

۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

با استفاده از نکته داریم:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \frac{\alpha=30^\circ}{\beta=45^\circ} \quad \cos 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۲، فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

نکته: $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, $\cos(90^\circ - x) = \sin x$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$A = \tan 20^\circ + \tan 35^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \cos 35^\circ + \sin 35^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos 35^\circ} = \frac{\sin(20^\circ + 35^\circ)}{\cos 20^\circ \cos 35^\circ} = \frac{\sin 55^\circ}{\cos 20^\circ \cos 35^\circ}$$

$$= \frac{\cos 35^\circ}{\cos 20^\circ \cos 35^\circ} = \frac{1}{\cos 20^\circ}$$

۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

نکته: $\cos(-x) = \cos x$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$A = \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \cos\left(x - \frac{7\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{10} - x\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + \left(\frac{7\pi}{10} - x\right)\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{10} - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{7\pi - 2\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ و $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \\ \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{4} \end{cases}$$

با کم کردن طرفین تساوی‌ها از یکدیگر داریم:

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha \sin \beta = \frac{4-9}{2} = \frac{-5}{2}$$

۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطه: دانش * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته ۱: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ و $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

نکته ۲: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$

ابتدا مقادیر $\sin \beta$ و $\cos \beta$ و $\cos \alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع چهارم}} \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \beta = \frac{5}{12} \Rightarrow 1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow 1 + \frac{25}{144} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{144}{169} \xrightarrow{\beta \text{ در ربع سوم}} \cos \beta = -\frac{12}{13}$$

$$\sin \beta \xrightarrow{\beta \text{ در ربع سوم}} -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} \Rightarrow \sin \beta = -\frac{5}{13}$$

با استفاده از نکته ۲ داریم:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = -\frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) - \left(-\frac{5}{13}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{56}{65}$$

۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

نکته: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

ابتدا مقدار $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ را به دست می آوریم:

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع اول}} \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\beta = -\frac{12}{13} \Rightarrow \sin\beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\beta} \xrightarrow{\beta \text{ در ربع دوم}} \sin\beta = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

بنابراین داریم:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-48 - 15}{65} = \frac{-63}{65}$$

۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

ابتدا عبارت داده شده را ساده می کنیم:

$$\cot\alpha + \tan\beta = \frac{\gamma}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\gamma}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\gamma}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\gamma}{\epsilon}$$

$$\xrightarrow{\sin\alpha\cos\beta = \frac{48}{65}} \cos(\alpha - \beta) = \frac{\gamma}{\epsilon} \times \frac{48}{65} = \frac{56}{65}$$

۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$

نکته: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

با استفاده از نکته داریم:

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha - (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{-2 \sin \beta \cos \alpha} = \frac{\cos \beta}{-2 \sin \beta} = -\frac{1}{2} \cot \beta$$

۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: دانش * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ و $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

باتوجه به نکته می توان نوشت:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta) \Rightarrow \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow 2 \sin \alpha \sin \beta = 0 \Rightarrow \sin \alpha \sin \beta = 0$$

۱۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۲، فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$

نکته: $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

عبارت را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} + \beta) - \sin \alpha \cos(\pi - \beta) &= \cos \alpha \times (-\sin \beta) - \sin \alpha \times (-\cos \beta) = -\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: دانش * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

باتوجه به نکته، $\sin 75^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را به صورت های زیر نوشته و عبارت را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ + \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) + \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ \\ &= 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$

نکته: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\begin{cases} \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} \\ \cos \alpha \cos \beta = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

ابتدا مقدار $\cos(\alpha - \beta)$ را به دست می آوریم:

$$\sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1 \Rightarrow \sin^2(\alpha - \beta) + \frac{1}{36} = 1 \Rightarrow \sin^2(\alpha - \beta) = \frac{35}{36} \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \pm \frac{\sqrt{35}}{6}$$

حال مقدار $\sin(\alpha - \beta)$ را به دست می آوریم:

۱۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\cos(-x) = \cos x$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

با استفاده از نکته می توان عبارت A را به صورت زیر ساده کرد:

$$A = \cos(\overbrace{\alpha - \beta}^x) \cos(\overbrace{\alpha + \beta}^y) + \sin(\overbrace{\alpha - \beta}^x) \sin(\overbrace{\alpha + \beta}^y) = \cos((\alpha - \beta) - (\alpha + \beta)) = \cos(-2\beta) = \cos 2\beta$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$ و $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

راه حل اول: عبارت موردنظر را با استفاده از فرمول‌ها ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) + \left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) \\ &= \frac{3}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 2 \sin x \end{aligned}$$

راه حل دوم: عبارت را در دو ضرب و تقسیم می‌کنیم و $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$A = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \sin \frac{\pi}{6} \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \sin \left(\left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin x$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ و $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

نکته: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$

با توجه به نکات داریم:

$$\begin{aligned} \sin(345^\circ) &= \sin(360^\circ - 15^\circ) = -\sin(15^\circ) = -\sin(45^\circ - 30^\circ) = -(\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$

$$P = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

صورت و مخرج را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$P = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} = \frac{\frac{2}{3} + 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{2+3}{2-3} = -5$$

۱۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$

با توجه به نکته داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos x + \sin x \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) \quad \frac{\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}}$$

۱۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * حسابان (فصل ۴ ◀ درس ۴)

نکته: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

زاویه 15° را می‌توان به صورت $45^\circ - 30^\circ$ در نظر گرفت. با توجه به نکته بالا داریم:

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$