵ تلویزیون باشد چقدر است؟

تعداد روزها	تعداد فروخته شده
۱۸	۲
۲۷	۳
۳۰	۴
۱۵	۵
۱۸	۶
۱۲	۷
۱۲۰	۲۷

$$\frac{۳۰}{۱۲۰}=۰/۲۵ \quad \frac{۲۷}{۱۲۰}=۰/۲۲۵ \quad \frac{۱۸}{۱۲۰}=۰/۱۵$$

$$\frac{۱۲}{۱۲۰}=۰/۱ \quad \frac{۱۸}{۱۲۰}=۰/۱۵ \quad \frac{۱۵}{۱۲۰}=۰/۱۲۵$$

$$f(۵)=P(X\le ۵)=۰/۷۵$$

X	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$P(X=x)$	۰/۱۵	۰/۲۲۵	۰/۲۵	۰/۱۲۵	۰/۱۵	۰/۱
$P(X\le x)$	۰/۱۵	۰/۳۷۵	۰/۶۲۵	۰/۷۵	۰/۹	۱

مثال: آیا تابع زیر را می‌توان تابع احتمال یک متغیر تصادفی دانست؟ چرا؟

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x+۱}{۲۰} \\ x=۱,۲,۳,۴,۵ \end{cases}$$

$$f(x_۱)=\frac{۱+۱}{۲۰}=\frac{۲}{۲۰} \quad f(x_۲)=\frac{۲+۱}{۲۰}=\frac{۳}{۲۰} \quad f(x_۳)=\frac{۳+۱}{۲۰}=\frac{۴}{۲۰}$$

$$f(x_۴)=\frac{۴+۱}{۲۰}=\frac{۵}{۲۰} \quad f(x_۵)=\frac{۵+۱}{۲۰}=\frac{۶}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۲۰}+\frac{۳}{۲۰}+\frac{۴}{۲۰}+\frac{۵}{۲۰}+\frac{۶}{۲۰}=\frac{۲۰}{۲۰}=۱$$

مثال: در تابع زیر a را چنان کنید که بتوان آن را یک تابع احتمال دانست؟

$$f(x)=ax^۲ \qquad x=۰,۱,۲,۳,۴$$

$$f(x_{۱\to ۴})=a\left[(۰)^۲+(۱)^۲+(۲)^۲+(۳)^۲+(۴)^۲(۵)^۲\right]$$

$$=a[۰+۱+۴+۹+۱۶+۲۵]=a۵۵=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۵۵}=۰/۰۱۸$$

مثال: شرکت بیمه اطلاعات ۶۰ روز تصادفات را چنین اعلام کرده است؟

الف) تابع احتمال و تابع توزیع تصادفات

ب) اگر روزی از این ۶۰ روز به طور تصادفی انتخاب کنیم احتمال اینکه در این روز کمتر از ۴ تصادف رخ داده باشد چقدر است؟

تعداد روزها	تعداد تصادفات
۱۵	۰
۲۵	۱
۱۰	۲
۶	۳
۴	۴
۶۰	۱۰

X	۰	۱	۲	۳	۴
$P(X=x)$	۰/۲۵	۰/۴۲	۰/۱۷	۰/۱	۰/۰۶
$P(X\le x)$	۰/۲۵	۰/۶۷	۰/۸۴	۰/۹۴	۱

$$f(۴)=P(x<۴)=۰/۹۴$$

جلسه
چهارم

۱۳۸۹/۸/۴

امید ریاضی (متغیر تصادفی):

امید ریاضی همان میانگین موزون است که احتمالات در آن نقش وزن‌ها (ضرایب) را دارد، امید ریاضی را با علامت $E(X)$ نشان می‌دهند و همانطور که می‌دانیم در میانگین موزون، داده‌ها را در ضرایب، ضرب و سپس حاصل را بر مجموع ضرایب تقسیم می‌کنیم ولی امید ریاضی چون مجموع احتمالات «۱» است پس از ضرب احتمالات در متغیر تصادفی دیگر نیازی به تقسیم نمی‌باشد.

$$E(X)=\sum X.f(x)$$

مثال: شرکت تولیدکننده آبگرمکن تقاضاهای سالانه را همراه با اطلاعات مربوط در جدول زیر آورده است، امید ریاضی تقاضاها را به دست آورید.

x	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰
f(x)	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۳	۰/۲	۰/۱
E(X)	۱۵	۵۰	۹۰	۸۰	۵۰

$$E(X)=\sum x.f(x)\Rightarrow(۱۰۰\times۰/۱۵)+(۲۰۰\times۰/۲۵)+(۳۰۰\times۰/۳)+(۴۰۰\times۰/۲)+(۵۰۰\times۰/۱)$$
$$=۱۵+۵۰+۹۰+۸۰+۵۰=۲۸۵$$

خواص امیدریاضی:

امید ریاضی مانند میانگین دارای خواص زیر است:

$۱)\ E(a)=a$ $\quad$ $۲)\ E(ax)=aE(X)$

$۳)\ E(ax+b)=aE(X)+b$ $\quad$ $۴)\ E(x^n)=\sum x^۲.f(x)$

$۵)\ z=ax+by+c\Rightarrow E(z)=E(ax)+E(by)+E(c)\Rightarrow z=aE(x)+bE(y)+c$

مثال: تابع احتمال زیر مفروض است؛ محاسبه کنید:

الف) $E(X)$ ب) $E(۲X)$ ج) $E(-۳x+۲)$ د) $E(X^۲)$

x	-۲	۱	۳	۵	
f(x)	۰/۲	۰/۴	۰/۳	۰/۱	
E(X)	-۰/۴	۰/۴	۰/۹	۰/۵	۱/۴
$E(X^۲)$	۰/۸	۰/۴	۲/۷	۲/۵	۶/۴

الف) $$E(X)=\sum x.f(x)\Rightarrow(-۲\times۰/۲)+(۱\times۰/۴)+(۳\times۰/۳)+(۵\times۰/۱)$$
$$=-۰/۴+۰/۴+۰/۹+۰/۵=۱/۴$$

ب) $E(۲x)=۲E(X)\Rightarrow ۲\times(۱/۴)=۲/۸$

ج) $E(-۳x+۲)=-۳E(X)+۲\Rightarrow -۳\times(۱/۴)+۲=-۲/۲$

د) $$E(X^۲)=\sum x^۲.f(x)\Rightarrow\left[(-۲)^۲\times۰/۲\right]+\left[(۱)^۲\times۰/۴\right]+\left[(۳)^۲\times۰/۳\right]+\left[(۵)^۲\times۰/۱\right]$$
$$=۰/۸+۰/۴+۲/۷+۲/۵=۶/۴$$

واریانس:

با توجه به فرمول پایین می‌توان ۳ خاصیت برای آن بیان کرد.

$$V(X)=E(X^{۲})-E(X)$$

خاصیت اول:

$$V(X)=V(a)=۰$$

خاصیت دوم:

$$V(ax)=a^{۲}V(X)$$

خاصیت سوم:

$$V(ax+b)=V(ax)+V(b)=a^{۲}V(X)+۰$$

مثال: توزیع احتمال زیر مفروض است؛ محاسبه کنید:

الف) $E(X)$ ب) $E(-۳x+۷)$ ج) $E\left[(-۳x+۷)^{۲}\right]$ د) $V(X)$ و) $V(-۴x-۳)$

x	۲	۴	۶	۸	۱۰
f(x)	۰/۱	۰/۲۵	۰/۳	۰/۲۵	۰/۱
E(X)	۰/۲	۱	۱/۸	۲	۱
$E(X^{۲})$	۰/۴	/۴	۱۰/۸	۱۶	۱۰

جواب قسمت «الف»:

$$E(X)=\sum x.f(x)\Rightarrow(۲\times۰/۱)+(۴\times۰/۲۵)+(۶\times۰/۳)+(۸\times۰/۲۵)+(۱۰\times۰/۱)$$
$$=۰/۲+۱+۱/۸+۲+۱=۶$$

جواب قسمت «ب»:

$$E(-۳x+۷)=-۳E(X)+۷\Rightarrow-۳\times(۶)+۷=-۱۱$$

جواب قسمت «ج»:

$$E\left[(-۳x+۷)^{۲}\right]=E\left[(۷-۳x)^{۲}\right]\Rightarrow E\left[(۷)^{۲}-۲(۷)(۳x)+(۳x)^{۲}\right]=E\left[۴۹-۴۲x+۹x^{۲}\right]$$
$$=E(۴۹)-E(۴۲)\times E(X)+E(۹)\times E(X^{۲})=۴۹-۲۵۲+۳۷۰/۸=۱۶۷/۸$$

$$E(X^{۲})=\sum x^{۲}.f(x)\Rightarrow\left[(۲)^{۲}\times۰/۱\right]+\left[(۴)^{۲}\times۰/۲۵\right]+\left[(۶)^{۲}\times۰/۳\right]+\left[(۸)^{۲}\times۰/۲۵\right]+\left[(۱۰)^{۲}\times۰/۱\right]$$
$$=۰/۴+۴+۱۰/۸+۱۶+۱۰=۴۱/۲$$

جواب قسمت «د»:

$$V(X)=E(X^{۲})-E(X)=۴۱/۲-۶=۳۵/۲$$

جواب قسمت «و»:

$$V(-۴x-۳) \Rightarrow V(-۴x)-V(۳)=(-۴)^{۲}V(X)-۰=۱۶\times ۳۵/۲-۰=۵۶۳/۲$$

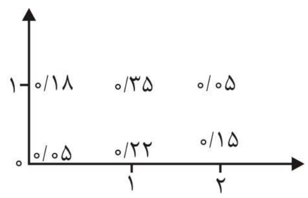
تابع احتمال توام:

در مواردی لازم علاوه بر رفتار متغیر ارتباط بین ۲ یا چند متغیر را نیز بررسی کند. در این حالت باید از تابع احتمال توام استفاده کرد، بنابراین تابع احتمال توام عبارتست از فهرستی از زوج‌های (x_i, y_i) و احتمال‌های متناظر آنها یعنی $f(x_i, y_i)$ را بررسی می‌کند.

