پاسخنامه تشریحی - پایان ترم ریاضی ۱   دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دی ۹۷

1) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}$ $\quad x \in [2,3]$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx$$ فرمول طول قوس :

$$y' = x - \frac{1}{4x} \longrightarrow y'^2 = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} \longrightarrow y'^2+1 = x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}$$
$$= \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2$$

$$\longrightarrow l = \int_2^3 \sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\, dx$$
$$= \int_2^3 \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln x\right)\Big|_2^3 =$$
$$= \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{4}\ln 3\right) - \left(\frac{4}{2} + \frac{1}{4}\ln 2\right) = \boxed{\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۷

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی : ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی

۲) $\int \ln(x^2-x+2)\,dx$

جزء به جزء $\xrightarrow{\quad}$ $\begin{cases} \ln(x^2-x+2)=u \to \dfrac{2x-1}{x^2-x+2}\,dx = du \\ dx = dv \to x = v \end{cases}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ $\xrightarrow{\quad}$ $x\ln(x^2-x+2) - \underbrace{\int \frac{2x^2-x}{x^2-x+2}\,dx}_{I}$ $(*)$

$I \overset{\text{تقسیم دیفرانسیل}}{=} \int \left(2 + \frac{x-4}{x^2-x+2}\right) dx$

$$= 2x + \underbrace{\int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{7}{2}}{x^2-x+2}\,dx}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+2}\,dx}_{\frac{1}{2}\ln(x^2-x+2)} - \underbrace{\frac{7}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}}_{-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)\right)}$$

$$\xrightarrow{*} = x\ln(x^2-x+2) - 2x - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+2) + \sqrt{7}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) + c$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۷

math-teacher.blog.ir

۳) $\int \frac{\sin x}{3\sin x + 2\cos x}\,dx$ «حل با ۳ روش»

روش اول: طبق درسنامه ⟵ ایجاد خود مخرج و مشتق مخرج در صورت
(راحت‌ترین روش)

$$= \int \frac{A(3\sin x + 2\cos x) + B(3\cos x - 2\sin x)}{3\sin x + 2\cos x}\,dx$$

$$= A\int \cancel{\frac{3\sin x + 2\cos x}{3\sin x + 2\cos x}}^{\,1}\,dx + B\int \frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x}\,dx$$

$$= \boxed{Ax + B\ln|3\sin x + 2\cos x|}$$

یافتن A و B ⟵ $3A - 2B = 1 \quad , \quad 2A + 3B = 0 \longrightarrow \boxed{A = \frac{3}{13} \quad , \quad B = -\frac{2}{13}}$

روش دوم: صورت و مخرج را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم

$$= \int \frac{\tan x}{3\tan x + 2}\,dx$$

تغییر متغیر ⟵ $\begin{cases} \tan x = u \\ (1+\tan^2 x)\,dx = du \longrightarrow dx = \frac{du}{1+u^2} \end{cases}$

$$= \int \frac{u}{(3u+2)}\,\frac{du}{(1+u^2)} \longrightarrow \text{حل با تجزیه کسری}$$

روش سوم: تغییر متغیر $\tan\frac{x}{2} = t$

$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= -2\int \frac{t\,dt}{(t^2-3t+1)(t^2+1)} \longrightarrow \text{حل با تجزیه کسری}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی ۹۷ دی

۴) $\frac{1}{n^2}\lim_{n\to\infty}\left(e^{-\frac{1}{n}}+2e^{-\frac{2}{n}}+\cdots+ne^{-\frac{n}{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}+\frac{2}{n}e^{-\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{n}{n}e^{-\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\frac{i}{n}e^{-\frac{i}{n}}=\int_0^1 xe^{-x}\,dx$$ انتگرال جزء به جزء

$x \xrightarrow{+} e^{-x}$

$1 \xrightarrow{-} -e^{-x}$

$0 \quad e^{-x}$

روش سریع $= -xe^{-x}-e^{-x}\Big|_0^1=(-e^{-1}-e^{-1})-(0-1)$

$$=\boxed{-\frac{2}{e}+1}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۷

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی : ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی
math-teacher.blog.ir

