



به نام خدا

جمهوری اسلامی ایران

آزمون پایانترم معادلات دیفرانسیل ۱۴۰۱/۱۰/۲۰

مدت آزمون: ۲ ساعت

نام و نام خانوادگی:

(۱) مسیرهای قائم بر دسته منحنی  $y = c \sin x$  را ارائه دهید.

(۲) با یافتن فاکتور انتگرال به فرم تابعی از  $y$ ، معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.  
 $\frac{1}{y} y \cos x dx + (y + 2 + \sin x) dy = 0$

(۳) معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$y' - y = x e^{-2x} y^4$$

ابتدا با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل کنید و سپس جواب عمومی معادله را بیابید.

(۴) جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید. برای یافتن جواب خصوصی  $y_p$  می‌توانید از هر روش مناسبی استفاده نمایید.

$$y'' - 4y' + 4y = \cos x$$

(۵) معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر

$$x^2 y''' + 4x^2 y'' + xy' - y = 0$$

را با یک تغییر متغیر مناسب به یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت تبدیل نمایید و سپس جواب معادله را بیابید.

(۶) جواب معادله دیفرانسیل زیر را که نسبت به  $y, y', y''$  همگن است، ارائه دهید.

$$yy'' - (y')^2 - 2xy^2 = 0$$

(۷) جواب مسأله مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس بدست آورید.

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 10 \sin t \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

(۸) سوال امتیازی. حاصل انتگرال زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس بیابید.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(2t)}{t} e^{-2t} dt = ?$$

حل سوال (۱) مسیره‌های قائم

$$\frac{y = c \sin x}{y' = c \cos x} \rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{c \cos x}{c \sin x} \rightarrow \frac{y'}{y} = \cot x$$

$$\frac{y' \rightarrow -\frac{1}{y'}}{-\frac{1}{yy'}} = \cot x \rightarrow -\frac{dx}{y dy} = \cot x \rightarrow -\frac{dx}{\cot x} = y dy \rightarrow -\tan x dx = y dy$$

$$\int \rightarrow \ln |\cos x| = \frac{y^2}{2} + \alpha$$

حل سوال ۲) معادله کامل و فاکتور انتگرال

$$\begin{cases} M = \frac{1}{2} y \cos x \\ N = y + 2 + \sin x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{2} \cos x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x \end{cases} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cos x$$

$$\left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \times \frac{1}{M} = f(y)$$

$$\rightarrow f(y) = \left( -\frac{1}{2} \cos x \right) \times \frac{1}{\frac{1}{2} y \cos x} = -\frac{1}{y}$$

$$\mu = e^{-\int f(y) dy} \rightarrow \mu = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

$$\times y \rightarrow \frac{1}{2} y^2 \cos x dx + (y^2 + 2y + y \sin x) dy = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = y \cos x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = y \cos x \end{cases} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\rightarrow c = \int \frac{1}{2} y^2 \cos x dx + \int (y^2 + 2y) dy \rightarrow c = \frac{1}{2} y^2 \sin x + \frac{y^3}{3} + y^2$$

حل سوال ۳) معادله برنولی

$$\xrightarrow{\div y^\mu} \frac{y'}{y^\mu} - \frac{1}{y^\mu} = xe^{-\mu x} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{y^\mu} = t \\ \frac{\mu y'}{y^\mu} = t' \end{array} \right. \rightarrow \frac{t'}{\mu} + t = xe^{-\mu x} \xrightarrow{\times \mu} t' + \mu t = \mu xe^{-\mu x}$$

$$\xrightarrow{\mu = e^{\int P(x) dx}} \mu = e^{\int \mu dx} = e^{\mu x} \xrightarrow{\times e^{\mu x}} e^{\mu x} t' + \mu e^{\mu x} t = \mu x \rightarrow (e^{\mu x} t)' = \mu x$$

$$\xrightarrow{\int} e^{\mu x} t = \frac{\mu}{\mu} x^2 + c$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{y^\mu} = t} -\frac{e^{\mu x}}{y^\mu} = \frac{\mu}{\mu} x^2 + c$$

