الگو و دنباله

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مفهوم دنباله

۱- چه تعداد از موارد زیر بیانگر یک دنباله است؟

الف) $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ ب) $۲, ۴, ۶, ۸, ...$ ج) $۴, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۸, ۳۰$ د) $۲, ۱, ۲, ۱۱, ۲, ۱۱۱, ۲, ۱۱۱۱, ...$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{۲n}{n+۱}$ مربوط به کدام‌یک از دنباله‌های زیر است؟

۱) $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, ...$ ۲) $۱, ۱\frac{۱}{۲}, ۱\frac{۱}{۳}, ۱\frac{۱}{۴}, ...$ ۳) $۱, ۱\frac{۱}{۳}, ۱\frac{۱}{۲}, ۱\frac{۳}{۵}, ...$ ۴) $۱, \frac{۳}{۲}, ۲, \frac{۵}{۲}, ...$

۳- جمله‌ی عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = (-۱)^n \frac{n^۲ - n}{۲^n}$ است. جمله‌ی شانزدهم این دنباله کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۲^{۱۶}}$ ۲) $\frac{۱۵}{۲^{۱۲}}$ ۳) $-\frac{۱۵}{۲^{۱۳}}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲^{۱۵}}$

۴- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \frac{۱}{n+۳} + ... + \frac{۱}{n+n}$، مقدار $a_۳ - a_۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۵- جمله‌ی عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = \frac{۲n-۱}{۳n+۱}$ است. جمله‌ی چندم این دنباله برابر $\frac{۱۹۹}{۳۰۱}$ است؟

۱) دویستم ۲) سیصدم ۳) صدم ۴) هزارم

۶- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = n^۲ + ۲n - ۱۷$، کدام جمله برابر ۱۷۳ است؟

۱) $a_۱$ ۲) $a_{۱۳}$ ۳) $a_{۱۴}$ ۴) این دنباله، چنین جمله‌ای ندارد.

۷- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{۴n}{n+۱}$، جمله‌ی mاُم برابر $\frac{۷}{۲}$ است. جمله‌ی $(m+۵)$اُم این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۴۸}{۱۳}$ ۲) $\frac{۶۰}{۱۶}$ ۳) $\frac{۴۰}{۱۱}$ ۴) $\frac{۸۰}{۲۱}$

۸- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱, ...$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲^{n+۱}}$ ۲) $\frac{۲n-۱}{۲+۲n}$ ۳) $\frac{n}{۴}$ ۴) $\frac{۲n-۱}{۴n}$

۹- کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $۱, ۴, ۹, ۱۶, ...$ باشد؟

۱) $n^۲$ ۲) $(۲^n - ۱)n^۲$

۳) $n^۲ + (n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$ ۴) گزینه‌های (۱) و (۳) صحیح هستند.

۱۰- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $۲, ۴, ۶, ۸, ...$ باشد؟

۱) $۲n$ ۲) $۲n + (n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$

۳) $۲^n(n^۲ - ۴n + ۳)(n^۲ - ۶n + ۸) + ۲n$ ۴) $n^۳ - ۶n^۲ + ۱۳n - ۶$

* ۱۱- چند تا از موارد زیر، می‌تواند جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $1, 2, 6, 24, \ldots$ باشد؟

الف) $n!$

ب) $\dfrac{(n+2)!}{n^2+3n+2}$

ج) $\dfrac{(n+3)!}{n^3+6n^2+11n+6}$

د) $n! + (n^2-3n+2)(n^2-7n+12)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲- دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = n^3$ مفروض است. در کدام حالت سه جمله‌ی اول دنباله‌ی $\{a_n + b_n\}$ با دنباله‌ی $\{a_n\}$ یکسان است؟

۱) $b_n = n(n-2)(n-3)$
۲) $b_n = (n-1)(n+2)(n-3)$
۳) $b_n = (n^2-3n+2)(n+3)$
۴) $b_n = (n-1)(n^2-5n+6)$

* ۱۳- جملات یک دنباله به‌صورت $3, 9, 27, 81, \ldots$ است، جمله‌ی صدم این دنباله چه وضعیتی دارد؟

۱) برابر 3^{100} است.
۲) از 3^{100} کوچک‌تر است.
۳) از 3^{100} بزرگ‌تر است.
۴) هر یک از گزینه‌های (۱)، (۲) یا (۳) ممکن است رخ دهد.

۱۴- جمله‌ی چندم دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_{n-2} = 2n + 7$، برابر ۲۱ است؟

۱) هفتم ۲) پنجم ۳) نهم ۴) یازدهم

۱۵- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_{(n^2+4n-1)} = n^3 + 1$، مقدار جمله‌ی چهل و چهارم کدام است؟ $(n \in N)$

۱) $45^3 + 1$ ۲) $44^3 + 1$ ۳) ۱۲۶ ۴) ۵۱۳

۱۶- بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n = \dfrac{2}{n}$ کدام است؟

۱) a_1 ۲) a_2 ۳) a_{200} ۴) مشخص نیست.

