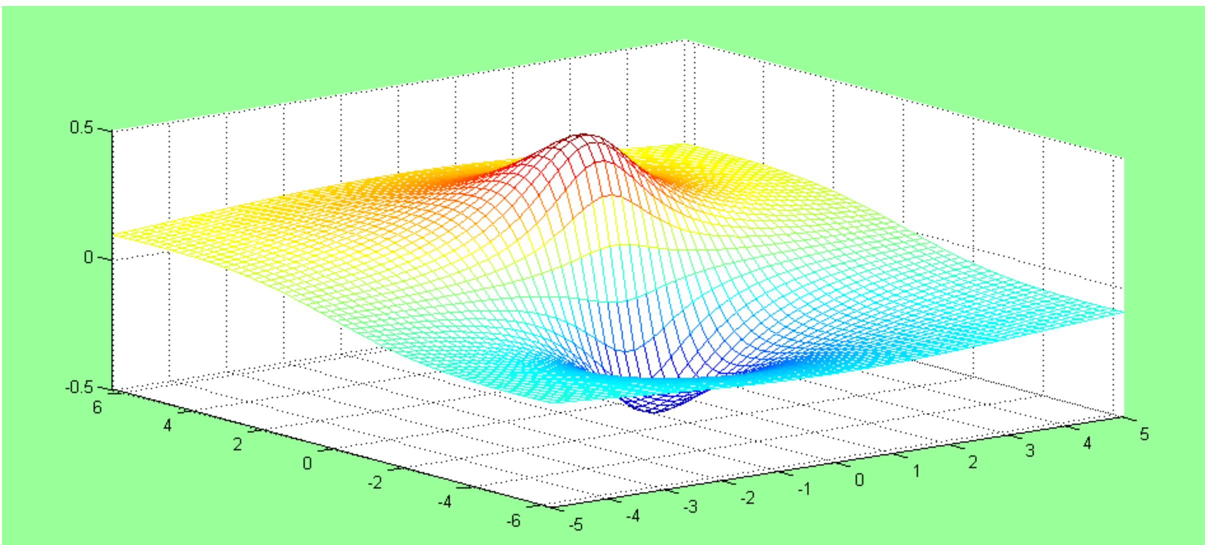
ریاضیات مهندسی



تألیف: دکتر مهدی سیاهی

فهرست مطالب

۱- آشنایی با نظریه اعداد مختلط

وجود معادلاتی مانند $x^2+4=0$ و ... که هیچ جوابی در مجموعه اعداد حقیقی ندارند باعث شد تا بشر به فکر ایجاد اعداد جدیدی به نام مختلط گردد. اولین کسی که اعداد مختلط را برای این منظور بکار برد ریاضیدان ایتالیایی به نام Girolamo Cardano می‌باشد. بسیاری از مسائل مهندسی را می‌توان با نظریه اعداد مختلط حل نمود.

تعریف ۱-۱

عدد مختلط یک زوج مرتب از اعداد حقیقی x و y است که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$z=\{(x+iy)\,|,\ x,y\in R\ \ ,\ i^2=-1\} \qquad (۱-۱)$$

به x قسمت حقیقی و به y قسمت موهومی عدد مختلط z گفته می‌شود و بصورت زیر نمایش می‌دهند

$$\begin{aligned} x&=\mathrm{Re}(z)\\ y&=\mathrm{Im}(z)\end{aligned} \qquad (۲-۱)$$

۱-۱- خواص اعداد مختلط

در مجموعه خواص زیر $z_1=x_1+iy_1$ ، $z_2=x_2+iy_2$ و $z_3=x_3+iy_3$ فرض شده است.

- تساوی دو عدد مختلط $\quad z_1=z_2 \iff x_1=x_2\ ,\ \ y_1=y_2$
- جمع و تفریق دو عدد مختلط $\quad z_1\pm z_2=(x_1\pm x_1)+i(y_1\pm y_2)$
- ضرب دو عدد مختلط $\quad z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$
- مزدوج عدد مختلط $\quad \bar{z}=x-iy$
- تقسیم دو عدد مختلط $\quad \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

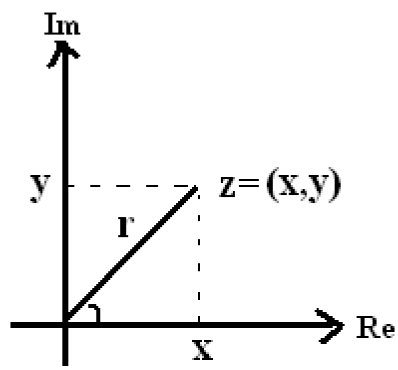
- جابجایی عمل جمع $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- شرکت‌پذیری عمل جمع $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- جابجایی عمل ضرب $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- شرکت‌پذیری عمل ضرب $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
- جمع‌پذیری عمل ضرب $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
- مزدوج مجموع $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- مزدوج حاصل‌ضرب $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- مزدوج حاصل‌تقسیم $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- قسمت حقیقی عدد مختلط $\operatorname{Re} al(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2} = x$
- قسمت موهومی عدد مختلط $\operatorname{Im} aginary(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2} = y$
- اندازه عدد مختلط $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

تمرین(۱-۱) نامساوی‌های زیر را اثبات کنید.

الف) $\operatorname{Re}(z) \le |z|$ ب) $|z_1 + z_2 + \dots z_n| \le |z_1| + |z_2| + \dots |z_n|$ ج) $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$

۱-۲- نمایش اعداد مختلط به فرم قطبی

هر عدد مختلط را بر اساس نمایش آن در صفحه اعداد مختلط می‌توان بصورت قطبی نیز نمایش داد



$$z = x + iy = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) \qquad (۱-۳)$$

که مابین فرم دکارتی و قطبی نمایش اعداد مختلط، روابط زیر برقرار می‌باشد.

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \quad -\pi < \theta < \pi \qquad (۱-۴)$$

در نمایش اعداد مختلط به فرم قطبی عملیات ضرب و تقسیم به سادگی انجام می‌گیرد بطوری‌که اگر $i = 1,2,...,n$، z_i را بصورت $z_i = r_i(\cos\theta_i + i\sin\theta_i)$ تعریف کنیم آنگاه داریم

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n \left(\cos(\theta_1 + \theta_2 + ...\theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ...\theta_n)\right) \qquad (۱-۵)$$

نکته: با استفاده از رابطه بالا به سادگی می‌توان نتیجه زیر را گرفت که به رابطه دموآور معروف است

$$\begin{aligned} &z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \Rightarrow \\ &(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \end{aligned} \qquad (۱-۶)$$

تمرین(۱-۲) با استفاده از رابطه بالا $\cos(3\theta)$ و $\sin(3\theta)$ را بر حسب $\cos(\theta)$ و $\sin(\theta)$ بدست آورید.

۱-۳- محاسبه ریشه n ام عدد مختلط z

فرض کنید $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $W = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ و W ریشه nام عدد مختلط Z باشد آنگاه داریم.

$$W = z^{\frac{1}{n}} \;\to W^n = z \;\;\to\;\; R^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow$$
$$R = r^{\frac{1}{n}} \qquad , \qquad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k = 1,2...,n-1 \tag{۱-۷}$$

مثال(۱-۱) ریشه nام عدد ۱ را بیابید.

$$z^n = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) \qquad \Rightarrow \qquad z = \sqrt[n]{1}\left(\cos(\frac{0+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{0+2k\pi}{n})\right)$$

مثال(۱-۲) معادله $z^4 + 2i = 0$ را حل کنید

$$z^4 = -2i = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right) \Rightarrow z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right)\right),\ k = 0,1,2,3$$

۱-۴- منحنی‌ها و نواحی در صفحه اعداد مختلط

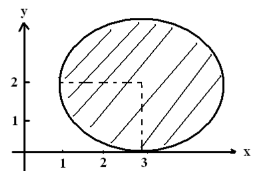
در صفحه اعداد مختلط فاصله بین دو نقطه z و a بصورت $|z-a|$ تعریف می‌شود و $|z-a| = \rho$ یک دایره به مرکز a و شعاع ρ می‌باشد. در صفحه اعداد مختلط ناحیه $|z-a| < \rho$ معرف نقاط درون یک دایره به مرکز a و شعاع ρ و ناحیه $|z-a| \le \rho$ معرف نقاط درون و روی یک دایره به مرکز a و شعاع ρ می‌باشد.

نکته: ناحیه $|z - z_0| + |z - z_1| = R$ بیانگر یک بیضی با کانون‌های z_1 و z_0 می‌باشد.

نکته: ناحیه $|z - z_0| - |z - z_1| = R$ بیانگر یک هذلولی با کانون‌های z_1 و z_0 می‌باشد.

نکته: ناحیه $|z - z_0| = |z - z_1|$ بیانگر عمود منصف پاره خطی است که دو سر آن روی z_1 و z_0 می‌باشد.

مثال(۱-۳) شکل هندسی ناحیه $\left|z-3-2i\right| \le 2$ را رسم نمایید.



مثال(۱-۴) اگر $z = r(\cos\theta + \sin\theta)$ باشد آنگاه $z^{\frac{m}{n}}$ را محاسبه کنید.

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]\right)^m =$$
$$\sqrt[n]{r^m}\left[\cos\left(\frac{m}{n}(\theta+2k\pi)\right)+i\sin\left(\frac{m}{n}(\theta+2k\pi)\right)\right]$$

مثال(۱-۵) معادله $z^2-(5+i)z+8+i=0$ را حل کنید.

$$z = \frac{5+i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5+i}{2}\right)^2 - 8 - i} = \frac{5+i}{2} \pm \sqrt{-2+\frac{3}{2}i} = \frac{5+i}{2} \pm (0.5+1.5i) = \begin{cases} 3+2i \\ 2-i \end{cases}$$

تمرین‌های بخش اول

۱-۱ مقدار اصلی آرگومان اعداد زیر را بیابید.

$A)\,1+i \qquad B)\,-1+i \qquad C)\,1-i \qquad D)\,-1-i \qquad E)\,-10-i$

۱-۲ تمام مقادیر ریشه‌های زیر را بیابید و در صفحه مختلط مشخص کنید.

$A)\sqrt{-5+12i} \qquad B)\sqrt[4]{-5+12i} \qquad C)\sqrt[4]{-1} \qquad D)\sqrt[5]{1+i}$

۱-۳ معادلات زیر را حل کنید.

$A)\,z^2+z+1-i=0 \qquad B)\,z^4-3(1+2i)z^2-8+6i=0$

۱-۴ نواحی زیر را در صفحه اعداد مختلط رسم نمایید.

$A)\,\left|z+2\right|>3 \qquad B)\,0<\mathrm{Re}(z)<3 \qquad C)\,\left|Arg(z)\right|<\frac{\pi}{4} \qquad D)\,\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=1 \qquad E)\,\mathrm{Im}(z^2)=2$

۲- توابع مختلط

تابع مختلط تابعی است که دامنه و برد آن را اعداد مختلط تشکیل می‌دهند و بصورت $W = f(z)$ نمایش داده می‌شود که در حالت کلی $z = x + iy$ و $W = u + iv$ می‌باشد. در واقع تابع مختلط را می‌توان بصورت یک تبدیل (نگاشت) از فضای (x,y) به فضای(u,v) در نظر گرفت. دقت کنید که u و v هر کدام تابعی از x و y می‌باشند یعنی $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$.

۲-۱- حد و پیوستگی

تعریف حد در توابع مختلط شبیه توابع حقیقی بوده و بصورت زیر می‌باشد

تابع f(z) وقتی z به سمت z_0 میل می‌کند دارای حد l است هرگاه داشته باشیم

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \quad , \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \quad s.t: \left|z - z_0\right| < \varepsilon \;\Rightarrow \left|f(z) - l\right| < \delta \qquad (۱-۲)$$

توجه شود که شرط لازم برای وجود حد در توابع دو متغیره این است که در کلیه مسیرها باید مقادیر حد یکسان باشد.

تابع $W = f(z)$ را در نقطه z_0 پیوسته گویند هرگاه $f(z_0)$ تعریف شده و $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ باشد.

تابع $W = f(z)$ را در یک دامنه پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه از آن دامنه پیوسته باشد.

۲-۲- مشتق تابع مختلط

مشتق تابع f(z) در نقطه z_0 بصورت زیر تعریف می‌شود. مشروط بر آنکه حد زیر وجود داشته باشد.

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \qquad , \qquad \Delta z=z-z_0 \tag{۲-۲}$$

مثال(۲-۱) مشتق تابع $f(z)=\bar{z}$ را بدست آورید.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(z+\Delta z)}-(\bar{z})}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}1 & ;\quad \Delta x\to 0\ ,\ \ \Delta y=0\\ -1 & ;\quad \Delta x=0\ ,\ \ \Delta y\to 0\end{cases}$$

چون در دو مسیر مختلف، دو مقدار متفاوت بدست آمده است لذا تابع $f(z)=\bar{z}$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

مثال(۲-۲) مشتق تابع $f(z)=|z|^2$ را بدست آورید.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)}-z\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\,\overline{\Delta z}+\Delta z\bar{z}+(\Delta z)^2}{\Delta z}=z\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\bar{z}+0=$$

$$\begin{cases}z+\bar{z} & ;\quad \Delta x\to 0\ ,\ \ \Delta y=0\\ -z+\bar{z} & ;\quad \Delta x=0\ ,\ \ \Delta y\to 0\end{cases}$$

با توجه به مثال قبل مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

خواص مشتق:

الف) $[f(z)+g(z)]'=f'(z)+g'(z)$

ب) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+g'(z)f(z)$

ج) $\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}$

۲-۳- توابع تحلیلی

تابع f(z) را در دامنه D تحلیلی گویند هرگاه f(z) در تمام نقاط D تعریف شده و مشتق‌پذیر باشد. تابع f(z) را در نقطه $z = z_0$ تحلیلی گویند هرگاه در یک همسایگی از آن تحلیلی باشد.

قضیه ۲-۱ (کوشی-ریمان)

فرض کنید تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در یک همسایگی از نقطه z تعریف شده و پیوسته باشد و در خود z مشتق‌پذیر باشد آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول u و v در آن نقطه وجود دارد و در شرایط زیر که به شرایط کوشی- ریمان معروف هستند صدق می‌کند. (اثبات کنید)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{۲-۳}$$

قضیه۲-۲ (کوشی-ریمان)

هر گاه دو تابع پیوسته حقیقی u(x,y) و v(x,y) از دو متغیر حقیقیx و y دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند که در دامنه‌ای مانند D در معادلات کوشی- ریمان صدق می‌کنند، آنگاه تابع مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در D تحلیلی است.

توجه: بطور کلی به یکی از سه روش زیر می‌توان مشتق تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را محاسبه نمود.

الف) استفاده از تعریف اصلی مشتق.

ب) $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

ج) $f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$.

مثال(۲-۳) در مورد مشتق‌پذیری تابع $f(z)=\mathrm{Re}(z)=x$ نظر دهید.

چون $u_x=1\neq v_y=0$ لذا تابع فوق در هیچ جا تحلیلی نمی‌باشد.

توجه: اگر تابعی فقط در یک نقطه یا چند نقطه جدا از هم شرایط کوشی-ریمان را برآورده کند آنگاه تابع مذکور در هیچ جا تحلیلی نمی‌باشد.

مثال(۲-۴) تابع $f(z)=-\mathrm{Re}(z^2)+iz\bar{z}$ در کجا مشتق‌پذیر و تحلیلی است.

با اعمال روابط کوشی ریمان داریم
$$\begin{array}{l} f(z)=\left(y^2-x^2\right)+i\left(y^2+x^2\right) \Rightarrow \\ u_x=-2x=v_y=2y \quad ,v_x=2x=-u_y=-2y \end{array}$$
لذا برای برقراری معادلات کوشی - ریمان باید y=-x باشد. لذا تابع مذکور فقط بر روی خط y=-x مشتق‌پذیر می‌باشد در حالیکه در هیچ کجا حتی بر روی خط مذکور تحلیلی نمی‌باشد چون برای تحلیلی بودن در هر نقطه بایست در یک همسایگی از آن مشتق‌پذیر باشد.

شرایط کوشی-ریمان در فرم قطبی:

در فرم قطبی تابع f(z) بصورت $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ نوشته می‌شود که مابین فرم قطبی و دکارتی رابطه (۱-۴) برقرار است. داریم

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}.\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \theta}.\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{\partial u}{\partial \theta}.\dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial r}.\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial \theta}.\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial r}.\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{\partial v}{\partial \theta}.\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \Rightarrow \ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \ \Rightarrow \ \cos(\theta).\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\sin(\theta).\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=\sin(\theta).\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\cos(\theta).\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \end{array} \qquad (۴-۲)$$

حال اگر در طرفین تساوی ضرایب sin و cos را یکسان بگیریم شرایط معادلات کوشی-ریمان در فرم قطبی بدست می‌آید.

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad (۵-۲)$$

مثال(۲-۵) در مورد تحلیلی بودن تابع $f(z)=e^x\cos(y)+ie^x\sin(y)$ نظر دهید.

تحلیلی است چون روابط $u_x=e^x\cos(y)=v_y \quad , \; v_x=e^x\sin(y)=-u_y$ برقرار است.

تعریف ۲-۱

نقطه تکین نقطه‌ای است که تابع در آن نقطه تحلیلی نیست ولی حداقل در یک همسایگی از آن تحلیلی می‌باشد.

مثال(۲-۶) نقاط تکین تابع $f(z)=\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}$ را بدست آورید.

$$\sin(\frac{\pi}{z})=0 \Rightarrow \frac{\pi}{z}=k\pi \;\; \Rightarrow z=\frac{1}{k} \quad , k=0,1,...$$

قضیه ۲-۳ (معادلات لاپلاس)

فرض کنید $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در دامنه D تحلیلی باشد آنگاه u و v در D در معادله لاپلاس صدق کرده و دارای مشتقات جزئی مرتبه دو پیوسته در D می‌باشد. (اثبات کنید)

$$\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}=0$$
$$\nabla^2 v=v_{xx}+v_{yy}=0$$

تعریف ۲-۲

هر تابعی که دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم باشد و در معادله لاپلاس صدق کند تابع همساز نامیده می‌شود.

تعریف ۲-۳

اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در D تحلیلی باشند آنگاه v را مزدوج همساز u می‌نامند.

برای یافتن مزدوج همساز بصورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید u(x,y) معلوم بوده و v(x,y) مجهول باشد آنگاه از رابطه $u_x=v_y$ ، v(x,y) را بصورت $\mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\int \mathrm{u}_x dy+\varphi(x)$ بدست آورده و از رابطه $v_x=-u_y$، $\varphi(x)$ را تعیین می‌کنیم.

مثال(۲-۷) مزدوج همساز تابع $u(x,y)=\sin x\cosh y$ را بدست آورید.

$$u_x=\cos x\cosh y \rightarrow v(x,y)=\int\cos x\cosh y\,dy+\varphi(x)=\cos x\sinh y+\varphi(x)$$
$$v_x=-\sin x\sinh y+\varphi'(x)=-u_y=-\sin x\sinh y \Rightarrow \varphi'(x)=0\Rightarrow\varphi(x)=K$$
$$v(x,y)=\cos x\sinh y+K$$

نکته: اگر v مزدوج همساز u و u مزدوج همساز v باشد آنگاه u و v باید توابع ثابتی باشند.

تمرین های بخش دوم

۲-۱ روابط کوشی-ریمان در مورد کدام یک از توابع زیر صادق است.

$A)\ |z|$ $\quad B)\ \bar{z}$ $\quad C)\ \arg(z)$ $\quad D)\ f(z)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

۲-۲ اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد تحت چه شرایطی $f(z)=v(x,y)+iu(x,y)$ هم تحلیلی است.

۲-۳ آیا توابع $u(x,y)=2x(1-y)$ و $u(x,y)=y^3-3x^2y$ همساز هستند. در صورت مثبت بودن جواب مزدوج همساز آن‌ها را بیابید.

۲-۴ کلیه توابع تحلیلی بصورت $f(z)=u(x)+iv(y)$ را بیابید. ((f(z)=cz+a

۲-۵ آیا تابع $f(z)=x^2+iy^2$ بر خط x=y تحلیلی است. دلایل منفی بودن جواب علارغم صادق بودن شرایط کوشی-ریمان را توضیح دهید.