به طور کلی می‌توان جدول زیر را برای این نوع احتمالات ترسیم کرد.

x \ y	$y_۱$	$y_۲$	$y_۳ \dots$	y_k
$x_۱$	$f(x_۱, y_۱)$	$f(x_۱, y_۲)$	$f(x_۱, y_۳) \dots$	$f(x_۱, y_k)$
$x_۲$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_۳$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n, y_۱)$	$f(x_n, y_۲)$	$f(x_n, y_۳) \dots$	$f(x_n, y_k)$

مثال: ۲ بنگاه اتومبیل فروشی را در نظر بگیرید (فرض x متغیر تصادفی و تعداد اتومبیل‌های فروخته شده و y اتومبیل‌های فروخته شده بنگاه دوم)، سایر اطلاعات به شرح زیر است:



مطلوب است:

الف) تهیه جدول تابع احتمال توام

ب) احتمال اینکه $P(X=۱)$ باشد.

ج) احتمال اینکه $P(x>y)$ باشد.

د) احتمال اینکه $P(y \geq x=۱)$ باشد.

و) توزیع احتمال $z=x+y$

مثال: با توجه به تابع زیر احتمالات حاشیه‌ای x,y را بنویسید.

x \ y	۰	۱	P(X=x)
۰	۰/۰۵	۰/۰۸	۰/۱۳
۱	۰/۲۴	۰/۳۲	۰/۵۶
۲	۰/۱۶	۰/۱۵	۰/۳۱
P(Y=y)	۰/۴۵	۰/۵۵	۱

مثال: در جعبه‌ای ۸ مهره وجود دارد که ۲ تای آنها معیوب است. به طور تصادفی ۳ تا از آنها را بیرون می‌آوریم (x= تعداد مهره‌های سالم و y= تعداد مهره‌های معیوب در نظر گرفته شود)، مطلوب است: محاسبه کنید جدول تابع احتمال توام و احتمالات حاشیه x , y.

جلسه
پنجم

۱۳۸۹/۸/۸

کواریانس چیست:

امید ریاضی تعریف می‌شود، کواریانس معیار عددی است که نوع و شدت رابطه خطی بین دو متغیر تصادفی را نشان می‌دهد و می‌تواند ۳ حالت داشته باشد.

۱) با افزایش یک متغیر، متغیر دیگری نیز افزایش یابد، در چنین حالتی مثبت است.

۲) با افزایش یک متغیر، متغیر دیگر کاهش یابد، در این حالت کواریانس منفی است.

۳) با کاهش یا افزایش یک متغیر، متغیر دیگر تغییری نکند، در این حالت کواریانس صفر می‌باشد.

کواریانس بین ۲ متغیر را با نماد روبرو نشان می‌دهیم؛ $COV(x,y)$

بنابراین می‌توان رابطه زیر را برای به دست آوردن کواریانس بیان کرد؟

$$COV=E(xy)-E(x).E(y)$$

نکته: اگر کواریانس دو متغیر تصادفی صفر باشد، x,y به این معنی نیست که و متغیر مستقلند، ولی چنانچه دو متغیر مستقل باشند، حتما کواریانس آنها صفر است.

مثال: تابع احتمال توام ۲ متغیر تصادفی x,y به صورت زیر است؛ کواریانس را پیدا کنید.

x \ y	۰	۱	۲	P(X=x)
-۵	۰/۳	۰/۰۲	۰/۰۸	۰/۴
۱۰	۰/۱	۰	۰/۵	۰/۶
P(Y=y)	۰/۴	۰/۰۲	۰/۵۸	۱

$$E(X)=\sum x.f(x)=(-۵\times ۰/۴)+(۱\times ۰/۶)=-۲+۶=۴$$

x	-۵	۱	
-۵	۰/۴	۰/۶	۱
E(X)	-۲	۶	۴

y	۰	۱	۲	
-۵	۰/۴	۰/۰۲	۰/۵۸	۱
E(X)	۰	۰/۰۲	۱/۱۶	۱/۱۸

$$E(y)=\sum y.f(y)=(۰\times ۰/۴)+(۱\times ۰/۰۲)+(۲\times ۰/۵۸)$$
$$=۰+۰/۰۲+۱/۱۶=۱/۱۸$$

$$E(x,y)=[(x_{-۵},y_{۰})\times ۰/۳]+[(x_{-۵},y_{۱})\times ۰/۰۲]+[(x_{-۵},y_{۲})\times ۰/۰۸]+[(x_{-۵},y_{۰})\times ۰/۳]$$
$$+[(x_{۱۰},y_{۰})\times ۰/۱]+[(x_{۱۰},y_{۱})\times ۰]+[(x_{۱۰},y_{۲})\times ۰/۵]$$
$$=[-۵\times ۰\times ۰/۳]+[-۵\times ۱\times ۰/۰۲]+[-۵\times ۲\times ۰/۰۸]+[۱۰\times ۰\times ۰/۱]+[۱۰\times ۱\times ۰]+[۱۰\times ۲\times ۰/۵]$$
$$=۰-۰/۱-۰/۸+۰+۰+۱۰=۹/۱$$

$$COV=E(xy)-E(x).E(y)=۹/۱-۴\times ۱/۱۸=۴/۳۸$$

مثال: فرض از ۱۰ شرکت بزرگ مربوط به صنعتی خاص ۳ شرکت دارای سود خالصی بیش از ۱,۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال است. از این ۱۰ شرکت ۲ شرکت به طور تصادفی انتخاب شد. اگر متغیر تصادفی x نشان دهنده تعداد شرکت‌های که سودی بیش از ۱,۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال دارند و متغیر تصادفی y نشان دهنده تعداد شرکت‌های باشد که سودی کمتر یا مساوی این مبلغ داشته باشند محاسبه کنید:

الف) تابع احتمال توام

ب) احتمال اینکه ۲ شرکت انتخاب شد سودی بیش از ۱,۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال داشته باشند.

ج) اگر بدانیم کمتر از ۲ شرکت با سود بیش از ۱,۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال انتخاب شده‌اند احتمال اینکه دقیقا یک شرکت با سود کمتر یا مساوی ۱,۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰ انتخاب شود، چقدر است؟

د) احتمال اینکه تعداد شرکت‌های با سود بیش از ۱,۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰ بیشتر از تعداد شرکت‌هایی با سود کمتر یا مساوی باشد چقدر است؟

و) تابع احتمال متغیر تصادفی x را بنویسید.

استقلال دو متغیر تصادفی:

همانطور که قبلا گفته شده است ۲ پیشامد A و B در صورتی مستقل‌اند که رابطه زیر در مورد آنها صادق باشد.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

با توجه به این رابطه می‌توان برای تمام زوج‌های (x_i, y_i) بنویسیم $f(x_i, y_i) = x_i \times y_i$ همچنین در این قسمت می‌توان به طور کلی رابطه زیر را بیان کرد.

$COV(xy) = ۰ \rightarrow x, y$ غیرمستقل‌اند

توزیع برنولی:

چنانچه در آزمایش‌های (مثل پرتاب سکه) دو پیامد وجود داشته باشد احتمال موفقیت و یا شکست هر پیامد ثابت باشد را توزیع برنولی می‌گویند و معمولا از رابطه: $p + q = ۱$ به دست می‌آید.

مثال: در جعبه‌ای ۲۰ کالا موجود است، ۵ تای آنها ناسالم است، احتمال خارج شدن یک کالای سالم چقدر است؟

جواب: $p + q = ۱ \Rightarrow p = \frac{۱۵}{۲۰}\ ,\ q = \frac{۵}{۲۰}$

نکته: در این مثال چنانچه اولین کالای انتخاب شده (معیوب و سالم) انتخاب و مجددا به جعبه برگردانده شود در این صورت توزیع دیگر برنولی نمی‌باشد.

مثال: در کارتونی ۳ کالای ناسالم و ۲۷ سالم وجود دارد، کالاها را بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه موفق شویم کالای سالم خارج کنیم چقدر است؟

جواب: $p + q = ۱ \Rightarrow p = \frac{۲۷}{۳۰}\ ,\ q = \frac{۳}{۲۷}$

مثال: چنانچه از هر ۱۰۰ نفر نوزاد متولد شده، به طور متوسط ۴۸ دختر و بقیه پسر باشند. آیا این توزیع، توزیع برنولی است؟

جواب: $p+q=۱ \Rightarrow \frac{۴۸}{۱۰۰}+\frac{۵۲}{۱۰۰}=۱$

مثال: یک میلیون نفر می‌خواهند به فردی از بین ۵ نفر نماینده رای بدهند، برآورد چنین است که ۵۰۰ هزار نفر به نفر سوم رای دهد موفقی این فرد چقدر است؟

جواب: با توجه به اینکه جامعه زیاد است، در چنین حالتی می‌توان احتمال موفقیت را ثابت فرض نمود و نفر سوم رای می‌آورد و توزیع برنولی است.