۱۷- مربع کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n = -\dfrac{3}{n+2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{9}{16}$ ۳) صفر ۴) $\dfrac{9}{25}$

۱۸- مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\dfrac{1}{6}$ ۳) $\dfrac{1}{6}$ ۴) $\dfrac{5}{6}$

۱۹- کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n = n^2 - 30n - 1$، کدام جمله‌ی آن است؟

۱) a_{12} ۲) a_{13} ۳) a_{14} ۴) a_{15}

۲۰- بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n = -n^2 + 10n - 1$ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۲۱- کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n = n^2 - 17n$، کدام جمله‌ی آن است؟

۱) a_9
۲) a_7
۳) a_8
۴) گزینه‌های (۱) و (۳) صحیح هستند.

۲۲- رابطه‌ی $a_{n+1} = 2a_n + 5$ بین جملات یک دنباله برقرار است. با فرض $a_1 = 2$، مقدار a_4 کدام است؟

۱) ۵۱ ۲) ۵۰ ۳) ۴۹ ۴) ۵۳

۲۳- رابطه‌ی $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است. با فرض $a_1 = 1$ و $a_2 = 1$، جمله‌ی ششم این دنباله کدام است؟ (این دنباله به دنباله‌ی فیبوناچی مشهور است.)

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۱۳ ۴) ۹

۲٤- رابطه‌ی $a_{n+1} = 2n + a_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است. با فرض $a_1 = 1$، جمله‌ی صدم این دنباله کدام است؟

۱) ۹۹۰۰ ۲) ۹۹۰۱ ۳) ۹۹۰۲ ۴) ۹۹۰۴

۲۵- رابطه‌ی $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 5$ بین جملات یک دنباله برقرار است. با فرض $a_4 = 7$، مقدار a_7 کدام است؟

۱) ۲۵۳ ۲) ۲۵۴ ۳) ۲۶۳ ۴) ۲۶۱

۲٦- رابطه‌ی $a_n = \begin{cases} n^2 - 8 & n < 4 \\ a_{n-1} & n \geq 4 \end{cases}$ بین جملات یک دنباله برقرار است. مقدار a_{50} کدام است؟

۱) -1 ۲) ۵۰ ۳) ۱ ۴) $50^2 - 8$

۲۷- در یک دنباله $a_1 = 2011$ و $a_{n+1} = (-1)^n a_n$، مجموع بیست و یک جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲۰۱۱ ۳) -2011 ۴) ۴۰۲۲

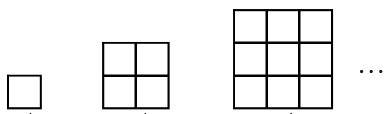
۲۸- دنباله‌ی $a_n = \dfrac{n^2 + 4n + 15}{n + 3}$، چند جمله‌ی طبیعی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۲۹- دنباله‌ی $a_n = \dfrac{3n^2 + 3n + 34}{n^2 + n + 1}$، چند جمله‌ی طبیعی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۳۰- با توجه به شکل‌های روبه‌رو، تعداد مربعات کوچک در مرحله‌ی ۱۰۰اُم کدام است؟



مرحله‌ی ۱ مرحله‌ی ۲ مرحله‌ی ۳

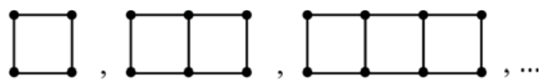
۱) ۱۰۰۰

۲) 2^{100}

۳) $100!$

۴) ۱۰۰۰۰

۳۱- با استفاده از چوب کبریت، سه شکل زیر ساخته شده است. اگر با همین الگو ادامه دهیم، تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل nاُم چند تا است؟

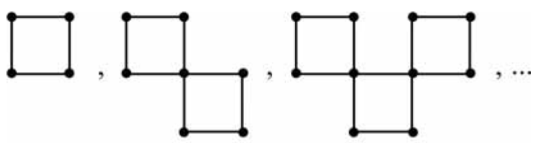


مرحله‌ی ۱ مرحله‌ی ۲ مرحله‌ی ۳

۱) $4n$ ۲) $3n + 1$

۳) $5n - 1$ ۴) $6n - 2$

۳۲- با استفاده از چوب کبریت سه شکل روبه‌رو ساخته شده است. اگر همین الگو را ادامه دهیم، تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل ۳۰اُم چندتا است؟

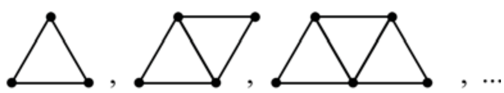


شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳)

۱) ۱۲۰ ۲) 4^{30}

۳) 30^4 ۴) ۳۴

۳۳- با استفاده از چوب کبریت سه شکل روبه‌رو ساخته شده است. اگر همین الگو را ادامه دهیم، تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل ۲۰۰اُم چند تا است؟

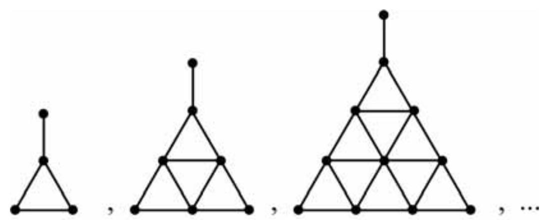


شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳)