۲-۶ اعداد a، b و c را طوری تعیین کنید که توابع داده شده زیر همساز باشند. آنگاه مزدوج همساز آنها را بدست آورید.

$A)\ u=e^{2x}\cos(ay)$ $\qquad B)\cos bx\sinh y$

۲-۷ در مورد تحلیلی بودن توابع زیر نظر دهید.

$A)\ z^2-\bar{z}^2$ $\qquad B)\ z+\frac{1}{z}$ $\qquad C)\ln|z|+iArg(z)$ $\qquad D)\ \frac{i}{z^4}$

۳- توابع مقدماتی

۳-۱- تابع نمایی

تابع نمایی در آنالیز مختلط بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{۳-۱}$$

این تابع به ازای تمامی مقادیر z تحلیلی و غیرصفر است.

۳-۱-۱- خواص تابع نمایی

الف) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$ ب) $\left|e^z\right|=e^x \quad , \arg(e^z)=y$ ج) $e^{z+i2\pi}=e^z \quad ,T=i2\pi$ د) $\left(e^z\right)'=e^z$

د) دامنه تابع نمایی کل صفحه مختلط و برد آن تمام صفحه مختلط به جز مبداء می‌باشد.

مثال(۳-۱) معادله $e^{2z}+3ie^z=0$ را حل کنید.

$$e^z(e^z+3i)=0 \;\Rightarrow e^z=0 \;\; or \;\; e^z+3i=0 \;\Rightarrow$$

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)=-3i=3(\cos(\frac{-\pi}{2})+i\sin(\frac{-\pi}{2})) \;\Rightarrow \begin{cases} e^x=3 \;\rightarrow x=1.098 \\ y=2k\pi\pm\dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

۳-۲- توابع مثلثاتی و هیپربولیک

توابع sin ، cos ، sinh و cosh بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad ,\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}, \;\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2} \tag{۳-۲}$$

توابع sin و cos متناوب با دوره تناوب 2π و توابع sinh و cosh متناوب با دوره تناوب $i2\pi$ می‌باشند و تعریف توابع tan، cot، sec، csc ، tanh، coth و ... همانند توابع حقیقی می‌باشد. ضمناً تمام فرمول‌های توابع مثلثاتی حقیقی برای فرم مختلط آن‌ها برقرار می‌باشد

$$(\sin z)' = \cos z,\ (\tan z)' = \sec^2 z,\ \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1, ... \qquad (۳-۳)$$
$$(\sinh z)' = \cosh z,\ (\tanh z)' = \mathrm{sec}h^2 z,\ \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_2 \cosh z_1, ...$$

مثال(۳-۲) رابطه اویلر($(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$ را اثبات کنید.

با استفاده از تعریف sin و cos براحتی اثبات می‌شود

مثال(۳-۳) ثابت کنید که $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ است.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}\right] \xRightarrow[e^{-ix}=\cos x - i\sin x]{e^{ix}=\cos x + i\sin x}$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\cos xe^{-y} + i\sin xe^{-y} - \cos xe^{y} + i\sin xe^{y}\right] = \frac{1}{2}\left[-i\cos xe^{-y} + \sin xe^{-y} + i\cos xe^{y} + \sin xe^{y}\right]$$
$$= \sin x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + i\cos x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$$

با همین استدلال می‌توان ثابت کرد $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ است. (ثابت کنید)

تمرین(۳-۱) درستی روابط زیر را بررسی کنید.

$A) \sin(iy) = i\sinh y$ $\qquad B) \sinh z = \sinh x \cos y + i\cosh x \sin y$

$C) \cos(iy) = \cosh y$ $\qquad D) \cosh z = \cosh x \cos y + i\sinh x \sin y$

مثال(۳-۴) جواب معادله $\sin z = 0$ را بیابید.

راه اول:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sinh y = 0 \to y = 0 \\ \sin x = 0 \to x = k\pi \end{cases} \Rightarrow z = x + iy = k\pi$$

راه دوم:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{2iz} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2ix-2y} = e^{-2y}(\cos(2x) + i\sin(2x)) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\begin{cases} e^{-2y} = 1 \to y = 0 \\ 2x = 0 + 2k\pi \to x = k\pi \end{cases} \Rightarrow z = x + iy = k\pi$$

۳-۳- تابع لگاریتم

تابع لگاریتمی در آنالیز مختلط بصورت زیر تعریف می‌شود

$$f(z) = \ln z = \ln r + i\theta \qquad (۴-۳)$$

که $r = |z|$ و $\theta = \arg z = Argz \pm 2k\pi$ می‌باشد. لذا این تابع یک تابع چند مقداری می‌باشد.

خواص تابع لگاریتم:

- $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ ، $\ln(\frac{z_1}{z_2}) = \ln z_1 - \ln z_2$
- این تابع غیر از مبداءو قسمت منفی محور xها در همه جا تحلیلی می‌باشد.
- تابع مذکور فقط به ازای $r > 0 \;\&\; a < \theta < a + 2\pi$ تک مقداری و پیوسته می‌باشد.
- هر نقطه بر روی محور حقیقی منفی و مبداء مختصات نقاط تکین تابع لگاریتم می‌باشند.

۳-۴- توان‌های عمومی

توان‌های عمومی عدد مختلط غیر صفر z بصورت زیر تعریف می‌شود

$$f(z)=z^{C}=e^{CLnZ} \qquad z\neq 0\ ,\ C\in complex \tag{۳-۵}$$

مثال(۳-۵) معادلات زیر را حل کنید.

$$A)\ \ln(1+i)=\ln(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})=\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=0.34+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)$$

$$B)\ (1+i)^{1-i}=e^{(1-i)\ln(1+i)}=e^{(1-i)(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right)$$

$$C)\ \ln z=3-i\rightarrow z=e^{3-i}=e^{3}.e^{-i}=e^{3}(\cos 1-i\sin 1)=20.08-0.35i$$

۳-۵- توابع معکوس مثلثاتی و هیپربولیک

تابع معکوس مثلثاتی سینوسی بصورت $z=\sin(w)$ یا $w=\sin^{-1}(z)$ تعریف می‌شود که می‌توان برحسب توابع لگاریتمی و بصورت زیر آن‌را نوشت.

$$\begin{aligned}
&z=\sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\ \Rightarrow e^{iw}-e^{-iw}-2iz=0\Rightarrow e^{i2w}-2ize^{iw}-1=0\Rightarrow\\
&e^{iw}\overset{\Delta}{=}X\ \Rightarrow X^{2}-2izX-1=0\ \Rightarrow\ X=iz+\sqrt{1-z^{2}}=e^{iw}\Rightarrow\\
&w=\sin^{-1}z=-i\ln(iz+\sqrt{1-z^{2}}\,)
\end{aligned} \tag{۳-۶}$$

به طریق مشابه می‌توان روابط زیر را بدست آورد

$$\begin{aligned}
&\cos^{-1}z=-i\ln(z+i\sqrt{1-z^{2}})\ ,\ \tan^{-1}z=\frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}\ ,\ \sinh^{-1}z=\ln(z+\sqrt{1+z^{2}}\,)\\
&\cosh^{-1}z=\ln(z+\sqrt{z^{2}-1})\quad ,\quad \tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}
\end{aligned} \tag{۳-۷}$$

تمرین‌های بخش سوم

۱-۳ قسمت‌های حقیقی و موهومی هر یک از توابع نمایی زیر را محاسبه کنید.

$A)\ e^{-2z}$ $B)\ e^{z^3}$ $C)\ e^{-\pi z}$ $D)\ e^{-z^2}$

۲-۳ تمامی مقادیر z که به ازای آن‌ها $\left|e^{-z}\right| < 1$ است را تعیین کنید.

۳-۳ مقدار اصلی i^i را محاسبه کنید.

۴-۳ مقدار اصلی $(5-2i)^{3+\pi i}$ را محاسبه کنید.

۵-۳ معادلات زیر را حل کنید.

$A)\ z^4 - 2i + 6 = 0$ $B)\ z^{\frac{5}{4}} = i$ $C)\ \sinh z = i$ $D)\ \cos z = 2$ $E)\ e^{2z} + 3ie^{z} = 0$

$F)\ e^{3z} = 3$ $G)\ \sin z = \cosh 3$ $H)\ \ln z = -2 - \frac{3}{2}i$ $I)\ \ln z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

۶-۳ تفاوت تعریف مشتق در حساب مختلط با تعریف مشتق در حساب حقیقی را بیان دارید.

۷-۳ تابعی که در تمام صفحه مختلط تحلیلی باشد را تام می‌گویند. آیا توابع sinz و cosz تام هستند.

۸-۳ تفاوت عمده e^z با e^x را بیان دارید. و بیان دارید چرا لگاریتم مختلط از لگاریتم طبیعی پیچیده‌تر است.

۹-۳ آیا ممکن است تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد ولی در آن نقطه تحلیلی نباشد.

۴- نگاشت

تابع مختلط $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را در نظر بگیرید. از نقطه نظر هندسی عملکرد این تابع را می‌توان بصورت یک نگاشت از صفحه z (صفحه (x,y)) به صفحه w (صفحه (u,v)) در نظر گرفت بدین معنا که تحت این تابع مختلط یک نقطه مشخص مانند (x_0, y_0) از صفحه z به یک نقطه مشخص مانند (u_0, v_0) در صفحه w منتقل می‌شود به چنین رابطه‌ای یک نگاشت گفته می‌شود.

تعریف ۴-۱

نگاشتی که اندازه و جهت زاویه بین دو قوس هموار گذرنده از یک نقطه مشخص را حفظ می‌کند، در آن نقطه همدیس می‌گویند.

قضیه ۴-۱

اگر f(z) در نقطه z_0 تحلیلی باشد و $f'(z_0)$ مخالف صفر باشد آنگاه تابع w=f(z) در نقطه z_0 همدیس است.

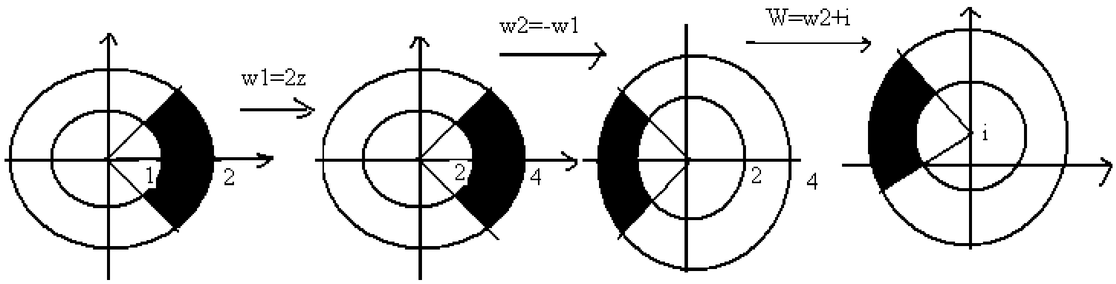
۴-۱- نگاشت خطی

نگاشت $w = az$ را که a یک عدد مختلط دلخواه مخالف صفر است($a = |a|e^{i\angle a}$) را نگاشت خطی گویند. این نگاشت همه جا تحلیلی و همدیس می‌باشد. این نگاشت انبساط یا انقباضی با اندازه $|a|$ و دورانی به اندازه $\angle a$ در جهت مثلثاتی بر روی تابع انجام می‌دهد.

نگاشت خطی $w = az + b$ که a و b اعداد مختلط دلخواه مخالف صفر هستند علاوه بر انبساط یا انقباضی با اندازه $|a|$ و دورانی به اندازه $\angle a$ در جهت مثلثاتی سبب انتقالی به اندازه b می‌شوند.

مثال (۴-۱) نگاشت ناحیه $D=\{z \mid 1<|z|<2, -\frac{\pi}{3}<Argz<\frac{\pi}{3}\}$ را تحت رابطه w=-2z+i بیابید.

این نگاشت انبساطی به اندازه۲، دورانی به اندازه π ($-2=2e^{i\pi}$)و انتقالی به اندازه i ایجاد می‌کند.



۴-۲- نگاشت توانی

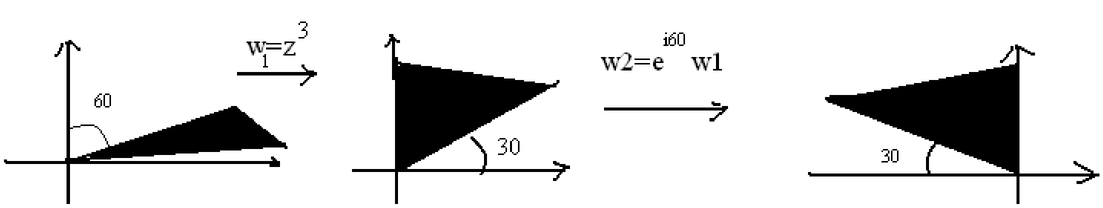
نگاشت $w=z^n$ را نگاشت توانی گویند که n یک عدد طبیعی غیر یک می‌باشد. این نگاشت در همه جا تحلیلی بوده و غیر از مبداء در تمام صفحه مختلط همدیس می‌باشد. با فرض $z=re^{i\theta}$ و $w=\mathrm{R}e^{i\varphi}$ درایم.

$$w=z^n \Rightarrow \mathrm{R}e^{i\varphi}=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^n e^{in\theta} \Rightarrow \begin{cases} R=r^n \\ \varphi=n\theta \end{cases} \tag{۴-۱}$$

از رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت که این نگاشت فاصله هر نقطه تا مبداء را به توان n رسانده و شعاع حامل نقطه را n برابر می‌کند.

مثال(۴-۲) نگاشت ناحیه $D=\{z \mid 0<Argz<30\}$ تحت رابطه $w=e^{i\frac{\pi}{3}}z^3$ را بیابید.

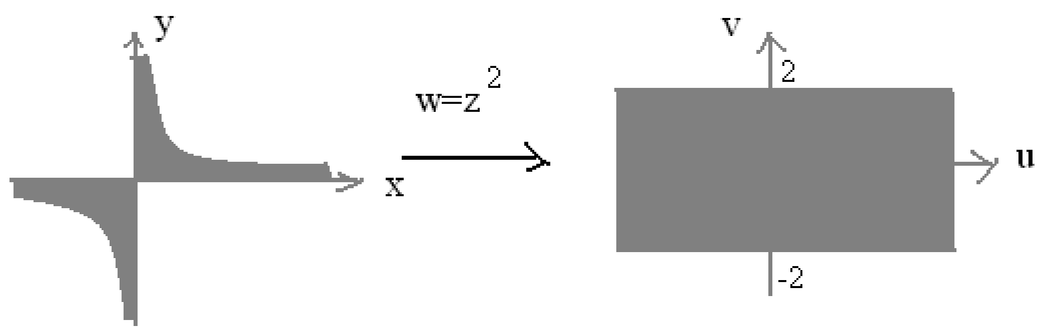
این نگاشت ابتدا زاویه شعاع حامل هر نقطه را ۳برابر کرده و سپس به اندازه $\frac{\pi}{3}$دوران می‌دهد.



نکته: حالت خاص این نگاشت $w=z^2$ می‌باشد که در فرم دکارتی بصورت $w=u+iv=\left(x^2-y^2\right)+i2xy$ نوشته می‌شود. در این حالت نگاشت هذلولی $x^2-y^2=c_1$، خط $u=c_1$ و نگاشت هذلولی $2xy=c_2$ ، خط $v=c_2$ می‌باشد.

مثال(۴-۳) نگاشت ناحیه 1>xy>1- را تحت رابطه $w=z^2$ بیابید.

این نگاشت هذلولی xy=1 را به خط v=2 و هذلولی xy=-1 را به خط v=-2 تبدیل می کند



۴-۳- نگاشت ریشه nام

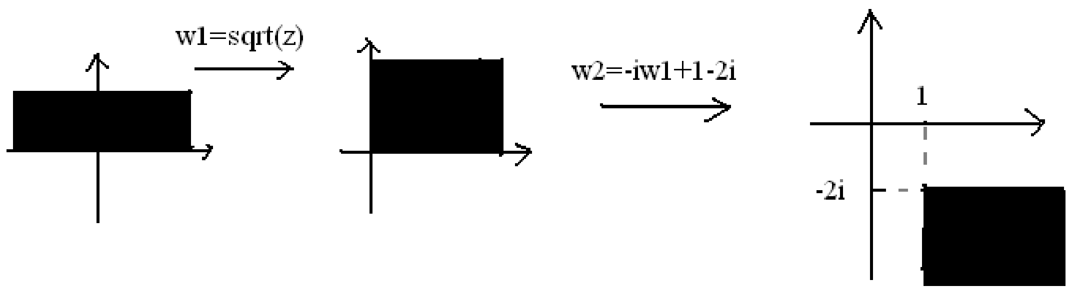
نگاشت $w=\sqrt[n]{z}$ را نگاشت ریشه nام گویند. که با فرض $z=re^{i\theta}$ و $w=\mathrm{Re}^{i\varphi}$ داریم.

$$w=\sqrt[n]{z} \Rightarrow \mathrm{Re}^{i\varphi}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}} \Rightarrow \begin{cases} R=\sqrt[n]{r} \\ \varphi=\dfrac{\theta}{n} \end{cases} \qquad (۴-۲)$$

از رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت که این نگاشت فاصله هر نقطه تا مبداء را به توان $\frac{1}{n}$ رسانده و شعاع حامل نقطه را بر n تقسیم می کند.

مثال(۴-۳) نگاشت نیم‌صفحه فوقانی صفحه مختلط را تحت رابطه $w=-i\sqrt{z}+1-2i$ بیابید.

این نگاشت ابتدا ناحیه بالای محور را به ربع اول انتقال داده($w1=\sqrt{z}$) سپس دورانی به اندازه منهای ۹۰ درجه و انتقالی به اندازه 1-2i ایجاد می‌کند

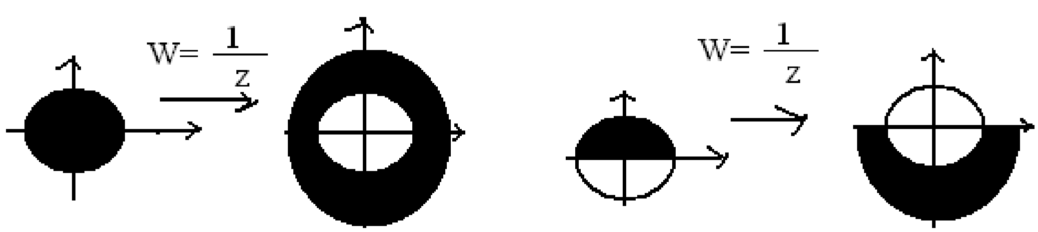


۴-۴- نگاشت کسری

نگاشت $w=\frac{1}{z}$ را نگاشت کسری گویند. این نگاشت در تمام صفحه مختلط به جزء مبداء تحلیلی و همدیس می‌باشد. که با فرض $z=re^{i\theta}$ و $w=\mathrm{R}e^{i\varphi}$ داریم

$$w=\frac{1}{z}\Rightarrow \mathrm{R}e^{i\varphi}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}\Rightarrow\begin{cases}R=\frac{1}{r}\\ \varphi=-\theta\end{cases} \tag{۴-۳}$$

این نگاشت نقاط خارج از یک دایره را به نقاط ناصفر درون دایره و نیم‌دایره درونی بالای محور را به نیم-دایره بیرونی پایین محور تبدیل می‌کند



در حالت کلی معادله یک دایره یا خط راست را می‌توان بصورت زیر نشان داد

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0 \qquad (۴-۴)$$

حال می‌خواهیم نگاشت یافته رابطه بالا را تحت رابطه $w=\frac{1}{z}$ بیابیم.

$$w=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{w} \Rightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u}{u^2+v^2}+i\frac{-v}{u^2+v^2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases} \qquad (۵-۴)$$

با جایگزاری رابطه بالا در (۴-۴) به رابطه زیر در صفحه w می‌رسیم که می‌تواند خط یا دایره باشد

$$D\left(u^2+v^2\right)+Bu-Cv+A=0 \qquad (۶-۴)$$

با استفاده از (۴-۴) و (۶-۴) می‌توان نتایج زیر را گرفت

- در(۴-۴) اگر $A\neq 0$ و $D\neq 0$ باشد یعنی دایره از مبداء عبور نکند، آنگاه نگاشت آن تحت رابطه $w=\frac{1}{z}$ دایره‌ای می‌شود که از مبداء نمی‌گذرد.
- در(۴-۴) اگر $A\neq 0$ و $D=0$ باشد یعنی دایره از مبداء عبور کند، آنگاه نگاشت آن تحت رابطه $w=\frac{1}{z}$ خط راستی می‌شود که از مبداء نمی‌گذرد.
- در(۴-۴) اگر $A=0$ و $D\neq 0$ باشد یعنی خط راستی که از مبداء عبور نکند، آنگاه نگاشت آن تحت رابطه $w=\frac{1}{z}$ دایره‌ای می‌شود که از مبداء می‌گذرد.
- در(۴-۴) اگر $A=0$ و $D=0$ باشد یعنی خط راستی که از مبداء عبور کند، آنگاه نگاشت آن تحت رابطه $w=\frac{1}{z}$ خط راستی می‌شود که از مبداء می‌گذرد.