توزیع ۲ جمله‌ای:

با احتمال موفقیت P توزیعی است که در آن متغیر تصادفی x می‌توان مقادیری از صفر الی بینهایت را انتخاب کند. به طور کلی می‌توان فرمول زیر را برای آن نوشت:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x \,.\, q^{n-x}$$

مثال: محصلی می‌خواهد به ۵ سوال دو گزینه‌ای جواب دهد احتمال پاسخ دادن درست به هر سوال ۰/۷ است، احتمال اینکه دقیقا به ۲ سوال پاسخ درست داده شود چقدر است؟

جواب:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x \,.\, q^{n-x} \Rightarrow P(X=x)=\binom{۵}{۲}\times(۰/۷)^{۲}\times(۰/۳)^{۵-۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۵!}{۲!(۵-۲)!}\times ۰/۴۹\times ۰/۰۲۷=\frac{۵\times۴\times۳!}{۲\times۳!}\times ۰/۴۹\times ۰/۰۲۷=۱۰\times ۰/۴۹\times ۰/۰۲۷=۰/۱۳۲۳$$

مثال: در جعبه‌ای ۶ مهره به ترتیب ۵ مهره سفید و یک مهره سیاه وجود دارد، احتمال اینکه مهره سفید بیرون بیاید ۰/۱۷ است، احتمال اینکه دقیقا مهره سیاه بیرون بیاید چقدر است؟

جواب:

$$n=۶ \quad , \quad x=۱ \quad , \quad p=۰/۱۷ \quad q=۰/۸۳$$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x \,.\, q^{n-x} \Rightarrow P(X=x)=\binom{۶}{۱}\times(۰/۱۷)^{۱}\times(۰/۸۳)^{۶-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۶!}{۱!(۶-۱)!}\times ۰/۱۷\times ۰/۳۹۳=۶\times ۰/۰۶۶۸=۰/۴۰۰۸۶$$

مثال: از شرکت‌های مورد حسابرسی قرار گرفته ۰/۲۵ آنها حساب‌هایشان رد شده است، اگر چهار شرکت بر حسب تصادف انتخاب کنیم احتمالات زیر را محاسبه کنید:

الف) حساب‌های یک شرکت رد شده باشد   ب) حساب‌های دو شرکت رد شده باشد.

جواب قسمت «الف»:

$$n=۴ \quad , \quad x=۱ \quad , \quad p=۰/۲۵ \quad , \quad q=۰/۷۵$$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x \,.\, q^{n-x} \Rightarrow \binom{۴}{۱}\times(۰/۲۵)^{۱}\times(۰/۷۵)^{۴-۱}=\frac{۴!}{۱!(۴-۱)!}\times۰/۲۵\times۰/۴۲۱=۰/۴۲۱$$

جواب قسمت «ب»:

$$n=۴ \quad , \quad x=۲ \quad , \quad p=۰/۲۵ \quad , \quad q=۰/۷۵$$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x \,.\, q^{n-x} \Rightarrow \binom{۴}{۲}\times(۰/۲۵)^{۱}\times(۰/۷۵)^{۴-۲}=\frac{۴!}{۲!(۴-۲)!}\times۰/۲۵\times۰/۵۶$$

$$=\frac{۴\times۳\times۲!}{۲\times۲!}=۶\times۰/۲۵\times۰/۵۶=۰/۸۴$$

نکته: گاهی اوقات در توزیع ۲ جمله‌ای صحبت بزرگ بودن n کار محاسباتی سخت می‌شود. در این صورت از جداول پیش‌بینی شده استفاده می‌شود.

مثال: ۰/۲ مصرف‌کنندگان پودرهای شوینده مصرف‌کننده مارک خاصی هستند اگر ۱۷ مصرف کننده انتخاب شود احتمالات زیر چقدر است؟

الف) ۳ مصرف‌کننده مشتری باشند.

ب) حداقل ۴ مصرف کننده مشتری باشد.

ج) حداقل ۲ و حداکثر ۵ مصرف‌کننده مصرف‌کننده مشتری باشند.

جلسه ششم

۱۳۸۹/۸/۱۸

تابع توزیع ۲ جمله‌ای منفی:

گاهی در توزیع برنولی به دنبال احتمال x موفقیت از n آزمایش هستیم که به آنها (k موفقیت اطلاق می‌شود) مثل اینکه پنجمین فردی که شایعه‌ای را شنیده دومین فردی باشد که آنها را قبول کرده است.

به طور کلی در مورد این توزیع می‌توان رابطه زیر را بیان کرد:

$$P(X=x)=\binom{x-1}{k-1}p^{k}\,.\,q^{x-k}$$

x= تعداد آزمایش‌ها　　　k= تعداد موفقیت‌های در x آزمایش

p= احتمال موفقیت در هر آزمایش　　　q= احتمال عدم موفقیت در هر آزمایش

واریانس و میانگین توزیع ۲ جمله‌ای منفی:

به طور خلاصه در ۲ رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} 1)\ E(X) \text{ or } \mu_X=\dfrac{k}{p} \\ 2)\ V(X)=\dfrac{k.q}{p} \end{cases}$$

مثال: احتمال یک دزدی در حین سرقت دستگیر شود ۰/۶ است، احتمال اینکه در هشتمین سرقت برای چهارمین بار دستگیر شود چقدر است؟

جواب:

$$x=8\quad,\quad k=4\quad,\quad p=0/6\quad,\quad q=0/4$$

$$P(X=x)=\binom{x-1}{k-1}p^{k}\,.\,q^{x-k}\Rightarrow P(X=x)=\binom{8-1}{4-1}\times(0/6)^{4}\times(0/4)^{8-4}=\binom{7}{3}\times 0/1296\times 0/0256$$

$$=\frac{7!}{3(7-3)!}=\frac{7\times5\times4!}{3\times2\times4!}=\frac{35}{6}\times 0/1296\times 0/0256=0/0193$$

مثال: اگر کالایی معیوب باشد مامور کنترل کیفیت با احتمال ۰/۸ متوجه می‌شود، احتمال اینکه ششمین کالای معیوب، پنجمین کالایی باشد که وی متوجه می‌شود، چقدر است؟

جواب:

$$x=6\quad,\quad k=5\quad,\quad p=0/8\quad,\quad q=0/2$$

$$P(X=x)=\binom{x-1}{k-1}p^{k}\,.\,q^{x-k}\Rightarrow P(X=x)=\binom{6-1}{5-1}\times(0/8)^{5}\times(0/2)^{6-5}=\binom{5}{4}\times 0/327\times 0/2$$

$$=\frac{5!}{4(5-4)!}=\frac{5\times4!}{4!\times1!}\times 0/327\times 0/2=5\times 0/327\times 0/2=0/327$$

مثال: اگر کالایی معیوب باشد احتمال آنکه مشتری بفهمد، ۰/۶ است، احتمال اینکه پنجمین کالای معیوب، دومین کالایی باشد که مشتری بفهمد چقدر است؟ ضمنا واریانس و امیدریاضی آن را نیز محاسبه کنید.

جواب:

$$x=5 \quad , \quad k=2 \quad , \quad p=0/6 \quad , \quad q=0/4$$

$$P(X=x)=\binom{x-1}{k-1}p^k\,.\,q^{x-k} \Rightarrow P(X=x)=\binom{5-1}{2-1}\times(0/6)^2\times(0/4)^{5-2}=\binom{4}{1}\times 0/36\times 0/064$$

$$=\frac{4!}{1(4-1)!}=\frac{4\times 3!}{3!\times 1!}\times 0/36\times 0/064=4\times 0/36\times 0/064=0/09216$$

$$E(X)=\frac{k}{p}=\frac{2}{0/6}=3/33 \qquad V(X)=\frac{k.q}{p}=\frac{2\times 0/4}{0/6}=1/33$$

توزیع هندسی:

اگر در توزیع ۲ جمله‌ای منفی $k=1$ باشد آن را توزیع هندسی می‌گویند. به طور مثال احتمال اینکه پنجمین فردی که شایعه را شنیده «اولین فردی باشد» بنابراین فرمول این توزیع و امید ریاضی و واریانس عبارتنداز:

$$1)\,P(X=x)=p\,.\,q^{x-1} \qquad 2)\,E(X)=\frac{k}{p} \qquad 3)\,V(X)=\frac{q}{p^2}$$

مثال: فردی متقاضی گواهینامه است، با احتمال ۰/۶۵ در آزمون رد می‌شود، احتمال اینکه در دومین آزمون قبول شود، چقدر است؟

جواب:

$$p=0/65 \quad , \quad q=0/35 \quad k=1 \quad x=2$$

$$P(X=x)=p\,.\,q^{x-1} \Rightarrow 0/65\times(0/35)^{2-1}=0/2275$$

مثال: تیراندازی ۰/۷۷ از تیرهای خود را به هدف می‌زند، احتمال اینکه سومین تیر وی اولین تیری باشد که به هدف می‌خورد چقدر است؟ ضمنا امید ریاضی و واریانس آن را نیز محاسبه کنید .

$$p=0/77 \quad , \quad q=0/33 \quad k=1 \quad x=3$$

$$P(X=x)=p\,.\,q^{x-1} \Rightarrow 0/77\times(0/33)^{3-1}=0/77\times 0/1089=0/083853$$

$$E(X)=\frac{k}{p}=\frac{1}{0/77}=1/29 \qquad V(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{0/33}{(0/77)^2}=\frac{0/33}{0/5929}=0/55$$

توزیع چند جمله‌ای:

اگر آزمایشی شامل چندین پیشامد باشد و احتمال هر پیشامد در آزمایش‌های مختلف ثابت و همچنین آزمایش‌ها مستقل از یکدیگر باشند در این صورت توزیع را توزیع چند جمله‌ای می‌گویند.