۱) ۲۰۱ ۲) $2^{200} + 1$

۳) ۴۰۱ ۴) 40^4

۳٤- با استفاده از چوب کبریت‌ها سه شکل زیر ساخته شده است. اگر همین الگو را ادامه دهیم، تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل ۲۰اُم چند است؟



شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳)

۱) ۶۲۱

۲) ۶۳۱

۳) ۶۰۳

۴) ۶۰۴

۳۵- اگر یک مستطیل کاغذی را در هر مرحله با تا زدن نصف کنیم، آن‌گاه تعداد مستطیل‌های به‌دست آمده در مرحله‌ی هفتم کدام است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۴۹ ۳) ۱۴ ۴) !۷

۳۶- در دنباله‌ی $a_n = \dfrac{(-1)^{4n+1} + (-1)^{4n+2} + (-1)^{4n+3}}{(-1)^{4n}}$ مجموع جملات اول تا صدم کدام است؟

۱) صفر ۲) -100 ۳) -50 ۴) 50

* ۳۷- در دنباله‌ی $a_n = \dfrac{2(-1)^{n^2-n} + 3(-1)^{n^2+n}}{(-1)^n + (-1)^{n+1} + 1}$، مجموع پنجاه جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) 50 ۲) -50 ۳) 250 ۴) صفر

دنباله‌ی حسابی

۳۸- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول برابر ۳ و قدرنسبت برابر ۷ است. جمله‌ی پنجاه و یکم این دنباله کدام است؟

۱) ۳۵۰ ۲) ۳۵۳ ۳) ۳۵۶ ۴) ۳۶۰

۳۹- در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی هفدهم ۱۵۷ و قدرنسبت ۱۰، جمله‌ی اول کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۳ ۳) -13 ۴) -3

۴۰- اگر دنباله‌ی $35, x^3 - 3x, 125, y^3 + y, \dots$ یک دنباله‌ی حسابی باشد، آن‌گاه جمله‌ی دوازدهم آن کدام است؟

۱) ۶۳۰ ۲) ۵۷۰ ۳) ۵۳۰ ۴) ۵۴۰

۴۱- دنباله‌ی حسابی مقابل چند جمله دارد؟

$x-6, x-2, x+2, \dots, x+394$

۱) ۹۹ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۳

۴۲- اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی حسابی باشد، آن‌گاه حاصل $a_{n-1} - a_n$ کدام است؟ (d قدرنسبت است.)

۱) $-d$ ۲) $-2d$ ۳) d ۴) $\dfrac{d}{2}$

۴۳- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی پنجم برابر ۱۷ و جمله‌ی هفدهم برابر ۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\dfrac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) $-\dfrac{1}{3}$

۴۴- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات دهم و بیستم برابر ۱۸۰ است. در این دنباله حاصل $a_{13} + a_{17}$ کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۲۰۰

۴۵- در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ داریم: $a_{15} + a_{70} + a_{125} = 162$. حاصل $a_{10} + a_{130}$ کدام است؟

۱) ۱۶۲ ۲) ۸۱ ۳) ۵۴ ۴) ۱۰۸

۴۶- در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ داریم: $a_4 + a_8 = 12$ و $a_{10} + a_{12} = 7$، حاصل $a_6 + a_{11}$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۸ ۳) ۹ ۴) ۹/۵

۴۷- در یک دنباله‌ی حسابی $a_1 + a_2 = 5$ و $a_3 + a_4 = 17$، مقدار قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\dfrac{4}{3}$ ۳) $\dfrac{3}{4}$ ۴) ۳

۴۸- در یک دنباله‌ی حسابی $a_2 + a_7 = 14$ و $a_2^2 - a_7^2 = 280$، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۶ ۴) -6

۴۹- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع سه جمله‌ی اول برابر ۱۸ و مجموع جملات هفتم و دهم برابر -11 است. جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\dfrac{101}{13}$ ۳) $\dfrac{103}{13}$ ۴) ۹

فصل اول

الگو و دنباله

پاسخ‌های تشریحی

A **۱- گزینه‌ی (۴)**

تعریف دنباله: به هر تعدادی از اعداد که آن‌ها را پشت سر هم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد می‌گویند. هر عدد دنباله را یک جمله‌ی دنباله می‌نامند[1].

تذکّر: لزومی ندارد که جملات یک دنباله طبق یک الگو یا فرمول خاص ساخته شود.

طبق تعریف هر چهار مورد، یک دنباله را نشان می‌دهند.

A **۲- گزینه‌ی (۳)**

در هر دنباله، جمله‌ی nاُم را با a_n نشان می‌دهیم و آن را «جمله‌ی عمومی دنباله» می‌گوییم.