مثال (۴-۴) تصویر خط $y = x + \frac{1}{2}$ به وسیله نگاشت $w = \frac{1}{z}$ را بیابید.

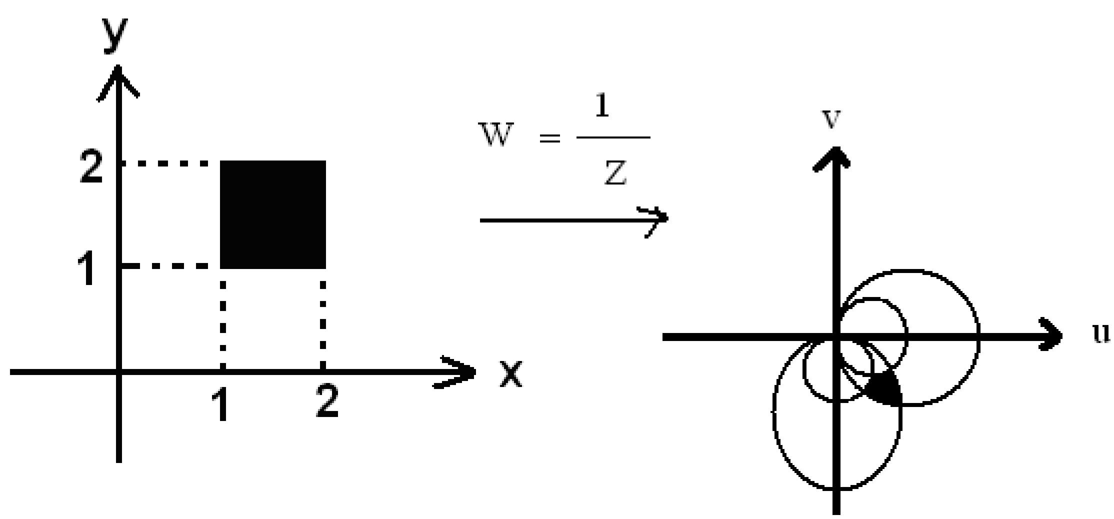
طبق مباحث صورت گرفته دایره‌ای با رابطه $(u+1)^2 + (v+1)^2 = 2$ می‌شود.

مثال(۴-۵) نگاشت ناحیه $D = \{z \mid 1 \le x \le 2 \ , \ 1 \le y \le 2\}$ را تحت رابطه $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

نگاشت خط x=1 دایره $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + (v+0)^2 = \frac{1}{4}$، نگاشت خط x=2 دایره $\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + (v+0)^2 = \frac{1}{16}$،

نگاشت خط y=1 دایره $(u+0)^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ و نگاشت خط y=2 دایره $(u+0)^2 + \left(v - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

می‌باشد. چون ناحیه داده شده استراک چهار خط مذکور می‌باشد لذا نگاشت آن اشتراک چهار دایره بدست آمده می‌باشد که بصورت زیر است.



۴-۵- نگاشت خطی کسری

نگاشت $w=\frac{az+b}{cz+d}$ را نگاشت خطی کسری، تبدیل دو خطی یا تبدیل موبیوس می‌نامند. این نگاشت در همه جا غیر از نقطه $z=-\frac{d}{c}$ تحلیلی و با فرض $ad-bc\neq 0$، در همه جا غیر از نقاط $z=-\frac{d}{c}$ همدیس می‌باشد. می‌توان چنین تصور کرد که این نگاشت نقطه $z=-\frac{d}{c}$ را به بینهایت و بینهایت را به نقطه $w=\frac{a}{c}$ تبدیل می‌کند.

قضیه ۴-۲

تبدیل موبیوس دوایر و خط‌های راست صفحه z را بر دوایر و خط‌های راست صفحه w می‌نگارد.

قضیه ۴-۳

سه نقطه مجزا و مفروض z_1، z_2 و z_3 را همواره می‌توان با یک و تنها یک تبدیل خطی کسری w=f(z) بر روی سه نقطه مجزای مشخص w_1، w_2 و w_3 نگاشت. این نگاشت بطور ضمنی با معادله زیر مشخص می‌شود.

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\times\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\times\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \qquad (۴-۷)$$

دقت شود که اگر یکی از مقادیر z_i ها یا w_i ها بینهایت باشد صورت و مخرج شامل بینهایت ری با هم ساده می‌کنیم.

نکته: می‌توان نشان داد که کلی‌ترین تبدیل موبیوس که ناحیه $|z|<1$ را به ناحیه $|w|<1$ تبدیل می‌کند بصورت $w=e^{ia}\,\frac{z-z_0}{z\bar{z}_0-1}$ می‌باشد که a عدد حقیقی و $|z_0|<1$ است.

نکته: می‌توان نشان داد که کلی‌ترین تبدیل موبیوس که ناحیه Im(z)>0 را به ناحیه $|w|<1$ تبدیل می‌کند بصورت

$w=e^{ia}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ می‌باشد که a عدد حقیقی و $\mathrm{Im}(z_0)>0$ است.

مثال(۴-۶) تبدیل خطی کسری که سه نقطه $z_1=-2,\ z_2=0\ ,\ z_3=2$ را به ترتیب بر روی سه نقطه

$w_1=\infty,\ w_2=\dfrac{1}{4}\ ,\ w_3=\dfrac{3}{8}$ می‌نگارد را بدست آورید.

حل: طبق قضیه (۴-۳) $w=\dfrac{z+1}{2z+4}$ خواهد بود.

۴-۶- نگاشت یاکوفسکی

نگاشت $w=z+\dfrac{1}{z}$ را نگاشت یاکوفسکی می‌گویند. این نگاشت در تمام صفحه مختلط به جزء z=0 تحلیلی بوده و در تمام نقاط صفحه مختلط به جزء، z=0,+1,-1، همدیس می‌باشد. که با فرض $z=re^{i\theta}$ و $w=u+iv$ داریم

$$w=z+\frac{1}{z}=re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin(\theta)\Rightarrow\begin{cases}u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)\\ v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin(\theta)\end{cases}\tag{۸-۴}$$

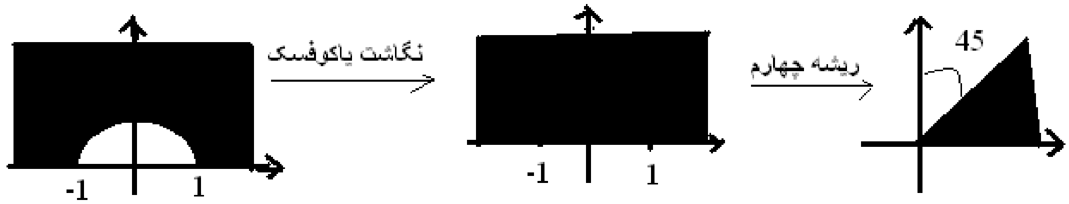
از رابطه بالا به راحتی می‌توان نتیجه زیر را گرفت

$$\frac{u^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1\tag{۹-۴}$$

یعنی نگاشت یاکوفسکی دایره را به بیضی تبدیل می‌کند.

نکته: در حالت خاص $|z|=1$، نتیجه نگاشت یک پاره‌خط بر روی محور حقیقی مابین منهای دو و مثبت دو خواهد شد.

مثال(۴-۷) نگاشت ناحیه $D=\{z \mid , |z|\geq 1, 0\leq Arg(z)\leq \pi\}$ را تحت رابطه $w=\sqrt[4]{z+\frac{1}{z}}$ بیابید.

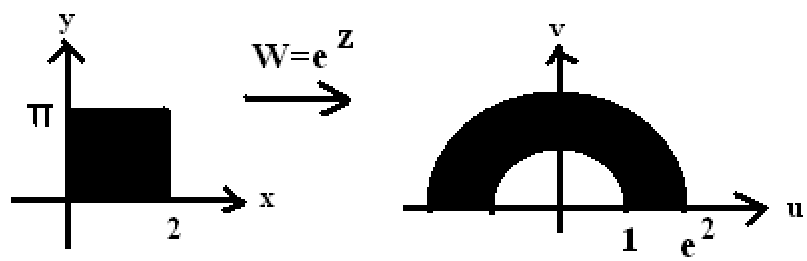


۴-۷- نگاشت نمایی

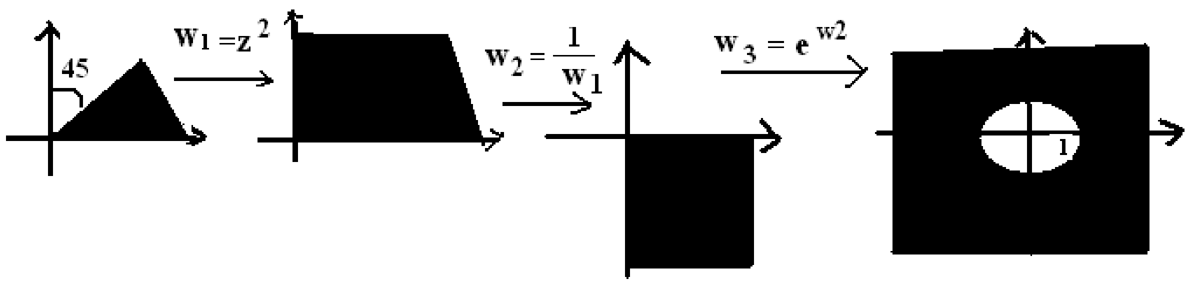
این نگاشت بصورت $w=e^z$ تعریف می‌شود. و در تمامی صفحه مختلط تحلیلی و همدیس می‌باشد. به فرض $z=x+iy$ و $w=\mathrm{R}e^{i\varphi}$ داریم

$$w=e^z=e^x.e^{iy}\Rightarrow\begin{cases}R=e^x\\ \varphi=y\end{cases} \qquad (۴-۱۰)$$

مثال(۴-۸) نگاشت ناحیه $D=\{z \mid , 0\leq x\leq 2 \;\; , 0\leq y\leq \pi\}$ را تحت رابطه $w=e^z$ بیابید.



مثال(۴-۹) تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \mid , 0\leq Arg(z)\leq \frac{\pi}{4}\right\}$ را تحت رابطه $w=e^{\frac{1}{Z^2}}$ بیابید.



۴-۸- نگاشت لگاریتمی

این نگاشت بصورت $w = Ln(z)$ تعریف می‌شود. با توجه به چند مقداری بودن تابع $w = Ln(z)$، در این حالت فقط مقدار اصلی مدنظر می‌باشد. لذا داریم

$$w = Ln(z) = Lnr + i\theta \;\Rightarrow\; \begin{cases} u = Lnr \\ v = \theta \end{cases} \qquad (۱۱-۴)$$

نگاشت فوق در تمامی صفحه مختلط غیر از مبداء و xهای منفی تحلیلی می‌باشد.

۴-۹- نگاشت سینوس

این نگاشت بصورت w=sin(z) تعریف می‌شود و برای آن داریم

$$w = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y = u + iv \qquad (۱۲-۴)$$

نکته: دقت شود که سینوس و کسینوس با آرگومان‌های مختلط دیگر محدودیت بین ۱ و ۱- را ندارد.

نکته: تابع سینوس متناوب بوده لذا در تمامی صفحه یک به یک نیست لذا بایست xها را محدود انتخاب کرد.

مثال(۴-۱۰) حاصل $|\sin z|^2$ رابیابید.

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y = \sin^2 x(1+\sinh^2 y) + \cos^2 x\sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

مثال(۴-۱۱) تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{ z \mid \frac{\pi}{2} \le \operatorname{Re} z \le \pi \ , \ \operatorname{Im} z \ge 0 \right\}$ را تحت رابطه $w = -\cos z$ بیابید.

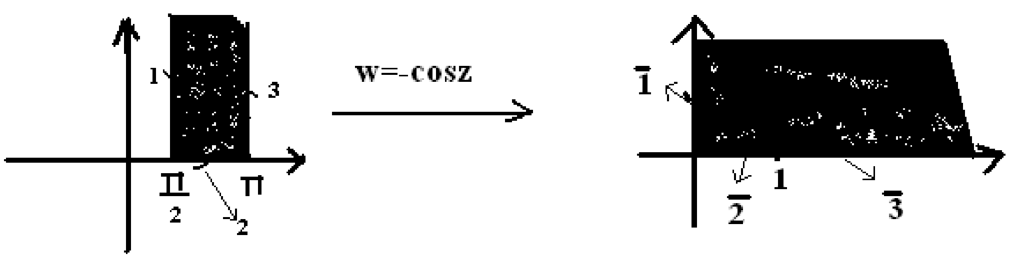
با استفاده از روابط زیر و تقسیم‌بندی ناحیهD به سه مسیر داریم

$$w = -\cos z = -\cos x\cosh y + i\sin x\sinh y \Rightarrow \begin{cases} u = -\cos x\cosh y \\ v = \sin x\sinh y \end{cases}$$

$$path1: \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ y: \infty \to 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ \bar{1}: \begin{cases} u = 0 \\ v = \sinh y \ : \ \infty \to 0 \end{cases}$$

$$path2: \begin{cases} x: \frac{\pi}{2} \to \pi \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ \bar{2}: \begin{cases} u = -\cos x \ : \ 0 \to 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$path3: \begin{cases} x = \pi \\ y: 0 \to \infty \end{cases} \quad \Rightarrow \ \bar{3}: \begin{cases} u = \cosh y : 1 \to \infty \\ v = 0 \end{cases}$$



۴-۱۰- تبدیلات متوالی

در حالت کلی اکثر تبدیلات را می‌توان بر حسب تبدیلات دیگر بدست آورد برای مثال

$$w = \cos(z) = \sin(z + \frac{\pi}{2}) \ \Rightarrow \begin{cases} w_1 = z + \frac{\pi}{2} \\ w_2 = \sin w_1 \end{cases} \tag{۴-۱۲}$$

$$w = \frac{3z-1}{2z+1} = 1.5 - \frac{2.5}{2z+1} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2z+1 \\ w_2 = \dfrac{1}{w_1} \\ w_3 = -2.5w_2 + 1.5 \end{cases} \tag{۱۳-۴}$$

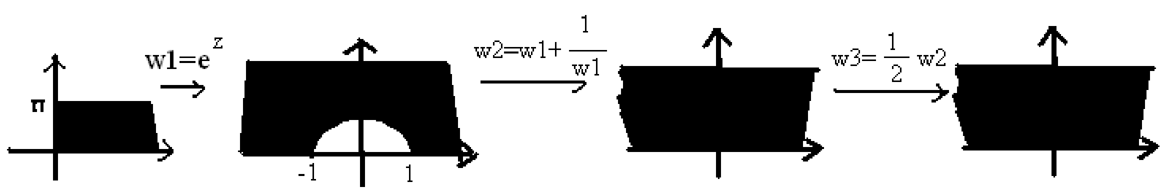
$$w = \tan(z) = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \overset{e^{i2z}=t}{\Rightarrow} w = -i\frac{t-1}{t+1} \tag{۱۴-۴}$$

یعنی نگاشت تابع تانژانت به یک نگاشت نمایی و بدنبال آن یک نگاشت موبیوس تبدیل می‌شود.

به همین صورت می‌توان برای سایر توابع مثلثاتی و هیپربولیک بر حسب توابع معرفی شده تبدیلات مناسب را بدست آورد.

مثال(۴-۱۲) تبدیل یافته ناحیه $D = \{z \mid 0 \le \operatorname{Re} z, 0 \le \operatorname{Im} z \le \pi\}$ را تحت نگاشت $w = \cosh z$ بیابید.

از آن‌جایی که $\cosh z = \dfrac{e^z + \dfrac{1}{e^z}}{2}$ لذا این نگاشت را بصورت ترکیبی از نگاشت‌های $w_1 = e^z$، $w_2 = w_1 + \dfrac{1}{w_1}$ و $w_3 = \dfrac{1}{2}w_2$ در نظر می گیریم.



تمرین‌های بخش چهارم

۴-۱ تبدیل یافته ناحیه $D=\{z \mid 1\le \operatorname{Re} z\le 4\}$ را با نگاشت w=-i3z+2i-3 بیابید.

۴-۲ نگاشت ناحیه $D=\left\{z \mid 1<|z|<2\ ,\ 0\le Argz<\frac{\pi}{3}\right\}$ را تحت رابطه $w=z^2$ بدست آورید.

۴-۳ نگاشت ناحیه $D=\{z \mid x^2-y^2<1,\ 2xy<0\}$ را تحت رابطه $w=z^2$ بدست آورید.

۴-۴ تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \mid 1\le |z|\le 2,\ 0\le Argz\le\frac{\pi}{4}\right\}$ را با نگاشت $w=-\frac{i}{2}z^4+1$ بیابید.

۴-۵ تبدیل یافته ناحیه محصور بین دو دایره $|z-1|=1$ و $|z-i|=1$ توسط $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید.

۴-۶ تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \mid |z|<2,\ \frac{\pi}{4}\le Argz\le\frac{\pi}{2}\right\}$ توسط $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید.

۴-۷ تبدیل یافته ناحیه محصور بین $|z-1|\le 1$ و $x+y\ge 1$ توسط $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید.

۴-۸ دایره $|z|=a$ از صفحه z تحت نگاشت $w=z+\frac{a^2}{z}$ در صفحه w به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌شود.

۴-۹ تبدیل یافته ناحیه $D=\{z \mid 1\le \operatorname{Re} z\le 2,\ 20\le \operatorname{Im} z\le 30\}$ را تحت نگاشت $w=e^z$ بیابید.

۴-۱۰ تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \mid \operatorname{Re} z\le 0,\ 0\le \operatorname{Im} z\le\frac{\pi}{2}\right\}$ را تحت نگاشت $w=e^z$ بیابید.

۴-۱۱ نگاشتی بیابید که سه نقطه $z_3=1, z_2=-1, z_1=\infty$ به را سه نقطه $w_3=i, w_2=i, z_1=1$ بنگارد.

۴-۱۲ تبدیل یافته ناحیه $D=\{z \mid 0\le \operatorname{Re} z,\ -1\le \operatorname{Im} z\le 1\}$ را تحت نگاشت $w=-2\sin\left(\frac{i\pi}{2}z\right)+i$ بیابید.

۴-۱۳ تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \mid \frac{\pi}{2}\le \operatorname{Re} z\le \pi,\ 0\le \operatorname{Im} z\right\}$ را تحت نگاشت $w=\frac{1}{\sqrt{\cos z}}$ بیابید.

۴-۱۴ تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \mid \frac{-1}{2}\le \operatorname{Re} z\le\frac{1}{2},\ 0\le \operatorname{Im} z\right\}$ را تحت نگاشت $w=(1+i)\sin\pi z$ بیابید.

۵- سری‌های مختلط

۵-۱- دنباله‌ها

اگر به هر عدد صحیح مثبت n عددی مانند z_n نسبت داده شود، آنگاه اعداد $\{z_1, z_2, ... z_n, ...\}$ یک دنباله را تشکیل می‌دهند که بصورت $\{z_n\}$ نمایش داده می‌شود. دنباله $\{z_n\}$ را همگرا گویند هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A \tag{۵-۱}$$

A را حد دنباله فوق نامیم که در حالت کلی عددی مختلط می‌باشد. دنباله‌ای که همگرا نیست را واگرا می‌نامند.