حل سوال ۴) معادله مرتبه دو با ضرایب ثابت ناهمگن

$$\xrightarrow{\text{قسمت همگن}} y'' - 4y' + 4y = 0 \xrightarrow{\text{مفسر}} t^2 - 4t + 4 = 0 \rightarrow (t - 2)^2 = 0 \rightarrow t = 2, 2$$

$$\rightarrow y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

$$\xrightarrow{\text{اپراتور}} D^2 y - 4Dy + 4y = \cos x \rightarrow y = \frac{\cos x}{D^2 - 4D + 4} \xrightarrow{D^2 = -1} y = \frac{\cos x}{3 - 4D} \times \frac{3 + 4D}{3 + 4D}$$

$$\rightarrow y = \frac{(3 + 4D) \cos x}{9 - 16D^2} \xrightarrow{D^2 = -1} y_p = \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{25}$$

$$\xrightarrow{y = y_h + y_p} y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{25}$$

حل سوال ۵) معادله مرتبه سه باضرایب متغیر کوشی اوپلر همگن

$$x^3 y''' = m(m-1)(m-2)$$

$$x^2 y'' = m(m-1)$$

$$xy' = m$$

$$y = 1$$

$$\longrightarrow m(m-1)(m-2) + 2m(m-1) + m - 1 = 0$$

$$\longrightarrow (m-1)(m(m-2) + 2m + 1) = 0 \longrightarrow (m-1)(m^2 + 2m + 1) = 0$$

$$\longrightarrow (m-1)(m+1)^2 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = -1, -1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \underline{y = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^{-1} \ln x}$$

حل سوال ۶) معادله مرتبه دو همگن فاص

$$y = 1$$

$$y' = u$$

$$y'' = u' + u^2$$

$$\longrightarrow u' + u^2 - u^2 - 2x = 0$$

$$\longrightarrow u' = 2x \rightarrow du = 2x dx \xrightarrow{\int} u = x^2 + c$$

$$\xrightarrow{y = e^{\int u dx}} y = e^{\int (x^2 + c) dx}$$

$$\longrightarrow y = e^{\frac{x^3}{3} + cx + \alpha}$$

حل سوال (۷) حل معادله با لاپلاس

$$\xrightarrow{L} L(y'') - \omega L(y') + \epsilon L(y) = 10L(\sin t)$$

$$\xrightarrow{L(y)=F(s)} s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) - \omega s F(s) + \omega f(0) + \epsilon F(s) = \frac{10}{s^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\substack{f(0)=3 \\ f'(0)=6}} s^2 F(s) - 3s - 6 - \omega s F(s) + 1\omega + \epsilon F(s) = \frac{10}{s^2 + 1}$$

$$\rightarrow (s^2 - \omega s + \epsilon)F(s) = \frac{10}{s^2 + 1} + 3s - 9$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{10}{(s-2)(s-3)(s^2+1)} + \frac{3s}{(s-2)(s-3)} - \frac{9}{(s-2)(s-3)}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} y = e^{3t} + 3e^{2t} - 2e^t + \sin t + \cos t - 9$$



حل سوال ۱۸) تعریف لاپلاس

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\longrightarrow \begin{cases} L\left(\frac{\sin(\gamma t)}{t}\right) = ? \\ s = \gamma \end{cases}$$

$$L\left(\frac{\sin(\gamma t)}{t}\right) = \int_s^{\infty} L(\sin(\gamma t)) ds = \int_s^{\infty} \frac{\gamma}{s^2 + \gamma^2} ds = \tan^{-1} \frac{s}{\gamma} \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{\gamma} - \tan^{-1} \frac{s}{\gamma} \xrightarrow{s=\gamma}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\gamma t)}{t} e^{-st} dt = \frac{\pi}{\gamma} - \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{\gamma} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

# معادلات دیفرانسیل

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱: معادلات مرتبه اول

فصل ۲: معادلات مرتبه دوم و بالاتر

فصل ۳: حل معادلات دیفرانسیل با سری

فصل ۴: تبدیل لاپلاس

فصل ۵: حل دستگاه معادلات دیفرانسیل



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

# ریاضیات عمومی ۲

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱: توابع برداری

فصل ۲: توابع چند متغیره

فصل ۳: انتگرال ۲ گانه

فصل ۴: انتگرال ۳ گانه

فصل ۵: انتگرال روی خم

فصل ۶: انتگرال روی سطح



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

# ریاضیات عمومی ۱

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱: اعداد مختلط

فصل ۲: حد و پیوستگی

فصل ۳: مشتق

فصل ۴: انتگرال

فصل ۵: کاربرد انتگرال

فصل ۶: سری

فصل ۷: پیوست

برای دریافت جزوات و ویدئوهای اصلی کلاس و همچنین نمونه سوالات امتحانی به سایت [EbiMath.com](http://EbiMath.com)

و یا کانال تلگرامی [@EbiMath](https://t.me/EbiMath) مراجعه کنید.