مثال: ۰/۲۵ از افراد شهری به نامزد اول انتخاباتی، ۰/۳۵ به دوم و ۰/۴ به سومی را می‌دهند، ۱۰ نفر هم اکنون پای صندوق رای می‌باشند، احتمال اینکه ۲ نفر به نامزد اول، ۳ نفر به نامزد دوم و ۵ نفر به نامزد دوم رای دهند چقدر است؟

جواب:

$$P(x_۱ = ۲, x_۲ = ۳, x_۳ = ۵)$$

$$\binom{۱۰}{۲,۳,۵} \times (۰/۲۵)^۲ \times (۰/۳۵)^۳ (۰/۴)^۵ = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۲! \times ۳! \times ۵!} \times ۰/۰۶۲۵ \times ۰/۰۴۲ \times ۰/۰۱۰۲ = ۰/۰۶۷$$

جلسه هفتم

۱۳۸۹/۸/۲۲

تابع فوق هندسی:

تابع فوق هندسی را به صورت ساده می‌توان بیان کرد:

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

برای به دست آوردن امید ریاضی و واریانس این توزیع از ۲ رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$E(X)=\frac{nk}{N} \quad , \quad V(X)=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^{۲}(N-۱)}$$

مثال: از بین ۸ مدیر که به جلسه دعوت شده‌اند، ۳ نفرشان و بقیه وظیفه‌مدارند، اگر به طور تصادفی ۴ نفر انتخاب شوند، احتمال اینکه ۲ مدی رابطه مدار باشند چقدر است؟

$$N=۸ \quad , \quad n=۴ \quad , \quad x=۲ \quad , \quad k=۳$$

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۸-۳}{۴-۲}}{\binom{۸}{۴}}=\frac{\left[\frac{۳!}{۲!(۳-۲)!}\right]\times\left[\frac{۵!}{۲(۵-۲)!}\right]}{\left[\frac{۸!}{۴(۸-۴)!}\right]}=\frac{۳\times ۱۰}{\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴\times۳\times۲\times۴!}}=\frac{۳۰}{۷۰}=۰/۴۲$$

نکته: به طور کلی اگر N در مقایسه با n (۰/۵) تفاوت داشته باشد بدین معناست که بین نمونه با جایگزینی و بدون جایگزینی اختلافی وجود ندارد، در این صورت می‌توان از توزیع ۲ جمله‌ای نیز استفاده کرد.

مثال: از بین ۲۰۰ متقاضی شغلی تنها ۷۰ نفر واجد شرایط هستند اگر ۶ نفر به طور تصادفی انتخاب شود احتمال اینکه ۳ نفر از آنها واجد شرایط باشند چقدر است؟

جواب:

چون درصد N بزرگ به n کوچک ۰/۳۵ است پس می‌توان از توزیع ۲ جمله‌ای نیز استفاده کرد.

راه‌حل اول «توزیع ۲ جمله‌ای»:

$$n=۶ \quad , \quad x=۳ \quad , \quad p=۰/۳۵ \quad , \quad q=۰/۶۵$$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}\,.\,q^{n-x}\Rightarrow\binom{۶}{۳}\times(۰/۳۵)^{۳}\times(۰/۶۵)^{۶-۳}=\frac{۶!}{۳!(۶-۳)!}\times(۰/۳۵)^{۳}\times(۰/۶۵)^{۳}$$

$$=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳\times۲\times۳!}\times(۰/۳۵)^{۳}\times(۰/۶۵)^{۳}=۲۰\times۰/۰۴۲۸۷۵\times۰/۲۷۴۶۲۵=۲/۳۵۴$$

راه‌حل دوم: «توزیع فوق هندسی»

$N=۲۰۰ \;,\; k=۷۰ \;,\; n=۶ \;,\; x=۳$

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{۷۰}{۳}\binom{۲۰۰-۷۰}{۶-۳}}{\binom{۲۰۰}{۶}}=\frac{۵۴/۷۴۰\times ۳۵۷/۷۶۰}{۸۲/۴۰۸/۶۲۶/۳۰۰}=\frac{۱۹/۵۸۳/۷۸۲/۴۰۰}{۸۲/۴۰۸/۶۲۶/۳۰۰}=۰/۲۳۷۶۴$$

$$\binom{۷۰}{۳}=\frac{۷۰!}{۳!(۷۰-۳)!}=\frac{۷۰\times ۶۹\times ۶۸\times ۶۷!}{۳\times ۲\times ۶۷!}=۵۴/۷۴۰$$

$$\binom{۲۰۰-۷۰}{۶-۳}=\binom{۱۳۰}{۳}=\frac{۱۳۰!}{۳(۱۳۰-۳)!}=\frac{۱۳۰\times ۱۲۹\times ۱۲۸\times ۱۲۷!}{۳\times ۲\times ۱۲۷!}=۳۵۷/۷۶۰$$

$$\binom{۲۰۰}{۶}=\frac{۲۰۰!}{۶!(۲۰۰-۶)!}=\frac{۲۰۰\times ۱۹۹\times ۱۹۸\times ۱۹۷\times ۱۹۶\times ۱۹۵\times ۱۹۴!}{۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱۹۴!}=۸۲/۴۰۸/۶۲۶/۳۰۰$$

توزیع پواسون:

در توزیع دو جمله‌ای وقتی n خیلی بزرگ باشد محاسبات بسیار مشکل و پیچیده می‌باشد. در چنین حالاتی معمولا از توزیع پواسون استفاده کرد و این حالت زمانی است که $n\to\infty$ بطور خلاصه می‌توان رابطه زیر را بیان نمود.

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x_i} \qquad e=۲/۷۸ \qquad \lambda=np$$

نکته: در توزیع پواسون میانگین و واریانس برابرند و همانند λ می‌باشند. $\sigma=\sqrt{\lambda}$

مثال: احتمال اینکه از بین ۲۰۰۰ واحد کالای موجود شرکتی که هر کدام با احتمال ۰/۰۰۱۵ معیوب‌اند، ۵ عدد آنها معیوب باشد چقدر است؟

$\lambda=۲۰۰۰\times ۰/۰۱۵=۳$

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x_i}=\frac{۲/۷۱۸^{-۳}\times ۳^{۵}}{۵}\frac{\frac{۱}{۲۰/۰۷}\times ۲۴۳}{۵}=۲/۴۲$$

مثال: مدیر فروشگاهی احتمال موفقیت فروش که به مشتری به تصادف انتخاب می‌شود را ۰/۳ می‌داند، اگر ۵ مشتری وارد فروشگاه شوند، احتمال اینکه دقیقا ۳ فروش انجام شود چقدر است؟

جواب:

$n=۵ \;,\; x=۳ \;,\; p=۰/۳ \;,\; q=۰/۷$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}.q^{n-x}\Rightarrow P(X=x)=\binom{۵}{۳}\times(۰/۳)^{۳}\times(۰/۷)^{۵-۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۵!}{۳!(۵-۳)!}\times ۰/۰۲۷\times ۰/۴۹=\frac{۵\times ۴\times ۳!}{۲\times ۳!}\times ۰/۰۲۷\times ۰/۴۹=۱۰\times ۰/۰۲۷\times ۰/۴۹=۰/۱۳۲۳$$

مثال: ۰/۵ کارکنان موسسه‌ای از ساعت کار جدید ناراضی‌اند، اگر ۴ نفر از کارکنان به تصادف انتخاب شوند احتمال آنکه ۲ نفر آنها ناراضی باشند چقدر است؟

$n=۴ \quad , \ x=۲ \quad , \ p=۰/۵ \quad , \ q=۰/۵$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}\,.\,q^{n-x} \Rightarrow P(X=x)=\binom{۴}{۲}\times(۰/۵)^{۲}\times(۰/۵)^{۴-۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۴!}{۲!(۴-۲)!}\times ۰/۲۵\times ۰/۲۵=\frac{۴\times۳\times۲!}{۲\times۲!}\times ۰/۲۵\times ۰/۲۵=۶\times ۰/۲۵\times ۰/۲۵=۰/۳۷۵$$

مثال: تعداد فروش‌های فروش رفته در یک فروشگاه در ۶۰ روز چنین است.

محاسبه کنید:

الف) تابع احتمال و تابع توزیع

تعداد روزها	تعداد فروخته شده
۱۰	۳
۲۰	۳
۳۰	۵
۶۰	۱۱

جواب قسمت «الف»:

x	۳	۳	۵
f(x)	۰/۱۶	۰/۳۴	۰/۵
P(X=x)	۰/۱۶	۰/۵	۱

جواب قسمت «ب»:

$P(X\leq ۳)=۰/۵$

مثال: تابع توزیع توام چنین است؟

محاسبه کنید:

الف) $P(X=۱)$ ب) $P(x>y)$ ج) $z=x+y$

x \ y	۰	۱	P(X=x)
۰	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۲
۱	۰/۳۲	۰/۳	۰/۵۲
۲	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۲۸
P(Y=y)	۰/۴۱	۰/۵۹	۱

مثال: احتمال اینکه نوازدی پس به دنیا آمده ۰/۲۵ است، احتمال اینکه سومین فرزند خانواده اولین فرزند پسر باشد، چقدر است؟

$x=۳ \quad , \ k=۱ \quad , \ p=۰/۲۵ \quad , \ q=۰/۷۵$

$$P(X=x)=p\,.\,q^{x-۱} \Rightarrow (۰/۲۵)\times(۰/۷۵)^{۳-۱}=۰/۲۵\times۰/۵۶۲۵=۰/۱۴۰$$

جلسه هشتم

۱۳۸۹/۸/۲۹

توابع احتمال پیوسته:

مشتق:

قانون ۱:

مشتق عدد ثابت صفر است.

اگر k یک عدد ثابت باشد.

$$y = k = y' = 0$$

قانون ۲:

مشتق عدد x یک می‌باشد.

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

قانون ۳:

هر عدد توان دار را به پشت x آورده و یک واحد از توان کم کرده و نوشته:

$$y = x^{n} \Rightarrow y' = x^{n-1}$$

$$y = kx^{n} \Rightarrow y' = knx^{n-1}$$

مثال:

$$y = x^{7} \Rightarrow y' = 7x^{6}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = x^{-1} \times x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{4}{3}} = y' - \frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$$

$$y = (2x^{2}+1)^{7} \Rightarrow y' = 7(2x^{2}+1)^{6} \times 4x$$

نکته: مشتق $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ می‌شود.