قضیه ۵-۱

دنباله $\{z_n\}$ با $z_n = x_n + iy_n$ به $A = X + iY$ همگرا است اگر و فقط اگر دنباله‌های قسمت‌های حقیقی $\{x_n\}$ به X و $\{y_n\}$ به Y همگرا باشد.

تعریف ۵-۱

دنباله $\{z_n\}$ را کراندار گوییم هرگاه عددی مثبت مانند M وجود داشته باشد طوری که

$$|z_n| < M \ , \ \forall n \in N \tag{۵-۲}$$

اگر دنباله‌ای کران‌دار نباشد آن‌را بیکران می‌نامیم.

قضیه ۵-۲

هر دنباله همگرا کراندار است لذا هر دنباله بیکران واگراست.

۵-۲- سری‌ها

اگر $\{z_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد آنگاه مجموع زیر را سری نامتناهی یا سری می‌نامیم

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i = z_1 + z_2 + \dots \tag{۳-۵}$$

قضیه ۵-۳

اگر $z_n = x_n + iy_n$ باشد. آنگاه سری (۵-۳) را همگرا گویند اگر و فقط اگر سری قسمت‌های حقیقی و موهومی آن ($\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$) همگرا باشد.

تعریف ۵-۲

سری (۵-۳) را همگرا مطلق می‌نامند هرگاه سری زیر همگرا باشد.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i| = |z_1| + |z_2| + \dots \tag{۴-۵}$$

توجه: اگر سری (۵-۳) همگرا ولی سری (۵-۴) واگرا باشد آنگاه سری (۵-۳) را همگرای مشروط می‌نامیم.

قضیه ۵-۴

هرگاه سری (۵-۳) همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ می‌شود.

قضیه ۵-۵

هرگاه سری (۵-۳) همگرای مطلق باشد آنگاه همگرا نیز می‌باشد.

۵-۲-۱- آزمون‌های همگرایی

آزمون‌های همگرایی در مجموعه اعداد مختلط دقیقاً شبیه آزمون‌های همگرایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد.

قضیه ۵-۶ (آزمون مقایسه)

اگر به ازای سری مفروض $z_1 + z_2 + ...$ بتوان سری همگرای $b_1 + b_2 + ...$ که جملات آن حقیقی نامنفی هستند طوری یافت که به ازای هر n متعلق به اعداد طبیعی داشته باشیم

$$|z_n| < b_n \qquad (۵-۵)$$

آنگاه سری مفروض مطلقاً همگرا خواهد بود.

قضیه ۵-۷ (آزمون نسبت)

اگر برای سری مختلط $z_1 + z_2 + ...$ با $z_n \neq 0$ (برای تمامی nهای طبیعی) داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L \qquad (۶-۵)$$

آنگاه

الف) سری مطلقاً همگرا است اگر L<1 .

ب) سری واگراست اگر L>1 .

ج) به ازای L=1 این آزمون همگرایی و یا واگرایی را نتیجه نمی‌دهد.

قضیه ۵-۸ (آزمون ریشه)

اگر برای سری مختلط $z_1 + z_2 + ...$ با $z_n \neq 0$ (برای تمامی nهای طبیعی) داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = L \qquad (۷-۵)$$

آنگاه

الف) سری مطلقاً همگرا است اگر $L<1$.

ب) سری واگراست اگر $L>1$.

ج) به ازای $L=1$ این آزمون همگرایی و یا واگرایی را نتیجه نمی‌دهد.

مثال (۵-۱) در مورد همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n$ نظر دهید.

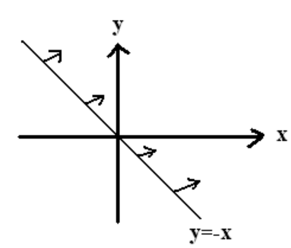
حل:با استفاده از آزمون ریشه داریم ($\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|4-i|}{\sqrt[n]{4^n+3}}=\frac{\sqrt{17}}{4}>1$) لذا سری فوق واگرا است.

مثال(۵-۲) در مورد همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(100+200i)^n}{n!}$ نظر دهید.

حل: سری فوق همگرا است زیرا داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{|100+200i|^{n+1}n!}{|100+200i|^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|100+200i|}{n+1}\to 0$

مثال(۵-۳) ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^n$ رابیابید.

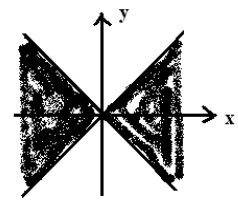
حل: با اعمال آزمون ریشه داریم



$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z-i}{z+1}\right|^n}=\left|\frac{z-i}{z+1}\right|<1\Rightarrow|z-i|<|z+1|\Rightarrow$$
$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}<\sqrt{(x+1)^2+y^2}\Rightarrow$$
$$-y<x \;\; or \;\; y>-x$$

مثال(۵-۴) ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz^2}$ رابیابید

حل: با اعمال آزمون ریشه داریم



$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|e^{-nz^2}\right|}=\left|e^{-z^2}\right|<1\Rightarrow\left|e^{y^2-x^2+i2xy}\right|=\left|e^{y^2-x^2}\right|.\left|e^{i2xy}\right|=\left|e^{y^2-x^2}\right|=$$
$$e^{y^2-x^2}<1=e^0$$
$$y^2-x^2<0\ \Rightarrow\ y^2<x^2\ \Rightarrow|y|<|x|$$

۵-۲-۲- سری‌های توانی

اگر جمله‌های یک سری متغیر باشد(تابعی از متغیر z) آنگاه سری را سری تابع می‌نامند. سری توانی مهمترین سری تابع است که برحسب توان‌های $z-z_0$ نمایش داده می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots \qquad (۸-۵)$$

اگر $z_0=0$ باشد حالت خاص سری توانی (سری مک لورن) بدست می‌آید

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots \qquad (۹-۵)$$

قضیه ۵-۹ (همگرایی سری توانی)

اگر سری توانی (۵-۸) در نقطه $z=z_1\neq z_0$ همگرا باشد آنگاه این سری به ازای هر z که فاصله‌اش از z_0، کمتر از z_1 باشد ($|z-z_0|<|z_1-z_0|$) مطلقاً همگرا می‌باشد. و اگر سری توانی (۵-۸) در نقطه $z=z_2\neq z_0$

واگرا باشد آنگاه این سری به ازای هر z که فاصله‌اش از z_0، بیشتر از z_2 باشد($|z-z_0| \geq |z_2-z_0|$) واگرا می-باشد.

قضیه ۵-۱۰ (شعاع همگرایی سری توانی)

فرض کنید دنباله $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ یا $\sqrt[n]{a_n}$ که در آن n=1,2,... همگرا بوده و حد آن L باشد. در این‌صورت

الف) اگر L=0 باشد آنگاه سری توانی (۵-۸) به ازای هر z همگرا بوده و شعاع همگرایی آن بینهایت است.

ب) اگر $L \neq 0$ $(L>0)$ باشد آنگاه طبق رابطه کوشی-آدامار شعاع همگرایی سری توانی (۵-۸) $R=\frac{1}{L}$ بوده و سری برای تمامی مقادیرz که در $|z-z_0|<R$ صدق می‌کنند همگرا و برای تمامی مقادیرz که در $|z-z_0|>R$ صدق می‌کنند واگرا می‌باشد. در این‌صورت R را شعاع همگرایی، دایره $|z-z_0|=R$ را دایره همگرایی و قرص $|z-z_0|<R$ را قرص همگرایی می‌نامند.

قضیه ۵-۱۱

سری توانی زیر را که از مشتق جمله به جمله از سری توانی (۵-۸) حاصل شده است، سری مشتق سری توانی می‌نامند که شعاع همگرایی آن با شعاع همگرایی سری توانی اصلی برابر است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(z-z_0) + \ldots \quad (۱۰-۵)$$

قضیه ۵-۱۲

سری توانی زیر را که از انتگرال جمله به جمله از سری توانی (۵-۸) حاصل شده است دارای شعاع همگرایی برابر با شعاع همگرایی سری توانی اصلی می‌باشد.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} = a_0(z-z_0) + \frac{a_1}{2}(z-z_0)^2 + \ldots \quad (۱۱-۵)$$

قضیه ۵–۱۳

هر سری توانی با شعاع همگرایی R>0 در داخل دایره همگرایی خود، تابعی تحلیلی را نمایش می‌دهد. مشتقات این تابع با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری اصلی بدست می‌آید لذا دارای شعاع همگرایی برابر با سری اصلی می‌باشد.

مثال(۵–۵) مرکزهمگرایی و دایره همگرایی سری‌های توانی زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3z-2i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}3^n\left(z-\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow\ L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=3\ \Rightarrow\ R=\frac{1}{3}\quad,\quad \left|z-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3}(z+\pi i)^n \Rightarrow\ L=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)!(n!)^3}{((n+1)!)^3(3n)!}=27\quad\Rightarrow\ R=\frac{1}{27}\quad,\quad |z+\pi i|<\frac{1}{27}$$

قضیه ۵–۱۴ (سری تیلور)

فرض کنید f(z) در ناحیه D تحلیلی بوده و $z=z_0$ نقطه‌ای در D باشد در این صورت یک و تنها یک سری توانی به مرکز z_0 وجود دارد که f(z) را نشان می‌دهد. این سری را سری تیلور نامیده و بصورت زیر نمایش می‌دهند.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\quad,\ a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\quad,n=0,1,2,... \tag{۱۲–۵}$$

در سری تیلور اگر $z_0=0$ قرار دهیم بسط مک‌لورن حاصل می‌گردد. در زیر بسط مک‌لورن بعضی از توابع مقدماتی مهم آمده است. این بسط‌ها را براحتی با (۵–۱۲) بدست می‌آید. و بهتر است به خاطر سپرده شوند.

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\qquad,\qquad |z|<1 \tag{۱۳–۵}$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\qquad,\quad |z|<\infty \tag{۱۴–۵}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad,\quad |z|<\infty \tag{۱۵-۵}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\qquad,\quad |z|<\infty \tag{۱۶-۵}$$

$$\sinh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad,\quad |z|<\infty \tag{۱۷-۵}$$

$$\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\qquad,\quad |z|<\infty \tag{۱۸-۵}$$

مثال(۵-۶) سری مک‌لوران توابع زیر را بدست آورید.

$$f(z)=\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\qquad,\quad |z|<1$$

$$f(z)=Ln(1+z)=\int\frac{dz}{1+z}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\qquad,\quad |z|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\qquad,\quad |z|<1$$

$$f(z)=\tan^{-1}(z)=\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\qquad,\quad |z|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\qquad,\quad |z|<1$$

مثال(۵-۷) بسط تیلور تابع $f(z)=\dfrac{1}{z}$ را حول z=1بنویسید.

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\qquad,\quad |z-1|<1$$

مثال(۵–۸) بسط تیلور تابع $f(z)=\dfrac{2}{3-4z}$ را حول z=2 بنویسید.

$$f(z)=\frac{2}{3-4z}=2\times\frac{1}{3-4(z-2)-8}=2\times\frac{1}{-5-4(z-2)}=-\frac{2}{5}\times\frac{1}{1+\left(\frac{4}{5}(z-2)\right)}=$$

$$-\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{5}\right)^n(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2\times 4^n}{5^{n+1}}\right)(z-2)^n \quad , \quad |z-2|<\frac{5}{4}$$

قضیه ۵–۱۵

سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ با R>0 در هر قرص دایره‌ای $|z-z_0|<r$ با r<R همگرای یکنواخت است.

تعریف ۵–۲

اگر تابع f(z) در D تحلیلی باشد نقطه z_0 متعلق به D را صفر تابع تابع f(z) گویند اگر $f(z_0)=0$ باشد.

تعریف ۵–۲

فرض کنید z_0 یک صفر تابع f(z) باشد، کوچکترین عدد صحیح n را که $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ باشد را مرتبه صفر f(z) می‌نامیم.

مثال(۵–۹) مرتبه صفر $f(z)=z^2$ در z=0 را بیابید.

دارای مرتبه دو می‌باشد چون $f''(0)=2\neq 0$ است.

تعریف ۵–۳

نقطه $z=z_0$ را نقطه تکین گویند هرگاه تابع f(z) در آن نقطه تحلیلی نباشد. اما در همسایگی آن نقطه تابع تحلیلی است نقاط تکین را می‌توان به دو دسته تکین تنها و تکین غیرتنها (انباشته) تقسیم‌بندی نمود. نقطه $z=z_0$ را نقطه تکین تنها گویند هرگاه دارای یک همسایگی بدون تکین‌های دیگر از f(z) باشد. در برخی مواقع ملاحظه

می‌گردد که تابع دارای بینهایت نقطه تکین است که همگی در حال نزدیک شدن یا انباشته شدن بر روی یکی از نقاط تکین می‌باشند، چنین نقطه تکینی را اصطلاحاً تکین غیرتنها(انباشته) می گویند.

تعریف ۵-۴

نقطه تکین تنها z_0 را یک قطب مرتبه m می‌نامند هرگاه mای یافت شود که حاصل حد $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ را موجود و مخالف صفر کند و در غیر این صورت نقطه تکین تنها z_0 را تکین اساسی تابع f(z) می‌نامند.

مثال(۵-۱۰) نقاط تکین و نوع آن‌ها را تعیین کنید.

الف) تابع $f(z)=\dfrac{1-e^{z^3}}{z^7}$ در z=0 دارای تکین تنها از نوع قطب مرتبه۴ می‌باشد چون $\lim_{z\to 0} z^4 f(z)=\lim_{z\to 0}\dfrac{1-e^{z^3}}{z^3}\overset{H}{=}\lim_{z\to 0}\dfrac{-3z^2e^{z^3}}{3z^2}=-1\neq 0$ است.

ب) تابع $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ دارای نقاط تکین $z=\dfrac{1}{k\pi}=\pm\dfrac{1}{\pi},\pm\dfrac{1}{2\pi},\pm\dfrac{1}{3\pi},\ldots$ و z=0 است چون در تمامی این نقاط تابع تحلیلی نمی‌باشد. نقطه z=0 تکین غیر تنها است چون سایر نقاط تکین تنها $z=\dfrac{1}{k\pi}=\pm\dfrac{1}{\pi},\pm\dfrac{1}{2\pi},\pm\dfrac{1}{3\pi},\ldots$ به سمت انباشته شدن بر z=0 حرکت می کنند.

ج) تابع $f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$ در z=0 دارای تکین تنها از نوع تکین اساسی است چون هیچ mای یافت نمی‌شود که حاصل $\lim_{z\to z_0}(z-0)^m e^{\frac{1}{z}}$ را موجود و غیرصفر کند.

د) تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ در z=0 دارای نقطه تکین برداشتنی است چون می‌توان تابع f(z) را در z=0 طوری تعریف کرد که تابع در آن نقطه تحلیلی گردد برای این منظور بایست f(z) را بصورت $f(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z} & , z\neq 0\\ 1 & , z=0\end{cases}$ تعریف کرد.

اگرتابع f(z) در z_0 تحلیلی نباشد در آن نقطه بسط تیلور نخواهد داشت. اما چنانچه نقطه مذکور تکین تنها باشد می‌توان برای تابع حول نقطه مذکور بسطی به نام بسط لوران را نوشت. که دارای ویژگی‌های زیر است.

- بالاترین توان منفی $(z-z_0)$ اگر موجود باشد، مرتبه قطب z_0 را مشخص می‌کند و اگر بالاترین توان منفی موجود نباشد به این معنی است که z_0 تکین اساسی تابع f(z) است.
- ضریب جمله $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران تابع f(z) اگر موجود باشد(b_1) مانده تابع f(z) در $z=z_0$ نامیده می‌شود

قضیه ۵-۱۶ (قضیه لوران)

اگر تابع f(z) روی دو دایره متحدالمرکز C_1 و C_2 به مرکز z_0 و در طوق بین آن‌ها تحلیلی باشد آنگاه تابع f(z) را می‌توان با سری لوران

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+\frac{b_1}{z-z_0}+\ldots \qquad (۱۹-۵)$$

نمایش داد که ضرایب سری را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$
$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C (z-z_0)^{n-1} f(z)dz \qquad (۲۰-۵)$$

که C مسیر بسته دلخواهی است که در طوق مابین دو دایره C_1 و C_2 قرار دارد و دایره داخلی را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دور می‌زند.

برای محاسبه سری لوران معمولاً از (۵-۲۰) استفاده نمی‌شود برای آشنایی با این امر به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال(۵-۱۱) سری لوران تابع $f(z)=(z+3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$ را حول z =-2 بدست آورده و مانده را مشخص کنید

حل: با استفاده از بسط سینوس داریم

$$f(z)=(z+3)\sin(\frac{1}{z+2})=(z+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1}=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1}=1+\frac{1}{z+2}+\frac{\frac{-1}{3!}}{(z+2)^2}+\ldots$$

لذا مقدار مانده تابع حول z=-2 مقدار $b_1=1$ می‌باشد.

مثال(۵-۱۲) سری لوران تابع $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ را به مرکز صفر بیابید و مانده را مشخص کنید.

حل: با استفاده از بسط تابع نمایی داریم

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{\frac{1}{3!}}{z}+\ldots$$

مقدار مانده $\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$ می‌باشد.

مثال(۵-۱۳)) سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ را به مرکز صفر بیابید و مانده را مشخص کنید.

حل: با استفاده از بسط مکلورن تابع نمایی و تابع $\dfrac{1}{1-z}$ داریم.

$$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=\frac{1}{1-z}\times e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=(1+z+z^2+z^3+\ldots)(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots)$$
$$=(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots)+\frac{(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots)}{z}+\ldots$$

مقدار مانده $(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots)$ می‌باشد.

مثال(۵-۱۴) بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ را حول z=2 بدست آورید.

با استفاده از تجزیه به کسرهای جزئی داریم

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=\frac{0.5}{z}+\frac{-1}{z-1}+\frac{0.5}{z-2}=\frac{0.5}{2+(z-2)}+\frac{-1}{1+(z-2)}+\frac{0.5}{z-2}$$
$$0.25\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^2-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n+0.5(z-2)^{-1}\qquad\begin{cases}\left|\dfrac{z-2}{2}\right|<1\\ |z-2|<1\end{cases}\Rightarrow 0<|z-2|<1$$

توجه: در صورتی که سری لوران یک تابع خواسته شده باشد. بهتر است شرط همگرایی سری نیز نوشته شود در مثال قبل فقط در ناحیه همگرایی بدست آمده سری همگرا می‌شود. اگر در صورت سؤال شرط همگرایی قید شده باشد بایست مسأله را به گونه‌ای بازنویسی نمود که قید خواسته شده حاصل گردد.

مثال(۵-۱۵) سری لوران مثال قبل را در ناحیه $1<|z-2|<2$ حول z=2 بدست آورید.

$$1<|z-2|<2 \Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{|z-2|}<1 \Rightarrow f(z)=\frac{0.5}{z}+\frac{-1}{z-1}+\frac{0.5}{z-2}=\frac{0.25}{1+(\frac{z-2}{2})}+\frac{-1}{(z-2)+1}+\frac{0.5}{z-2}$$

$$f(z)=\frac{0.25}{1+\left(\frac{z-2}{2}\right)}+\frac{\frac{-1}{(z-2)}}{1+\left(\frac{1}{z-2}\right)}+\frac{0.5}{z-2}=0.25\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n+\frac{-1}{(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n+\frac{0.5}{z-2}$$

$$f(z)=0.25\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^{n+1}+\frac{0.5}{z-2} \qquad \Rightarrow\begin{cases}\left|\frac{z-2}{2}\right|<1\\ \left|\frac{1}{z-2}\right|<1\end{cases} \Rightarrow 1<|z-2|<2$$

۵-۳- روش‌های محاسبه مانده

اگر چه یک راه حل همیشگی برای یافتن مانده تابع در نقطه تکین z_0 استفاده از سری لوران می‌باشد اما چنانچه z_0 یک نقطه تکین تنها از نوع قطب باشد می‌توان با روش‌های زیر و به‌سادگی مانده را تعیین نمود.

