۳۱- معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی $y'-\frac{۴x}{e^x+۱}y\sqrt[۳]{y}+۲y=۰$ با کدام تغییر متغیر زیر به معادلهٔ دیفرانسیل خطی تبدیل می‌شود؟

۱) $u=y^{-\frac{۱}{۳}}$
۲) $u=y^{-\frac{۴}{۳}}$
۳) $u=y^{\frac{۱}{۳}}$
۴) $u=y^{\frac{۴}{۳}}$

۳۲- مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $\cosh y=\alpha x$ ($\alpha$ پارامتر) کدام است؟

۱) $x^۲+\ln(\cosh y)=c$
۲) $x^۲+\ln(\sinh y)=c$
۳) $x^۲-۲\ln(\cosh y)=c$
۴) $x^۲+۲\ln(\sinh y)=c$

۳۳- هرگاه $y=x$ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل $(۱+x^۲)y''-۳x^۲y'+۳xy=۰$ باشد، آنگاه جواب مستقل خطی دیگر، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{x}-x^۲$
۲) $\frac{۲}{x}+x^۲$
۳) $۲+x^۲$
۴) $۲-x^۲$

۳۴- یک جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل $y'''+۲y''+y'-۲y=e^x+\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}e^x-\frac{۱}{۴}\sin x$
۲) $\frac{۱}{۲}e^x-\frac{۱}{۴}\cos x$
۳) $\frac{۱}{۲}e^x-\frac{۱}{۴}(\cos x+\sin x)$
۴) $\frac{۱}{۲}e^x+\frac{۱}{۴}(\cos x+\sin x)$

۳۵- ضریب $(x-۱)^۲$ در بسط تیلور جواب معادلهٔ دیفرانسیل $xy'+\ln y+\frac{۱}{y}=۰$ با شرط $y(۱)=۱$ ، حول نقطهٔ $x=۱$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

Scanned by CamScanner

۳۶- اگر در تابع بسل نوع اول تساوی $\frac{d(x^{\alpha}J_{\alpha}(x))}{dx} = x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x)$ برقرار باشد، آنگاه $\frac{d(J_{\alpha}(x))}{dx}$ کدام است؟

۱) $J_{\alpha}(x) - \frac{\alpha}{2}J_{\alpha-1}(x)$ ۲) $J_{\alpha}(x) + \frac{\alpha}{2}J_{\alpha-1}(x)$

۳) $J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(x)$ ۴) $J_{\alpha-1}(x) + \frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(x)$

۳۷- اگر $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)d\theta = J_{0}(x)$ باشد، در آن صورت $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\sin\theta)\sin\theta d\theta$ کدام است؟ ($J_k(x)$ تابع بسل از مرتبهٔ k است)

۱) $-\frac{1}{x}J_{1}(x)$ ۲) $-J_{1}(x)$ ۳) $J_{1}(x)$ ۴) $\frac{1}{x}J_{1}(x)$

۳۸- اگر $y(t)$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل $t\frac{d^2y}{dt^2} + (1-t)\frac{dy}{dt} + ny = 0$ باشد، کدام مورد زیر می‌تواند تبدیل لاپلاس $y(t)$ باشد؟

۱) $\frac{s^n}{(s-1)^{n+1}}$ ۲) $\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}$

۳) $\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$ ۴) $\frac{(s+1)^n}{s^{n+1}}$

۳۹- جواب معادله انتگرال $y(t) + \int_{0}^{t} y(t-\tau)\cos\tau d\tau = \sin t$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

۳) $e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$ ۴) $e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$

۴۰- تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\sqrt[3]{(2s+1)^5}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}e^{-\frac{1}{2}t}\sqrt[3]{t^2}$ ۲) $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}e^{\frac{1}{2}t}\sqrt[3]{t^2}$

۳) $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}te^{-2t}\sqrt[3]{t^2}$ ۴) $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}te^{2t}\sqrt[3]{t^2}$

Scanned by CamScanner

31) $y' - \frac{4x}{e^x+1} y^3\sqrt{y} + 2y = 0 \longrightarrow y' + 2y = \frac{4x}{e^x+1} \; y^3\sqrt{y}$ معادله برنولی

$\div y^3\sqrt{y}$ مزدم

$\frac{y'}{y^3\sqrt{y}} + \frac{2}{\sqrt[3]{y}} = \frac{4x}{e^x+1}$ تغییر متغیر $\left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = u \right.$ $\longrightarrow \boxed{u = y^{-\frac{1}{3}}}$ (گزینه 1)

---

32) $\text{Cosh}y = \alpha x \xrightarrow{\text{مشتق}} \text{Sinh}y \cdot y' = \alpha \longrightarrow \text{Cosh}y = \text{Sinh}y \cdot y' \cdot x$

$y' \to \frac{-1}{y'}$ سریع‌تر $\text{Cosh}y = \text{Sinh}y \cdot \frac{-1}{y'} \cdot x \longrightarrow y' \cdot \text{Cth}y = -x$

$\longrightarrow \text{Cth}y \cdot dy = -x\,dx \xrightarrow{\int}$ تفکیک پذیر $\text{Ln}(\text{Sinh}y) = -\frac{x^2}{2} + c$

$\times 2 \longrightarrow x^2 + 2\text{Ln}(\text{Sinh}y) = 2c$ هربار ضرب میکنم ثابت میشه

$\longrightarrow \boxed{x^2 + 2\text{Ln}(\text{Sinh}y) = c}$ (گزینه 4)

ابراهیم شاه ابراهیمی
دانشجوی ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

math-teacher.blog.ir

---

33) حل: $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dx}}{y_1^2} \longrightarrow \left(\frac{y_2}{x}\right)' = \frac{e^{-\int \frac{-3x^2}{1+x^3}}}{x^2} = \frac{e^{\text{Ln}(1+x^3)}}{x^2}$

$\underbrace{(1+x^3)}_{a} y'' \underbrace{- 3x^2}_{b} y' + 3xy = 0$

$\left(\frac{y_2}{x}\right)' = \frac{1+x^3}{x^2} = \frac{1}{x^2} + x$

$\int \longrightarrow \frac{y_2}{x} = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} \longrightarrow \boxed{y_2 = -1 + \frac{x^3}{2}}$

با توجه به گزینه‌ها پاسخ گزینه «4» است.