کافی است با عددگذاری به جای n، چهار جمله‌ی اول دنباله را تعیین کنیم:

$$n=1 \Rightarrow a_1=\frac{2}{2}=1 \quad , \quad n=2 \Rightarrow a_2=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2} \quad , \quad n=4 \Rightarrow a_4=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$$

A **۳- گزینه‌ی (۲)**

برای به‌دست آوردن جمله‌ی شانزدهم کافی‌است در جمله‌ی عمومی به جای n، عدد ۱۶ را قرار دهیم:

$$a_{16}=(-1)^{16}\times\frac{16^2-16}{2^{16}}=\frac{16(16-1)}{2^{16}}=\frac{15}{2^{12}}$$

B **۴- گزینه‌ی (۱)**

با توجه به جمله‌ی عمومی دنباله داریم:

$$\begin{cases} n=2: a_2=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \\ n=3: a_3=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3+2}+\frac{1}{3+3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow a_3-a_2=(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$$

A **۵- گزینه‌ی (۳)**

باید معادله‌ی $a_n=\frac{199}{301}$ را حل کنیم و جواب طبیعی آن‌را (در صورت وجود) به‌دست آوریم:

$$\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{199}{301} \Rightarrow 602n-301=597n+199 \Rightarrow 5n=500 \Rightarrow n=100$$

یعنی جمله‌ی صدم دنباله برابر $\frac{199}{301}$ است.

A **۶- گزینه‌ی (۴)**

باید معادله‌ی $a_n=173$ را حل کنیم و جواب طبیعی آن را (در صورت وجود) به‌دست آوریم:

$$n^2+2n-17=173 \Rightarrow n^2+2n-190=0 \Rightarrow \Delta=4+760=764 \Rightarrow n=\frac{-2\pm\sqrt{764}}{2}$$

هیچ کدام از جواب‌های به‌دست آمده، طبیعی نیست، بنابراین این دنباله جمله‌ای برابر ۱۷۳ ندارد.

---

[1] البته تعریف علمی «دنباله» در ریاضیات، کمی با این تعریف متفاوت است. مثلاً جملات یک دنباله می‌توانند موجودات دیگری (چون مجموعه) باشند. ولی این تعریف، تعریف بیان شده در کتاب درسی است.

۷- گزینه‌ی (۱) B

ابتدا معادله‌ی $a_m = \frac{۷}{۲}$ را حل می‌کنیم تا مقدار m را به‌دست آوریم:

$$\frac{۴m}{m+۱} = \frac{۷}{۲} \Rightarrow ۸m = ۷m + ۷ \Rightarrow m = ۷ \Rightarrow a_{m+۵} = \frac{۴(۱۲)}{۱۲+۱} = \frac{۴۸}{۱۳}$$

۸- گزینه‌ی (۳) A

کافی‌است چند جمله‌ی اول هر دنباله را بنویسیم و آن‌ها را با دنباله‌ی فرض مقایسه کنیم. مثلاً در گزینه‌ی (۱) دنباله‌ی حاصل $\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۱۶},\frac{۱}{۳۲},...$ می‌شود. پاسخ درست گزینه‌ی (۳) است، زیرا چند جمله‌ی ابتدایی دنباله‌ی حاصل عبارت است از:

$$\frac{۱}{۴},\frac{۲}{۴},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۴},\frac{۵}{۴},... \rightarrow \frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴},۱,\frac{۵}{۴},...$$

۹- گزینه‌ی (۴) B

به وضوح، چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی $\{n^۲\}$ همان چهار جمله‌ی فرض سؤال است. البته با کمی دقت و با عددگذاری می‌بینیم که چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی گزینه‌ی (۳) نیز همان اعداد است. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نتیجه: اگر چند جمله‌ی یک دنباله داده شده باشد، نمی‌توانیم به طور قطعی فرمول جمله‌ی عمومی آن را مشخص کنیم. در واقع برای چند عدد، بی‌شمار فرمول برای جمله‌ی عمومی دنباله قابل یافتن است.

۱۰- گزینه‌ی (۴) C

با عددگذاری متوجه می‌شویم که در هر سه گزینه‌ی (۱)، (۲) و (۳) چهار جمله‌ی اول، مطابق اعداد صورت سؤال است، ولی در گزینه‌ی (۴) فقط سه جمله‌ی اول مطابق اعداد صورت سؤال است.

۱۱- گزینه‌ی (۴) D

می‌دانیم $۲۴ = ۱\times۲\times۳\times۴ = ۴!$ و $۶ = ۱\times۲\times۳ = ۳!$ و $۲ = ۱\times۲ = ۲!$ و $۱ = ۱!$، بنابراین مورد (الف) که قطعاً صحیح است، در موارد (ب) و (ج) داریم:

$$\frac{(n+۲)!}{n^۲+۳n+۲} = \frac{(n+۲)(n+۱)n!}{(n+۲)(n+۱)} = n!$$

$$\frac{(n+۳)!}{n^۳+۶n^۲+۱۱n+۶} = \frac{(n+۳)(n+۲)(n+۱)n!}{(n+۳)(n+۲)(n+۱)} = n!$$

در مورد (د) با عددگذاری می‌بینیم که چهار جمله‌ی اول، مطابق با اعداد صورت سؤال است.