الف) اگر z_0 یک قطب مرتبه اول تابع f(z) باشد آنگاه مانده f(z) در z_0 را می‌توان بصورت زیر حساب کرد

$$\operatorname{Re}sidual(f(z))|_{z_0}=\operatorname{Re}s(f(z_0))=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \qquad (۵-۲۱)$$

ب) اگر z_0 یک قطب مرتبه اول تابع $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ باشد و $P(z_0)\neq 0$ باشد داریم

$$\operatorname{Re}s(f(z_0))=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \qquad (۵-۲۲)$$

ج) اگر z_0 یک قطب مرتبه m تابع f(z) باشد داریم

$$\operatorname{Re}s(f(z_0))=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\} \qquad (۵-۲۳)$$

مثال(۵–۱۶) مانده تابع $f(z)=\dfrac{2z+3}{(z-1)(z^2+4)}$ را در نقطه تکین z=2i بدست آورید.

حل: چون نقطه z=2i یک قطب ساده است لذا برای محاسبه مانده می‌توان از الف یا ب استفاده کرد.

الف)
$$\operatorname{Re}s(f(2i))=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{2z+3}{(z-1)(z+2i)(z-2i)}=\lim_{z\to 2i}\frac{2z+3}{(z-1)(z+2i)}=\frac{4i+3}{(2i-1)(4i)}$$

ب)
$$\operatorname{Re}s(f(2i))=\lim_{z\to 2i}\frac{2z+3}{\left((z-1)(z^2+4)\right)'}=\lim_{z\to 2i}\frac{2z+3}{(z^2+4)+2z(z-1)}=\frac{4i+3}{(2i-1)(4i)}$$

مثال(۵–۱۷) مانده تابع $f(z)=\dfrac{\cos z}{\sin z}$ را در z=0 بدست آورید.

چون $\cos(0)=1\neq 0$ است لذا $\operatorname{Re}s(f(0))=\lim_{z\to 0}\dfrac{\cos(z)}{(\sin(z))'}=1$ است.

مثال(۵–۱۸) مانده تابع $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{(2z+1)^4}$ را در $z=\dfrac{-1}{2}$ بدست آورید.

نقطه تکین $z=\dfrac{-1}{2}$ قطب مرتبه ۴ است لذا

$$\operatorname{Re}s(f(\frac{-1}{2}))=\frac{1}{3!}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{d^3}{dz^3}\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)^4\frac{\sin 3z}{(2z+1)^4}\right]=\frac{1}{3!\times 2^4}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{d^3}{dz^3}(\sin 3z)=\frac{-9}{32}\cos(-\frac{3}{2})$$

نکته: اگر z_0 نقطه تکین تابع $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ باشد بطوری‌که $Q(z_0)=Q'(z_0)=0$ و $Q''(z_0)\neq 0$ و $P(z_0)\neq 0$ باشد آنگاه برای محاسبه مانده تابع f(z) در z_0 می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود.

$$\operatorname{Re}s\big(f(z_0)\big)=\frac{2P'(z_0)}{Q''(z_0)}-\frac{2}{3}\frac{P(z_0)Q'''(z_0)}{\left(Q''(z_0)\right)^2} \tag{۲۴-۵}$$

مثال(۵–۱۹) مانده تابع $f(z)=\dfrac{1}{z\left(e^{z}-1\right)}$ را در z=0 بدست آورید.

$$Q(z)=ze^{z}-z\Rightarrow Q'(z)=e^{z}+ze^{z}-1\Rightarrow Q''(z)=2e^{z}+ze^{z}\Rightarrow Q'''(z)=3e^{z}+ze^{z}$$
$$P(z)=1\ \Rightarrow\ P'(z)=0\ ,\ Q'(0)=1\ ,\ Q''(0)=2\ ,\ Q'''(0)=3$$
$$\operatorname{Re}s(f(0))=\frac{2\times 0}{2}-\frac{2}{3}\frac{1\times 3}{2^{2}}=-\frac{1}{2}$$

مثال(۵–۲۰) مانده تابع $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$ را در نقاط تکین آن تعیین کنید.

$$z=1\Rightarrow \operatorname{Re}s(f(1))=\sin 1$$
$$z=0\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z-1}\times\sin\frac{1}{z}=(-1-z-z^{2}+\ldots)(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^{3}}+\frac{1}{5!z^{5}}\ldots)\Rightarrow \operatorname{Re}s(f(0))=(-1+\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}+\ldots)$$
$$\operatorname{Re}s(f(0))=-\sin 1$$

تمرین‌های بخش پنجم

۵–۱ مرکز و شعاع همگرایی هر یک از سری‌های توانی زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^{n}}{5^{n}}$ ب) $\sum_{n=0}^{\infty}(5z-6)^{n}$ ج) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^{2}}(z-3i)^{n}$

۵–۲ سری مکلورن توابع زیر و شعاع همگرایی آن‌ها را تعیین کنید.

الف) $\frac{1}{1-z^{5}}$ ب) $\sin(2z^{2})$ ج) $\frac{2z^{2}+15z+34}{(z+4)^{2}(z-2)}$

۵–۳ بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{3z-2}{z-\frac{1}{2}}$ را در نواحی زیر بدست آورید

الف) $|z|<\frac{1}{2}$ ب) $|z|>\frac{1}{2}$ ج) $\left|z-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4}$

۴-۵ بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ را در ناحیه $|z-1|>2$ بدست آورید.

۵-۵ سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-\pi}$ را حول $z=\pi$ بنویسید. $\left(\sin(z)=\sin\left((z-\pi)+\pi\right)=-\sin(z-\pi)\right)$

۶-۵ نقاط تکین و نوع آن‌ها را در توابع زیر مشخص کنید.

$A)\ ze^{\frac{1}{z}}$ $B)\ \dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ $C)\ z\cos(\dfrac{1}{z})$ $D)\ \dfrac{\sin z}{(z-3)^4}$ $E)\ \dfrac{\sin z}{z}$ $F)\ \dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$

۷-۵ مقدار مانده هر یک از توابع زیر را در نقاط تکین آن‌ها بدست آورید.

الف) $f(z)=(z-1)^5\cos(\dfrac{1}{z-1})$

ب) $f(z)=(z-3)\sin(\dfrac{1}{z+1})$

ج) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+1}$

د) $f(z)=\dfrac{z^2}{(3z-2)^3}$

ه) $f(z)=\dfrac{2z^2+3z}{(z-1)(z^2+9)}$

و) $f(z)=ze^{-\frac{1}{z-1}}$

ز) $f(z)=\cot z$

ک) $f(z)=\dfrac{\cosh z}{z^4-1}$

ل) $f(z)=\sec z$

م) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$

ن) $f(z)=\dfrac{2}{(z^2-1)^2}$

ح) $f(z)=\dfrac{z^4}{z^2-iz+2}$

۶- انتگرال مختلط

یکی از مباحث جالب و قابل توجه در مطالعه فضای مختلط، انتگرال‌های مختلط می‌باشد. انتگرال‌های مختلط با توجه به وجود قضایای مربوط به آن به سادگی قابل حل بوده و کاربرد فراوانی دارند. علاوه بر این از انتگرال‌های مختلط می‌توان برای محاسبه بعضی از انتگرال‌های حقیقی و مثلثاتی استفاده نمود. انواع انتگرال‌های مختلطی که در این بخش معرفی می‌گردد به شرح زیر می‌باشد.

الف) انتگرال‌های مختلط به فرم $\int_C f(z)dz$ (C یک کانتور باز است) که در دو حالت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند

- f(z) تحلیلی است که در این صورت انتگرال به مسیر بستگی ندارد.
- f(z) تحلیلی نیست که در این صورت انتگرال را به زیر مسیرهایی برحسب x، y، r، θ یا t تقسیم نموده و همانند انتگرالهای حقیقی با آن برخورد می‌کنیم.

ب) انتگرال‌های مختلط به فرم $\oint_C f(z)$ که به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند.

- f(z) در داخل و روی کانتور C تحلیلی می‌باشد که در این‌صورت طبق قضیه کوشی-گورسا که متعاقباً بیان می‌گردد حاصل انتگرال صفر می‌شود.
- تابع f(z) در تعدادی نقاط محدود در C تحلیلی نمی‌باشد که با قضیه مانده حاصل انتگرال محاسبه می‌شود.

ج) انتگرال‌های حقیقی یا مثلثاتی خاصی که می‌توان حاصل آن‌ها را با انتگرال‌های مختلط جایگزین محاسبه نمود.

۶-۱- انتگرال روی خط در صفحه مختلط

در انتگرال روی خط مختلط، در طول یک منحنی مانند C در صفحه مختلط انتگرال‌گیری صورت می‌گیرد.

منحنی C را که بر آن انتگرال‌گیری انجام می‌گیرد مسیر انتگرال‌گیری می‌نامند.

هر مسیر انتگرال‌گیری را می‌توان بصورت

$$z(t) = x(t) + iy(t) \tag{۶-۱}$$

نمایش داد که در آن t یک پارامتر حقیقی است.

تعریف ۶-۱

منحنی C را هموار گویند هرگاه در هر نقطه دارای مشتقی پیوسته و غیرصفر باشد.

تعریف ۶-۲

منحنی C را تکه‌ای هموار گویند هرگاه از تعداد متناهی منحنی هموار که از انتها به هم وصل شده باشند، تشکیل شده باشد.

تعریف ۶-۳

مسیر بسته ساده مسیری است که خود را قطع نکند و بر خودش مماس نیز نباشد.

تعریف ۶-۴

ناحیه D را همبند ساده گویند اگر هر مسیر بسته ساده در D فقط شامل نقاط D باشد. بطور کلی ناحیه داخل یک منحنی بسته ساده مانند دایره،مربع یا ... همبند ساده است.

تعریف ۶-۵

ناحیه‌ای که همبند ساده نباشد را همبند چندگانه می‌گویند

قضیه ۶-۱ (انتگرال‌گیری با استفاده از مسیر)

هرگاه C یک مسیر تکه‌ای هموار باشد که با z=z(t)، $a \le t \le b$ ، نمایش داده شده باشد و f(z) یک تابع پیوسته بر C باشد آنگاه داریم.

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\left(z(t)\right)\dot{z}(t)dt \qquad (۶-۲)$$

سه خاصیت اساسی انتگرال روی خط

- انتگرال‌گیری یک اپراتور خطی است یعنی $\int_C [af_1(z) + bf_2(z)]dz = a\int_C f_1 z)dz + b\int_C f_2 z)dz$
- اگر C را به دو زیرمسیر C_1 و C_2 تبدیل کنیم داریم $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$
- اگر جهت انتگرال‌گیری را عوض کنیم حاصل انتگرال در یک منها ضرب می‌شود.
- اگر L طول منحنی مسیر C و M عدد حقیقی باشد که در هر نقطه از C ، $|f(z)| \le M$ باشد آنگاه $\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$ می‌باشد.

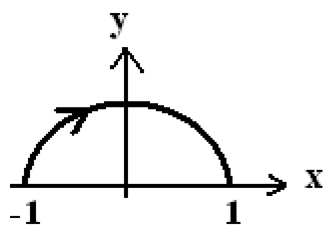
مثال(۶-۱) حاصل انتگرال $\int_C \left(z^2 + \bar{z}\right)dz$ را روی کانتور باز C که بصورت $y = x^2 \ , \ 0 \le x \le 2$ تعریف شده است را محاسبه کنید.

حل:

$$\int_C \left(z^2 + z\right)dz = \int_C \left((x+iy)^2 + (x-iy)\right)d(x+iy) \overset{y=x^2}{=}$$
$$\int_0^2 \left((x+ix^2)^2 + (x-ix^2)\right)d(x+ix^2) = \int_0^2 f(x)dx + i\int_0^2 g(x)dx$$

که به راحتی همانند انتگرال‌های حقیقی قابل حل می‌باشد.

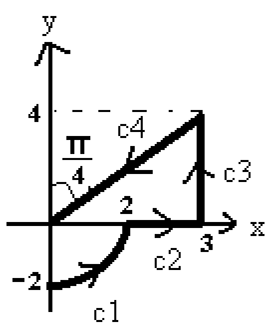
مثال(۶-۲) حاصل انتگرال $\int_C \left(z^2 + z\bar{z}\right)dz$ را روی مسیر زیر محاسبه کنید.



با توجه به مسیر داریم $\begin{cases} z = e^{i\theta} & \pi > \theta > 0 \\ dz = ie^{i\theta} \end{cases}$ لذا داریم

$$\int_C \left(z^2 + z\bar{z}\right)dz = \int_\pi^0 \left(e^{i2\theta} + 1\right)(ie^{i\theta})d\theta = \int_\pi^0 (ie^{i3\theta} + ie^{i\theta})d\theta = \frac{1}{3}e^{i3\theta} + e^{i\theta}\Big|_\pi^0 = \frac{8}{3}$$

مثال(۶-۳) حاصل انتگرال $\int_C \left(z^2 + z\right)dz$ را روی مسیر داده شده بیابید.



با توجه به مسیر داریم

$$z = \begin{cases} C_1:\ z = 2e^{i\theta} \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \rightarrow dz = 2ie^{i\theta}d\theta \\ C_2:\ z = x \ ,\ 2 < x < 3 \qquad \rightarrow dz = dx \\ C_3:\ z = 3 + iy \ ,\ 0 < y < 4 \qquad \rightarrow dz = idy \\ C_4:\ z = re^{i\frac{\pi}{4}} \ ,\ 5 > r > 0 \qquad \rightarrow dz = e^{i\frac{\pi}{4}}dr \end{cases}$$

لذا داریم

$$\int_C \left(z^2 + z\right)dz =$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^0 \left(4e^{i2\theta} + 2e^{i\theta}\right)(2ie^{i\theta})d\theta + \int_2^3 \left(x^2 + x\right)dx + \int_0^4 \left((3 + iy)^2 + 3 + iy\right)(idy) + \int_5^0 \left(r^2e^{i\frac{\pi}{2}} + re^{i\frac{\pi}{4}}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}dr = 2 - \frac{8}{3}i$$

که به راحتی و همانند انتگرال‌های حقیقی محاسبه می‌شود.

قضیه ۶-۲ (انتگرال گیری نامعین توابع تحلیلی)

هرگاه f(z) در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد آنگاه انتگرال نامعینی از f(z) در دامنه D وجود دارد، یعنی تابع تحلیلی مانند F(z) وجود دارد طوری‌که $F'(z) = f(z)$ است. و برای هر مسیر C در D که دو نقطه z_0 و z_1 را بهم وصل می‌کند داریم

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) \qquad (۶-۳)$$

نکته: اگر f(z) تام باشد می‌توان به جای D صفحه مختلط را بکار برد.

نکته: اگر f(z) در دامنه خود تحلیلی باشد آنگاه انتگرال روی خط آن مستقل از مسیر بوده و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی دارد.

مثال(۶-۵) حاصل انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$A)\ \int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{\frac{z}{2}}dz = 2e^{\frac{z}{2}}\Bigg|_{8+\pi}^{8-3\pi i} = 2e^4\left[e^{-i\frac{3\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{2}}\right] = 0$$

$$B)\ \int_{-i\pi}^{i\pi} \cos z dz = \sin z\Big|_{-i\pi}^{i\pi} = 2\sin(i\pi) = 2i\sinh(\pi) = 23.097i$$

مثال(۶-۷) با اعمال قضیه(۶-۲) مثال(۶-۳) را دوباره حل کنید.

چون تابع f(z) تحلیلی است لذا انتگرال آن مستقل از مسیر بوده و به مسیر بستگی ندارد

$$\int_C \left(z^2 + z\right)dz = \int_{-2i}^{0} \left(z^2 + z\right)dz = \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2}\Bigg|_{-2i}^{0} = 2 - \frac{8}{3}i$$

۶-۲- قضیه انتگرال کوشی

قضیه۶-۳ (قضیه انتگرال کوشی یا قضیه کوشی- گورسا)

هرگاه f(z) در دامنه کراندار همبند ساده D تحلیلی باشد آنگاه به ازای هر مسیر بسته ساده C واقع در D داریم

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad (۶-۴)$$

مثال(۶-۶) برای هر مسیر بسته ساده حاصل $\oint_C e^z dz = \oint_C \cos z dz = \oint_C \sin z dz = \oint_C z^n dz = 0$ صفر می‌شود.

مثال (۶-۷) حاصل انتگرال‌های $\oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz$ و $\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{(z-z_0)^n} dz$ که n متعلق به اعداد طبیعی است را بدست آورید.

با توجه با تحلیلی بودن تابع $(z-z_0)^n$ در $|z-z_0| = R$ و طبق قضیه کوشی-گورسا حاصل انتگرال صفر است.

با توجه به تحلیلی نبودن تابع $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ در $|z-z_0| = R$ داریم.

$$z \overset{\Delta}{=} z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta} \quad 0 < \theta < 2\pi \quad \Rightarrow \quad dz = i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\, d\theta \Rightarrow$$
$$\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^n e^{in\theta}} i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\, d\theta = \left(iR^{1-n}\right)\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ i2\pi & n = 1 \end{cases}$$

مثال (۶-۸) حاصل انتگرال $\oint_{|z-1-2i|=1} \frac{z+1}{z^3 - 2z^2} dz$ را بدست آورید.

با توجه به تحلیلی بودن تابع در ناحیه انتگرال‌گیری جواب انتگرال صفر می‌شود.

مثال(۶-۹) حاصل انتگرال $\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \left(\cos z + \frac{1}{z^2(z-1)}\right) dz$ را بدست آورید.

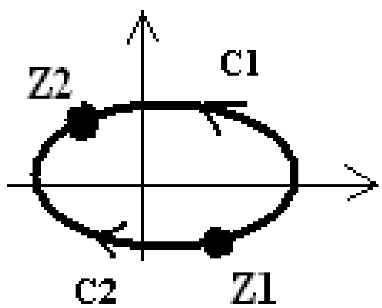
با توجه به تحلیلی بودن تابع در ناحیه انتگرال‌گیری جواب انتگرال صفر می‌شود.

قضیه ۶-۴ (مستقل از مسیر)

هرگاه f(z) در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد آنگاه انتگرال f(z) در D مستقل از مسیر است.

فرض کنید f(z) در ناحیه D تحلیلی باشد و مسیر C زیر یک مسیر بسته در D باشد آنگاه طبق قضیه کوشی-گورسا داریم

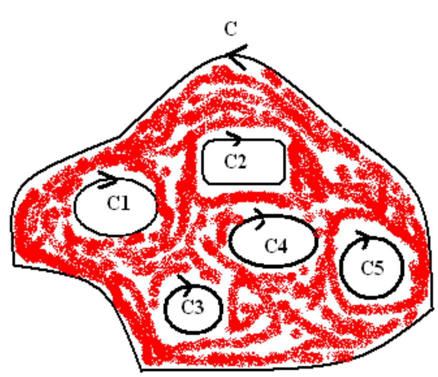
$$\oint_C f(z)dz = 0 = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz \Rightarrow \qquad \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \tag{۶-۵}$$



قضیه ۶-۵ (قضیه برای دامنه‌های همبند چندگانه)

اگر تابع f(z) بر روی کانتورهای $C, C_1, C_2, ...$ و نقاط هاشورخورده در شکل زیر تحلیلی باشد آنگاه داریم

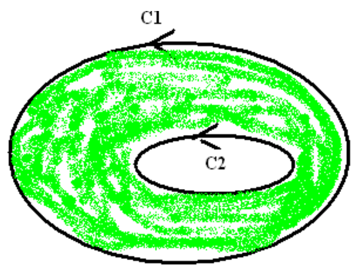
$$\int_{C+C_1+C_2+...} f(z)dz = 0 \tag{۶-۶}$$



نتیجه قضیه ۶–۵

اگر f(z) بر روی C_1 , C_2 و ناحیه هاشورخورده مابین آن‌ها تحلیلی باشد داریم

$$\int_{C_1 - C_2} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \qquad (۶–۷)$$



قضیه ۶–۷ (فرمول انتگرال کوشی)

فرض کنید f(z) در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد آنگاه به ازای هر z_0 و هر مسیر بسته ساده C در D که z_0 را در بر بگیرد، داریم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i2\pi f(z_0) \qquad (۶–۸)$$

قضیه ۶–۸ (مشتقات یک تابع تحلیلی)

فرض کنید f(z) در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد آنگاه f(z) در D از هر مرتبه‌ای دارای مشتق است که همه این مشتقات نیز در D تحلیلی هستند. مشتقات تابع f(z) در نقطه‌ای مانند z_0 از D عبارتند از

$$\begin{cases} f'(z_0) = \dfrac{1}{i2\pi} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \\ f''(z_0) = \dfrac{2!}{i2\pi} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)3} dz \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = i2\pi \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (۶–۹)$$

مثال(۶–۱۰) حاصل انتگرال $\oint_{|z-\pi|=3} \frac{\cos(z)}{z-\pi}$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم.

$$\oint_{|z-\pi|=3} \frac{\cos(z)}{z-\pi} = i2\pi\cos\pi = -i2\pi$$

مثال(۶–۱۱)) حاصل انتگرال $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z}dz$ را بدست آورید

حل: با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم.