۵) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x}\left(e-(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)dt}{x}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{HoP}\lim_{x\to 0}\frac{2\left(e-\overbrace{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}^{\mathrm{I}}\right)-\left(e-\overbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}^{\mathrm{II}}\right)}{1}=\frac{0}{1}=\boxed{0}$$

$\boxed{\mathrm{I}}$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}\ \text{مبهم}$$

$$A=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\xrightarrow{\text{Ln گیری}}\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln(1+2x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\xrightarrow{HoP}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{2}$$

$$\rightarrow \ln A=1\rightarrow\boxed{A=e}$$

$\boxed{\mathrm{II}}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}\ \text{مبهم}$$

$$B=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\xrightarrow{\text{Ln گیری}}\ln B=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow{HoP}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

$$\ln B=1\rightarrow\boxed{B=e}$$

ابراهیم شاه‌آبادی - دی ۹۷

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n \ln n}$

$\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-4)^{\cancel{n}+1}}{\cancel{(n+1)\ln(n+1)}}}{\frac{\cancel{(x-4)^n}}{\cancel{n \ln n}}} \right| = |x-4|$

$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} |x-4|<1 \to -1<x-4<1 \to \boxed{3<x<5}$

حالا باید نقاط $x=3$ و $x=5$ را هم بررسی کنیم.

$\xrightarrow{x=3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \xrightarrow{\text{آزمون سری متناوب}} a_n = \frac{1}{n \ln n} \begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \checkmark \\ a_n \text{ نزولی} \checkmark \end{cases} \to$ همگرا

$\xrightarrow{x=5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \begin{cases} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{cases}$

$= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{\ln 2}^{\infty} =$ واگرا

بنابراین بازه همگرایی $\boxed{3 \leqslant x < 5}$ است و شعاع همگرایی $R=1$ است.

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - دی ۹۷

math-teacher.blog.ir

۷) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,\ln(x+2)}$$

جزء به جزء $\rightarrow$
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x+2)} = u \rightarrow \dfrac{-dx}{(x+2)\ln^2(x+2)} = du \\[2ex] \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = dv \rightarrow 2\sqrt{x} = v \end{cases}$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{2\sqrt{x}}{\ln(x+2)}\Bigg|_0^1}_{\left(\frac{2}{\ln 3} - ۰\right)} + 2\underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(x+2)\ln^2(x+2)}\,dx}_{\text{ناسره نیست}}$$

با توجه به اینکه خروجی هردو عبارت عدد است بنابراین انتگرال همگراست.

ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۷

math-teacher.blog.ir

۸) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n/2} \cdot n!}{n^n}$

روش اول :

$\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{e^{\frac{n+1}{2}}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{e^{n/2}\cdot n!}{n^n}}\right|$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{e^{n/2}}\cdot e^{1/2}\cdot\cancel{(n+1)n!}\cdot n^n}{\cancel{e^{n/2}}\cdot\cancel{n!}\cdot\cancel{(n+1)}(n+1)^n}\right| = e^{-1/2} < 1 \rightarrow$ همگرا

$\dfrac{n^n}{(n+1)^n} \rightarrow e^{-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1^{\infty}$ مبهم $\rightarrow A = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow{\text{شبیه سوال ۵}}$

$\xrightarrow{\text{از Ln}} \operatorname{Ln} A = \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{Ln}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Ln}(n)-\operatorname{Ln}(n+1)}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0}$ مبهم

$\xrightarrow{HOP} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\cancel{-\frac{1}{n^2}}} = -1 \rightarrow \operatorname{Ln} A = -1 \rightarrow \boxed{A = e^{-1}}$

روش دوم :

$\xrightarrow{\text{آزمون ریشه}} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{n/2}\cdot n!}{n^n}}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/2}\cdot\sqrt[n]{n!}}{n} \xrightarrow[\text{فرمول استرلینگ}]{\sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/2}\cdot\cancel{n}/e}{\cancel{n}} = e^{-1/2} < 1$

همگرا

۹۷ (۲) - ابراهیمی (۲)

ابراهیم شاه ابراهیمی

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی : ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی
math-teacher.blog.ir