۱۲- گزینه‌ی (۴) C

دنباله‌ی گزینه‌ی (۴) پس از ساده شدن، به‌صورت $(n-۱)(n-۲)(n-۳)$ درمی‌آید که سه جمله‌ی اول آن برابر صفر است، بنابراین سه جمله‌ی اول دنباله‌ی $\{n^۳\}$ با سه جمله‌ی اول دنباله‌ی $\{n^۳+(n-۱)(n-۲)(n-۳)\}$ هیچ تفاوتی ندارد.

۱۳- گزینه‌ی (۴) D

دنباله‌های متفاوتی می‌توانیم بنویسیم که چهار جمله‌ی اول آن‌ها همان اعداد صورت سؤال باشند. بنابراین جمله‌ی صدم وضعیت‌های متفاوتی ممکن است داشته باشد. برای مثال چهار جمله‌ی اول سه دنباله‌ی متفاوت زیر با اعداد صورت سؤال یکسان است:

$$a_n = ۳^n \Rightarrow a_{۱۰۰} = ۳^{۱۰۰}$$

$$a_n = ۳^n + (n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴) \Rightarrow a_{۱۰۰} = ۳^{۱۰۰} + ۹۹\times۹۸\times۹۷\times۹۶ \Rightarrow a_{۱۰۰} > ۳^{۱۰۰}$$

$$a_n = ۳^n - (n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴) \Rightarrow a_{۱۰۰} = ۳^{۱۰۰} - ۹۹\times۹۸\times۹۷\times۹۶ \Rightarrow a_{۱۰۰} < ۳^{۱۰۰}$$

۱۴- گزینه‌ی (۲) B

به وضوح داریم:

$$a_{n-۲} = ۲n+۷ = ۲۱ \Rightarrow n = ۷ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} a_{۷-۲} = ۲۱ \Rightarrow a_۵ = ۲۱$$

۱۵- گزینه‌ی (۳) B

برای پیدا کردن مقدار $a_{۴۴}$ ابتدا باید معادله‌ی $n^۲+۴n-۱ = ۴۴$ را حل کنیم تا مقدار طبیعی n را به‌دست آوریم:

$$n^۲+۴n-۴۵ = ۰ \Rightarrow (n+۹)(n-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = -۹ & \text{غ ق ق} \\ n = ۵ & \Rightarrow a_{۴۴} = ۵^۳+۱ = ۱۲۶ \end{cases}$$

B **۱۶- گزینه‌ی (۱)**

جملات این دنباله را می‌نویسیم:

$$\frac{۲}{۱},\frac{۲}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۴},\frac{۲}{۵},\dots$$

واضح است که با بزرگ‌تر شدن n، مخرج کسر $\frac{۲}{n}$ بزرگ‌تر و خود کسر کوچک‌تر می‌شود، پس $a_۱ > a_۲ > a_۳ > \dots$ و بزرگ‌ترین جمله $a_۱$ می‌شود.

B **۱۷- گزینه‌ی (۱)**

جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$-۱,-\frac{۳}{۴},-\frac{۳}{۵},-\frac{۳}{۶},\dots$$

همان‌طور که می‌بینیم کوچک‌ترین جمله‌ی این دنباله برابر -۱ است که مربع آن برابر است با ۱. (در واقع با افزایش n، کسر $\frac{۳}{n+۲}$ کوچک‌تر و در نتیجه $a_n = -\frac{۳}{n+۲}$ بزرگ‌تر می‌شود.)

B **۱۸- گزینه‌ی (۲)**

جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},-\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۷},\dots$$

بین اعداد منفی $\{-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۴},-\frac{۱}{۶},\dots\}$ کوچک‌ترین عدد $-\frac{۱}{۲}$ است و بین اعداد مثبت $\{\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۷},\dots\}$ بزرگ‌ترین عدد $\frac{۱}{۳}$ است.

بنابراین مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جمله‌ی این دنباله برابر است با: $-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=-\frac{۱}{۶}$

B **۱۹- گزینه‌ی (۴)**

در فرمول جمله‌ی عمومی a_n مربع کامل ایجاد می‌کنیم:

$$a_n = n^۲ - ۳۰n + ۲۲۵ - ۲۲۵ - ۱ = (n-۱۵)^۲ - ۲۲۶ \Rightarrow a_n + ۲۲۶ = \underbrace{(n-۱۵)^۲}_{\geq ۰}$$

چون سمت راست تساوی فوق، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، بنابراین سمت چپ نیز باید چنین باشد، یعنی:

$a_n + ۲۲۶ \geq ۰ \Rightarrow a_n \geq -۲۲۶ \Rightarrow$ کم‌ترین مقدار a_n برابر -۲۲۶ است

واضح است که اگر $a_n = -۲۲۶$، آن‌گاه $n = ۱۵$، بنابراین $a_{۱۵}$ کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله است.