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z}dz = i2\pi e^0 = i2\pi$$

مثال(۶–۱۲) حاصل انتگرال $\oint_C \frac{3z+1}{z^3-z^2}dz$ را به ازای دو مسیر $|z|=\frac{1}{2}$ و $|z|=2$ بدست آورید

حل:

برای مسیر $|z|=\frac{1}{2}$ داریم

$$\oint_C \frac{3z+1}{z^2(z-1)}dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{3z+1}{z-1}\right)}{z^2}dz = \frac{i2\pi}{1!}\left(\frac{3z+1}{z-1}\right)'\Bigg|_{z=0} = -i8\pi$$

برای مسیر $|z|=2$ داریم

$$\oint_C \frac{3z+1}{z^2(z-1)}dz = -\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2} - 4\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z} + 4\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} = 0 - 4(i2\pi) + 4(i2\pi) = 0$$

مثال(۶–۱۳) حاصل انتگرال $\oint_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{3}} \frac{Ln(1+z^2)}{(2z-i)^2}dz$ را بدست آورید

حل: تابع $Ln(1+z^2)$ درون و روی مسیر تحلیلی است (در z=i تحلیلی نیست که بیرون مسیر است)

$$\oint_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{3}} \frac{Ln(1+z^2)}{(2z-i)^2}dz = \oint_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{3}} \frac{\left(\frac{1}{4}Ln(1+z^2)\right)}{(z-\frac{i}{2})^2}dz = \frac{i2\pi}{1!}\left(\frac{1}{4}Ln(1+z^2)\right)'\Bigg|_{z=\frac{i}{2}} = -\frac{2\pi}{3}$$

سری اول تمرین‌های بخش ششم

۱- انتگرال مختلط $\int_C f(z)dz$ را در حالات زیر محاسبه کنید.

الف) $f(z)=\mathrm{Re}(z)$ و C دایره واحد در جهت خلاف عقربه ساعت.

ب) $f(z)=\mathrm{Im}(z^2)$ و C کران مربعی به رئوس 0,i,1,-1 و در جهت خلاف عقربه ساعت.

ج) $f(z)=|z|$ و C یک پاره خط از $-i$ تا i.

د) $f(z)=|z|$ و C دایره واحد واقع در سمت چپ محور موهومی که $-i$ را به i وصل می‌کند.

ه) $f(z)=|z|$ و C دایره واحد واقع در سمت راست محور موهومی که $-i$ را به i وصل می‌کند.

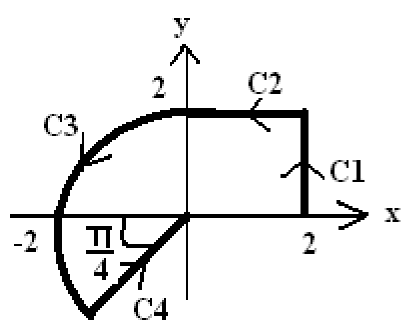
و) جواب قسمت‌های (ج)، (د) و (ه) را با هم مقایسه و تفسیر کنید.

۲- حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

$$A)\ \oint_{\left|z-i\frac{\pi}{2}\right|=1} \frac{dz}{\sinh z} \qquad B)\ \oint_{|z-5|=3} \frac{Lnz}{(z-4)^3}dz \qquad C)\ \oint_{|z+i|=1} \frac{dz}{z^2+1} \qquad D)\ \oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2+1}$$

$$E)\ \int_i^{2i} \left(z^2-1\right)^3 dz \qquad F)\ \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3}dz \qquad G)\ \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\tan z}{z^2-1} \qquad H)\ \oint_{|z|=2} \frac{z^4}{(z-3i)^2}dz$$

۳- حاصل انتگرال $\int_C \left(z^2+2\bar{z}\right)dz$ و $\int_C (z+z\bar{z})dz$ و $\int_C \left(z^2+\sin z\right)dz$ را در طول مسیر زیر بدست آورید.



۶-۳- قضیه مانده

تا اینجا می‌توان انتگرال توابع تحلیلی را روی منحنی‌های بسته C وقتی f(z) فقط یک نقطه تکین در داخل C دارد را محاسبه کرد. با معرفی قضیه مانده می‌توان برای حالتی که f(z) چندین نقطه تکین در C دارد نیز انتگرال‌گیری را انجام داد.

قضیه ۶-۹ (قضیه مانده)

فرض کنید f(z) تابعی باشد که در داخل و روی مسیر بسته C به جز تعدادی نقطه تکین محدود $z_1,...,z_k$ تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z)dz = i2\pi\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left(f(z_j)\right) = i2\pi\left[\operatorname{Res}\left(f(z_1)\right)+\operatorname{Res}\left(f(z_2)\right)+...+\operatorname{Res}\left(f(z_k)\right)\right] \qquad (۶-۱۰)$$

که انتگرال‌گیری روی C و در جهت عکس عقربه‌های ساعت صورت می‌گیرد.

مثال(۶-۱۴) انتگرال $\oint_{|z-1|=1} ze^{-\frac{1}{z-1}}dz$ را محاسبه کنید.

حل: در داخل مسیر انتگرال‌گیری تابع دارای نقطه تکین z=1 می‌باشد لذا داریم

$$f(z) = ze^{-\frac{1}{z-1}} = (z-1+1)(1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+...) \Rightarrow \operatorname{Res}(f(z=1)) = \frac{1}{2!}-1 = \frac{-1}{2}$$

$$\oint_{|z-1|=1} ze^{-\frac{1}{z-1}}dz = i2\pi\operatorname{Res}(f(z=1)) = -i\pi$$

مثال(۶-۱۵) انتگرال $\oint_{|z|=1} \frac{1}{1-\cos z}dz$ را محاسبه کنید.

حل: برای یافتن نقاط تکین مخرج تابع را مساوی صفر می‌کنیم. $1-\cos z = 0 \Rightarrow \cos z = 1 \Rightarrow z = 0 \pm 2k\pi$

که فقط z=0 در ناحیه انتگرال‌گیری می‌افتد. برای تعیین مرتبه قطب z=0 ، $\lim_{z\to 0} z^m f(z)$ را محاسبه و کوچکترین

مقدار m ای که حد فوق را محدود می‌کند را پیدا می‌کنیم. $\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{2\sin^2(\frac{z}{2})} = \frac{z^2}{2\left(\frac{z}{2}\right)^2} = 2$

بنابراین مرتبه قطب z=0 دو می‌باشد، داریم

$$\operatorname{Re}s(f(z=0)) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2 f(z)\right) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{1-\cos z}\right) = 0 \Rightarrow \oint_{|z|=1}\frac{dz}{1-\cos z} = i2\pi \operatorname{Re}sf(0) = 0$$

مثال(۶-۱۶) انتگرال $\oint_{|z|=1} \frac{3z}{3z-1}dz$ را محاسبه کنید.

حل: تابع دارای نقطه تکین $z = \frac{1}{3}$ (قطب ساده) در ناحیه انتگرال‌گیری می‌باشد. داریم

$$\operatorname{Re}s\left(f(z=\frac{1}{3})\right) = \lim_{z\to\frac{1}{3}}\frac{3z}{(3z-1)'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \oint_{|z|=1}\frac{3z}{3z-1}dz = i2\pi(\frac{1}{3}) = i\frac{2\pi}{3}$$

مثال(۶-۱۷) انتگرال $\oint_{|z|=2} \tan z dz$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا نقاط تکین را محاسبه می‌کنیم که بصورت $coz = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ است. در ناحیه انتگرال‌گیری دو

نقطه تکین $z = \pm\frac{\pi}{2}$ داریم لذا

$$\begin{cases} \operatorname{Re}sf(z=\frac{\pi}{2}) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z}{(\cos z)'} = -1 \\ \operatorname{Re}sf(z=-\frac{\pi}{2}) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z}{(\cos z)'} = -1 \end{cases} \Rightarrow \oint_{|z|=1}\tan z dz = i2\pi\left(\operatorname{Re}sf(\frac{\pi}{2}) + \operatorname{Re}sf(-\frac{\pi}{2})\right) = -i4\pi$$

مثال(۶–۱۸) انتگرال $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^4} dz$ را محاسبه کنید.

حل: تابع f(z) دارای قطب مرتبه ۳ در z=0 می‌باشد لذا

$$\operatorname{Re}sf(z=0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \frac{-1}{6} \;\; or \;\; \operatorname{Re}sf(z=0) = \operatorname{Re}s\left[\frac{1}{z^4}\sum(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] = \frac{-1}{6}$$

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^4} dz = i2\pi(\frac{-1}{6}) = -i\frac{\pi}{3}$$

مثال(۶–۱۹) انتگرال $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\sin(\frac{1}{z})dz$ را محاسبه کنید.

حل: تابع f(z) دارای دو نقطه تکین صفر و منهای یک در ناحیه انتگرال‌گیری می‌باشد که در مثال (۵–۲۰) مانده این تابع به ازای این دو نقطه محاسبه گردید لذا داریم

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\sin(\frac{1}{z})dz = i2\pi\left[\operatorname{Re}sf(0) + \operatorname{Re}sf(1)\right] = i2\pi\left[\sin 1 - \sin 1\right] = 0$$

مثال(۶–۲۰) انتگرال $\oint\limits_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right) e^{\frac{1}{z}} dz$ را محاسبه کنید.

حل: این تابع دارای نقطه تکینی در صفر می‌باشد برای محاسبه مانده بصورت زیر عمل کنیم

$$f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots\right) \Rightarrow \operatorname{Re}sf(z=0) = (\frac{1}{2!} + 1) = \frac{3}{2}$$

$$\oint\limits_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}} dz = i2\pi(\frac{3}{2}) = i3\pi$$

نکته: اگر f(z) تابعی زوج باشد لذا در بسط آن تابع حول z=0 فقط توان‌های زوج z ظاهر می‌گردد لذا مانده چنین تابعی در z=0 قطعاً صفر می‌شود.

مثال(۶-۲۱) انتگرال $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cot z}{z^3}dz$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا نقاط تکین را بدست می‌آوریم.($z^3 \sin z = 0 \rightarrow z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$) که z=0 یک قطب مرتبه۴ (چرا؟) و $z = \pm\pi$ در ناحیه انتگرال‌گیری می‌افتد. چون تابع f(z) تابعی زوج است لذا حاصل مانده در z=0 صفر می‌شود برای بدست آوردن مانده در $z = \pm\pi$ داریم.

$$\operatorname{Re}sf(\pi) = \lim_{z\to\pi}\frac{\cos z}{\left(z^3 \sin z\right)'} = \frac{1}{\pi^3},\ \operatorname{Re}sf(-\pi) = \lim_{z\to-\pi}\frac{\cos z}{\left(z^3 \sin z\right)'} = -\frac{1}{\pi^3} \Rightarrow \oint\limits_{|z|=4}\frac{\cot z}{z^3}dz = 0$$

نکته: توابع $\bar{z}$، Imz، Rez و $|z|$ در هیچ کجا تحلیلی نمی‌باشند بنابراین اگر چنین عباراتی در تابع زیر علامت انتگرال ظاهر شوند نمی‌توان از قضیه مانده استفاده نمود ولی در مواردی که انتگرال‌گیری بر روی مسیر $|z| = a$ انجام می‌گیرد، می‌توان با استفاده از روابط زیر این عبارات را حذف نمود.

$$\begin{cases} |z| = a \\ \bar{z} = \dfrac{z\bar{z}}{z} = \dfrac{|z|^2}{z} = \dfrac{a^2}{z} \\ \operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{z+\dfrac{a^2}{z}}{2} \\ \operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \dfrac{z-\dfrac{a^2}{z}}{2i} \end{cases} \qquad (۶-۱۱)$$

مثال(۶-۲۲) انتگرال $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{\bar{z}-3i}dz$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از (۶-۱۱) داریم.

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{\bar{z}-3i}dz = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{\frac{4}{z}-3i}dz == \oint_{|z|=2} \frac{ze^z}{4-3iz}dz = i2\pi\left(\operatorname{Re}sf\,(\frac{4}{3i})\right) = i2\pi\left(\left.\frac{ze^z}{(4-3iz)'}\right|_{z=\frac{4}{3i}}\right) = i2\pi(\frac{4}{9}e^{\frac{4}{3i}})$$

مثال(۶-۲۳) انتگرال $\oint_{|z|=1}\left(\frac{z}{|z|}+\sin z\right)d\bar{z}$ را محاسبه کنید.

حل: با جایگزاری $|z|=1$ و $d\bar{z} = d\left(\frac{z\bar{z}}{z}\right) = d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-1}{z^2}dz$ در انتگرال داریم

$$\oint_{|z|=1}\left(\frac{z}{|z|}+\sin z\right)d\bar{z} = \oint_{|z|=1}(z+\sin z)(\frac{-1}{z^2})dz = \oint_{|z|=1}\left(\frac{-1}{z}-\frac{\sin z}{z^2}\right)dz = i2\pi(-1-1) = -i4\pi$$

سری دوم تمرین‌های بخش ششم

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$A)\ \oint_{|z-2-i|=2} \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz \qquad B)\ \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^3(z^2+1)}dz \qquad C)\ \oint_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}}dz \qquad D)\ \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{(z^2+4)(z-4)}dz$

$E)\ \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}} \frac{e^z}{(z-1)^2(2z+1)}dz \qquad F)\ \oint_{|z+\pi i|=1} \frac{z^2}{\sinh z}dz \qquad G)\ \oint_{|z-1|=1} (2z^2+z-6)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)dz$

$H)\ \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos\frac{1}{z}}{1-z}dz \qquad I)\ \oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^2-3iz}dz \qquad J)\ \oint_{|z|=1} \frac{\tan \pi z}{z^3}dz \qquad K)\ \oint_{|z|=1} \frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2}dz$

۶-۴- محاسبه برخی از انتگرال‌های حقیقی با استفاده از انتگرال‌های مختلط

انتگرال‌های حقیقی که می‌توان حاصل آن‌ها را با انتگرال‌های مختلط محاسبه کرد را می‌توان به چهار دسته زیر تقسیم‌بندی نمود

الف) برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم.

$$z = e^{i\theta} \quad \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}, \qquad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \quad , \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \tag{۱۲-۶}$$

پس از اعمال تغییرات بالا داریم

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta = \oint_{|z|=1} f(z)dz \tag{۱۳-۶}$$

مثال(۶-۲۴) حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta}$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از (۶-۱۲) داریم

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta} = \oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}-\frac{z+z^{-1}}{2i}} = \oint_{|z|=1}\frac{2dz}{2\sqrt{2}iz - z^2 + 1}$$

نقاط تکین f(z) عبارتند از : ($(-z^2 + 2\sqrt{2}iz + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{-2\sqrt{2}i \pm \sqrt{-8+4}}{-2} = i(\sqrt{2}\pm 1)$) که هر دو نقطه تکین قطب مرتبه اول هستند که فقط قطب $i(\sqrt{2}-1)$ در دایره واحد قرار دارد لذا داریم

$$\operatorname{Res} f = \left.\frac{2}{(-z^2 + 2\sqrt{2}iz + 1)'}\right|_{z=i(\sqrt{2}-1)} = -i \;\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta} = \oint_{|z|=1}\frac{2dz}{2\sqrt{2}iz - z^2 + 1} = i2\pi(-i) = 2\pi$$

ب) برای محاسبه انتگرال‌های حقیقی به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ که در آن P(x) و Q(x) دو چندجمله‌ای برحسب x هستند

که درجه Q(x) حداقل دو درجه از درجه P(x) بزرگ‌تر است و Q(x) صفر حقیقی ندارد بصورت زیر عمل می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int_{\operatorname{Im}z>0}\frac{P(z)}{Q(z)}=i2\pi\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Re}s\left(\frac{P}{Q}(\operatorname{Im}z_j>0)\right) \qquad (۱۴-۶)$$

یعنی برای محاسبه انتگرال فوق کافیست مجموع مانده‌های تابع $\frac{P(z)}{Q(z)}$ را در نقاط تکین بالای محور حقیقی آن

محاسبه و در $i2\pi$ ضرب کنیم.

مثال(۶-۲۵) حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ را بدست آورید.

حل: نقاط تکین تابع فوق i،i-،2i و 2i- هستند که باید مانده را به ازای i و 2i محاسبه کنیم.

$$\begin{cases}\operatorname{Re}s\left(\dfrac{2z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\right)=\left.\dfrac{2z^2}{\left((z^2+1)(z^2+4)\right)'}\right|_{z=i}=\dfrac{-1}{6i}\\[2ex]\operatorname{Re}s\left(\dfrac{2z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\right)=\left.\dfrac{2z^2}{\left((z^2+1)(z^2+4)\right)'}\right|_{z=2i}=\dfrac{7}{12i}\end{cases}\Rightarrow\quad I=i2\pi\left(\frac{-1}{6i}+\frac{7}{12i}\right)$$

ج) برای محاسبه انتگرال‌های حقیقی به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(ax)dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(ax)dx$ که در آن P(x) و Q(x) شرایط مطرح شده در (**ب**) را داشته باشند کافی‌است ابتدا حاصل انتگرال مختلط زیر را برای نقاط تکین بالای محور حقیقی حساب کنیم.

$$\int_{\operatorname{Im} z>0}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}dz \qquad (۱۵-۶)$$

حال می‌توان نشان داد

$$\int_{\operatorname{Im} z>0}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(ax)dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(ax)dx \qquad (۱۶-۶)$$

مثال(۶-۲۶) حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$ را بدست آورید.

حل:تابع فوق دارای دو نقطه تکین i و-i بوده که بایست برای نقطه تکین i مقدار مانده تابع $\frac{e^{i2z}}{z^2+1}$ را حساب کنیم . ($\operatorname{Re}s\left(\frac{e^{2z}}{z^2+1}\right)=\left.\frac{e^{i2z}}{2z}\right|_{z=i}=\frac{e^{-2}}{2i}$) حال با استفاده از (۶-۱۶) داریم

$$\int_{\operatorname{Im} z>0}\frac{e^{i2z}}{z^2+1}dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2+1}dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2+1}dx=i2\pi(\frac{e^{-2}}{2i})=\frac{\pi}{e^2}\Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{e^2}\quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2+1}dx=0$$

د) برای محاسبه انتگرال‌های حقیقی به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(ax)dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(ax)dx$ که در آن P(x) و Q(x) دو چندجمله‌ای برحسب x بوده که درجه Q(x) لااقل یک درجه از درجه P(x) بزرگ‌تر باشد و تمام ریشه‌های Q(x) ریشه‌های مرتبه اولی باشند که بر صفرهای توابع sin(ax) یا cos(ax) منطبق باشد داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(ax)+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(ax)=i2\pi\times A \qquad (۱۷-۶)$$

که A برابر است با

$$\left[\text{مجموع مانده‌های تابع } \frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz} \text{ در نقاط تکین حقیقی}\right]\frac{1}{2}+\left[\text{مجموع مانده‌های تابع } \frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz} \text{ در نقاط تکین بالای محور موهومی}\right]$$

مثال(۶-۲۷) حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$ را بدست آورید.

حل: نقاط تکین تابع $\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ عبارتند از $z=0,i,-i$ که بایست برای نقاط تکین z=0 و z=i مانده را حساب کنیم.