مثال: عبارات زیر را به صورت مشتق بنویسید.

$$y = \sqrt{(x - \frac{1}{x} + x\sqrt[3]{x})}^{\,11}\ y = (x - \frac{1}{x} + x\sqrt[3]{x})^{\frac{11}{2}} \Rightarrow y' = 11(x - x^{-1} + x^{\frac{4}{3}})^{\frac{9}{2}} \times (1 - (-1) + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}})$$

قانون ۴:

$$y = e^{u} \times y' = e^{u} \times u'$$

مثال:

$$y = e^{x^{2}} = y' = e^{x^{2}} \times 2x$$

قانون ۵:

$$y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \times u'$$
$$y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \times u'$$
$$y = \tan u \Rightarrow y' = (1 + \tan^{2} u) \times u'$$
$$y = \cot u \Rightarrow y' = -(1 + \cot^{2} u) \times u'$$

مثال: حاصل عبارات زیر را به صورت مشتق بنویسید.

$$y = 2\sin\sqrt{x} \Rightarrow y' = 2 \times \cos\sqrt{x} \times (\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}})$$

$$y = e^{\tan\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = e^{\text{tna}\frac{1}{x}} \times (1 + \tan\frac{1}{x})(-x^{-2})$$
$$(\tan\frac{1}{x}) = (\tan x^{-1}) = (1 + \tan^{2} x^{-1}) \times (-x^{-2})$$

$$y = 1 \times \sin^{5}(x^{4})$$
$$y' = 5\sin^{4}(x^{4}) \times \cos x^{4} \times (4x^{3})$$

قانون ۶:

$$y = \ln u = y' = \frac{u'}{u}$$
$$y = \ln(x - \sin(x^{2})) \Rightarrow y' = \frac{1 - \cos x^{2} \times 2x}{x - \sin(x^{2})}$$

قانون ۷:

$$y = u.vw \Rightarrow y' = u'vw + v'uw + w'uv$$

مثال:

$$y = x^{2} \sin x \Rightarrow y' = 2x \times \sin x + x^{2} \times \cos x$$

$$y = x^{2} e^{-x} \tan x$$
$$y' = 2x \times e^{-x} \times \tan x + e^{-x} \times (-1) \times x^{2} \times \tan x + (1 + \tan^{2} x) \times x^{2} \times e^{-x}$$

قانون شماره ۸:

$$y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{u^{۲}}$$

مثال:

$$y=\frac{\ln x}{x\sin x}\Rightarrow y'=\frac{\frac{۱}{x}x\sin x-\ln(۱\times\sin x-\cos x)}{(x\sin x)^{۲}}$$

انتگرال:

همان بدست آوردن تابع اولیه می‌باشد در صورتی که حد پایین و بالای انتگرال نداشته باشیم به آن انتگرال نامعین می‌گوییم.

$$\int f(x)dx$$

مثال: تابع اولیه $f(x)=۳x^{۲}$ را بیابید.

$$\int ۳x^{۲}dx=x^{۳}+c$$

دستورهای انتگرال‌گیری:

۱) $\int x^n dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + c$

۲) $\int \frac{۱}{x} dx = \ln|x| + c$

۳) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

۴) $\int \cos x dx = \sin x + c$

۵) $\int \sec^۲ x dx = \operatorname{tg} x + c$

۶) $\int \csc^۲ x dx = -\cot x + c$

۷) $\operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$

۸) $\cot g x dx = \ln|\sin x| + c$

۹) $\sec x . \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + c$

۱۰) $\csc x . \cot g dx = -\csc x + c$

۱۱) $a^x dx = \frac{۱}{\ln a} . a^x + c$

۱۲) $e^x dx = e^x + c$

۱۳) $\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}} dx = \sin^{-۱} x + c$

۱۴) $\frac{۱}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} dx = \sin^{-۱} \frac{x}{a} + c$

۱۵) $\frac{۱}{\sqrt{a^۲ + x^۲}} dx = \ln\left|x + \sqrt{a^۲ + x^۲} + c\right|$

۱۶) $\frac{۱}{\sqrt{x^۲ - a^۲}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^۲ - a^۲}\right| + c$

۱۷) $\frac{۱}{۱ + x^۲} dx = \operatorname{tg}^{-۱} x + c$

۱۸) $\frac{۱}{a^۲ + x^۲} dx = \frac{۱}{a} + \operatorname{tg}^{-۱} \frac{n}{a} + c$

۱۹) $\frac{۱}{a^۲ - x^۲} dx = \frac{۱}{۲a} \ln\left|\frac{a+n}{a-n}\right| + c$

مثال: انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

$$۱)\int(۳x^{۲}-۴x+۲)dx=$$

$$۳(\frac{x^{۳}}{۳۲})-۴(\frac{x^{۲}}{۲})+۲x+c$$

$$۲)\int(x^{۲}\sqrt{x}-\frac{۳}{\sqrt{۴-x^{۲}}}dx=\int x^{۲}\sqrt{x}dx-۳\int\frac{۱}{\sqrt{۴-x^{۲}}}dx=\int x^{۲}x^{\frac{۱}{۲}}-۳\int\frac{۱}{\sqrt{۴-x^{۲}}}=\int x^{\frac{۵}{۲}}-۳\int\frac{۱}{\sqrt{۴-x^{۲}}}dx$$

$$\Rightarrow\frac{x^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}+۱}-۳\sin^{-۱}(\frac{x}{۲})+c$$

$$۳)\int\frac{x^{۴}+۲x^{۳}-۳x^{۲}+۴x-۵}{x^{۲}}dx=$$

$$\int x^{۲}dx+۲\int xdx-۳\int dx+۴\int\frac{۱}{x}dx-۵\int\frac{۱}{x^{۲}}dx=\frac{x۳}{۳}+\frac{۲x^{۲}}{x}-۳x+۴\ln|x|-۵\frac{x^{-۱}}{-۱}+c$$

$$۴)\int\left(۲^{x}-۵\sin x+\frac{۴}{۳+x^{۲}}\right)dx=\int ۲^{x}dx-۵\int\sin xdx+۴\int\frac{۱}{۳+x^{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\ln ۲}.۲^{x}+۵\cos x+(\frac{۴}{\sqrt{۳}})+tg^{-۱}(\frac{x}{\sqrt{۳}})+c$$

$$۵)\int(x^{۲}-۳x\sqrt[۵]{x}+\frac{۷}{\sqrt{x}})dx=$$

$$\int x^{۲}dx-۳\int x^{۵}\sqrt{x}dx+۷\int\frac{۱}{\sqrt{x}}dx=\frac{x^{۳}}{۳}-۳\frac{x^{\frac{۶}{۵}+۱}}{\frac{۶}{۵}+۱}+۷(\frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}$$

$$۶)\int\frac{(x+۲)^{۲}}{۳\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^{۲}+۴x+۴}{x^{\frac{۱}{۳}}}=\int\frac{x^{۲}+۴x+۴}{x^{\frac{۱}{۳}}}dx=\int x^{\frac{۵}{۳}}dx+۴\int x^{\frac{۲}{۳}}dx+۴\int x^{-\frac{۱}{۲}}dx$$

$$\Rightarrow\frac{x^{\frac{۵}{۳}+۱}}{\frac{۵}{۳}+۱}+۴(\frac{x^{\frac{۲}{۳}+۱}}{\frac{۲}{۳}+۱})+۴(\frac{x^{-\frac{۱}{۳}+۱}}{-\frac{۱}{۳}+۱})+c$$

$$۷)\int(\cos x+\cot gx)dx=\int\cos dx+\int\cot gx\,dx=\sin x+\ln|\sin x|+c$$

$$۸)\int(۲tgx-\sec^۲ x)dx=۲\int tgx-\int\sec^۲ xdx=-۲\ln|\cos x|-tgx+c$$

$$۹)\int(۳\csc^۲ x-e^x+۳^x)dx=۳\int\csc^۲ x-\int c^x+۳^x\Rightarrow-۳\cot gx=x+\frac{۱}{\ln ۳}.۳^x+c$$

$$۱۰)\int\frac{۲}{\sqrt{x^۲+۴}}dx-\int\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۴}}dx=۲\int\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۴}}-\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۴}}$$

$$\Rightarrow ۲\ln\left|x+\sqrt{x^۲+۴}\right|-\ln\left|x+\sqrt{x^۲-۴}\right|+c$$

متغیر تصادفی پیوسته:

در فصل پیش درباره متغیر تصادفی گسسته و توابع احتمال آن بحث شد. در این فصل درباره متغیرهای تصادفی پیوسته و چند نوع توابع مهم آن بحث خواهیم کرد.

فرض کنید می‌خواهیم احتمال روی دادن تصادف در یک اتوبان ۴۰ کیلومتری مشخص کنیم. همچنین فرض نمایید احتمال وقوع تصادف در هر نقطه از این اتوبان برابر باشد. در این صورت فضای نمونه این آزمایش پیوست دارد. از نقاطی است روی ۰ تا ۴۰ کیلومتر واقع شده است.

بنابراین احتمال اینکه در هر فاصله‌ای به اندازه x تصادفی رخ دهد برابر است با: $P=\frac{x}{۴۰}$

مثال احتمال اینکه تصادف در جایی بین کیلومتر ۱۰ و ۴۰ اتفاق افتاد برابر است با: $P=\frac{۴۰-۱۰}{۴۰}=\frac{۳۰}{۴۰}$

مثلا احتمال اینکه تصادف در فاصله کوچکی یک سانتیمتری روی دهد برابر است با:

$$P=\frac{۱}{۱۰۰/۰۰۰}$$

بنابراین وقتی فاصله به صفر گرایش پیدا می‌کند احتمال وقوع تصادف در آن فاصله نیز به صفر میل می‌کند. این بدان مفهوم نمی‌باشد که امکان پیشامد تصادف وجود ندارد بلکه چون طول فاصله بی نهایت کوچک می‌شود می‌توان چنین فرض کرد که احتمال وقوع تصادف در یک نقطه مشخص تقریبا صفر است.

جلسه نهم

۱۳۸۹/۹/۶

تابع احتمال چگالی:

تابعی که معرف متغیر تصادفی پیوسته باشد را تابع چگالی احتمال می‌گویند که این احتمال در این الت برابر است با مساحت زیر منحنی تقریبا توزیع نرمال و برابر با «یک» می‌باشد.

تابع احتمال چگالی را با نماد f(x) نشان می‌دهند.