B **۲۰- گزینه‌ی (۳)**

در فرمول جمله‌ی عمومی a_n مربع کامل ایجاد می‌کنیم:

$$a_n = -(n^۲ - ۱۰n + ۲۵) + ۲۴ = ۲۴ - (n-۵)^۲ \Rightarrow (n-۵)^۲ = ۲۴ - a_n$$

چون $(n-۵)^۲$ عبارتی نامنفی است، بنابراین $۲۴ - a_n \geq ۰$، در نتیجه $a_n \leq ۲۴$، یعنی بیش‌ترین مقدار جملات a_n، برابر ۲۴ است (که به ازای $n = ۵$ به‌دست می‌آید).

C **۲۱- گزینه‌ی (۴)**

در فرمول جمله‌ی عمومی a_n مربع کامل ایجاد می‌کنیم:

$$a_n = n^۲ - ۱۷n + \frac{۲۸۹}{۴} - \frac{۲۸۹}{۴} = (n - \frac{۱۷}{۲})^۲ - \frac{۲۸۹}{۴} \xrightarrow{u^۲ \geq ۰} a_n \geq -\frac{۲۸۹}{۴}$$

ظاهراً کم‌ترین مقدار a_n، $-\frac{۲۸۹}{۴}$ است، ولی این مقدار به ازای $n = \frac{۱۷}{۲}$ به‌دست می‌آید که چون در دنباله‌ها n عددی طبیعی است، این مقدار برای n، غیر قابل قبول است. پس باید مقادیری از n را امتحان کنیم که در اطراف $\frac{۱۷}{۲} = ۸/۵$ هستند:

$n = ۸ \Rightarrow a_۸ = -۷۲$

$n = ۹ \Rightarrow a_۹ = -۷۲$

۲۲- گزینه‌ی (۱) A

به وضوح داریم:

$$\begin{cases} n=۱: a_۲ = ۲a_۱ + ۵ = ۲(۲) + ۵ = ۹ \\ n=۲: a_۳ = ۲a_۲ + ۵ = ۲(۹) + ۵ = ۲۳ \\ n=۳: a_۴ = ۲a_۳ + ۵ = ۲(۲۳) + ۵ = ۵۱ \end{cases}$$

۲۳- گزینه‌ی (۲) B

به وضوح داریم:

$$\begin{cases} n=۱: a_۳ = a_۲ + a_۱ = ۱+۱ = ۲ \\ n=۲: a_۴ = a_۳ + a_۲ = ۲+۱ = ۳ \\ n=۳: a_۵ = a_۴ + a_۳ = ۳+۲ = ۵ \\ n=۴: a_۶ = a_۵ + a_۴ = ۵+۳ = ۸ \end{cases}$$

۲۴- گزینه‌ی (۲) C

به وضوح داریم:

$$\begin{cases} n=۱: a_۲ = ۲(۱) + a_۱ \\ n=۲: a_۳ = ۲(۲) + a_۲ \\ n=۳: a_۴ = ۲(۳) + a_۳ \\ \vdots \\ n=۹۹: a_{۱۰۰} = ۲(۹۹) + a_{۹۹} \end{cases}$$

اگر طرفین تساوی‌های فوق را با هم جمع کنیم، داریم:

$$a_۲ + a_۳ + a_۴ + ... + a_{۱۰۰} = ۲(۱+۲+۳+...+۹۹) + a_۱ + a_۲ + a_۳ + ... + a_{۹۹} \Rightarrow a_{۱۰۰} = ۲(\frac{۹۹ \times ۱۰۰}{۲}) + a_۱$$

$$\Rightarrow a_{۱۰۰} = ۹۹ \times ۱۰۰ + ۱ = ۹۹۰۱$$

نکته: حاصل‌جمع اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ... ، k از فرمول روبه‌رو به‌دست می‌آید: $۱+۲+۳+...+k = \frac{k(k+۱)}{۲}$

۲۵- گزینه‌ی (۲) A

به وضوح داریم:

$$\begin{cases} n=۳: a_۵ = ۳a_۴ + ۵ = ۳(۷) + ۵ = ۲۶ \\ n=۴: a_۶ = ۳a_۵ + ۵ = ۳(۲۶) + ۵ = ۸۳ \\ n=۵: a_۷ = ۳a_۶ + ۵ = ۳(۸۳) + ۵ = ۲۵۴ \end{cases}$$

۲۶- گزینه‌ی (۳) B

در این دنباله برای محاسبه‌ی مقادیر $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ باید از رابطه‌ی $a_n = n^۲ - ۸$ استفاده نماییم:

$$\begin{cases} a_۱ = ۱^۲ - ۸ = -۷ \\ a_۲ = ۲^۲ - ۸ = -۴ \\ a_۳ = ۳^۲ - ۸ = ۱ \end{cases}$$

و برای محاسبه‌ی مقادیر $a_۴$، $a_۵$، $a_۶$ و ... ، باید از رابطه‌ی $a_n = a_{n-۱}$ استفاده نماییم:

$$\begin{cases} a_۴ = a_۳ = ۱ \\ a_۵ = a_۴ = ۱ \Rightarrow a_۴ = a_۵ = a_۶ = ... = a_{۵۰} = ... = ۱ \\ \vdots \end{cases}$$