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \longrightarrow y = c_1 x + c_2\left(-1 + \frac{x^3}{2}\right)$

هر ضریبی می‌تواند باشد.

math-teacher.blog.ir
پاسخ تشریحی ریاضیات کنکور ارشد

Scanned by CamScanner

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - معادلات دیفرانسیل

(مهندسی هوافضا 96) (دفترچه A - 251)

34) $y''' + 2y'' + y' - 2y = e^x + \cos x$

روش اپراتور $\rightarrow D^3y + 2D^2y + Dy - 2y = e^x + \cos x$

$\rightarrow y(D^3 + 2D^2 + D - 2) = e^x + \cos x \rightarrow y = \underbrace{\frac{e^x}{D^3 + 2D^2 + D - 2}}_{(I)} + \underbrace{\frac{\cos x}{D^3 + 2D^2 + D - 2}}_{(II)}$

$\xrightarrow[D=1]{(I)} y = \frac{e^x}{(1)^3 + 2(1)^2 + (1) - 2} \rightarrow y = \frac{1}{2}e^x$

$\xrightarrow[D^2=-1]{(II)} y = \frac{\cos x}{(-1)D + 2(-1) + D - 2} \rightarrow y = -\frac{1}{4}\cos x$

$\rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}\cos x}$ (گزینه ۲)

ابراهیم شاه‌ابراهیمی
math-teacher.blog.ir

35) $xy' + \ln y + \frac{1}{y} = 0 \quad y(1) = 1$

فرمول تیلور $\rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x - x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

$\xrightarrow[y=1]{x=1} y' + \ln(1) + \frac{1}{(1)} = 0 \rightarrow \boxed{y'(1) = -1}$

مشتق از معادله $\rightarrow y' + xy'' + \frac{y'}{y} - \frac{y'}{y^2} = 0 \xrightarrow[y'=-1]{x=1,\ y=1} -1 + y'' + \frac{-1}{1} - \frac{-1}{1} = 0 \rightarrow \boxed{y'' = 1}$

فرمول تیلور $\xrightarrow{n=2} y = \frac{f''(x-1)}{2!}(x-1)^2 \rightarrow y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ (گزینه ۴)

سنجش جواب رو گزینه 2 زده

math-teacher.blog.ir

پاسخ تشریحی ریاضیات کنکور ارشد - کلیه رشته‌ها

ابراهیم شاه‌ابراهیمی
دانش‌آموخته ارشد عمران از دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

Scanned by CamScanner

38) $t\frac{d^2y}{dt^2} + (1-t)\frac{dy}{dt} + ny = 0$ $\xrightarrow[n=-1]{n \text{ دلخواه}}$ $ty'' + (1-t)y' - y = 0$

معادله غیرکوشی اویلر حل ← مجموع ضرایب $= -1 - t + 1 = 0$

$y = e^x$ یک جواب است $\longrightarrow \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^x) = \frac{1}{s-1}$

اگر $n=-1$ را در گزینه‌ها جایگذاری کنیم به گزینه (۳) می‌رسیم که پاسخ صحیح است.

---

39) $y(t) + \int_0^t y(t-\tau)\sin\tau\, d\tau = \sin t$

$\xrightarrow{\text{لاپلاس‌گیری}}$ $\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}\left(\int_0^t y(t-\tau)\sin\tau\, d\tau\right) = \mathcal{L}(\sin t)$

$\longrightarrow F(s) + F(s)\cdot\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow F(s)\left(1 + \frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1}$

$\longrightarrow F(s)\left(\frac{s^2+s+1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}}$ $\boxed{y = e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)}$ (گزینه ۱)

ابراهیم شاه‌ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
پاسخ تشریحی ریاضیات کنکور ارشد
(کلیه رشته‌ها)
math-teacher.blog.ir

---

40) $\frac{\Gamma(5/3)}{\sqrt[3]{(2s+1)^5}} = \frac{\Gamma(5/3)}{(2(s+\frac{1}{2}))^{5/3}} = \frac{\Gamma(5/3)}{2^{5/3}\cdot(s+\frac{1}{2})^{5/3}}$ $\xrightarrow{\text{تکمیل}}$ $-\frac{1}{2}$ واحد انتقال داریم

طبق فرمول $\frac{n!}{s^{n+1}}$ واضح $n+1 = 5/3 \longrightarrow n = 2/3$

$\mathcal{L}(t^{2/3}) = \frac{\frac{2}{3}!}{s^{5/3}} = \frac{\Gamma(5/3)}{s^{5/3}}$ $\longrightarrow$ جواب $= \boxed{e^{-\frac{1}{2}t}\cdot t^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}\cdot 2}$ (گزینه ۱)

Scanned by CamScanner