احتمال اینکه متغیر تصادفی پیوسته «x» مقداری بین ۲ نقطه a وb را بگیرد برابر است با رابطه زیر:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

توجه شود همانطور که قبلا بیان گردید در متغیرهای تصادفی پیوسته احتمال اینکه متغیر تصادفی «x» دقیقا یک مقدار مشخص بگیرد برابر با صفر است: $P(a \le x \le a) = \int_a^a f(x)dx = ۰$

همچنین توجه داشته باشید که نکات زیر در توابع احتمالی پیوسته رعایت شود:

۱- احتمالات همیشه غیر منفی است.

۲- سطح زیر منحنی یا انتگرال را برابر با «یک» فرض می‌کنیم. $P(X = x)\int_a^b f(x)dx = ۱$

بنابراین تابعی با مقادیر f(x) را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده باشد تابع احتمال چگالی گفته می‌شود و چنین بیان می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۱) f(x) \ge ۰ \\ ۲) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۱ \end{cases}$$

مثال: متغیر تصادفی x با تابع چگالی زیر مفروض است محاسبه کنید، موارد زیر را:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{۱}{۱۶}k \ , ۰ < x < ۲ \\ ۰ \qquad o.w \end{cases}$$

الف) مقدار k چقدر است.

ب) $P(۰/۵ \le x \le ۱/۵)$

ج) $P(۱ \le x \le ۳)$

جواب قسمت «الف»:

$$\int_۰^۲ (x - \frac{۱}{۱۶}k)dx = ۱ \Rightarrow \left[\frac{x^۲}{۲} - \frac{۱}{۱۶}kx\right]_۰^۲ = \left[\frac{(۲)^۲}{۲} - \frac{۱}{۱۶}k(۲)\right] - \left[\frac{(۰)^۰}{۲} - \frac{۱}{۱۶}k(۰)\right]$$

$$= \left[۲ - \frac{۲k}{۱۶}\right] - [۰] = \frac{۳۲ - ۲k}{۱۶} = ۱ \Rightarrow -۲k = ۱۶ - ۳۲ \Rightarrow -۲k = -۱۶ \Rightarrow k = \frac{-۱۶}{-۲} = ۸$$

جواب قسمت «ب»:

$$x-\frac{1}{16}k \Rightarrow x-\frac{1}{16}(8) \Rightarrow x-\frac{8}{16} \Rightarrow x-\frac{1}{2}$$

$$\int_{0.5}^{1.5}(x-\frac{1}{2})dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x\right]_{0.5}^{1.5}=\left[\frac{(1.5)^2}{2}-\frac{1}{2}(1.5)\right]-\left[\frac{(0.5)^2}{2}-\frac{1}{2}(0.5)\right]=0.375-(-0.125)=0.5$$

جواب قسمت «ج»:

دلیل استفاده عدد ۲ در کران بالا به این خاطر می‌باشد که متغیر x تا فاصله بین ۰ و ۲ را در نظر گرفته و ۳ را شامل نمی‌شود، یعنی $P(1\le x\le 3)\rightarrow P(1\le x\le 2)$

$$\int_{1}^{2}(x-\frac{1}{2})dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x\right]_{1}^{2}=1$$

مثال: در یک شرکت مواد غذایی میزان ربعی که در قوطی‌های ۳۳۰ گرمی ریخته می‌شود دارای تابع چگالی زیر است؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{12}x & 324<x<336\\ 0 & o.w\end{cases}$$

فرض کنید یک قوطی به طور تصادفی انتخاب شود

الف) حداکثر ۳۳۲ گرم ربع داشته باشد.
ب) حداقل ۳۲۵ گرم ربع داشته باشد.
ج) بین ۳۳۰/۵ تا ۳۳۵/۵ گرم ربع داشته باشد.
د) دقیقا ۳۳۰/۱۲ گرم ربع داشته باشد.

جواب قسمت «الف»

$$\int_{324}^{332}\frac{1}{12}x\,dx=\left[\frac{x^2}{24}\right]_{324}^{332}=\frac{(332)^2}{24}-\frac{(324)^2}{24}=4,593-4,374=219$$

جواب قسمت «ب»:

$$\int_{325}^{336}\frac{1}{12}x\,dx=\left[\frac{x^2}{24}\right]_{325}^{336}=\frac{(336)^2}{24}-\frac{(325)^2}{24}=4,704-4,402=302$$

جواب قسمت «ج»:

$$\int_{330.5}^{335.5}\frac{1}{12}x\,dx=\left[\frac{x^2}{24}\right]_{330.5}^{335.3}=\frac{(335.5)^2}{24}-\frac{(330.5)^2}{24}=4,691-4,552=139$$

جواب قسمت «د»:

احتمال برابر با صفر است، زیرا دقیقا ۳۳۰/۱۲ گرم ربع دارد.

مثال: متغیر تصادفی «x» باتابع چگالی زیر مفروض است، محاسبه کنید:

$$f(x)=\begin{cases}۲e^{-۲x} & x>۰\\ ۰ & o.w\end{cases}$$

۱) احتمال $P(۱\le x\le ۵)$ ۲) احتمال $P(-۵\le x\le ۲/۷۵$

جواب قسمت «الف»:

$$\int_{۱}^{۵}۲e^{-۲x}dx=\left[\frac{۲e^{-۲x}}{-۲}\right]_{۱}^{۵}=\left[-e^{-۲x}\right]_{۱}^{۵}=\left[-e^{۲(۵)}\right]-\left[-e^{-۲(۱)}\right]=-\frac{e}{۱۰}+\frac{e}{۲}=-\frac{e}{۸}=\frac{۲/۷۱۸}{۸}=۰/۳۳۹$$

جواب قسمت «ب»:

$$\int_{۰}^{۲/۷۵}۲e^{-۲x}dx=\left[\frac{۲e^{-۲x}}{-۲}\right]_{۰}^{۲/۷۵}=\left[-e^{-۲x}\right]_{۰}^{۲/۷۵}=\left[-e^{۲(۲/۷۵)}\right]-\left[-e^{-۲(۰)}\right]=e^{-۵/۵}+۱$$

توزیع یکنواخت:

یکی از ساده‌ترین و در عین حال مهمترین توزیع‌هاتوزیع احتمال یکنواخت است، چنانچه متغیر تصادفی پیوسته «x» را در نظر بگیریم که مقادیر این توزیع بین ۲ نقطه α و β انتخاب شود را با شرط اینکه $\alpha<\beta$ توزیع احتمال یکنواخت می‌گویند. به طور کلی رابطه این توزیع را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta\\ ۰ & o.w\end{cases}$$

امید ریاضی و واریانس توزیع یکنواخت:

برای به دست آوردن امیدریاضی و واریانس این توزیع باید از انتگرال‌گیری استفاده کرد، در حالت‌های خاص نیاز به انتگرال‌گیری‌های جزءبه‌جزء می‌باشد در اینجا صرفا به فرمول آن اشاره می‌کنیم.

$$E(X)=\frac{۱}{۲}(\beta+\alpha) \qquad V(X)=\frac{۱}{۱۲}(\beta-\alpha)^{۲}$$

✎ **مثال:** سود شرکتی دارای توزیع یکنواخت بین ۳- و ۵ است، موارد زیر را محاسبه کنید.

۱) تابع آن را بنویسید

۲) احتمال آنکه سود شرکت بین ۰ و ۳/۵ باشد

۳) متوسط سود مورد انتظار چقدر است؟

۴) واریانس سود شرکت چقدر است؟

جواب قسمت «الف»

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta\\ 0 & o.w\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5-(-3)}=\frac{1}{8} & -3<x<5\\ 0 & o.w\end{cases}$$

جواب قسمت «ب»:

$$\int_0^{3/5}\frac{1}{8}dx=\left[\frac{1}{8}x\right]_0^{3/5}=\frac{3/5}{8}-\frac{0}{8}=0/43$$

جواب قسمت «ج»:

$$E(X)=\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\Rightarrow E(X)=\frac{1}{2}(5-3)=\frac{2}{2}=1$$

جواب قسمت «د»:

$$V(X)=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2=\frac{1}{12}(5+3)^2=\frac{64}{12}=\frac{16}{3}$$

مثال: تابع چگالی زیر مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}x & 0<x<5\\ 0 & o.w\end{cases}$$

محاسبه کنید:

۱) گشتاور مرتبه اول　　　　۲) گشتاور مرتبه دوم

جواب قسمت «الف»:

$$\int_0^5\frac{1}{5}x\,dx=\left[\frac{x^2}{10}\right]_0^5=\frac{5^2}{10}-\frac{0^2}{10}=2/5$$

جواب قسمت «ب»:

$$\int_0^5\frac{1}{10}x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{30}\right]_0^5=\frac{5^3}{30}-\frac{0^3}{30}=4/17$$

مثال: توزیع یکنواخت زیر مفروض است، اگر $\alpha=-10$ و $E(X)=2$ باشد، این مقادیر را پیدا کنید.

الف) مقدار β؟　　　　ب) $V(X)$

ج) احتمال اینکه متغیر تصادفی بین ۴ و ۵- باشد.　　　　د) احتمال اینکه متغیر تصادفی مقداری بزرگتر از ۵- باشد؟

جواب قسمت «الف»:

$$E(X)=\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\Rightarrow 2=\frac{1}{2}(\beta-10)\Rightarrow 2=\frac{\beta-10}{2}\Rightarrow 4=\beta-10\Rightarrow \beta=10+4=14$$

جواب قسمت «ب»:

$$V(X)=\frac{۱}{۱۲}(\beta-\alpha)=\frac{۱}{۱۲}(۱۴+۱۰)=\frac{۲۴}{۱۲}=۲$$

جواب قسمت «ج»:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta\\ ۰ & o.w\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۱۴-(-۱۰)}=\frac{۱}{۲۴} & -۵<x<۴\\ ۰ & o.w\end{cases}$$

$$\int_{۰}^{۴}\frac{۱}{۲۴}dx=\left[\frac{۱}{۲۴}x\right]_{۰}^{۴}=\frac{۴}{۲۴}-\frac{۰}{۲۴}=۰/۱۶$$

جواب قسمت «د»:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{۲۴}dx$$

مثال: سود شرکتی دارای توزیع یکنواخت بین ۲ و ۴ می‌باشد، موارد زیر را حساب کنید.