۲۷- گزینه‌ی (۲) B

با عدد گذاری در جمله‌ی عمومی دنباله داریم:

$$\begin{cases} n=۱: a_۲ = -a_۱ = -۲۰۱۱ \\ n=۲: a_۳ = a_۲ = -۲۰۱۱ \\ n=۳: a_۴ = -a_۳ = +۲۰۱۱ \end{cases}$$

به همین ترتیب مجموع بیست و یک جمله‌ی اول دنباله به‌صورت زیر است:

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + ... + a_{۲۱} = ۲۰۱۱ - ۲۰۱۱ - ۲۰۱۱ + ۲۰۱۱ + ۲۰۱۱ - ۲۰۱۱ - ۲۰۱۱ + ... + ۲۰۱۱ + ۲۰۱۱ = ۲۰۱۱$$

C **۲۸- گزینه‌ی (۳)**

ابتدا دنباله‌ی a_n را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$a_n = \frac{(n^2+4n+3)+12}{n+3} = \frac{(n+1)(n+3)+12}{n+3} = n+1+\frac{12}{n+3}$$

به وضوح برای طبیعی بودن جملات دنباله‌ی a_n، باید ۱۲ بر $n+3$ بخش‌پذیر باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} n+3=4 \Rightarrow n=1 \\ n+3=6 \Rightarrow n=3 \\ n+3=12 \Rightarrow n=9 \end{cases}$$

دقت کنیم که اگر $n+3=1$ یا $n+3=2$ یا $n+3=3$ معادله جواب طبیعی ندارد.

C **۲۹- گزینه‌ی (۱)**

ابتدا دنباله‌ی a_n را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$a_n = \frac{3(n^2+n+1)+31}{n^2+n+1} = 3+\frac{31}{n^2+n+1}$$

به وضوح برای طبیعی بودن جملات دنباله‌ی a_n، باید ۳۱ بر n^2+n+1 بخش‌پذیر باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} n^2+n+1=1 \Rightarrow \text{جواب طبیعی ندارد.} \\ n^2+n+1=31 \Rightarrow n^2+n-30=0 \Rightarrow (n+6)(n-5)=0 \Rightarrow n=5 \quad , \quad n=-6 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

A **۳۰- گزینه‌ی (۴)**

اگر تعداد مربع‌ها در شکل مرحله‌ی nاُم را a_n بنامیم داریم:

$$a_1 = 1 = 1^2 \quad , \quad a_2 = 4 = 2^2 \quad , \quad a_3 = 9 = 3^2$$

با ادامه‌ی روند بالا نتیجه می‌گیریم $a_n = n^2$، بنابراین $a_{100} = 100^2 = 10000$.

B **۳۱- گزینه‌ی (۲)**

تعداد چوب کبریت‌ها را در هر مرحله می‌نویسیم، تا نظم موجود را پیدا کنیم:

تعداد چوب کبریت‌ها در شکل (۱) $= 4 = (3\times 1)+1$

تعداد چوب کبریت‌ها در شکل (۲) $= 4+3 = 7 = (3\times 2)+1$

تعداد چوب کبریت‌ها در شکل (۳) $= 7+3 = 10 = (3\times 3)+1$

بنابراین، تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله‌ی nاُم برابر $3n+1$ است.

A **۳۲- گزینه‌ی (۱)**

همان‌طور که می‌بینیم در شکل (۱)، ۴ چوب کبریت، در شکل (۲)، ۸ چوب کبریت (یعنی 2×4 چوب کبریت) و در شکل (۳)، ۱۲ چوب کبریت (یعنی 3×4 چوب کبریت) استفاده شده است. بنابراین در شکل ۳۰اُم، $30\times 4 = 120$ چوب کبریت داریم.

B **۳۳- گزینه‌ی (۳)**

تعداد چوب کبریت‌ها را در هر مرحله می‌نویسیم:

تعداد چوب کبریت‌های شکل (۱) $= 3 = (2\times 1)+1$

تعداد چوب کبریت‌های شکل (۲) $= 3+2 = 5 = (2\times 2)+1$

تعداد چوب کبریت‌های شکل (۳) $= 5+2 = 7 = (2\times 3)+1$

بنابراین تعداد چوب کبریت‌های شکل ۲۰۰اُم برابر است با $(200\times 2)+1$ که می‌شود ۴۰۱ عدد.

C **۳۴- گزینه‌ی (۲)**

با توجه به شکل‌ها داریم:

تعداد چوب کبریت‌های شکل (۱) $= 1+3 = 1+3\times 1$

تعداد چوب کبریت‌های شکل (۲) $= 1+3+6 = 1+3(1+2)$

تعداد چوب کبریت‌های شکل (۳) $= 1+3+6+9 = 1+3(1+2+3)$

بنابراین تعداد چوب کبریت‌ها در شکل ۲۰اُم برابر است با $1+3(1+2+3+\dots+20)$ که برابر است با: $1+3(\frac{20\times 21}{2}) = 631$

یادآوری: مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n از فرمول روبه‌رو به‌دست می‌آید: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

B **۳۵- گزینه‌ی (۱)**

پس از هر بار تا زدن، تعداد مستطیل‌های ایجاد شده ۲ برابر می‌شود:

تعداد مستطیل‌های تولید شده پس از ۱ بار تا زدن $= ۲$

تعداد مستطیل‌های تولید شده پس از ۲ بار تا زدن $= ۲ \times ۲ = ۲^۲ = ۴$

تعداد مستطیل‌های تولید شده پس از ۳ بار تا زدن $= ۴ \times ۲ = ۲^۳ = ۸$

بنابراین تعداد مستطیل‌های تولید شده پس از ۷ بار تا زدن برابر است با $۲^۷ = ۱۲۸$.