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\right)=\operatorname{Re}s\left(\frac{e^{iz}}{\left[z(z^2+1)\right]'}\Bigg|_{z=0}\right)=1 \quad , \quad \operatorname{Re}s\left(\frac{e^{iz}}{\left[z(z^2+1)\right]'}\Bigg|_{z=i}\right)=-\frac{1}{2e}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x(x^2+1)}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=i2\pi\left\{\frac{-1}{2e}+\frac{1}{2}(1)\right\}=i\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)\Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x(x^2+1)}dx=0 \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

نکته: در مواردی که تابع حقیقی زیر انتگرال‌گیری زوج باشد آنگاه مقدار انتگرال از منهای بینهایت تا مثبت بینهایت دو برابر مقدار انتگرال از صفر تا مثبت بینهایت می‌گردد.

مثال(۶–۲۸) انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$ را محاسبه کنید.

حل: نقاط تکین تابع بصورت $z^4+1=0\Rightarrow z=e^{i\frac{\pi}{4}},e^{i\frac{3\pi}{4}},e^{i\frac{5\pi}{4}},e^{i\frac{7\pi}{4}}$ بوده که دو نقطه $z=e^{i\frac{\pi}{4}},e^{i\frac{3\pi}{4}}$ در بالای محور بوده که بایست مانده را برای آن بدست آوریم، ضمناً تابع مذکور زوج بوده که از نکته گفته شده برای حل استفاده می‌کنیم.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}\right)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\quad,\ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}\right)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}$$

$$\int_{\operatorname{Im} z>0}\frac{dz}{z^4+1}=i2\pi\left(\frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}+\frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\left[i2\pi\left(\frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}+\frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right)\right]=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

مثال(۶–۲۹) انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$ را محاسبه کنید.

حل: تابع $\frac{e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2}$ دارای دو قطب مرتبه دو در نقاط i و i- می‌باشد. برای محاسبه مانده در i داریم

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2}\right)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2}\right]=\frac{-i}{2e}$$

$$\int_{\operatorname{Im} z>0}\frac{e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2}dz=i2\pi\left(\frac{-i}{2e}\right)=\frac{\pi}{e}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{(x^2+1)^2}dx\Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi}{e}\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi}{2e}\quad,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{(x^2+1)^2}dx=0$$

مثال(۶-۳۰) انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ را محاسبه کنید.

حل: تابع $\frac{e^{iz}}{z}$ یک قطب ساده در z=0 دارد.

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{e^{iz}}{z}\right)=\left.\frac{e^{iz}}{z'}\right|_{z=0}=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=i2\pi\left\{0+\frac{1}{2}(1)\right\}=i\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx=0\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi\quad\Rightarrow\quad\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

مثال(۶-۳۱) حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$ را بدست آورید.

حل:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{z^3+z^{-3}}{5-4\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz=i2\pi\left(\operatorname{Re}sf(0)+\operatorname{Re}sf(\frac{1}{2})\right)=\frac{\pi}{12}$$

مثال(۶-۳۲) مقدار انتگرال $\int_0^\infty\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$ را بدست آورید.

حل: چون تابع زوج بوده و شرایط الف را دارد داریم.

$$\int_0^\infty\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int_{\operatorname{Im}z>0}\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}dx=\frac{1}{2}\int_{\operatorname{Im}z>0}\frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)}dx$$

حال باید مانده تابع $\frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)}$ را در نقاط تکین بالای محور حقیقی (z=2i,i) را محاسبه کنیم.

$$\begin{cases}\operatorname{Re}s\left(\frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)}\right)=\left.\frac{2z^2-1}{[(z^2+4)(z^2+1)]'}\right|_{z=i}=\frac{-3}{6i}\\ \operatorname{Re}s\left(\frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)}\right)=\left.\frac{2z^2-1}{[(z^2+4)(z^2+1)]'}\right|_{z=2i}=\frac{9}{12i}\end{cases}\Rightarrow\int_0^\infty\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{1}{2}\times i2\pi\left(\frac{-3}{6i}+\frac{9}{12i}\right)=\frac{\pi}{4}$$

سری سوم تمرین‌های بخش ششم

حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

$A)\ \int_0^{2\pi} \frac{1+4\cos\theta}{17-8\cos\theta}d\theta \qquad B)\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta \qquad C)\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{13-12\cos 2\theta}d\theta \qquad D)\ \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi+\cos\theta}d\theta$

$E)\ \int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx \qquad F)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}dx \qquad G)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}dx \qquad H)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{16+x^4}dx$

$I)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}dx \qquad J)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{4x^4+13x^2+9}dx \qquad K)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}dx \qquad L)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+4}dx$

$M)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{8-x^3}dx \qquad N)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x+1)(x^2+2)}dx \qquad O)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x-x^5}dx \qquad Q)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{2}\pi x}{x^2-1}dx$

۷- آنالیز فوریه

یکی از روش‌های اساسی پردازش یک شکل موج یا یک تابع ریاضی استفاده از توابع یا دنباله‌های متعامد می‌باشد. بوسیله نمایش یک تابع پریودیک برحسب مجموعه ای از توابع متعامد می‌توان بجای تحلیل‌های پیچیده، از توابعی که قابلیت مشابهی دارند ولی دارای تحلیل‌های ساده‌تری است استفاده نمود. یکی از این مجموعه‌های متعامد مهم مجموعه سینوس‌ها وکسینوس‌ها یا مجموعه توابع نمایی می‌باشد. نمایش یک شکل موج پریودی بر حسب این مجموعه‌ها را به یاد ژان باپتیست فوریه فیزیکدان فرانسوی (۱۷۶۸–۱۸۳۰) سری فوریه می‌نامند که کاربرد زیادی در حل مسائل مهندسی دارد. فوریه از بررسی مسائل انتقال حرارت و گرما دریافت که توابع متناوب را می‌توان با مجموعه ای نامتناهی از توابع سینوسی و کسینوسی که ارتباط هماهنگ دارند نمایش داد.

تعریف ۷–۱

شکل موج متناوب: شکل موجی است که پس از مدت زمانی مشخص دوباره تکرار شود ($f(t+T)=f(t)$).

در اینصورت T را دوره تناوب تابع یا سیگنال f(t) می‌نامند

تعریف ۷–۲

تابع f(t) را تابعی زوج می‌نامند هرگاه $f(t)=f(-t)$ در اینصورت داریم $\int_{-a}^{+a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{+a} f(t)\,dt$

و تابع f(t) را تابعی فرد می‌نامند هرگاه $f(t)=-f(-t)$ در اینصورت داریم $\int_{-a}^{+a} f(t)\,dt = 0$

در این‌صورت اگر توابع f(t) و g(t) هر دو فرد و یا هر دو زوج باشند آنگاه تابع $f(t)\times g(t)$ تابعی زوج می‌باشد. و اگر یکی از توابع زوج و دیگری فرد باشد آنگاه حاصلضرب آن‌ها تابعی فرد می باشد.

نکته: بهتر است فرد یا زوج بودن اشکال متناوب را از روی شکل موج آنها بررسی کرد زیرا در بعضی مواقع ضابطه تابع گمراه‌کننده می‌باشد.

تعریف ۷-۳

دو تابع f(x) و g(x) را در فاصله (a,b) متعامد گوییم هرگاه $\int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}dx = 0$ باشد علامت بار به مفهوم مزدوج تابع بکار رفته است. در صورت حقیقی بودن توابع شرط متعامد بودن دو تابع بصورت $\int_a^b f(x)\,g(x)dx = 0$ است.

مثال (۷-۱) آیا دو تابع f(x)=sin(x) و g(x)=cos(x) در فاصله $0 < x < \pi$ متعامدند؟

حل: بله چون $\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,dx = 0$ می باشد.

تعریف ۷-۴

مجموعه تابع $\varphi_i(x)\big|_{i=1}^m$ را در فاصله $a < x < b$ متعامد گوییم هرگاه $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$ باشد.

تعریف ۷-۵

مجموعه تابع $\varphi_i(x)\big|_{i=1}^m$ را در فاصله $a < x < b$ متعامد یکه گوییم هرگاه $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ \neq 1 & i = j \end{cases}$ باشد.

مثال (۷-۲) مجموعه $\{\cos(nx)\}_{n=0}^m$ در فاصله $0 < x < \pi$ متعامد است؟

حل: چون $\int_0^\pi \underset{n\neq m}{\cos(nx)\cos(mx)}\,dx=0$ و $\int_0^\pi \cos^2(nx)\,dx=\frac{\pi}{2}$ است لذا متعامد می‌باشد.

مثال(۷–۳) آیا مجموعه توابع نمایی $f(x)=\left\{e^{jn\frac{2\pi}{T}x}\right\}_{n=1}^{m}$ متناوب است؟ متعامد چطور؟

حل: متناوب با دوره تناوب T است زیرا $f(x+T)=e^{jn\frac{2\pi}{T}(x+T)}=e^{jn\frac{2\pi}{T}x}.e^{jn2\pi}=e^{jn\frac{2\pi}{T}x}=f(x)$

متعامد است زیرا $\int_0^T e^{jn\frac{2\pi}{T}x}.e^{-jm\frac{2\pi}{T}x}\,dx\begin{cases}=0 & n\neq m\\ =T & n=m\end{cases}$.

سری اول تمرین‌های بخش هفتم

۱. نشان دهید چندجمله‌ای‌های $p_0(x)=1$ ، $p_1(x)=x$ ، $p_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$ و $p_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2}$ در فاصله (1,1-) برهم عمود می‌باشند.

۲. بررسی کنید که آیا دو تابع $f(x)=\sin(\frac{\pi x}{2})$ و $g(x)=\sin(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{4})$ بر هم عمود هستند.

۳. دوره تناوب توابع زیر را بیابید

$$f(x)=2\cos(10x+1)-\sin(4x-1)$$
$$g(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})^2$$
$$h(x)=|\sin(x)|$$

۷-۱- سری فوریه

سری فوریه یک تابع در واقع بسط آن بصورت مجموعه‌ای از توابع متعامد می‌باشد یعنی اگر مجموعه توابع $\varphi_n(x)\big|_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه در فاصله $a<x<b$ باشد آنگاه تحت شرایطی می توان تابع f(x) را بر حسب آن‌ها نوشت یعنی

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x) \qquad (۷-۱)$$

که در رابطه بالا c_n ضرایب سری فوریه نامیده می شود.

در حالت کلی و با توجه به انتخاب $\varphi_n(x)$ حالات خاص زیر ایجاد می گردد.

الف) اگر $\varphi_n(x)$ بصورت مجموعه ای از توابع sin یا cos انتخاب گردد آنگاه سری فوریه ایجاد شده را سری فوریه مثلثاتی می نامند.

ب) اگر $\varphi_n(x)$ بصورت مجموعه ای از توابع نمایی انتخاب گردد آنگاه به بسط حاصل، سری فوریه نمایی گفته می‌شود.

<u>محاسبه ضرایب سری فوریه</u>**:** برای محاسبه ضرایب c_n طرفین رابطه (۷-۱) را در $\varphi_m(x)$ ضرب نموده و در فاصله $a<x<b$ از آن انتگرال می گیریم

$$\int_a^b\varphi_m(x)f(x)\,dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx \qquad (۷-۲)$$

با توجه به متعامد یکه بودن $\varphi_n(x)$، انتگرال بالا فقط به ازای n=m مقدار دارد و درغیر اینصورت دارای مقدار صفر می باشد لذا داریم

$$c_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx \qquad (۷-۳)$$

۷-۱-۱- سری فوریه مثلثاتی

سری فوریه مثلثاتی یک تابع متناوب با دوره تناوب T نمایشی از آن بصورت مجموع بینهایت جمله از مجموع توابع متعامد $\{1,\cos(\omega_0 x),\cos(2\omega_0 x),...,\sin(\omega_0 x),\sin(2\omega_0 x),...\}$ می‌باشد که بصورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_0 x)+b_n\sin(n\omega_0 x)\right)\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}\tag{۴-۷}$$

که ضرایب a_0، a_n و b_n با توجه به فرمول کلی (۷-۳) و بصورت زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\langle T\rangle}f(x)\,dx\\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\langle T\rangle}f(x)\cos(n\omega_0 x)\,dx\\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\langle T\rangle}f(x)\sin(n\omega_0 x)\,dx\end{cases}\tag{۵-۷}$$

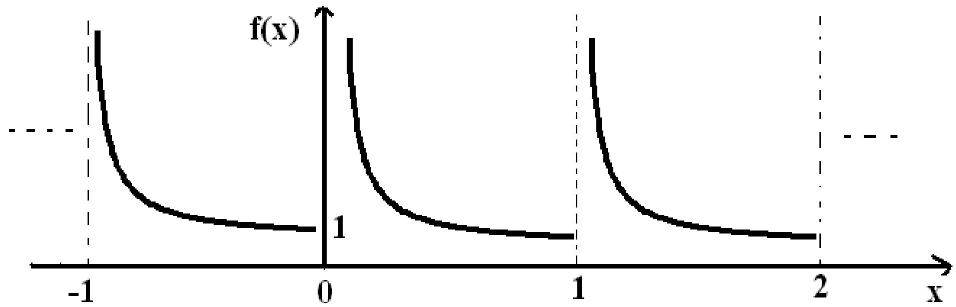
$\frac{a_0}{2}$ را مؤلفه dc سیگنال f(x) گویند که متوسط تابع در یک دوره تناوب می‌باشد.

۷-۱-۲- شرایط دیریکله

شرایط دیریکله شرایط کافی برای همگرایی سری فوریه متناظر با یک تابع می‌باشد که عبارتند از:

شرط اول دیریکله: تابع f(x) در دوره تناوب خود مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد یعنی $\int_{\langle T\rangle}|f(x)|dx<\infty$

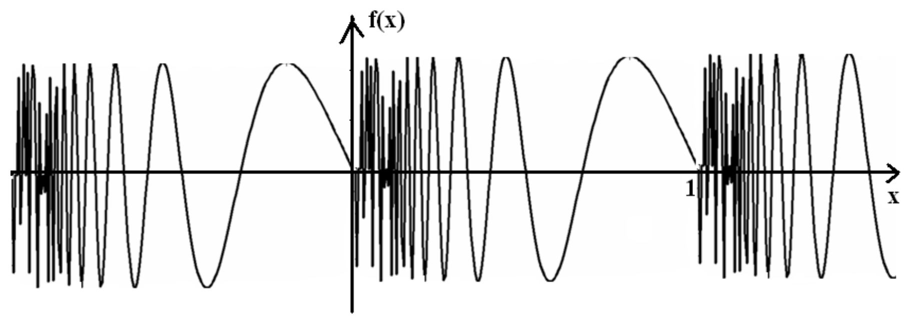
برای مثال تابع $\left\{f(x)=\frac{1}{x}\quad 0<x\leq 1\right\}$ (شکل (۷-۱)) شرط اول دیریکله را برآورده نمی کند.



شکل(۷-۱): تابع f(x) رسم شده شرط اول دیریکله را برآورده نمی‌کند

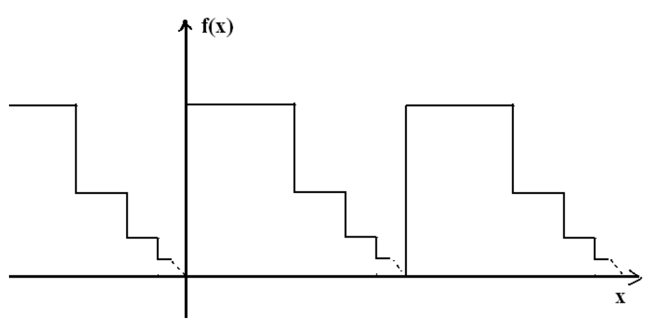
شرط دوم دیریکله: تابع f(x) در دوره تناوب خود دارای تعداد محدودی اکسترمم باشد. برای مثال تابع

$\left\{ f(x) = \sin(\frac{2\pi}{x}) \quad 0 < x \leq 1 \right\}$ (شکل (۷-۲)) شرط دوم دیریکله را برآورده نمی‌کند.



شکل(۷-۲): تابع f(x) رسم شده شرط دوم دیریکله را برآورده نمی‌کند

شرط سوم دیریکله: تابع f(x) دارای تعداد معینی ناپیوستگی در دوره تناوب خود باشد. در شکل (۷-۳) تابعی که چنین شرطی را برآورده نمی‌کند ترسیم شده است.



شکل(۷-۳): تابع f(x) رسم شده شرط سوم دیریکله را برآورده نمی‌کند

باید توجه نمود که شرایط فوق شرایط کافی می‌باشند و لازم نیستند. بنابراین اگر f(x) این شرایط را برآورده سازد می‌توان آن‌را با سری فوریه بیان کرد ولی اگر شرایط را برآورده نکند باز هم ممکن است بتوان آن‌را برحسب سری فوریه نمایش داد

قضیه ۷-۱

هرگاه تابع متناوب f(x) با دوره تناوب T در فاصله تناوب خود پیوسته تکه‌ای بوده و در هر نقطه از فاصله مزبور مشتق چپ و راست داشته باشد آنگاه سری فوریه تابع f(x) همگرا است. مجموع آن در هر نقطه، به جز نقطه x_0 که در آن تابع f(x) ناپیوسته است برابر f(x) بوده و در نقطه x_0 مجموع سری برابر میانگین حدهای چپ و راست f(x) در این نقطه می‌باشد.

مثال(۷-۴) سری فوریه موج مربعی $T=2$, $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 1<x<2\end{cases}$ رابدست آورید.

حل:

$$\omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi \;\Rightarrow\; a_0=\frac{2}{2}\int_0^1 1.dx=1 \;,\; a_n=\frac{2}{2}\int_0 \cos(n\pi x)dx=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_0^1=0\,,$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^1 \sin(n\pi x)dx=\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1=\begin{cases}0 & n \;\; is\; even\\ \dfrac{2}{n\pi} & n\;\; is\; odd\end{cases}=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right]\sin(n\pi x)$$

بر اساس قضیه(۷-۱) مقدار سری در نقاط پیوسته به f(x) میل می‌کند و در نقاط ناپیوسته به میانگین حد چپ و راست f(x) در آن نقاط میل می‌کند.

تمرین(۷–۱) به ازای مقادیر مختلف n=1، n=3، n=19 و n=79 سری فوریه بدست آمده در مثال (۷–۴) را با نرم افزار MATLAB رسم نموده و تفسیر نمایید.

تمرین(۷–۲) با توجه به تمرین قبل در مورد درستی پدیده گیبس تحقیق نمایید؟

مثال(۷–۵) الف) بسط سری فوریه تابع $f(x)=x^2 \ , \ 0\le x\le 2$ با T=2 را بدست آورید.

ب) مقدار سری را در نقاط $x=\pi,2\pi$ را بدست آورید.

ج) به کمک سری بدست آمده ثابت کنید: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}....=\frac{\pi^2}{6}$

حل:

$$\omega_0=\frac{2\pi}{2\pi}=1 \Rightarrow a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8\pi^2}{3} \quad , \quad a_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos(nx)dx=\frac{4}{n^2} \ , \ n\neq 0$$

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin(nx)dx=\frac{-4\pi}{n} \quad , \quad f(x)=x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx)-\frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)$$

مقدار سری در نقطه پیوسته $x=\pi$ برابر با مقدار تابع $f(\pi)=\pi^2$ می‌باشد

مقدار سری در نقطه ناپیوسته $x=2\pi$ برابر با مقدار $\frac{f(2\pi^+)+f(2\pi^-)}{2}=\frac{(2\pi)^2+(0)^2}{2}=2\pi^2$ است

$$for \ \ x=0 \ \Rightarrow \ \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=2\pi^2==\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(n\times 0)-\frac{4\pi}{n}\sin(n\times 0)\right)\Rightarrow$$

$$\frac{2\pi^2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

تمرین (۷–۳) سری فوریه توابع زیر را بدست آورید؟

الف) $f(x)=\sin(x) \ , \ 0<x<\pi \ , \ T=\pi$

ب) $f(x)=x \ , \ -2<x<2 \ , \ T=4$

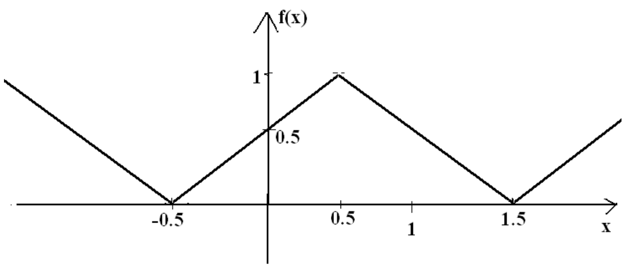
۷-۱-۳- سری فوریه توابع زوج و فرد

اگر f(x) تابع زوجی باشد آنگاه ضرایب b_n سری فوریه آن صفر می‌باشد $b_n = \frac{2}{T}\int \underbrace{f(x)\times\sin(n\omega_0 x)}_{odd\ \ function} dx = 0$

اگر f(x) تابع فردی باشد آنگاه ضرایب a_n سری فوریه آن صفر می‌باشد $a_n = \frac{2}{T}\int \underbrace{f(x)\times\cos(n\omega_0 x)}_{odd\ \ function} dx = 0$

نکته: بعضی از توابع نه زوج و نه فرد هستند اما می‌توان با انتقال آن‌ها را بصورت توابع زوج و یا فرد نوشت و ضرایب فوریه را ساده تر محاسبه نمود.