الف) تابع چگالی آن را بنویسید.

ب) متوسط سود چقدر است؟

ج) واریانس سود شرکت چقدر است؟

جواب قسمت «الف»:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta\\ ۰ & o.w\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴-۲}=\frac{۱}{۲} & ۲<x<۳\\ ۰ & o.w\end{cases}$$

جواب قسمت «ب»:

$$\int_{۲}^{۳}\frac{۱}{۲}dx=\left[\frac{۱}{۲}x\right]_{۲}^{۳}=\frac{۳}{۲}-\frac{۲}{۲}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

جواب قسمت «ج»:

$$E(X)=\frac{۱}{۲}(\beta+\alpha)=\frac{۱}{۲}(۴+۲)=\frac{۶}{۲}=۳$$

جواب قسمت «د»:

$$V(X)=\frac{۱}{۱۲}(\beta-\alpha)^{۲}=\frac{۱}{۱۲}(۴-۲)^{۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

جلسه دهم

۱۳۸۹/۹/۱۳

مثال: اگر تابع چگالی متغیر تصادفی x مفروض باشد:

$$f(x)=\begin{cases}6(x)(1-x) & 0<x<1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

الف) احتمال اینکه $P(x>\frac{1}{3})$ باشد.

ب) احتمال اینکه $P(x=\frac{1}{3})$ باشد.

ج) $P(\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{2})$

جواب قسمت «الف»:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1}6(x)(1-x)\,dx=\int_{\frac{1}{3}}^{1}6x-6x^2\,dx=\left[\frac{6x^2}{2}-\frac{6x^3}{3}\right]_{\frac{1}{3}}^{1}=\left[\frac{6(1)^2}{2}-\frac{6(1)^3}{3}\right]-\left[\frac{6(\frac{1}{3})^2}{2}-\frac{6(\frac{1}{3})^3}{3}\right]$$

جواب قسمت «ب»:

احتمال برابر با صفر است، زیرا $x=\frac{1}{3}$ می‌باشد.

جواب قسمت «ج»:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1}6(x)(1-x)\,dx=\int_{\frac{1}{3}}^{1}6x-6x^2\,dx=\left[\frac{6x^2}{2}-\frac{6x^3}{3}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{6(\frac{1}{2})^2}{2}-\frac{6(\frac{1}{2})^3}{3}\right]-\left[\frac{6(\frac{1}{3})^2}{2}-\frac{6(\frac{1}{3})^3}{3}\right]$$

توزیع نمایی:

اگر تعداد موفقیت‌ها یا ورودی‌ها دارای توزیع پواسون باشند، زمان بین موفقیت‌ها یا ورودی‌ها متوالی دارای توزیع نمایی است که معمولا در این بحث به آن توزیع نمایی منفی می‌گویند.

همانطور که می‌دانیم زمان پیوسته است، بنابراین این توزیع نیز دارای توزیع پیوسته‌ای است، به طور خلاصه می‌توان تابع چگالی آن را به صورت زیر بیان کرد.

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

λ پارامتر توزیع است و بیانگر متوسط (میانگین) تعداد موفقیت یا ورودی‌ها در واحد زمان است. برای محاسبه کردن احتمالات این توزیع از فرمول‌های زیر می‌توان استفاده کرد:

$$P(X=x)=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}=\left[-e^{-\lambda x}\right]_{0}^{+\infty}=1-e^{-\lambda x}$$

همچنین احتمال اینکه زمان بین ۲ موفقیت یا ورودی بیش از «x» طول بکشد، رابطه زیر صادق است:

$$P(X>x)=1-f(x)=e^{-\lambda x}$$

میانگین و واریانس این توزیع عبارت است از:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad V(X)=\frac{1}{\lambda^{2}}$$

توزیع گاما:

تابع متغیر تصادفی پیوسته‌ای است که چگالی آن با تابع آن به شرح زیر می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta^{a}\times a}\times x^{a-1}\times e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

در این تابع $a>0$ و $\beta>0$ و اگر a یک عدد صحیح باشد آنگاه می‌توان نوشت:

$$R(a)=(a-1)!$$

امید ریاضی و واریانس این توزیع به شرح زیر است:

$$E(X)=\frac{a}{\beta} \qquad V(X)=\frac{a}{\beta^{2}}$$

مثال: چنانچه $a=1 \quad , \quad \beta=2$ باشد موارد زیر را محاسبه کنید

الف) توزیع آن را بنویسید.

ب) امید ریاضی و واریانس را آن چقدر است؟

جواب قسمت «الف»:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta^{a}\times a}\times x^{a-1}\times e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{1}\times 1}\times x^{1-1}\times e^{\frac{-x}{2}}=\frac{1}{2}\times e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

جواب قسمت «ب»:

$$E(X)=\frac{a}{\beta}=\frac{1}{2}=0/5$$

$$V(X)=\frac{a}{\beta^{2}}=\frac{1}{2^{2}}=\frac{1}{4}$$

توزیع نرمال:

مهمترین توزیع پیوسته است، توزیع نرمال توزیع زنگوله شکلی است که به عبارتی این توزیع بیان می‌کند که هر یک از پدیده‌های واقعی باید دارای تقارن نسبت به خط وسط زنگونه باشد هرگونه جمع‌آوری داده‌ها و بررسی آنها مورد شک و تردید است (نظر فرانسیس) می‌باشد ولی با گذشت زمان کم‌کم این عقیده زیر سوال رفت. به هر حال اهمیت این توزیع در موارد زیر است:

الف) بسیاری از پدیده‌های طبیعی دارای این توزیع می‌باشند (عدم دخالت انسان)

ب) در بسیاری از تحقیقات در حوزه‌های مختلف بسیاری از آنها تقریبا دارای این توزیع یا متمایل به آن می‌باشند.

این توزیع چنان تعریف می‌شود:

متغیر تصادفی پیوسته x با میانگین (امید ریاضی) صفر و انحراف معیار ۱ را توزیع نرمال گویند و با استفاده از رابطه زیر می‌توان آن را محاسبه کرد.

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt[۲]{\pi \sigma^{۲}}} \times e^{-\frac{۱}{۲}} \times \left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^{۲}$$

$$X \sim N(۰\,,۱)$$

$$\pi = ۳/۱۴۱۳۵$$

$$e = ۲/۷۱۸۲۸$$

خصوصیات توزیع نرمال:

خصوصیات این توزیع را به طور خلاصه بیان می‌کنیم:

۱) سطح زیر منحنی بالای محور Xها برابر با «۱» است، یعنی:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = ۱$$

۲) به ازای تمام مقادیر «x» همیشه مقدار f(x) بزرگتر یا مساوی صفر است. $f(x) \geq ۰$

۳) حداکثر مقدار تابع در $x = M$ همیشه برابر است با: $f''(x) = ۰ \quad , \quad f'(x) = ۰$ و الی آخر.

۴) تابع حول میانگین متقارن است، در این حالت خواهیم داشت:

$$f(x-\mu) = f(x+\mu)$$

۵) امید ریاضی و واریانس «x» به ترتیب همان μ و $\sigma^{۲}$ است.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x)\,dx$$

۶) با دور شدن از میانگین به سمت چپ یا راست منحنی به محور «x»ها نزدیک و نزدیکتر می‌شود. ولی هیچ‌گاه آن را قطع نمی‌کند به بیان ریاضی خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to -\infty} f(X) = ۰ \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = ۰$$

۷) در این توزیع همیشه میانگین مساوی با میانه مساوی مد می‌باشد.

$$\mu = m_d = MO$$

۸) احتمال فاصله‌ای به اندازه یک انحراف معیار در هر یک از دو طرف میانگین برابر ۰/۶۸۳ و همچنین به اندازه دو انحراف معیار برابر با ۰/۹۵۴ (در دو طرف) و نهایت با سه انحراف معیار در دو طرف برابر با ۰/۹۹۹۸ است.

۹) همانطوری که گفته شد در این توزیع امید ریاضی صفر و واریانس آن یک است.

$$E(X) = ۰ \quad , \quad V(X) = ۱$$

با توجه به خواص گفته شده با داشتن میانگین و واریانس هر متغیری (در صورتی که نرمال باشد)، باید ابتدا آن را به توزیع نرمال استاندارد تبدیل کرد و سپس به راحتی کار از جداولی که در این خصوص برای توزیع نرمال تهیه

شده است استفاده می‌کنیم. به دین منظور با تبدیل متغیر تصادفی x به z مقیاس تغییر کرده و می‌توان مسائل را حل کرد.

بدین منظور به روابط زیر توجه شود:

$$f(x)=\begin{cases} z=\dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ \mu=۰ \\ \sigma=۱ \end{cases}$$

جلسه

یازدهم

۱۳۸۹/۹/۲۰

مثال: توزیع نرمال با میانگین ۳۰ و انحراف معیار ۹ در دست است، احتمال اینکه متغیر تصادفی «x» مقداری بین ۲۴ و ۴۳ بگیرد چقدر است.

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}\Rightarrow P(z_1\le x\le z_2)=P(24\le x\le 43)\Rightarrow P\left[\frac{24-30}{9}\right]\le x\le\left[\frac{43-30}{9}\right]$$

$$=P(\frac{-2}{3}\le x\le\frac{13}{9})=P(-0/67\le x\le 1/44)=0/9251-0/2514=0/6737$$

مثال: دستگاه خردکننده شیشه‌های آبلیمو طوری تنظیم شده است که فقط ۳۳۰ گرم را پر می‌کند، چنانچه مقدار آبلیموی پر شده در هر شیه دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۳۰ و انحراف معیار ۵ گرم باشد احتمالات زیر را محاسبه کنید:

الف) شیشه‌ای بین ۳۲۲ تا ۳۲۸ گرم آبلیمو بگیرد

ب) شیشه‌ای بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشد.