C **۳۶- گزینه‌ی (۲)**

عدد ۱- اگر به توان عدد زوج برسد، حاصل برابر ۱ خواهد شد و اگر به توان عدد فرد برسد، حاصل برابر ۱- خواهد شد. بنابراین:

$$\begin{cases} (-۱)^{۴n+۱} = (-۱)^{۴n+۳} = -۱ \\ (-۱)^{۴n} = (-۱)^{۴n+۲} = ۱ \end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{-۱+۱-۱}{۱} = -۱ \Rightarrow S_{۱۰۰} = \underbrace{-۱-۱-۱-\dots-۱}_{\text{۱۰۰ تا}} = -۱۰۰$$

D **۳۷- گزینه‌ی (۳)**

می‌دانیم ضرب دو عدد صحیح متوالی حتماً زوج است (چرا؟) بنابراین اعداد $n^۲ - n = n(n-۱)$ و $n^۲ + n = n(n+۱)$ اعدادی زوج هستند.

بنابراین: $(-۱)^{n^۲-n} = (-۱)^{n^۲+n} = ۱$

از طرفی می‌دانیم به ازای هر n طبیعی $(-۱)^n + (-۱)^{n+۱} = ۰$. بنابراین دنباله‌ی a_n به‌صورت مقابل ساده می‌شود: $a_n = \frac{۲+۳}{۱} = ۵$

یعنی دنباله‌ی a_n دنباله‌ی ثابت $\{۵\}$ است، بنابراین مجموع پنجاه جمله‌ی اول این دنباله برابر است با: $۵۰ \times ۵ = ۲۵۰$

A **۳۸- گزینه‌ی (۲)**

دنباله‌ی حسابی (عددی): به دنباله‌ای گوییم که هر جمله‌ی آن از اضافه کردن مقداری ثابت به نام قدرنسبت، به جمله‌ی قبل به‌دست می‌آید. قدرنسبت را با d نمایش می‌دهیم. به زبان ریاضی برای هر $n > ۱$ داریم: $a_n = a_{n-۱} + d$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ به‌دست می‌آید.

تذکّر: گاهی دنباله‌ی حسابی را «دنباله عددی» نیز می‌گویند.

از فرض‌ها نتیجه می‌گیریم $a_۱ = ۳$ و $d = ۷$. حال طبق فرمول جمله‌ی عمومی دنباله داریم:

$$a_{۵۱} = a_۱ + (۵۱-۱)d \xrightarrow[d=۷]{a_۱=۳} a_{۵۱} = ۳ + (۵۰ \times ۷) = ۳۵۳$$

A **۳۹- گزینه‌ی (۴)**

طبق فرمول جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی، داریم:

$$a_{۱۷} = a_۱ + ۱۶d \xrightarrow[d=۱۰]{a_{۱۷}=۱۵۷} a_۱ + ۱۶۰ = ۱۵۷ \Rightarrow a_۱ = -۳$$

B **۴۰- گزینه‌ی (۳)**

برای حل این مسأله نیازی به محاسبه‌ی x و y نداریم. با توجه به اعداد داده شده داریم:

$$a_۱ = ۳۵$$

$$a_۳ = ۱۲۵ \Rightarrow a_۱ + ۲d = ۱۲۵ \xrightarrow{a_۱=۳۵} ۳۵ + ۲d = ۱۲۵ \Rightarrow d = ۴۵$$

بنابراین جمله‌ی دوازدهم این دنباله‌ی حسابی برابر است با:

$$a_{۱۲} = a_۱ + ۱۱d = ۳۵ + ۱۱ \times ۴۵ = ۵۳۰$$

B **۴۱- گزینه‌ی (۳)**

واضح است که در این دنباله‌ی حسابی $a_۱ = x - ۶$، $a_n = ۳۹۴ + x$ و $d = ۴$، حال داریم:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } a_۱ \text{، } a_n \text{ و } d} ۳۹۴ + x = x - ۶ + (n-۱)(۴) \Rightarrow ۴۰۰ = (n-۱)(۴) \Rightarrow n - ۱ = ۱۰۰ \Rightarrow n = ۱۰۱$$

A **۴۲- گزینه‌ی (۱)**

می‌دانیم در یک دنباله‌ی حسابی اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی برابر قدرنسبت (d) است، یعنی:

$$a_۲ - a_۱ = a_۳ - a_۲ = \dots = a_n - a_{n-۱} = d \Rightarrow a_{n-۱} - a_n = -d$$