مثال (۷-۵) ضرایب سری فوریه شکل زیر را بدست آورید.



حل: ابتدا تابع g(x) را بصورت $g(x) = f(x+0.5)$ تعریف می‌کنیم که تابعی زوج می‌باشد لذا ضرایب b_n آن صفر بوده و داریم: $a_n = \frac{2\times 2}{2}\int_0^1 (1-x)\cos(n\pi x)dx = \frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi))$, $a_0 = 1$ لذا داریم

$g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi))\cos(n\pi x)$ و از رابطه $f(x) = g(x-.05)$ می‌توان سری فوریه f(x) را براحتی بدست آورد

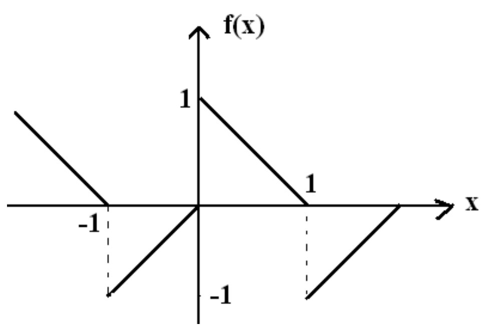
$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi))\cos(n\pi(x-.05))=$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi))\cos(\frac{n\pi}{2})\cos(n\pi x)}_{\equiv 0}+\frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi))\sin(\frac{n\pi}{2})\sin(n\pi)$$

۷-۱-۴- سری فوریه توابع متقارن نیم موج

تابع f(x) را متقارن نیم موج گویند هرگاه $f(x+\frac{T}{2})=-f(x)$ باشد در اینصورت ضرایب a_n و b_n برای n های زوج صفر می‌باشند(اثبات کنید) و اگر $f(x+\frac{T}{2})=f(x)$ باشد در اینصورت ضرایب a_n و b_n برای n های فرد صفر می‌باشند. (اثبات کنید).

مثال(۷-۶) ضرایب سری فوریه شکل زیر را بدست آورید؟



حل:

$$\omega_0=\pi \quad , \quad a_0=0,$$

$$a_n=\frac{2}{2}\left[\int_{-1}^{0}x\cos(n\pi x)dx+\int_{0}^{1}(1-x)\cos(n\pi x)dx\right]=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-\cos(n\pi)\right)=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2\pi^2} & n \text{ is odd}\\ 0 & n \text{ is even}\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{2}\left[\int_{-1}^{0}x\sin(n\pi x)dx+\int_{0}^{1}(1-x)\sin(n\pi x)dx\right]=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi} & n \text{ is odd}\\ 0 & n \text{ is even}\end{cases}$$

نکته: برای محاسبه انتگرال‌هایی بصورت زیر که در آنها p(x) چند جمله ای بر حسب x می‌باشد می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود.

$$\int p(x)f(x)dx = p(x)F_1(x) - p'(x)F_2(x) + ...(-1)^m p^{(m)}(x)F_{m+1}(x) \quad where$$
$$F_{m+1}(x) = \int F_m(x)dx \ \ , \ \ f(x) = F_0(x) \qquad (۶-۷)$$

۷-۱-۵- سری فوریه توابع غیرپریودیک

اگر f(x) یک شکل موج غیر متناوب باشد که در فاصله $(0,a)$ مخالف صفر و در خارج آن مساوی صفر باشد آنگاه به روش‌های مختلف می‌توان برای آن سری فوریه نوشت

الف) متناوب کردن f(x) بصورت تابعی زوج با استفاده از تابع کمکی g(x) (بسط نیم دامنه کسینوسی)

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < a \\ f(-x) & -a < x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) \ , \ -\infty < x < \infty \\ f(x) = g(x) \quad , \ 0 < x < a \end{cases} \qquad (۷-۷)$$

ب) متناوب کردن f(x) بصورت تابعی فرد با استفاده از تابع کمکی g(x) (بسط نیم دامنه سینوسی)

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < a \\ -f(-x) & -a < x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 x) \ , \ -\infty < x < \infty \\ f(x) = g(x) \quad , \quad 0 < x < a \end{cases} \qquad (۸-۷)$$

ج) متناوب کردن f(x) بصورت تابعی با دوره تناوب T=a که تابعی نه فرد و نه زوج می‌باشد.

د) متناوب کردن f(x) با تابعی بصورت متقارن نیم موج

$$g(x + \frac{T}{2}) = -g(x) \ , \quad T = 2a \quad , \qquad g(x) = f(x) \ , \quad 0 < x < a \qquad (۹-۷)$$

تمرین(۷–۴) بسط نیم دامنه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ \frac{1}{2} & 1<x<2\end{cases}$ را بدست آورید.

تمرین(۷–۵) به نظر شما کدام یک از روش‌های گفته شده برای بسط دادن تابع f(x) مناسب‌تر است.

۷–۱–۶- مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه

فرض کنید f(x) با T=2L در فاصله $(-L,L)$ تعریف شده و دارای بسط سری فوریه به فرم زیر باشد

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\frac{2\pi}{2L}x)+b_n\sin(n\frac{2\pi}{2L}x) \qquad (۱۰–۷)$$

الف) با استفاده از انتگرال‌گیری از رابطه فوق داریم

$$\int f(x)dx=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\{a_n\sin(n\frac{2\pi}{2L}x)-b_n\cos(n\frac{2\pi}{2L}x)\}+K \qquad (۱۱–۷)$$

دقت شود که بخاطر وجود عبارت $\frac{a_0}{2}x$ ، عبارت سمت راست معادله بالا توصیف سری فوریه $\int f(x)dx$ نمی‌باشد ولی با فرض معلوم بودن سری فوریه تابع f(x) می‌توان به راحتی سری فوریه تابع $\int f(x)dx-\frac{a_0}{2}x$ بصورت زیر محاسبه نمود.

$$\int f(x)dx-\frac{a_0}{2}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\{a_n\sin(n\frac{2\pi}{2L}x)-b_n\cos(n\frac{2\pi}{2L}x)\}+K \qquad (۱۲–۷)$$

ب) چنانچه $f(L)=f(-L)$ باشد با مشتق‌گیری از سری فوریه تابع f(x) داریم

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\{-a_n\sin(n\frac{2\pi}{2L}x)+b_n\cos(n\frac{2\pi}{2L}x)\} \qquad (۱۳–۷)$$

لذا به راحتی می‌توان سری فوریه تابع $f'(x)$ را محاسبه کنیم.

مثال(۷-۷) تابع $f(x)=x^2 \quad , \quad -\pi<x<\pi$ دارای سری فوریه به فرم زیر می‌باشد

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \qquad -\pi<x<\pi$$

سری فوریه تابع $x^3-\pi^2 x$ را در فاصله مذکور بیابید.

حل: با استفاده از خاصیت انتگرال‌گیری داریم.

$$\int x^2 dx-\frac{a_0}{2}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\{a_n\sin(n\frac{2\pi}{2L}x)-b_n\cos(n\frac{2\pi}{2L}x)\}+K$$

$$\frac{x^3-\pi^2 x}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\sin(nx)+K \quad \Rightarrow \quad x^3-\pi^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n}{n^3}\sin(nx)+0$$

چون تابع مذکور فرد است لذا مقدار K صفر می‌باشد.

تمرین(۷-۶) سری فوریه تابع $f(x)=\frac{x}{2}$ در فاصله $-\pi<x<\pi$ بصورت $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$ می‌باشد. سری فوریه تابع $g(x)=x^2$ را در بازه مورد نظر بدست آورید. ثابت K را نیز محاسبه کنید.

۷-۱-۷- تساوی پارسوال در سری فوریه مثلثاتی

فرض کنید f(x) تابعی متناوب در فاصله $(-L,L)$ و دارای سری فوریه بصورت زیر باشد

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\frac{2\pi}{2L}x)+b_n\sin(n\frac{2\pi}{2L}x) \tag{۱۴-۷}$$

با ضرب f(x) در دو طرف تساوی و انتگرال‌گیری از آن به نتیجه زیر می‌رسیم که به تساوی پارسوال معروف می‌باشد

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \quad , \quad L=\frac{T}{2} \tag{۱۵-۷}$$

مثال(۷–۸) اگر بسط سری فوریه کسینوسی f(x)=sin(x) در بازه $0 \le x \le \pi$ بصورت زیر باشد

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos(n\pi)}{n^2-1}\right)\cos(nx)$$

آنگاه مقدار سری $\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}+.....$ را بدست آورید؟

حل: در این مثال $L=\pi,\ \frac{a_0}{2}=\frac{2}{\pi},\ b_n=0$ و

$$a_n=\left(\left(\frac{-2}{\pi}\right)\frac{1+\cos(n\pi)}{n^2-1}\right)=\begin{cases}\left(\frac{-2}{\pi}\right)\frac{2}{(n-1)^2(n+1)^2} & n \ \ is \ \ even\\ 0 & n \ \ is \ \ odd\end{cases}$$

می‌باشد با استفاده از تساوی پارسوال داریم.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(x)^2dx=\frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{16}{\pi^2}\right)\left(\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}\right) \Rightarrow$$

$$1=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}\right) \Rightarrow \quad \frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{5^2.7^2}+....=\frac{\pi^2-8}{16}$$

سری دوم تمرین‌های بخش هفتم

۱. سری فوریه تابع $f(x)=x^3$ را در فاصله $-\pi \le x \le \pi$ بدست آورید.

۲. تابع f(x)=x را در فاصله 0<x<2 در نظر بگیرید. برای این تابع بسطی بنویسید که ویژگی‌های زیر را داشته باشد. الف) فقط جملات کسینوسی داشته باشد. ب) ضرایب فوریه آن برای nهای زوج صفر گردد. ج) جملات سینوسی و کسینوسی داشته باشد

۳. حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ را از روی بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=e^{-x}$ در بازه $(-\pi,\pi)$ بدست آورید.

۴. در نمایش سری فوریه تابع $f(t)=\sin^2(t)\cos(2t)$ با دوره تناوب $T=2\pi$ مقادیر a_0، a_2 و a_4 را بدست آورید.

۵. سری فوریه تابع $f(t)=\begin{cases} t & 0<t<1 \\ 2-t & 1<t<2 \end{cases}$ را بدست آورید.

۶. بسط فوریه تابع $f(x)=|x|$ را در فاصله 1<x<1- بدست آورید.

۷. بسط فوریه تابع $f(t)=\cos^2(t)$ را در بازه $(0,\pi)$ بدست آورید.

۸. بسط نیم دامنه کسینوسی تابع $f(t)=1-\frac{t}{2}$ را در بازه $(0,2)$ بدست آورید.

۹. بسط فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} +\sin(x) & 0<x<2\pi \\ -\sin(x) & -2\pi<x<0 \end{cases}$ چگونه است

الف) زوج کسینوسی ب) فرد کسینوسی ج) زوج سینوسی د) زوج کسینوسی

۱۰. بسط فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}-t-3 & -3<t<-2\\ -1 & -2<t<-1\\ t & -1<t<1\\ 1 & 1<t<2\\ 3-t & 2<t<3\end{cases}$ چگونه است

الف) زوج کسینوسی ب) فرد کسینوسی ج) زوج سینوسی د) فرد سینوسی

۱۱. اگر بسط نیم دامنه کسینوسی تابع f(x)=x در بازه $(0,\pi)$ بصورت $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left(\cos(x)+\dfrac{1}{3^2}\cos(3x)+\dfrac{1}{5^2}\cos(5x)+......\right)$ باشد آنگاه بسط به سری فوریه سینوسی تابع $g(x)=x(\pi-x)\dfrac{\pi}{8}$ در همان بازه را بدست آورید.

۱۲. سری فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}2 & -1<t<1\\ 0 & 1<t<3\end{cases}$ را بدست آورید.

۷-۲- انتگرال فوریه

سری فوریه ابزار پرقدرتی برای حل مسائل گوناگونی که شامل توابع متناوب است، می‌باشد. نظر به اینکه حل تعداد زیادی از مسائل عملی به توابع نامتناوب مربوط می‌شود لذا بجاست که مطالب ارائه شده در مورد سری‌های فوریه را طوری تعمیم داد که توابع نامتناوب را نیز در بر بگیرد. تابع نامتناوب y=f(x) تعریف شده بر اعداد حقیقی دارای سری فوریه نمی‌باشد ولی اگر تابع متناوب $y = f_L(x)$ با دوره تناوب L را بررسی نموده و L را به سمت بینهایت میل دهیم آنگاه اگرچه تابع حاصل متناوب نیست ولی می‌توان بسط آن‌را بصورت حد سری فوریه تابع $y = f_L(x)$ وقتی L به سمت بینهایت میل می‌کند، نمایش داد. نمایش بدست آمده را انتگرال فوریه می‌گویند که ابزار پرقدرتی برای بررسی توابع نامتناوب می‌باشد.

قضیه ۷-۲ (قضیه انتگرال فوریه)

فرض کنید تابع f(x) در هر فاصله متناهی قطعه‌ای پیوسته و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ موجود باشد. آنگاه تابع f(x) را می‌توان با انتگرال فوریه (۷-۱۶) نمایش داد که در نقاط پیوسته مقدار انتگرال فوریه با مقدار تابع یکسان بوده و در نقاط ناپیوستگی مقدار انتگرال فوریه با میانگین حد چپ و راست تابع f(x) در آن نقطه برابر می‌باشد

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)]d\omega \qquad (۱۶-۷)$$

که در آن

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx \qquad (۱۷-۷)$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx \qquad (۱۸-۷)$$

از روابط بالا به سادگی می‌توان نتایج زیر را بدست آورد

- اگر f(x) تابعی زوج باشد آنگاه $B(\omega)=0$ و $A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx$ می‌باشد.
- اگر f(x) تابعی فرد باشد آنگاه $A(\omega)=0$ و $B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)dx$ می‌باشد.

مثال(۷-۹) انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}+\frac{\pi}{2} & 0<x<1\\ -\frac{\pi}{2} & -1<x<0\\ 0 & others\end{cases}$ را بدست آورید.

حل: با توجه به فرد بودن تابع داریم

$$A(\omega)=0 \quad , \quad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{\pi}{2}\sin(\omega x)dx=\frac{-1}{\omega}\cos(\omega x)\Big|_{0}^{1}=\frac{1-\cos(\omega)}{\omega} \Rightarrow$$

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1-\cos(\omega)}{\omega}\right)\sin(\omega x)d\omega$$

نکته: انتگرال‌های زیر به انتگرال‌های لاپلاس معروف هستند که می‌توان در حل سؤالات تستی از آنها کمک گرفت

$$\int_{0}^{\infty}\left(\frac{k}{k^2+\omega^2}\right)\cos(\omega x)d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-kx} \quad , \ x \,\&\, k>0 \qquad (۱۹-۷)$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\right)\sin(\omega x)d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-kx} \quad , \ x \,\&\, k>0 \qquad (۲۰-۷)$$

مثال(۷–۱۰) انتگرال فوریه تابع $f(x)=e^{-x}$ برای $x>0$ و با شرط $f(x)=f(-x)$ را بدست آورید.

حل: با توجه به زوج بودن تابع و بر اساس رابطه (۷–۱۹) (k=1) برابر با $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x)d\omega$ است.

مثال(۷–۱۱) با استفاده از انتگرال فوریه تابع $x>0$, $f(x)=f(-x)=e^{-2x}$، حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{1}{4+\omega^2}\cos(2\omega)\,d\omega$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطه (۷–۱۹) و قرار دادن k=2 و x=2 نتیجه انتگرال برابر با $\frac{\pi}{4}e^{-4}$ می‌شود.

مثال(۷–۱۲) در صورتیکه $f(x)=\begin{cases}0 & x<\alpha\\ c & \alpha<x<\beta\\ 0 & x>\beta\end{cases}$ و مقادیر $\alpha<0$، $\beta>0$ و C اعداد ثابتی باشند و $f(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}\cos(\lambda x)d\lambda$ باشد آنگاه مقادیر α، β و C را بدست آورید.

حل: با توجه به فرم انتگرالی داده شده برای تابع f(x) می‌توان زوج بودن این تابع را نتیجه گرفت لذا $\beta=-\alpha$.

حال با استفاده از این شرط انتگرال فوریه تابع f(x) را می‌نویسیم.

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \quad , \quad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)dx \Rightarrow$$

$$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\beta}c\times\cos(\omega x)dx=\frac{2c}{\pi\omega}\sin(\omega x)\Big|_0^{\beta}=\frac{2c}{\pi\omega}\sin(\beta\omega)\Rightarrow$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{2c}{\pi\omega}\sin(\beta\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \overbrace{\equiv}^{\omega\to\lambda}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}\cos(\lambda x)d\lambda \Rightarrow$$

$$\beta=1,\ \alpha=-1 \ , \ c=\frac{\pi}{2}$$

مثال(۷-۱۳) در معادله انتگرالی $\int_0^\infty f(\omega)\cos(\omega x)d\omega = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$ تابع $f(\omega)$ را بیابید.

حل: با توجه به شکل کسینوسی انتگرال فوریه داده شده می‌توان به زوج بودن حاصل انتگرال پی برد لذا داریم

$$f(\omega) = A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos(\omega x)dx = \frac{2}{\pi\omega^2}\left(1-\cos(\omega)\right)$$

مثال(۷-۱۴) فرض کنید $f(x) = \int_0^\infty P(\omega)\sin(\omega x)d\omega$ و $xf(x) = \int_0^\infty Q(\omega)\cos(\omega x)d\omega$ باشد. رابطه مابین $\frac{d}{d\omega}P(\omega)$ و $Q(\omega)$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از روابط انتگرال فوریه داریم

$$P(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\omega}P(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\cos(\omega x)dx \ = Q(\omega)$$

مثال(۷-۱۵) با فرض $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega}\cos(\omega x)d\omega$ مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin(x^5)}{x}dx$ را محاسبه کنید.

حل: تابع f(x) در نقطه x=0 پیوسته بوده لذا مقدار آن با مقدار بدست آمده از انتگرال فوریه برابر می‌باشد. لذا داریم:

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega}d\omega \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega}d\omega = \frac{\pi}{2} \qquad for \quad \omega = x^5 \ \Rightarrow d\omega = 5x^4dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\overbrace{x^5}^{\omega})}{\underbrace{x^5}_{\omega}} \times \underbrace{5x^4dx}_{d\omega} = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(x^5)}{x}dx = \frac{\pi}{10}$$

سری سوم تمرین‌های بخش هفتم

۱. با استفاده از معادله انتگرالی $\int_0^\infty P(\omega)\cos(\omega x)dx = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 3 & 1<x<2 \\ 0 & 2<x \end{cases}$، $P(\omega)$ را محاسبه کنید.

۲. مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\omega}{1+\omega^2}\sin(3\omega)d\omega$ را بدست آورید.

۳. انتگرال فوریه تابع $f(x)=e^{-x}u(x)$ را بدست آورید.

۴. انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ |x|<a \\ 0 & ; \ |x|>a \end{cases}$ را بدست آورید.

۵. با استفاده از نمایش انتگرال فوریه درستی روابط زیر را نشان دهید.

الف)
$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)+\omega\sin(\omega x)}{1+\omega^2}d\omega = \begin{cases} 0 & ; \quad x<0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad x=0 \\ \pi e^{-x} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

ب)
$$\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos(x) & ; \quad |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad |x|>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۶. مقدار انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x^2}dx$ را بدست آورید.