ج) دایره کنترل کیفیت میزان آبلیموی ۷۰ شیشه را به صورت تصادفی وزن می‌کند انتظار می‌رود چند شیشه بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشد.

جواب قسمت «الف»

$$P(z_1\le x\le z_2)=P(322\le x\le 328)=P\left[\frac{322-330}{5}\right]\le x\le\left[\frac{328-330}{5}\right]=(-1/6\le x\le -0/4)$$

$$=0/548-0/3446=0/2034$$

جواب قسمت «ب»:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{335-330}{5}=1\Rightarrow P=1=0/8413$$

جواب قسمت «ج»:

$$0/8413\times =58/891$$

مثال: احتمالات الف) $P(z \le ۱/۲۵)$ ب) $P(z \le -۰/۴)$ ج) $P(z \ge ۱/۵۹)$

جواب قسمت «الف»:

با استفاده از جدول توزیع نرمال $P = ۰/۸۹۴۴$

جواب قسمت «ب»:

با استفاده از جدول توزیع نرمال $P = ۰/۳۴۴۶$

جواب قسمت «ج»:

$$P = [z \ge ۱/۵۹] = ۱ - [z \ge ۱/۵۹] = ۱ - ۰/۹۴۴۱ = ۰/۵۵۹$$

مثال: یک توزیعی دارای $\mu = ۵۰$ و $\sigma = ۲۰$ دقیقه‌ای می‌باشد، هزینه هر بار تعمیر کردن ۵,۰۰۰ ریال است، اگر تعمیر این ماشین بیش از ۸۵ دقیقه طول بکشد به علت توقف خط تولید ضرری برابر با ۱,۰۰۰ ریال به بار می‌آید. E(X) این توزیع چقدر است؟

جواب:

$$P[x \ge ۸۵]$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{۸۵-۵۰}{۲۰} = \frac{۲۵}{۲۰} = ۱/۷۵ \Rightarrow P = ۰/۹۵۹۹$$

بعد از به دست آوردن عدد ۱/۷۵ به جدول مراجعه کرده و احتمال آن را با استفاده از جدول که عدد ۰/۹۵۹۹ می‌باشد استخراج می‌کنیم. از طرفی همانطور که می‌دانیم در صورت مسئله گفته شده است تامین بیش از ۸۵ دقیقه، یعنی:

$$۱ - P[z \ge ۱/۷۵] = ۱ - ۰/۹۵۹۹ = ۰/۰۴۰۱$$

$$E(X) = ۵,۰۰۰ - ۰/۹۵۹۹ \times ۰/۰۴۰۱ \times (۵,۰۰۰ + ۱۰۰,۰۰۰) = ۴,۷۹۹/۵ + ۴,۲۱۰/۵ = ۹,۰۱۰$$

استفاده معکوس از توزیع نرمال:

همانطور که گفته شد در استفاده مستقیم از توزیع نرمال، ابتدا «z» را مشخص و سپس احتمال آن را از جدول پیدا کرده امادر استفاده معکوس مقدار «z» برای ما مشخص نیست ولی احتمال آن معلوم است، بر این اساس احتمال را از جدول پیدا کرده و «z» متناظر با آن را مشخص می‌کنیم که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$x = \mu + \sigma z$$

مثال: چنانچه $\sigma^2 = ۶۴$ و داده‌ها به ترتیب ۲،۴،۵،۵ باشد و مقدار متغیر تصادفی ۸ باشد، مقدار توزیع نرمال چقدر است؟

جواب:

$$\sigma^2 = ۸$$

$$\mu = \frac{۲+۴+۵+۵}{۴} = \frac{۱۶}{۴} = ۴$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{۸-۴}{۸} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵ = ۰/۶۹۱۵$$

مثال: اگر مقدار $z=۱۲$ $\mu=۴$ $\sigma=۲$ باشد مقدار احتمال توزیع نرمال چقدر است؟

جواب:

$$x=\mu+\sigma z \Rightarrow x=۴+۲\times ۱۲=۲۸$$

مثال: میزان مصرف مواد اولیه ماهانه در یک شرکت تولیدی دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu=۷۵۲$ و $\sigma=۸۶$ است، این شرکت مواد اولیه مورد نیاز خود را تهیه می‌کند، می‌خواهیم ثابت کنیم شرکت باید چند تن مواد اولیه برای ماه بعدی سفارش دهد تا با سطح اطمینان ۰/۹۵ کمبودی نداشته باشد.

جواب:

با استفاده از جدول ۱/۶۴۵=۰/۹۵

$$x=\mu+\sigma z \Rightarrow x=۷۵۲+۸۶(۱/۶۴۵)=۸۹۳/۴۷$$

جلسه دوازدهم

۱۳۸۹/۹/۲۷

رگرسیون:

رگرسیون خطی:

واژه رگرسیون به معنی بازگشت است و نشان دهنده آن است که مقدار یا متغیر، از یک متغیر به متغیر دیگر تغییر می‌کند، این واژه توسط فرانسیس کالتون مطرح شد. در رگرسیون به دنبال برآورد رابطه‌ای ریاضی بر متغیرها و تحلیل آن است.

به طوری که بتوان مقدار متغیر مجهول را با استفاده از متغیرهای معلوم مشخص کرد

در بررسی رگرسیون نیاز به بحث درباره شیب خط و معادله ان می‌باشید که از آن صرفنظر شده و فقط به ۲ رابطه زیر می‌پردازیم:

$$۱)\ a=\bar{y}-b\bar{x} \qquad b=\frac{\sum xy-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x^{۲}-n(\bar{x})^{۲}}$$

و نهایتا رابطه اصلی رگرسیون:

$$y=a+bx$$

x= متغیر وابسته b= ضریب شیب خط a= مقدار ثابت.

مثال: برای داده‌های جدول زیر که هزینه تبلیغات شرکتی همراه باشد با تعداد فروش محصولاتش در ۹ سال است، نشان داده شده است، مطلوب است: معادله رگرسیون آن را محاسبه کنید.

جواب:

y	۱۱	۲۰	۱۶	۲۴	۲۶	۱۵	۲۱	۱۸	۲۷	
x	۲	۵	۴	۷	۹	۶	۵	۴	۸	
xy	۳۳	۱۰۰	۶۴	۱۶۸	۲۳۴	۹۰	۱۰۵	۷۲	۲۱۶	۱۰۸۲
$x^۲$	۹	۲۵	۱۶	۴۹	۸۱	۳۶	۲۵	۱۶	۶۴	۳۲۱

$$\bar{y}=\frac{۱۱+۲۰+۱۶+۲۴+۲۶+۱۵+۲۱+۱۸+۲۷}{۹}=۱۹/۷۸ \quad , \quad \bar{x}=\frac{۳+۵+۴+۷+۹+۶+۵+۴+۸}{۹}=۵/۶۷$$

$$b=\frac{\sum xy-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x^{۲}-n(\bar{x})^{۲}}=\frac{۱۰۸۲-۹(۱۹/۷۸\times ۵/۶۷)}{۳۲۱-۹(۵/۶۷)^{۲}}=۲/۲۹۳۹$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=۱۹/۷۸-(۲/۲۹۳۹\times ۵/۶۷)=۶/۷۷۳۵$$

$$y=a+bx \Rightarrow y=۶/۷۷۳۵+۲/۲۹۳۹x$$

مثال: چنانچه $m_d=۱۴$ ، $\mu=۱۲$، محاسبه کنید MO جامعه چقدر است؟

$$(\mu_۳-MO)=۳(\mu_۳-m_d)=(۱۲-MO)=۳(۱۲-۱۴)=۱۲-MO=-۶\Rightarrow MO=۱۸$$

مثال: چنانچه $V(X)=۱۶۰$، فاصله طبقات باشد محاسبه کنید مقدار تصحیح شپارد چقدر است؟

$$\sigma_c^۲ = \sigma^۲ - \frac{I^۲}{۱۲} = ۱۶۰ - \frac{۵^۲}{۱۲} = ۱۵۷/۹۲$$

مثال: $\mu_x = ۲۰$, $MO = ۱۴$ و انحراف معیار $\sigma = ۳$ باشد محاسبه کنید ضریب چولگی اول پیرسون چقدر است؟

$$S.K_۱ = \frac{\mu_x - MO}{\sigma_x} = \frac{۲۰-۱۴}{۳} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

مثال: توزیع توام زیر را در نظر بگیرید، محاسبه کنید:

الف) $P(x=۱)$ ب) $P=(x>y)$

x \ y	۰	۲	P(X=x)
۰	۰/۲	۰/۱	۰/۳
۱	۰/۱	۰/۴	۰/۵
۲	۰/۲	۰	۰/۲
P(Y=y)	۰/۵	۰/۵	۱

جواب قسمت «الف»:

$$P(X=۱) = P(x=۱, y=۰) + P(x=۱, y=۲) = ۰/۱ + ۰/۴ = ۰/۵$$

جواب قسمت «ب»:

$$P(x>y) = P(x=۱, y=۰) + P(x=۲, y=۰) = ۰/۱ + ۰/۲ = ۰/۳$$

مثال: اگر ۴ شرکت حسابرسی شده باشند، ۰/۲۵ حسابهایشان تایید شده است، احتمال اینکه حسابهای یک شرکت رد شده باشند.

$P = ۰/۲۵ \quad q = ۰/۷۵ \quad x = ۱ \quad n = ۴$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} . p^x q^{n-x} = \binom{۴}{۳} \times (۰/۲۵)^۱ \times (۰/۷۵)^{۴-۱} = ۴ \times ۰/۲۵ \times ۰/۴۲ = ۰/۴۲$$

$$E(X) = np = ۴ \times ۰/۲۵ = ۱$$

$$V(X) = n.pq = ۴ \times ۰/۲۵ \times (۰/۷۵) = ۰/۷۵$$